Journal of the Inst. of Math. Jussieu (2003) **2**(2), 235–333 © Cambridge University Press 235
DOI:10.1017/S1474748003000082 Printed in the United Kingdom

LA FORMULE DE PLANCHEREL POUR LES GROUPES p-ADIQUES D'APRÈS HARISH-CHANDRA

J.-L. WALDSPURGER

Université de Paris 7/CNRS, UFR de Mathématiques, 2 place Jussieu, F. 75 251 Paris Cedex 05, France

(Received 6 January 2002; accepted 25 January 2002)

Résumé Soit G le groupe des points définis sur un corps p-adique d'un groupe réductif connexe. On définit l'espace des fonctions de Schwartz-Harish-Chandra sur G: ce sont des fonctions sur G, à valeurs complexes, qui vérifient des conditions de croissance et de lissité. La formule de Plancherel exprime les valeurs d'une telle fonction f en termes des opérateurs $\pi(f)$, où π parcourt l'ensemble des classes de représentations lisses irréductibles et tempérées de G. On démontre cette formule, ainsi que quelques résultats utiles d'analyse harmonique: l'existence du prolongement rationnel d'un opérateur d'entrelacement, la finitude (si G est semi-simple) de l'ensemble des classes de représentations lisses irréductibles de carré intégrable de G possédant un K-type donné. Tous ces résultats sont dus à Harish-Chandra, qui les a démontrés dans un manuscrit non publié. Le présent article est une rédaction de ce manuscrit.

Mots clefs: représentations des groupes p-adiques; représentation tempérée; représentation de carré intégrable; fonction de Schwartz–Harish-Chandra; formule de Plancherel; opérateur d'entrelacement

AMS 2000 *Mathematics subject classification:* Primary 22E35; 22E50

La formule de Plancherel est un outil essentiel de l'analyse harmonique invariante sur les groupes réductifs réels ou p-adiques. Harish-Chandra lui a consacré plusieurs articles. Il a d'abord traité le cas d'un groupe réel, son dernier article sur la question étant [**HC1**]. Un peu plus tard, il a démontré la formule dans le cas p-adique. Mais il n'a publié qu'un exposé des résultats [**HC2**]. La démonstration complète se trouve dans des notes manuscrites qui ne sont guère publiables en l'état. Il y a quelques années, L. Clozel et l'auteur avaient conçu le projet de publier ces notes. Ce projet ne s'est pas réalisé mais, des travaux préparatoires effectués à cette occasion est resté le texte qui suit. Il s'agit d'une rédaction de la preuve due à Harish-Chandra, fondée sur ce manuscrit impublié.

Décrivons succintement cette formule de Plancherel. Soient F un corps local non archimédien, de corps résiduel fini. Par abus de notations, confondons les groupes algériques connexes définis sur F avec leurs groupes de points sur F. Soit G un groupe réductif connexe défini sur F. Une fonction de Schwartz–Harish-Chandra sur G est une fonction sur ce groupe, à valeurs complexes, qui vérifie certaines conditions de régularité et de croissance. La formule de Plancherel exprime toute telle fonction en termes de ses actions dans les représentations tempérées de G.

Soient P un sous-groupe parabolique de G, M un sous-groupe de Lévi de P. Notons $\operatorname{Im} X(M)$ le groupe des caractères 'non ramifiés' et unitaires de M. Ce groupe agit par torsion dans l'ensemble des représentations irréductibles de carré intégrable de M. Fixons une orbite $\mathcal{O}$ pour cette action. C'est une variété analytique réelle compacte. Pour $\omega \in \mathcal{O}$, on note E_ω, resp. $\check{E}_\omega$, un espace dans lequel se réalise ω, resp. sa contragrédiente. On dispose de représentations de G ou $G \times G$ dans les différents espaces: $\operatorname{Ind}_P^G(E_\omega)$ (la représentation induite), $\operatorname{Ind}_P^G(\check{E}_\omega)$, $L(\omega, P) = \operatorname{Ind}_P^G(E_\omega) \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Ind}_P^G(\check{E}_\omega)$, $\operatorname{End}(\operatorname{Ind}_P^G(E_\omega))$. Quand ω varie dans $\mathcal{O}$, on peut regrouper ces représentations de sorte qu'elles forment des fibrés C^∞ sur $\mathcal{O}$. Soit f une fonction de Schwartz–Harish-Chandra sur G. Définissons $\check{f}$ par $\check{f}(g) = f(g^{-1})$. Pour $\omega \in \mathcal{O}$, $\check{f}$ définit naturellement un endomorphisme de $\operatorname{Ind}_P^G(E_\omega)$. Parce que f est suffisamment régulière, cet endomorphisme appartient à l'image de l'injection naturelle:

$$L(\omega, P) \hookrightarrow \operatorname{End}(\operatorname{Ind}_P^G(E_\omega)).$$

On a ainsi défini un élément de $L(\omega, P)$. On note $\psi_f[\mathcal{O}, P]_\omega$ le produit de cet élément par le degré formel $d(\omega)$. On montre que la fonction $\omega \mapsto \psi_f[\mathcal{O}, P]_\omega$ ainsi définie sur $\mathcal{O}$ est une section C^∞ du fibré $L(\cdot, P)$.

Inversement, soit $\omega \mapsto \psi_\omega$ une section C^∞ de ce fibré. Pour $\omega \in \mathcal{O}$ et $g \in G$, on définit $(E_P^G \psi_\omega)(g) \in \mathbb{C}$ de la façon suivante. Notons π_ω la représentation induite de G dans $\operatorname{Ind}_P^G(E_\omega)$. Ecrivons $\psi_\omega = \sum_i v_i \otimes \check{v}_i$, où les v_i appartiennent à $\operatorname{Ind}_P^G(E_\omega)$ et les $\check{v}_i$ à $\operatorname{Ind}_P^G(\check{E}_\omega)$. On dispose d'un accouplement naturel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre $\operatorname{Ind}_P^G(E_\omega)$ et $\operatorname{Ind}_P^G(\check{E}_\omega)$. On pose:

$$(E_P^G \psi_\omega)(g) = \sum_i \langle \pi_\omega(g) v_i, \check{v}_i \rangle.$$

L'élément g étant fixé, la fonction $\omega \mapsto (E_P^G \psi_\omega)(g)$ est C^∞ sur $\mathcal{O}$. On définit d'autre part la fonction d'Harish-Chandra μ sur $\mathcal{O}$. Pour $\omega \in \mathcal{O}$ assez régulier, on définit les opérateurs d'entrelacement:

$$\begin{aligned} J_{\bar{P}|P}(\omega) &: \operatorname{Ind}_P^G(E_\omega) \to \operatorname{Ind}_{\bar{P}}^G(E_\omega), \\ J_{P|\bar{P}}(\omega) &: \operatorname{Ind}_{\bar{P}}^G(E_\omega) \to \operatorname{Ind}_P^G(E_\omega), \end{aligned}$$

où $\bar{P}$ est le sous-groupe parabolique de G opposé à P. Leur produit est la multiplication par un scalaire $j(\omega)$. Alors $\mu(\omega)$ est le produit de $j(\omega)^{-1}$ par une constante explicite. La fonction μ ainsi définie sur un ouvert de $\mathcal{O}$ se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathcal{O}$. On définit alors une fonction f_ψ sur G par intégration:

$$f_\psi(g) = \int_{\mathcal{O}} \mu(\omega)(E_P^G \psi_\omega)(g)\, \mathrm{d}\omega.$$

On montre que f_ψ est une fonction de Schwartz–Harish-Chandra sur G.

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

La formule de Plancherel affirme que les deux opérations ci-dessus sont inverses l'une de l'autre. Plus précisément, soit f une fonction de Schwartz–Harish-Chandra sur G. Alors:

(i) l'ensemble des couples $(\mathcal{O}, P)$ qui vérifient les conditions ci-dessus et sont tels que $\psi_f[\mathcal{O}, P] \neq 0$ est fini, à conjugaison près;

(ii) on a l'égalité $f = \sum_{(\mathcal{O},P)} c(P) f_{\psi_f[\mathcal{O},P]}$, où $(\mathcal{O}, P)$ parcourt nos couples à conjugaison près, et $c(P)$ est une constante explicite.

Pour obtenir (i), on (c'est-à-dire Harish-Chandra) démontre le résultat suivant, dont l'intérêt propre est évident:

(iii) si H est un sous-groupe ouvert de G, l'ensemble des classes de représentations irréductibles de carré intégrable de G, qui possèdent des invariants non nuls par H, est fini, à multiplication près par les éléments de $\operatorname{Im} X(G)$.

Comme notre texte est postérieur de plus de quinze ans au manuscrit d'Harish-Chandra, nous avions le choix entre respecter scrupuleusement l'original ou y apporter quelques modifications tenant compte de l'évolution du sujet depuis lors. Nous avons choisi cette dernière option. Comme ce choix est discutable et que la façon dont nous avons perçu l'évolution du sujet est assez subjective, tentons d'expliquer les modifications que nous avons apportées.

Il y a quelques changements de notations: nous avons utilisé celles qui nous ont paru les plus usuelles et qui se sont imposées notamment depuis les travaux d'Arthur sur la formule des traces. Nous travaillons sur un corps de base de caractéristique quelconque, la caractéristique positive ne créant guère de perturbation. Nous avons éliminé la notion d'intégrale d'Eisenstein, équivalente à celle, plus populaire, de coefficient d'une représentation induite. Nous avons utilisé les méthodes algébriques introduites par Bernstein. Elles permettent de démontrer plus naturellement que certaines fonctions sont polynomiales ou rationnelles, quand Harish-Chandra prouvait leur holomorphie ou leur méromorphie. A la fin de l'article, nous avons un peu modifié la méthode d'extension à un groupe réductif des résultats obtenus pour les groupes semi-simples, i.e. la façon dont on se débarrasse du centre. En fait, le principal changement concerne les 'termes constants' et les opérateurs d'entrelacement. Harish-Chandra commençait par l'étude des 'termes constants' des coefficients de représentations induites et déduisait de cette étude les propriétés des opérateurs d'entrelacement. Ces derniers nous ayant paru, encore une fois, plus populaires que les 'termes constants', nous avons inversé l'ordre, étudié d'abord ces opérateurs, en particulier leur prolongement rationnel, et nous en avons déduit les propriétés des 'termes constants'. Toutes ces modifications restent toutefois mineures et concernent surtout les préliminaires. La preuve de la formule de Plancherel proprement dite (ci-dessous les paragraphes VI, VII et VIII) n'a pas été transformée et est exactement celle de Harish-Chandra.

Voici une brève description du contenu des différents paragraphes.

Le premier contient les définitions de base et divers préliminaires. On introduit les modules de Jacquet et les représentations induites. La Proposition I.4.1 exprime la valeur 'asymptotique' d'un coefficient d'une représentation admissible. Ce résultat, dû à Casselman, est fondamental pour la suite.

Le deuxième paragraphe est un peu aride. On y introduit la fonction Ξ et on y prouve divers résultats de majoration.

Au paragraphe III, on étudie les représentations de carré intégrable et les représentations tempérées (admissibles). On définit l'espace des fonctions de Schwartz–Harish-Chandra. On esquisse pour les représentations admissibles tempérées une forme rudimentaire de la théorie du centre de Bernstein (Proposition III.7.1).

Le paragraphe IV est consacré aux opérateurs d'entrelacement: définition, démonstration de leur prolongement rationnel, propriétés usuelles. La preuve du prolongement rationnel est inspiré des notes de Casselman [**C**].

Au paragraphe V, on exprime, grâce à la Proposition I.4.1 citée ci-dessus, le 'terme constant faible' d'un coefficient d'une induite d'une représentation tempérée. Le terme constant faible est par définition le terme principal de la valeur asymptotique de ce coefficient. On définit et étudie la fonction μ de Harish-Chandra.

Le paragraphe VI entre dans le vif du sujet. Pour un couple $(\mathcal{O}, P)$ comme précédemment, on définit l'application $\psi \mapsto f_\psi$ et on étudie ses propriétés.

Au paragraphe VII, on définit et étudie l'application inverse $f \mapsto \psi_f[\mathcal{O}, P]$.

La formule de Plancherel, ainsi que le résultat de finitude (iii) ci-dessus, sont enfin démontrés au paragraphe VIII.

Silberger a publié une démonstration complète de cette formule de Plancherel [**Si**]. Nous espérons que notre rédaction ne fera pas double emploi avec cet article et apportera sur certains points un éclairage différent.

I. Définitions de base

I.1.

On note F un corps local non archimédien de corps résiduel fini $\mathbb{F}_q$. On va considérer divers groupes algébriques définis sur F. Pour alléger les notations, on utilisera l'abus de terminologie suivant: une phrase comme 'soit A un tore déployé' signifiera 'soit A le groupe des points sur F d'un tore défini et déployé sur F'. Soit G un groupe linéaire algébrique réductif et connexe. On fixe un sous-tore A_0 de G, déployé et maximal pour cette propriété. On note M_0 son centralisateur dans G. Si P est un sous-groupe parabolique de G, on dit que P est semi-standard si $P \supset A_0$. Dans ce cas, P possède un unique sous-groupe de Lévi M contenant A_0. On dit que M est un sous-groupe de Lévi semi-standard. Pour un tel sous-groupe, on note $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de Lévi M. Usuellement, l'expression '$P = MU$ est un sous-groupe parabolique semi-standard' signifiera que P est un tel sous-groupe, M est son sous-groupe de Lévi semi-standard et U son radical unipotent. On notera de même $\bar{P} = M\bar{U}$ le sous-groupe parabolique de Lévi M opposé à P.

Si H est un groupe algébrique, on note $\mathrm{Rat}(H)$ le groupe des caractères algébriques de H définis sur F. Si V est un espace vectoriel réel, on note V^* son dual et $V_\mathbb{C}$ son complexifié. On pose $a_0 = (\mathrm{Rat}(A_0) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R})^*$. Si M est un sous-groupe de Lévi semi-standard, on

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

note A_M le plus grand tore déployé dans le centre de M et $a_M = (\mathrm{Rat}(A_M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})^*$. On sait que a_M s'identifie à un sous-espace de a_0 et que l'on a une décomposition canonique

$$a_0 = a_M \oplus a^M.$$

Notons $\Sigma(A_M)$ l'ensemble des racines de A_M dans $\mathrm{Lie}(G)$. Alors $\Sigma(A_M)$ s'identifie à un sous-ensemble de a_M^*. A toute racine $\alpha \in \Sigma(A_M)$, on peut associer une co-racine $\check{\alpha} \in a_M$. Si $P \in \mathcal{P}(M)$, on note $\Sigma(P)$ le sous-ensemble des racines de A_M positives relativement à P, $\Sigma_{\mathrm{red}}(P)$ le sous-ensemble des racines réduites et $\Delta(P)$ le sous-ensemble des racines simples. On note ${}^+a_P^{G*}$, resp. ${}^+\bar{a}_P^{G*}$, l'ensemble des $\chi \in a_M^*$ de la forme

$$\chi = \sum_{\alpha \in \Delta(P)} x_\alpha \alpha$$

avec des coefficients $x_\alpha > 0$, resp. $x_\alpha \geqslant 0$.

On fixe un sous-groupe parabolique minimal P_0 de Lévi M_0. On pose $\Delta_0 = \Delta(P_0)$. On dit qu'un sous-groupe parabolique P est standard s'il contient P_0. Si $P = MU$ est standard, on note Δ_0^M l'analogue de Δ_0 quand on remplace G par M dans les définitions. Alors Δ_0^M est une base de a^{M*}. On pose

$$\bar{a}_0^+ = \{H \in a_0;\ \forall \alpha \in \Delta_0,\ \langle \alpha, H \rangle \geqslant 0\}.$$

On note $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ le groupe des homomorphismes continus de G dans $\mathbb{C}^*$. Pour tout $\chi \in \mathrm{Rat}(G)$, on note $|\chi|_F \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ le caractère défini par

$$|\chi|_F(g) = |\chi(g)|_F.$$

On pose

$$G^1 = \bigcap_{\chi \in \mathrm{Rat}(G)} \mathrm{Ker}\, |\chi|_F, \qquad X(G) = \mathrm{Hom}(G/G^1, \mathbb{C}^*).$$

Il y a une surjection

$$a_{G,\mathbb{C}}^* \to X(G) \to 1 \tag{1}$$

qui à $\chi \otimes s$ associe le caractère $g \mapsto |\chi(g)|_F^s$. Le noyau est de la forme $(2\pi \mathrm{i}/\log(q))R$ où R est un certain réseau de $\mathrm{Rat}(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ($\simeq \mathrm{Rat}(A_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subset a_G^*$). Cela définit sur $X(G)$ une structure de variété algébrique complexe pour laquelle $X(G) \simeq \mathbb{C}^{*d}$, où $d = \dim_{\mathbb{R}} a_G$. Pour $\chi \in X(G)$, soit $\lambda \in a_{G,\mathbb{C}}^*$ un élément se projetant sur χ par l'application (1). La partie réelle $\mathrm{Re}(\lambda) \in a_G^*$ est indépendante du choix de λ. Nous la noterons $\mathrm{Re}(\chi)$. Si $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$, le caractère $|\chi|$ appartient à $X(G)$. On pose $\mathrm{Re}(\chi) = \mathrm{Re}(|\chi|)$. De même, si $\chi \in \mathrm{Hom}(A_G, \mathbb{C}^*)$, le caractère $|\chi|$ se prolonge de façon unique en un élément de $X(G)$ à valeurs réelles > 0. On note encore $|\chi|$ cet élément et on pose $\mathrm{Re}(\chi) = \mathrm{Re}(|\chi|)$.

On pose $\mathrm{Im}\, X(G) = \{\chi \in X(G);\ \mathrm{Re}(\chi) = 0\}$. C'est le sous-ensemble des éléments unitaires de $X(G)$. L'application de restriction $\mathrm{Im}\, X(G) \to \mathrm{Im}\, X(A_G)$ est surjective de noyau fini. On munit $\mathrm{Im}\, X(A_G)$ de la mesure de Haar de masse totale 1 et $\mathrm{Im}\, X(G)$ de la mesure pour laquelle l'application précédente préserve localement les mesures.

On définit un homomorphisme $H_G : G \to a_G$ par la relation

$$q^{-\langle\chi, H_G(g)\rangle} = |\chi|_F(g)$$

pour tout $\chi \in \mathrm{Rat}(G)$.

Remarque. On a glissé un signe $-$ dans l'exposant de q. Ce n'est pas la définition la plus usuelle, mais elle est la mieux adaptée au cas des groupes p-adiques.

Le réseau R défini ci-dessus n'est autre que l'annulateur de $H_G(G)$. Les définitions ci-dessus s'appliquent à tout sous-groupe de Lévi M, en remplaçant G par M. On pose plus simplement $H_0 = H_{M_0}$. On définit

$$\bar{M}_0^+ = H_{M_0}^{-1}(\bar{a}_0^+), \qquad \bar{A}_0^+ = \bar{M}_0^+ \cap A_0.$$

On fixe un sous-groupe compact maximal K de G, dont on suppose qu'il est le fixateur d'un point spécial de l'appartement associé à A_0 dans l'immeuble de G. On munit tout sous-groupe algébrique fermé H de G de la mesure invariante par translations à gauche pour laquelle $\mathrm{mes}(H \cap K) = 1$. On en déduit une distribution positive (une 'mesure') sur l'espace des fonctions $f : G \to \mathbb{C}$ localement constantes et à support compact $\mathrm{mod}\, H$, vérifiant $f(hg) = \delta_H(h) f(g)$ pour tous $h \in H$, $g \in G$, où δ_H est le module du groupe H. Pour tout espace topologique Z totalement discontinu, notons $C^\infty(Z)$, resp. $C_c(Z)$, l'espace des fonctions localement constantes, resp. à support compact, de Z dans $\mathbb{C}$. On pose $C_c^\infty(Z) = C^\infty(Z) \cap C_c(Z)$. On supprime les signes ∞, resp. c, si Z est discret, resp. compact. Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G. Alors $G = PK$ et le groupe $M \cap K$ vérifie relativement à M les mêmes propriétés que K relativement à G. Pour tout $g \in G$, on choisit $u_P(g) \in U$, $m_P(g) \in M$ et $k_P(g) \in K$ de sorte que $g = u_P(g) m_P(g) k_P(g)$. Dans le cas $P = P_0$ on notera simplement $u_0(g)$, $m_0(g)$ et $k_0(g)$ ces éléments. Pour $f \in C_c^\infty(G)$, on a les égalités:

$$\left.\begin{aligned} \int_G f(g)\,\mathrm{d}g &= \int_{U \times M \times K} f(umk)\delta_P(m)^{-1}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}u, \\ \int_G f(g)\,\mathrm{d}g &= \gamma(P)^{-1} \int_{U \times M \times \bar{U}} f(um\bar{u})\delta_P(m)^{-1}\,\mathrm{d}\bar{u}\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}u, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

où

$$\gamma(P) = \int_{\bar{U}} \delta_P(m_p(\bar{u}))\,\mathrm{d}\bar{u}.$$

(3) Remarque. $\gamma(P)$ ne dépend que de M.

Preuve. On sait qu'il existe un sous-groupe ouvert compact H de K tel que, pour tout $P = MU$ semi-standard, on ait:

$$H = \Bigl[\prod_{\alpha \in \Sigma_{\mathrm{red}}(P)} (H \cap U_\alpha)\Bigr](H \cap M)\Bigl[\prod_{\alpha \in \Sigma_{\mathrm{red}}(\bar{P})} (H \cap U_\alpha)\Bigr],$$

où U_α est le sous-groupe radiciel associé à α et où les éléments de $\Sigma_{\mathrm{red}}(P)$, resp. $\Sigma_{\mathrm{red}}(\bar{P})$, sont pris dans un ordre fixé quelconque. Appliquons l'égalité (2) à la fonction caractéristique de H. On obtient

$$\mathrm{mes}(H) = \gamma(P)^{-1}\,\mathrm{mes}(U\cap H)\,\mathrm{mes}(M\cap H)\,\mathrm{mes}(\bar{U}\cap H).$$

On a $\mathrm{mes}(U\cap H) = [U\cap K : U\cap H]^{-1}$. En utilisant l'unipotence du groupe U, on vérifie que $[U\cap K : U\cap H] = \prod_{\alpha\in\Sigma_{\mathrm{red}}(P)}[U_\alpha\cap K : U_\alpha\cap H]$. Idem pour $\bar{U}$. D'où l'égalité

$$\gamma(P) = \mathrm{mes}(H)^{-1}\,\mathrm{mes}(M\cap H)\prod_{\alpha\in\Sigma_{\mathrm{red}}(P)\cup\Sigma_{\mathrm{red}}(\bar{P})}[U_\alpha\cap K : U_\alpha\cap H]^{-1}.$$

Cette expression ne dépend que de M. □

On note désormais $\gamma(G|M)$ le terme $\gamma(P)$. Pour $\alpha\in\Sigma_{\mathrm{red}}(P)$, notons A_α la composante neutre du noyau de α dans A_M et M_α le centralisateur de A_α dans G. C'est un sous-groupe de Lévi semi-standard. On pose

$$c(G|M) = \gamma(G|M)^{-1}\prod_{\alpha\in\Sigma_{\mathrm{red}}(P)}\gamma(M_\alpha|M).$$

Rappelons que le groupe M_0^1 est compact et que l'on a la décomposition en union disjointe

$$G = \bigcup_{m\in\bar{M}_0^+/M_0^1} KmK. \tag{4}$$

On a:

$$\left.\begin{array}{c}\text{il existe } C_1, C_2 > 0 \text{ tels que, pour tout } m\in\bar{M}_0^+,\\ C_1\delta_0(m)^{-1}\leqslant \mathrm{mes}(KmK)\leqslant C_2\delta_0(m)^{-1},\end{array}\right\} \tag{5}$$

où $\delta_0 = \delta_{P_0}$.

Preuve. On choisit un groupe H comme dans la preuve précédente. Soit $m\in\bar{M}_0^+$. On a

$$\mathrm{mes}(HmH)\leqslant\mathrm{mes}(KmK)\leqslant[K:H]^2\,\mathrm{mes}(HmH).$$

D'autre part

$$\mathrm{mes}(HmH) = \mathrm{mes}(H)[H : mHm^{-1}\cap H] = \mathrm{mes}(H)c_{U_0}(m)c_{M_0}(m)c_{\bar{U}_0}(m),$$

où, pour $V = U_0, M_0, \bar{U}_0$,

$$c_V(m) = [H\cap V : m(H\cap V)m^{-1}\cap H].$$

On a:

$$\begin{aligned} c_{U_0}(m) &= [m^{-1}(H\cap U_0)m : H\cap m^{-1}(H\cap U_0)m]\\ &= \mathrm{mes}(m^{-1}(H\cap U_0)m)\,\mathrm{mes}(H\cap U_0)^{-1}c'_{U_0}(m)\\ &= \delta_0(m)^{-1}c'_{U_0}(m), \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

où $c'_{U_0}(m) = [H \cap U_0 : H \cap m^{-1}(H \cap U_0)m]$. D'où:

$$\mathrm{mes}(HmH) = \delta_0(m)^{-1} c'_{U_0}(m) c_{M_0}(m) c_{\bar{U}_0}(m)\, \mathrm{mes}(H).$$

Or les termes $c'_{U_0}(m)$, $c_{M_0}(m)$ et $c_{\bar{U}_0}(m)$ sont des entiers bornés pour $m \in \bar{M}_0^+$. $\square$

Fixons un plongement algébrique

$$\tau : G \to GL_n(F).$$

On peut supposer, et l'on suppose, que $\tau(K) \subset GL_n(\mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de F. Pour $g \in G$, écrivons

$$\tau(g) = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, \qquad \tau(g)^{-1} = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n},$$

posons

$$\|g\| = \sup_{i,j} \sup(|a_{ij}|_F, |b_{ij}|_F).$$

On vérifie que $\|g\| \geqslant 1$, $\|g_1 g_2\| \leqslant \|g_1\| \|g_2\|$ pour tous $g_1, g_2 \in G$ et $\|k_1 g k_2\| = \|g\|$ pour tous $k_1, k_2 \in K$, $g \in G$. On pose

$$\sigma(g) = \log \|g\|.$$

Munissons a_0 d'une norme euclidienne $|\cdot|$ invariante par l'action du groupe de Weyl W^G. Il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour tout $m \in M_0$,

$$C_1(1 + |H_0(m)|) \leqslant 1 + \sigma(m) \leqslant C_2(1 + |H_0(m)|). \tag{6}$$

I.2.

Soit M un sous-groupe de Lévi semi-standard. Notons ρ l'action par translations à droite de A_M dans $C^\infty(A_M)$. Soit V un sous-espace de $C^\infty(A_M)$, stable par ρ et de dimension finie. Alors il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{X} \subset \mathrm{Hom}(A_M, \mathbb{C}^*)$ et un entier $d \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $f \in V$ et tout $\chi \in \mathcal{X}$, il existe un polynôme $P_{\chi,f}$ sur a_M, à coefficients complexes et de degré $\leqslant d$, de sorte que, pour tout $a \in A_M$ on ait l'égalité

$$f(a) = \sum_{\chi \in \mathcal{X}} \chi(a) P_{\chi,f}(H_M(a)).$$

Supposons $\mathcal{X}$ minimal, i.e. pour tout $\chi \in \mathcal{X}$, il existe $f \in V$ tel que $P_{\chi,f} \neq 0$. Alors pour tous $\chi \in \mathcal{X}$ et $f \in V$, les fonctions

$$a \mapsto \chi(a) \quad \text{et} \quad a \mapsto \chi(a) P_{\chi,f}(H_M(a))$$

appartiennent à V.

Les deux conditions suivantes sont équivalentes:

(1) il existe $n \in \mathbb{N}$ et, pour tout $f \in V$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $a \in A_M$, on ait l'inégalité $|f(a)| \leqslant C(1 + \sigma(a))^n$;

(2) pour tout $\chi \in \mathcal{X}$, $\mathrm{Re}(\chi) = 0$.

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Soient $\mathcal{Y} \subset \mathrm{Hom}(A_M, \mathbb{C}^*)$ un sous-ensemble fini et D un entier $\geqslant 1$. Supposons que pour tout $a \in A_M$, l'opérateur

$$\prod_{\chi \in \mathcal{Y}} (\rho(a) - \chi(a))^D$$

annule V. Alors $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ et l'on peut choisir l'entier $d \leqslant D - 1$.

Soit $f \in C^\infty(A_M)$. Notons V_f le sous-espace de $C^\infty(A_M)$ engendré par $\{\rho(a)f;\ a \in A_M\}$. Supposons f A_M-finie, i.e. V_f de dimension finie. Ce que l'on a dit ci-dessus s'applique à V_f. La condition (1) pour V_f est équivalente à:

$$\text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ et } C > 0 \text{ tel que pour tout } a \in A_M,\ |f(a)| \leqslant C(1 + \sigma(a))^n.$$

I.3.

Soit (π, V) une représentation admissible de G. Pour $\chi \in \mathrm{Hom}(A_G, \mathbb{C}^*)$, posons

$$V_\chi = \{v \in V;\ \exists d \in \mathbb{N},\ \forall a \in A_G,\ (\pi(a) - \chi(a))^d v = 0\}.$$

On appelle exposant de π un caractère χ tel que $V_\chi \neq 0$. On note $\mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi)$ l'ensemble de ces exposants. On a l'égalité

$$V = \bigoplus_{\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi)} V_\chi.$$

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G. Notons V_P le module de Jacquet de V relativement à P et $j_P : V \to V_P$ la projection naturelle. On munit V_P de la représentation admissible π_P de M définie par

$$\pi_P(m) j_P(v) = \delta_P(m)^{-1/2} j_P(\pi(m)v)$$

pour tous $m \in M$, $v \in V$.

Soient maintenant $P = MU$ comme ci-dessus et (π, V) une représentation admissible de M. On définit la représentation induite $(I_P^G \pi, I_P^G V)$. C'est une représentation admissible de G. Par définition, $I_P^G V$ est l'espace des fonctions $f : G \to V$ invariantes à droite par un sous-groupe ouvert et telles que $f(mug) = \delta_P(m)^{1/2} \pi(m) f(g)$ pour tous $m \in M$, $u \in U$, $g \in G$.

On a le théorème de réciprocité de Frobenius: pour toute représentation admissible (π', V') de G

$$\mathrm{Hom}_G(V', I_P^G V) = \mathrm{Hom}_M(V'_P, V).$$

Notons $(\check{\pi}, \check{V})$ la contragrédiente de (π, V). On définit sur $I_P^G V \times I_P^G \check{V}$ une forme bilinéaire par

$$\langle f, \check{f} \rangle = \int_{P \backslash G} \langle f(g), \check{f}(g) \rangle \,\mathrm{d}g.$$

Cela permet d'identifier $I_P^G \check{V}$ à $(I_P^G V)\check{}$.

Si $P' = M'U'$ est un sous-groupe parabolique semi-standard tel que $P \subset P'$, on a un isomorphisme

$$I_P^G V \simeq I_{P'}^G (I_{P \cap M'}^{M'} V).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Il associe à $f \in I_P^G V$ la fonction

$$g \mapsto (m' \mapsto \delta_{P'}(m')^{-1/2} f(m'g)).$$

Soit maintenant $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique semi-standard quelconque. On peut choisir un système de représentants ${}^{P'}W^P \subset W^G$ de l'ensemble de doubles classes $W^{M'} \setminus W^G / W^M$ et le munir d'un ordre total de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées. Pour tout $w \in {}^{P'}W^P$, posons

$$G_{\geqslant w} = \bigcup_{w' \in {}^{P'}W^P;\, w' \geqslant w} P w'^{-1} P';$$

alors $G_{\geqslant w}$ est ouvert dans G et $Pw^{-1}P'$ est fermé dans $G_{\geqslant w}$. Notons $\mathcal{F}_w$ le sous-espace des $f \in I_P^G V$ à support dans $G_{\geqslant w}$. La famille $(\mathcal{F}_w)_{w \in {}^{P'}W^P}$ est une filtration décroissante de $I_P^G V$ par des sous P'-modules. On peut définir le module de Jacquet relativement à P' de tout P'-module lisse, en particulier de $\mathcal{F}_w$ ou de $\mathcal{F}_w / \mathcal{F}_{w^+}$, où l'on note w^+ le successeur de w. Pour alléger les notations, pour tout $w \in W^G$ et tout sous-groupe parabolique semi-standard $Q = RV$, on posera $w \cdot Q = wQw^{-1}$, $w \cdot R = wRw^{-1}$. Si (π', V') est une représentation de R, on notera $(w\pi', wV')$ la représentation de $w \cdot R$ ainsi définie: $wV' = V'$ et, pour tous $v' \in V'$, $g \in w \cdot R$,

$$w\pi'(g)v' = \pi'(w^{-1}gw)v'.$$

Pour $w \in {}^{P'}W^P$, introduisons le module de Jacquet $(\pi_{M \cap w^{-1} \cdot P'}, V_{M \cap w^{-1} \cdot P'})$ et la projection $j_{M \cap w^{-1} \cdot P'} : V \to V_{M \cap w^{-1} \cdot P'}$. On définit une application

$$p_w : \mathcal{F}_w \to I_{M' \cap w \cdot P}^{M'} w V_{M \cap w^{-1} \cdot P'}$$

par

$$p_w(f)(m') = \delta_{P'}(m')^{-1/2} \int_{(U' \cap w \cdot P) \setminus U'} j_{M \cap w^{-1} \cdot P'}(f(w^{-1}u'm'))\, du'.$$

Alors p_w se factorize par $\mathcal{F}_w / \mathcal{F}_{w^+}$ (en posant $\mathcal{F}_{w^+} = \{0\}$ si w est maximal) puis par $(\mathcal{F}_w / \mathcal{F}_{w^+})_{P'}$ et définit un isomorphisme de M'-modules:

$$(\mathcal{F}_w / \mathcal{F}_{w^+})_{P'} \simeq I_{M' \cap w \cdot P}^{M'} w V_{M \cap w^{-1} \cdot P'}$$

(cf. [**BZ**, 2.12]). On déduit de l'exactitude du foncteur de Jacquet que la représentation $((I_P^G \pi)_{P'}, (I_P^G V)_{P'})$ admet une filtration dont le gradué associé est

$$\bigoplus_{w \in {}^{P'}W^P} (I_{M' \cap w \cdot P}^{M'} w \pi_{M \cap w^{-1} \cdot P'}, I_{M' \cap w \cdot P}^{M'} w V_{M \cap w^{-1} \cdot P'}).$$

I.4.

Soient (π, V) une représentation admissible de G, $(\check{\pi}, \check{V})$ sa contragrédiente et $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard. Introduisons les modules de Jacquet (π_P, V_P) de π relativement à P et $((\check{\pi})_{\bar{P}}, (\check{V})_{\bar{P}})$ de $\check{\pi}$ relativement à $\bar{P}$ et les projections $j_P : V \to V_P$, $\check{j}_{\bar{P}} : \check{V} \to (\check{V})_{\bar{P}}$.

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Théorème I.4.1 (Casselman). *Il existe un produit bilinéaire non dégénéré et invariant par M sur $V_P \times (\check{V}_{\bar{P}})$, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$, de sorte que pour tout $(v, \check{v}) \in V \times \check{V}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $a \in A_M$ vérifiant $|\alpha(a)|_F < \varepsilon$ pour tout $\alpha \in \Delta(P)$, on ait*

$$\langle \pi_P(a) j_P(v), \check{j}_{\bar{P}}(\check{v}) \rangle_P = \delta_P(a)^{-1/2} \langle \pi(a) v, \check{v} \rangle,$$

*cf. [**C**, Proposition 4.2.3 et Théorème 4.2.4].*

Corollaire I.4.2. *La représentation $((\check{\pi})_{\bar{P}}, (\check{V})_{\bar{P}})$ est isomorphe à la contragrédiente de (π_P, V_P).*

Pour $m \in \bar{M}_0^+$ et $t \in \mathbb{R}$, définissons un sous-groupe parabolique standard $P_{m,t} = M_{m,t} U_{m,t}$ par l'égalité

$$\Delta_0^{M_{m,t}} = \{\alpha \in \Delta_0;\ \langle \alpha, H_0(m) \rangle \leqslant t\}.$$

Proposition I.4.3. *Soit $(v, \check{v}) \in V \times \check{V}$. Il existe $t > 0$ tel que pour tout $m \in \bar{M}_0^+$, on ait l'égalité*

$$\delta_P(m)^{-1/2} \langle \pi(m) v, \check{v} \rangle = \langle \pi_P(m) j_P(v), \check{j}_{\bar{P}}(\check{v}) \rangle_P,$$

*où $P = P_{m,t}$, cf. [**C**, Théorème 4.3.3].*

Corollaire I.4.4. *Pour tout $(v, \check{v}) \in V \times \check{V}$, il existe $d \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tels que pour tout $g \in G$, on ait*

$$|\langle \pi(g) v, \check{v} \rangle| \leqslant c \|g\|^d.$$

Si V est de longueur finie, on peut choisir d indépendamment de $(v, \check{v})$.

Preuve. On utilise l'égalité (4) du paragraphe I.1 et la proposition précédente. On est ramené par récurrence sur le rang semi-simple de G au cas où $G = M_0$, lequel se ramène aisément au cas $G = A_0$. On doit voir que toute fonction A_0-finie sur A_0 est majorée par une fonction de la forme $a \mapsto c\|a\|^d$. C'est immédiat. □

I.5.

Soit B une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini, commutative et nœthérienne. Une B-famille algébrique de représentations admissibles de G est un couple (π, V) formé d'un B-module V et d'un homomorphisme $\pi : G \to \mathrm{Aut}_B(V)$ tels que

(i) pour tout $v \in V$, le stabilisateur de v dans G est un sous-groupe ouvert;

(ii) pour tout sous-groupe ouvert compact H de G, le sous-module des invariants V^H est un B-module projectif de type fini.

Si (π, V) est une telle B-famille, on définit sa B-contragrédiente $(\check{\pi}^B, \check{V}^B)$: $\check{V}^B$ est la partie lisse de $\mathrm{Hom}_B(V, B)$. C'est encore une telle B-famille.

Si $P = MU$ est un sous-groupe parabolique semi-standard de G et (π, V) une B-famille de représentations admissibles de G, resp. M, on définit comme en I.3 le module de Jacquet (π_P, V_P), resp. la représentation induite $(I_P^G \pi, I_P^G V)$. C'est une B-famille de représentations admissibles de M, resp. G (cf. [**BD**, 2.5, 3.1]). Avec ces

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

définitions, les résultats des parties I.3 et I.4, à l'exception de I.4.4, restent valables pour les B-familles algébriques de représentations admissibles. Donnons par exemple la démonstration de l'analogue du Théorème I.4.1. Soient donc (π, V) une B-famille algébrique de représentations admissibles de G, $(\check{\pi}^B, \check{V}^B)$ sa contragrédiente et $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G. Pour tout $\epsilon > 0$, posons:

$$A_P(\epsilon) = \{a \in A_M;\ |\alpha(a)|_F < \epsilon \text{ pour tout } \alpha \in \Delta(P)\}.$$

On considérera dans la suite des sous-groupes ouverts compacts H de G. Ils seront supposés tels que $H = (H \cap U)(H \cap M)(H \cap \bar{U})$. Soit H un tel sous-groupe. Si ϵ est assez petit, on a les inclusions:

$$a(H \cap U)a^{-1} \subseteq H \cap U, \qquad a^{-1}(H \cap \bar{U})a \subseteq H \cap \bar{U},$$

pour tout $a \in A_P(\epsilon)$. Pour tout $a \in A_M$, notons φ_a^H la fonction sur G définie par:

$$\varphi_a^H(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \notin HaH, \\ \delta_P(a)^{1/2} \operatorname{mes}(H)^{-1} & \text{si } g \in HaH. \end{cases}$$

Rappelons que de la représentation π de G se déduit une représentation de l'algèbre $C_c^\infty(G)$, la structure d'algèbre étant définie par le produit de convolution. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, les propriétés (1)–(4) qui suivent sont vérifiées.

(1) Pour tous $a, a' \in A_P(\epsilon)$, $\varphi_a^H * \varphi_{a'}^H = \varphi_{aa'}^H$.

Cela résulte de l'inclusion $aHa' = a(H \cap U)(H \cap M)(H \cap \bar{U})a' \subseteq Haa'H$.

(2) Pour tout $v \in V^H$ et tout $a \in A_P(\epsilon)$, $j_P \circ \pi(\varphi_a^H)(v) = \pi_P(a) j_P(v)$.

En effet, puisque $HaH = (H \cap U)aH$ et v est invariant par H, on a:

$$\pi(\varphi_a^H)v = \delta_P(a)^{1/2} \operatorname{mes}(H)^{-1} \operatorname{mes}(H \cap U)^{-1} \operatorname{mes}(HaH) \int_{H \cap U} \pi(ua)v \, du. \qquad (*)$$

D'où:

$$\begin{aligned} j_P \circ \pi(\varphi_a^H)(v) &= \delta_P(a)^{1/2} \operatorname{mes}(H)^{-1} \operatorname{mes}(HaH) j_P \circ \pi(a)(v) \\ &= \delta_P(a) \operatorname{mes}(H)^{-1} \operatorname{mes}(HaH) \pi_P(a) j_P(v). \end{aligned}$$

De plus $\operatorname{mes}(HaH) = \delta_P(a)^{-1} \operatorname{mes}(H)$, cf. preuve de I.1 (5).

(3) Pour tout $a \in A_P(\epsilon)$, $\pi(\varphi_a^H)$ annule $V^H \cap \operatorname{Ker}(j_P)$.

Pour tout $v \in \operatorname{Ker}(j_P)$, il existe un sous-groupe ouvert compact U_c de U tel que $\int_{U_c} \pi(u)v \, du = 0$. Puisque V^H est de type fini sur B et B est noethérien, $V^H \cap \operatorname{Ker}(j_P)$ est aussi de type fini. On peut donc fixer un sous-groupe U_c commun pour tous les $v \in V^H \cap \operatorname{Ker}(j_P)$. Choisissons ϵ tel que $aU_ca^{-1} \subseteq H \cap U$ pour tout $a \in A_P(\epsilon)$. La conclusion de (3) résulte de l'égalité (*).

(4) Pour tout $a \in A_P(\epsilon)$, j_P se restreint en un isomorphisme de $\pi(\varphi_a^H)(V^H)$ sur $V_P^{H \cap M}$.

Il est clair que $j_P(V^H) \subseteq V_P^{H\cap M}$. Soit $v \in \pi(\varphi_a^H)(V^H)$ tel que $j_P(v) = 0$. Soit $v' \in V^H$ tel que $v = \pi(\varphi_a^H)v'$. Grâce à (2), $0 = j_P(v) = \pi_P(a)j_P(v')$. Donc $j_P(v') = 0$. Alors, grâce à (3), $v = \pi(\varphi_a^H)v' = 0$. La restriction de j_P à $\pi(\varphi_a^H)(V^H)$ est donc injective. Soit $w \in V_P^{H\cap M}$. On a aussi $\pi_P(a)^{-1}w \in V_P^{H\cap M}$. D'après [**BD**, Proposition 3.5.2], j_P se restreint en une surjection de V^H sur $V_P^{H\cap M}$. On peut donc choisir $v_a \in V^H$ tel que $j_P(v_a) = \pi_P(a)^{-1}w$. Posons $v = \pi(\varphi_a^H)v_a$. Alors $v \in \pi(\varphi_a^H)(V^H)$ et, d'après (2), $j_P(v) = w$. Cela démontre (4).

Soit ϵ tel que les propriétés (1)–(4) soient vérifiées. Grâce à (1), pour $a, a' \in A_P(\epsilon)$, on a les inclusions:

$$\pi(\varphi_a^H)(V^H) \supseteq \pi(\varphi_{aa'}^H)(V^H) \subseteq \pi(\varphi_{a'}^H)(V^H).$$

En appliquant (4) à a, a' et aa', on voit que ces inclusions sont en fait des égalités. Le B-module $\pi(\varphi_a^H)(V^H)$ ne dépend pas de $a \in A_P(\epsilon)$. Notons-le S_P^H et notons $s_P^H : V_P^{H\cap M} \to S_P^H$ l'unique section de l'application j_P.

Soit maintenant H' un autre sous-groupe ouvert compact de G vérifiant les mêmes hypothèses que H. Supposons $H' \subseteq H$ et posons $e^H = \varphi_1^H$. Alors:

(5) pour $w \in V_P^{H\cap M}$, on a l'égalité $s_P^H(w) = \pi(e^H)s_P^{H'}(w)$.

En effet, choisissons ϵ tel que la conclusion de (4) soit vérifiée pour H comme pour H'. Soit $a \in A_P(\epsilon)$ et fixons $v_a \in V^H$ tel que $j_P(v_a) = \pi_P(a)^{-1}w$. D'après la preuve de (4), on a $s_P^H(w) = \pi(\varphi_a^H)v_a$, $s_P^{H'}(w) = \pi(\varphi_a^{H'})v_a$. Or $\varphi_a^H = e^H * \varphi_a^{H'} * e^H$, donc

$$\pi(\varphi_a^H)v_a = \pi(e^H)\pi(\varphi_a^{H'})\pi(e^H)v_a = \pi(e^H)\pi(\varphi_a^{H'})v_a,$$

et (5) s'ensuit.

En appliquant les mêmes constructions à $\check{V}^B$ et $\bar{P}$, on construit pour tout H un B-module $\check{S}_{\bar{P}}^H \subseteq \check{V}^{B,H}$ et une section $\check{s}_{\bar{P}}^H : \check{V}_{\bar{P}}^{B,H\cap M} \to \check{S}_{\bar{P}}^H$. Remarquons que pour tout $a \in A_M$, $\check{\pi}^B(\varphi_{a^{-1}}^H)$ est la transposée de $\pi(\varphi_a^H)$. De plus, pour $a \in A_M$ et $\epsilon > 0$, on a $a \in A_P(\epsilon)$ si et seulement si $a^{-1} \in A_{\bar{P}}(\epsilon)$. On a:

(6) pour tous $v \in S_P^H$ et $\check{v} \in \check{V}^{B,H} \cap \operatorname{Ker}(\check{j}_{\bar{P}})$, $\langle v, \check{v}\rangle = 0$.

Choisissons $\epsilon > 0$ tel que la conclusion de (4) soit vérifiée ainsi que l'analogue de (3) pour $\check{\pi}^B$ et le groupe $\bar{P}$. Soit $a \in A_P(\epsilon)$. Puisque $S_P^H = \pi(\varphi_a^H)(V^H)$, il existe $v' \in V^H$ tel que $v = \pi(\varphi_a^H)v'$. Alors:

$$\langle v, \check{v}\rangle = \langle \pi(\varphi_a^H)v', \check{v}\rangle = \langle v', \check{\pi}^B(\varphi_{a^{-1}}^H)\check{v}\rangle = 0$$

car $\check{\pi}^B(\varphi_{a^{-1}}^H)\check{v} = 0$.

Soient $w \in V_P$, $\check{w} \in \check{V}_{\bar{P}}^B$. Choisissons H tel que $w \in V_P^{H\cap M}$, $\check{w} \in \check{V}_{\bar{P}}^{B,H\cap M}$. Je dis que $\langle s_P^H(w), \check{s}_{\bar{P}}^H(\check{w})\rangle$ ne dépend pas de H. Il suffit de vérifier que si $H' \subseteq H$, on a l'égalité

$$\langle s_P^H(w), \check{s}_{\bar{P}}^H(\check{w})\rangle = \langle s_P^{H'}(w), \check{s}_{\bar{P}}^{H'}(\check{w})\rangle.$$

En utilisant (5), on a:

$$\begin{aligned}\langle s_P^H(w), \check{s}_{\bar P}^H(\check w)\rangle - \langle s_P^{H'}(w), \check{s}_{\bar P}^{H'}(\check w)\rangle &= \langle \pi(e^H)s_P^{H'}(w), \check{s}_{\bar P}^H(\check w)\rangle - \langle s_P^{H'}(w), \check{s}_{\bar P}^{H'}(\check w)\rangle \\ &= \langle s_P^{H'}(w), \check{\pi}^B(e^H)\check{s}_{\bar P}^H(\check w) - s_{\bar P}^{H'}(\check w)\rangle \\ &= \langle s_P^{H'}(w), \check{s}_{\bar P}^H(\check w) - \check{s}_{\bar P}^{H'}(\check w)\rangle.\end{aligned}$$

Or $\check{s}_{\bar P}^H(\check w) - \check{s}_{\bar P}^{H'}(\check w) \in \check V^{B,H'} \cap \mathrm{Ker}(\check{\jmath}_{\bar P})$. La dernière expression ci-dessus est nulle d'après (6) appliqué au groupe H'. On pose:

$$\langle w, \check w\rangle_P = \langle s_P^H(w), \check{s}_{\bar P}^H(\check w)\rangle.$$

Comme on vient de le voir, ce terme ne dépend pas du choix de H. Cela définit un produit B-bilinéaire sur $V_P \times \check V_{\bar P}^B$. Soit $m \in M$. On vérifie aisément que pour $w \in V_P^{H\cap M}$, on a l'égalité:

$$s_P^{mHm^{-1}\cap H}(\pi_P(m)(w)) = \delta_P(m)^{-1/2}\pi(m)s_P^H(w).$$

Pour $w, \check w$ comme ci-dessus, on a alors:

$$\begin{aligned}\langle \pi_P(m)w, \check{\pi}_{\bar P}^B(m)\check w\rangle_P &= \langle s_P^{mHm^{-1}\cap H}(\pi_P(m)w), \check{s}_{\bar P}^{mHm^{-1}\cap H}(\check{\pi}_{\bar P}^B(m)\check w)\rangle \\ &= \delta_P(m)^{-1/2}\delta_{\bar P}(m)^{-1/2}\langle \pi(m)s_P^H(w), \check{\pi}^B(m)s_{\bar P}^H(\check w)\rangle \\ &= \langle s_P^H(w), \check{s}_{\bar P}^H(\check w)\rangle \\ &= \langle w, \check w\rangle_P.\end{aligned}$$

Le produit $\langle\cdot,\cdot\rangle_P$ est donc invariant par M.

Soient $v \in V$ et $\check v \in \check V^B$. Choisissons H tel que v et $\check v$ soient invariants par H. Soient $\epsilon > 0$ assez petit et $a \in A_P(\epsilon)$. On a:

$$\begin{aligned}\langle \pi(a)v, \check v\rangle &= \langle \pi(a)\pi(e^H)v, \check{\pi}^B(e^H)\check v\rangle \\ &= \langle \pi(e^H)\pi(a)\pi(e^H)v, \check v\rangle \\ &= \delta_P(a)^{1/2}\langle \pi(\varphi_a^H)v, \check v\rangle.\end{aligned}$$

On a $\pi(\varphi_a^H)v \in S_P^H$ et $\check v - \check{s}_{\bar P}^H \circ \check{\jmath}_{\bar P}\check v \in \check V^{B,H} \cap \mathrm{Ker}(\check{\jmath}_{\bar P})$. Donc $\langle \pi(\varphi_a^H)v, \check v - \check{s}_{\bar P}^H(\check{\jmath}_{\bar P}\check v)\rangle = 0$ d'après (6). D'autre part, puisque $\pi(\varphi_a^H)v \in S_P^H$ et $j_P \circ \pi(\varphi_a^H)v = \pi_P(a)j_P(v)$, on a $\pi(\varphi_a^H)v = s_P^H(\pi_P(a)j_P(v))$. Les égalités précédentes entraînent:

$$\begin{aligned}\langle \pi(a)v, \check v\rangle &= \delta_P(a)^{1/2}\langle s_P^H(\pi_P(a)j_P(v)), \check{s}_{\bar P}^H(\check{\jmath}_{\bar P}(\check v))\rangle \\ &= \delta_P(a)^{1/2}\langle \pi_P(a)j_P(v), \check{\jmath}_{\bar P}(\check v)\rangle_P.\end{aligned}$$

La relation du Théorème I.4.1 est donc vérifiée. Montrons enfin que le produit $\langle\cdot,\cdot\rangle_P$ est une dualité parfaite, i.e. identifie V_P à la partie lisse de $\mathrm{Hom}_B(\check V_{\bar P}^B, B)$ et $\check V_{\bar P}^B$ à la partie lisse de $\mathrm{Hom}_B(V_P, B)$. Il suffit de prouver que, pour tout H, $\langle\cdot,\cdot\rangle_P$ se restreint en une dualité parfaite sur $V_P^{H\cap M} \times \check V_{\bar P}^{B,H\cap M}$. Par construction, il suffit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se restreigne en une dualité parfaite sur $S_P^H \times \check S_{\bar P}^H$. Or V^H et $\check V^{B,H}$ sont en dualité parfaite. On a:

$$V^H = S_P^H \oplus (V^H \cap \mathrm{Ker}(j_P)), \qquad \check V^{B,H} = \check S_{\bar P}^H \oplus (\check V^{B,H} \cap \mathrm{Ker}(\check{\jmath}_{\bar P})).$$

D'après (6), S_P^H annule $\check V^{B,H} \cap \mathrm{Ker}(\check{\jmath}_{\bar P})$ et, de même, $\check S_{\bar P}^H$ annule $V^H \cap \mathrm{Ker}(j_P)$. La conclusion s'ensuit.

I.6.

Considérons l'espace

$$C_{\mathrm{lisse}}(G) = \bigcup_H C(H \setminus G/H),$$

où H parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de G. Le groupe G agit sur $C_{\mathrm{lisse}}(G)$ par les représentations φ, resp. λ, définies par les translations à droite, resp. à gauche. Pour $f \in C_{\mathrm{lisse}}(G)$, notons $V_\rho(f)$, resp. $V_\lambda(f)$, resp. $V_{\rho\times\lambda}(f)$, le plus petit sous-espace de $C_{\mathrm{lisse}}(G)$ contenant f et stable par ρ, resp. λ, resp. $\rho \times \lambda$. Notons ρ_f, resp. λ_f, la représentation déduite de ρ dans $V_\rho(f)$, resp. de λ dans $V_\lambda(f)$. Notons $\mathcal{A}_\rho$, resp. $\mathcal{A}_\lambda$, l'ensemble des $f \in C_{\mathrm{lisse}}(G)$ telles que ρ_f, resp. λ_f, soit admissible.

D'autre part, pour toute représentation admissible π de G, notons $\mathcal{A}(\pi)$ le sous-espace de $C_{\mathrm{lisse}}(G)$ engendré par les coefficients de π. Posons

$$\mathcal{A}(G) = \bigcup_\pi \mathcal{A}(\pi) = \sum_\pi \mathcal{A}(\pi),$$

où π parcourt l'ensemble des classes de représentations admisibles de G.

Lemme I.6.1.

(1) *Soit $f \in \mathcal{A}_\rho$, resp. $\mathcal{A}_\lambda$. Alors $V_{\rho\times\lambda}(f) = \mathcal{A}(\rho_f)$, resp. $= \mathcal{A}(\check{\lambda}_f)$.*

(2) *On a l'égalité $\mathcal{A}_\rho = \mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}(G)$.*

Preuve. Soit $f \in \mathcal{A}_\rho$. Pour $g \in G$, définissons $v_g \in V_\rho(f)^*$ par $\langle v_g, f'\rangle = f'(g)$ pour tout $f' \in V_\rho(f)$. Soit H un sous-groupe ouvert compact de G tel que $f \in C(H \setminus G/H)$. Alors $V_\rho(f) \subset C(H \setminus G)$. On voit que $v_g \circ \rho_f(h) = v_g$ pour tout $h \in g^{-1}Hg$. Donc $v_g \in V_\rho(f)\check{}$. Notons V le sous-espace de $V_\rho(f)\check{}$ engendré par les formes linéaires v_g pour $g \in G$. On a:

(i) si $f' \in V_\rho(f)$ vérifie $\langle v, f'\rangle = 0$ pour tout $v \in V$, alors $f' = 0$;

(ii) V est stable par $\check{\rho}_f$: en effet, pour $g, h \in G$, on vérifie que $\check{\rho}_f(h)v_g = v_{gh^{-1}}$.

Il résulte de (i) et (ii) que $V = V_\rho(f)\check{}$. Alors $\mathcal{A}(\rho_f)$ est l'espace engendré par les fonctions $g \mapsto \langle v, \rho_f(g)f'\rangle$ pour $v \in V$, $f' \in V_\rho(f)$, ou encore par les fonctions $g \mapsto \langle v_{g_2}, \rho_f(gg_1)f\rangle$ pour $g_1, g_2 \in G$, i.e. par les fonctions $\lambda(g_2^{-1})\rho(g_1)f$. Donc $\mathcal{A}(\rho_f) = V_{\rho\times\lambda}(f)$. Un raisonnement analogue vaut si $f \in \mathcal{A}_\lambda$.

Si $f \in \mathcal{A}_\rho$, on a $f \in V_{\rho\times\lambda}(f) = \mathcal{A}(\rho_f) \subset \mathcal{A}(G)$. Donc $\mathcal{A}_\rho \subset \mathcal{A}(G)$. L'inclusion opposée est évidente, d'où $\mathcal{A}_\rho = \mathcal{A}(G)$. Idem $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}(G)$. □

Proposition I.6.2. *Soient $f \in \mathcal{A}(G)$ et $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G. Il existe un unique élément $f_P \in \mathcal{A}(M)$ vérifiant la propriété suivante: pour tout $m \in M$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $a \in A_M$ vérifiant $|\alpha(a)|_F < \varepsilon$ pour tout $\alpha \in \Sigma(P)$, on ait l'égalité*

$$\delta_P(ma)^{-1/2} f(ma) = f_P(ma).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Supposons que deux éléments f_P et f'_P de $\mathcal{A}(M)$ vérifient ces conditions. Pour tout $m \in M$, les fonctions sur A_M

$$A \mapsto f_P(ma), \qquad a \mapsto f'_P(ma)$$

coïncident dans un 'cône'. Comme elles sont toutes deux A_M-finies, elles sont égales. Donc $f_P(m) = f'_P(m)$ pour tout $m \in M$.

Pour prouver l'existence de f_P, on peut fixer une représentation admissible (π, V) de G, deux éléments $v \in V$, $\check{v} \in \check{V}$, et supposer que $f(g) = \langle \pi(g)v, \check{v} \rangle$ pour tout $g \in G$. Alors la fonction f_P définie par

$$f_P(m) = \langle \pi_P(m) j_P(v), \check{j}_{\bar{P}}(\check{v}) \rangle_P$$

convient, cf. Théorème I.4.1. $\square$

On appelle f_P le terme constant de f le long de P. Pour $f \in \mathcal{A}(G)$, on définit une application

$$f_P^{\mathrm{ind}} : G \times G \to \mathcal{A}(M)$$

par $f_P^{\mathrm{ind}}(g_1, g_2) = (\rho(g_2)\lambda(g_2)f)_P$. Alors $f_P^{\mathrm{ind}} \in I_{P \times \bar{P}}^{G \times G} \mathcal{A}(M)$ et l'application

$$\mathcal{A}(G) \to I_{P \times \bar{P}}^{G \times G} \mathcal{A}(M), \qquad f \mapsto f_P^{\mathrm{ind}}$$

est un homomorphisme $G \times G$-équivariant.

Soit $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique semi-standard contenant P. Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
& I_{P \times \bar{P}}^{G \times G} \mathcal{A}(M) \arrow[dr, "\gamma"] & \\
\mathcal{A}(G) \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & I_{P' \times \bar{P}'}^{G \times G} I_{M' \cap P \times M' \cap \bar{P}}^{M' \times M'} \mathcal{A}(M) \\
& I_{P' \times \bar{P}'}^{G \times G} \mathcal{A}(M') \arrow[ur, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

Les flèches α, resp. β, sont $f \mapsto f_P^{\mathrm{ind}}$, resp. $f \mapsto f_{P'}^{\mathrm{ind}}$, δ est déduit par fonctorialité de l'application

$$\mathcal{A}(M') \to I_{M' \cap P \times M' \cap \bar{P}}^{M' \times M'} \mathcal{A}(M), \qquad f \mapsto f_{M' \cap P}^{\mathrm{ind}}$$

et γ est l'isomorphisme décrit en I.3.

II. Majorations

II.1.

Notons $(\mathbf{1}, \mathbb{C})$ la représentation triviale de M_0, $(\pi, V) = (I_{P_0}^G \mathbf{1}, I_{P_0}^G \mathbb{C})$, e l'unique élément de V invariant par K et tel que $e(1) = 1$. Remarquons que $(\check{\pi}, \check{V}) = (\pi, V)$. Pour $g \in G$, on pose

$$\Xi(g) = \langle \pi(g)e, e \rangle.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

On a l'égalité:

$$\Xi(g) = \int_K \delta_0(m_0(kg))^{1/2}\, \mathrm{d}k.$$

Lemme II.1.1. *La fonction Ξ est bi-invariante par K. Il existe $C_1, C_2 > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $m \in \bar{M}_0^+$, on ait*

$$C_1 \delta_0(m)^{1/2} \leqslant \Xi(m) \leqslant C_2 \delta_0(m)^{1/2}(1+\sigma(m))^d.$$

Preuve. La première assertion est claire. Fixons $t > 0$ tel que la conclusion de la Proposition I.4.3 soit vérifiée pour le couple (e, e). Pour tout sous-groupe parabolique standard P, posons $\bar{M}_0^+(P) = \{m \in \bar{M}_0^+;\ P_{m,t} = P\}$. Pour démontrer la deuxième inégalité de l'énoncé, on peut fixer P et supposer $m \in \bar{M}_0^+(P)$. Il existe un sous-ensemble compact C de M_0 tel que $\bar{M}_0^+(P) \subset A_M C$. On peut donc fixer $h \in C$ et supposer $m \in \bar{M}_0^+(P) \cap A_M h$. On sait calculer π_P, cf. I.3. On voit qu'il existe un entier d tel que pour tout $a \in A_M$, $(\pi_P(a) - 1)^d$ annule V_P. Il existe donc un polynôme Q sur a_M de degré $\leqslant d$ tel que

$$\langle \pi_P(ah) j_P(e), \check{\jmath}_{\bar{P}}(e)\rangle_P = Q(H_M(a))$$

pour tout $a \in A_M$. De cette égalité et de la Proposition I.4.3 se déduit la majoration cherchée pour $m \in \bar{M}_0^+(P) \cap A_M h$.

Soit H un sous-groupe ouvert compact de K tel que $H = (H \cap U_0)(H \cap M_0)(H \cap \bar{U}_0)$. Pour $m \in \bar{M}_0^+$, on a $m^{-1}(H \cap \bar{U}_0)m \subset K$, d'où $Hm \subset U_0 m K$ et $\delta_0(m_0(hm)) = \delta_0(m)$ pour tout $h \in H$. Alors

$$\Xi(m) \geqslant \int_H \delta_0(m_0(hm))^{1/2}\, \mathrm{d}h = \mathrm{mes}(H)\delta_0(m)^{1/2},$$

ce qui démontre la première inégalité de l'énoncé. □

Lemme II.1.2. *Il existe $d \in \mathbb{N}$ et, pour tous $g_1, g_2 \in G$, il existe $C > 0$ tels que, pour tout $g \in G$, on ait*

$$\Xi(g_1 g g_2) \leqslant C\,\Xi(g)(1+\sigma(g))^d.$$

Preuve. Soient $k_1, k_2 \in K$. Pour $g \in G$, on a

$$\Xi(g_1 k_1 g k_2 g_2) = \langle \pi(g) v_2, v_1\rangle,$$

où $v_2 = \pi(k_2 g_2)e$, $v_1 = \check{\pi}(k_1^{-1} g_1^{-1})e$. Le même raisonnement que dans la démonstration précédente prouve l'existence de $d \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\Xi(g_1 k_1 m k_2 g_2) \leqslant C \delta_0(m)^{1/2}(1+\sigma(m))^d$$

pour tout $m \in \bar{M}_0^+$. On peut choisir d indépendamment de g_1, g_2, k_1, k_2 et C indépendamment de k_1 et k_2. En remplaçant $k_1 m k_2$ par g dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\Xi(g_1 g g_2) \leqslant C C_1^{-1} \Xi(g)(1+\sigma(g))^d,$$

où C_1 est la constante du lemme précédent. Il reste à appliquer I.1 (4). □

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Lemme II.1.3. *Pour tous $g_1, g_2 \in G$, on a*

$$\int_K \Xi(g_1 k g_2)\,\mathrm{d}k = \Xi(g_1)\Xi(g_2).$$

Preuve. Posons $v = \int_K \pi(kg_2)e\,\mathrm{d}k$. Comme v est invariant par K, il est proportionnel à e. On calcule le facteur de proportionnalité en calculant $\langle v, e\rangle$. On obtient $v = \Xi(g_2)e$. Le membre de gauche de l'inégalité de l'énoncé est égal à $\langle \pi(g_1)v, e\rangle$, i.e. à $\Xi(g_2)\langle \pi(g_1)e, e\rangle$, i.e. à $\Xi(g_2)\Xi(g_1)$. □

Lemme II.1.4. *Pour tout $g \in G$, $\Xi(g) = \Xi(g^{-1})$.*

Cela résulte de l'égalité $\pi = \check{\pi}$.

Lemme II.1.5. *Il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que l'intégrale*

$$\int_G \Xi(g)^2(1+\sigma(g))^{-d}\,\mathrm{d}g$$

soit convergente.

Preuve. D'après I.1 (4), il suffit de prouver qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que la série

$$\sum_{m \in \bar{M}_0^+/M_0^1} \mathrm{mes}(KmK)\Xi(m)^2(1+\sigma(m))^{-d}$$

soit convergente. Grâce à I.1 (5) et au Lemme II.1.1, on est ramené à prouver que la série

$$\sum_{m \in \bar{M}_0^+/M_0^1} (1+\sigma(m))^{-d}$$

est convergente pour d assez grand. Ou encore, d'après I.1 (6) que la série

$$\sum_{H \in H_0(\bar{M}_0^+)} (1+|H|)^{-d}$$

l'est. C'est clair puisque $H_0(M_0)$ est un réseau de a_0. □

Notons que Ξ est indépendant du choix du parabolique minimal P_0 (ils sont tous conjugués sous K). Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G. On définit une fonction Ξ^M sur M comme on vient de définir Ξ sur G.

Lemme II.1.6. *Pour tout $g \in G$, on a l'égalité*

$$\Xi(g) = \int_K \delta_P(m_P(kg))^{1/2}\Xi^M(m_P(kg))\,\mathrm{d}k.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Quitte à changer P_0, on peut supposer $P \supset P_0$. Notons $(\pi^M, V^M), e^M$ les analogues de $(\pi, V), e$ pour M. Identifions V à $I_P^G V^M$. Alors e s'identifie à l'élément de $I_P^G V^M$ tel que $e(k) = e^M$ pour tout $k \in K$. On a

$$\Xi(g) = \langle \pi(g)e, e \rangle = \int_{P\backslash G} \langle e(hg), e(h) \rangle \, \mathrm{d}h = \int_K \langle e(kg), e(k) \rangle \, \mathrm{d}k.$$

Mais, pour $k \in K$,

$$\langle e(kg), e(k) \rangle = \delta_P(m_P(kg))^{1/2} \langle \pi^M(m_P(kg))e^M, e^M \rangle = \delta_P(m_P(kg))^{1/2} \Xi^M(m_P(kg)).$$

□

II.2.

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique standard de G. Il existe un espace E_P de dimension finie sur F, une base $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ de E_P et une représentation algébrique τ_P de G dans E_P vérifiant les propriétés suivantes:

(1) pour tous $m \in M$, $u \in U$, $\tau_P(mu)e_1 = \delta_P^{\mathrm{alg}}(m)e_1$, où $\delta_P^{\mathrm{alg}}(m)$ est le déterminant de $Ad(m)$ dans l'algèbre de Lie de U (on a $\delta_P(m) = |\delta_P^{\mathrm{alg}}(m)|_F$);

(2) pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe $\chi_i \in \mathrm{Rat}(A_0)$ tel que

$$\tau_P(a)e_i = \delta_P^{\mathrm{alg}}(a)\chi_i(a)e_i$$

pour tout $a \in A_0$;

(3) si $i \geqslant 2$, il existe $\alpha_i \in \Delta_0 - \Delta_0^M$ et $C_i > 0$ tels que $-\mathrm{Re}(\chi_i) \in C_i\alpha_i + {}^+\bar{a}_0^{G*}$;

(4) l'application

$$\bar{U} \to E_P, \qquad \bar{u} \mapsto \tau_P(\bar{u})e_1$$

est injective, à valeurs dans $e_1 + E'_P$, où E'_P est engendré par $e_2, \dots, e_n$.

En effet, notons $F[G]$ l'espace des polynômes sur G définis sur F et E_P le sous-espace des $Q \in F[G]$ tels que

$$Q(m\bar{u}g) = \delta_P^{\mathrm{alg}}(m)Q(g)$$

pour tous $m \in M$, $\bar{u} \in \bar{U}$, $g \in G$. Notons τ_P la représentation de G dans E_P par translation à droite. Alors le couple (τ_P, E_P) vérifie les conditions ci-dessus.

Ces données étant fixées, on définit une hauteur sur E_P par

$$\|e\| = \sup\{|x_i|_F;\ i = 1, \dots, n\}$$

pour tout $e = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$. On a

(5) il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour tous $k \in K$, $e \in E$,

$$C_1\|e\| \leqslant \|\tau_P(k)e\| \leqslant C_2\|e\|.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

On a aussi

(6) il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour tout $\bar{u} \in \bar{U}$,

$$C_1(1 + \log \|\tau_P(\bar{u})e_1\|) \leqslant 1 + \sigma(\bar{u}) \leqslant C_2(1 + \log \|\tau_P(\bar{u})e_1\|).$$

Preuve. Comme les coefficients de $\tau_P(\bar{u})e_1$ sont des polynômes sur $\bar{U}$, il existe $C > 0$ et un entier $N \geqslant 0$ tels que

$$\|\tau_P(\bar{u})e_1\| \leqslant C\|\bar{u}\|^N \tag{7}$$

pour tout $\bar{u} \in \bar{U}$.

Notons θ l'application définie en (4). Son image est une orbite d'un groupe unipotent agissant dans une variété affine. Elle est donc algébriquement fermée [**H**, Exercice 8, p. 115]. D'autre part, θ est injective. Si la caractéristique de F est nulle, θ est donc un isomorphisme de $\bar{U}$ sur son image [**H**, Théorème 4.6]. Pour tout polynôme Q sur $\bar{U}$, il existe donc un polynôme Q' sur E tel que $Q = Q' \circ \theta$. Si la caractéristique de F est $p > 0$, le corps des fonctions algébriques sur $\bar{U}$ est une extension purement inséparable du corps des fonctions algébriques sur l'image de θ. Il existe un entier $d \geqslant 0$ et, pour tout polynôme Q sur $\bar{U}$, il existe un polynôme Q' sur E tel que $Q^{p^d} = Q' \circ \theta$. Dans les deux cas, on en déduit que pour tout polynôme Q sur $\bar{U}$, il existe $C > 0$ et un entier $N \geqslant 0$ tels que

$$|Q(\bar{u})|_F \leqslant C\|\tau_P(\bar{u})e_1\|^N$$

pour tout $\bar{u} \in \bar{U}$. Il existe donc C et N tels que

$$\|\bar{u}\| \leqslant C\|\tau_P(\bar{u})e_1\|^N \tag{8}$$

pour tout $\bar{u} \in \bar{U}$. Notons que l'on a toujours $\sigma(\bar{u}) \geqslant 0$ et $\log \|\tau_P(\bar{u})e_1\| \geqslant 0$ d'après (4). Les inégalités (7) et (8) impliquent alors l'assertion. □

II.3.

Lemme II.3.1. *Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G. Il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour tous $m \in M$, $u \in U$, on ait*

$$C_1(1 + \sigma(mu)) \leqslant 1 + \sup(\sigma(m), \sigma(u)) \leqslant C_2(1 + \sigma(mu)).$$

Preuve. La première inégalité résulte de l'inégalité $\sigma(mu) \leqslant \sigma(m) + \sigma(u)$. Fixons $a \in A_M$ tel que $|\alpha(a)|_F < 1$ pour tout $\alpha \in \Delta(P)$. Comme A_M est un tore déployé, $\tau(a)$ est diagonalisable (cf. I.1 pour la définition de τ). Quitte à conjuguer le plongement τ, ce qui n'a pas d'incidence sur l'assertion à démontrer, on peut supposer que $\tau(a)$ est diagonale et que, si l'on note $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ ses termes diagonaux, on a $|a_1|_F \leqslant |a_2|_F \leqslant \cdots \leqslant |a_n|_F$. Définissons une décompositon $n = n_1 + \cdots + n_t$ par

$$\begin{aligned}|a_1|_F = |a_2|_F = \cdots = |a_{n_1}|_F < |a_{n_1+1}|_F = \cdots \\ = |a_{n_1+n_2}|_F < \cdots < |a_{n_1+\cdots+n_{t-1}+1}|_F = \cdots = |a_n|_F.\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Soit $P' = M'U'$ le sous-groupe parabolique triangulaire supérieur par blocs de GL_n, de blocs de tailles $n_1, n_2, \ldots, n_t$. Comme M commute à a, $\tau(M) \subset M'$. Comme $Ad(a)$ contracte U, $\tau(U) \subset U'$. Mais alors pour tous $m \in M$, $u \in U$, les coefficients non nuls de $\tau(m)$ sont des coefficients de $\tau(mu)$. On en déduit l'inégalité

$$\sigma(m) \leqslant \sigma(mu).$$

Si $\sigma(m) \geqslant \sigma(u)/2$, on obtient

$$\sup(\sigma(m), \sigma(u)) \leqslant 2\sigma(mu). \tag{1}$$

Si $\sigma(m) < \sigma(u)/2$, on utilise les relations $\sigma(u) \leqslant \sigma(m^{-1}) + \sigma(mu)$ et $\sigma(m) = \sigma(m^{-1})$. On en déduit l'inégalité (1) dans ce cas. Cela achève la preuve. $\square$

Lemme II.3.2. *Il existe $C > 0$ tel que pour tous $m \in \bar{M}_0^+$, $g \in KmK$, on ait l'inégalité*

$$\delta_0(m) \leqslant C\delta_0(m_0(g)).$$

Preuve. Soit Γ un sous-ensemble compact de M_0 tel que $\bar{M}_0^+ \subset \Gamma \bar{A}_0^+$. Introduisons la représentation $\tau_0 = \tau_{P_0}$ de II.2. Choisissons $C_1 > 0$ tel que pour tous $e \in E_{P_0}$, $h \in K \cup K\Gamma$, $\|\tau_0(h^{-1})e\| \leqslant C_1\|e\|$.

Soient $m \in \bar{M}_0^+$ et $g \in KmK$. Introduisons $a \in \bar{A}_0^+$, $h \in K\Gamma$ et $k \in K$ tels que $ma^{-1} \in \Gamma$ et $u_0(g)m_0(g) = hak$. On a

$$\begin{aligned}
\delta_0(m_0(g))^{-1} &= \|\tau_0(m_0(g)^{-1}u_0(g)^{-1})e_1\| \\
&= \|\tau_0(k^{-1}a^{-1}h^{-1})e_1\| \\
&\leqslant C_1\|\tau_0(a^{-1}h^{-1})e_1\|.
\end{aligned}$$

Ecrivons

$$\tau_0(h^{-1})e_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Alors

$$\tau_0(a^{-1}h^{-1})e_1 = \delta_0^{\mathrm{alg}}(a)^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i\chi_i(a)^{-1}e_i.$$

Comme $a \in \bar{A}_0^+$, on a $|\chi_i(a)|_F^{-1} \leqslant 1$ pour tout i (cf. II.2 (1) et (3)). Donc

$$\begin{aligned}
\|\tau_0(a^{-1}h^{-1})e_1\| &= \delta_0(a)^{-1}\sup\{|x_i\chi_i(a)^{-1}|_F;\ i = 1, \ldots, n\} \\
&\leqslant \delta_0(a)^{-1}\sup\{|x_i|_F;\ i = 1, \ldots, n\} \\
&\leqslant \delta_0(a)^{-1}\|\tau_0(h^{-1})e_1\| \\
&\leqslant C_1\delta_0(a)^{-1}.
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité

$$\delta_0(m_0(g))^{-1} \leqslant C_1^2\delta_0(a)^{-1}.$$

Comme $a^{-1} \in m^{-1}\Gamma$, $\delta_0(a)^{-1} \leqslant \delta_0(m)^{-1}\sup\{\delta_0(h); h \in \Gamma\}$. On en déduit l'inégalité de l'énoncé. $\square$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Lemme II.3.3. *Il existe $C > 0$ tel que pour tous $a \in \bar{A}_0^+$, $p \in P_0$,*

$$1 + \sigma(apa^{-1}) \leqslant C(1 + \sigma(p)).$$

Preuve. En inversant les rôles de P_0, et $\bar{P}_0$ il suffit de prouver que pour $a \in \bar{A}_0^+$ et $\bar{p} \in \bar{P}_0$,

$$1 + \sigma(a^{-1}\bar{p}a) \leqslant C(1 + \sigma(\bar{p})).$$

Soient $m \in M_0$, $\bar{u} \in \bar{U}_0$, $a \in \bar{A}_0^+$, $\bar{p} = m\bar{u}$. On a $a^{-1}\bar{p}a = ma^{-1}\bar{u}a$, d'où

$$\sigma(a^{-1}\bar{p}a) \leqslant \sigma(m) + \sigma(a^{-1}\bar{u}a).$$

Introduisons la représentation $\tau_0 = \tau_{P_0}$ de II.2. D'après II.2 (6),

$$1 + \sigma(a^{-1}\bar{u}a) \leqslant C_1(1 + \log \|\tau_0(a^{-1}\bar{u}a)e_1\|),$$

où C_1, comme les autres constantes introduites ci-dessous, est indépendant de m, $\bar{u}$ et a. Ecrivons

$$\tau_0(\bar{u})e_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Alors

$$\tau_0(a^{-1}\bar{u}a)e_1 = \sum_{i=1}^{n} \chi_i^{-1}(a) x_i e_i.$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$|\chi_i^{-1}(a)|_F = q^{\langle \operatorname{Re}\chi_i, H_0(a)\rangle}.$$

Comme $H_0(a) \in \bar{\mathfrak{a}}_0^+$ et $\operatorname{Re}\chi_i \in -{}^+\bar{\mathfrak{a}}_0^{G*}$ (II.2 (1) et (3)), on a $|\chi_i^{-1}(a)|_F \leqslant 1$ pour tout i. D'où l'inégalité

$$\|\tau_0(a^{-1}\bar{u}a)e_1\| \leqslant \|\tau_0(\bar{u})e_1\|.$$

D'après II.2 (6), $1 + \log \|\tau_0(\bar{u})e_1\| \leqslant C_2(1 + \sigma(\bar{u}))$. Alors

$$1 + \sigma(a^{-1}\bar{u}a) \leqslant C_1C_2(1 + \sigma(\bar{u})),$$

puis

$$1 + \sigma(a^{-1}\bar{p}a) \leqslant C_3(1 + \sigma(m) + \sigma(\bar{u})).$$

On conclut en utilisant le Lemme II.3.1. □

Lemme II.3.4. *Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G. Il existe $C_0, C_1, C_2, C_3 > 0$ tels que pour tout $\bar{u} \in \bar{U}$, on ait*

$$C_1(1 + \sigma(\bar{u})) \leqslant C_0 - \log \delta_P(m_P(\bar{u})) \leqslant C_2(1 + \sigma(m_P(\bar{u}))) \leqslant C_2(1 + \sigma(\bar{u})).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Comme δ_P^{alg} (cf. II.2 (1)) est polynomial sur M, il existe $C_4 > 0$ tel que

$$-\log \delta_P(m) \leqslant C_4(1+\sigma(m))$$

pour tout $m \in M$. On en déduit l'inégalité centrale de l'énoncé. Pour $\bar{u} \in \bar{U}$, on a

$$1+\sigma(m_P(\bar{u})) \leqslant C_5(1+\sigma(u_P(\bar{u})m_P(\bar{u})))$$

d'après le Lemme II.3.1, et

$$\sigma(u_P(\bar{u})m_P(\bar{u})) = \sigma(u_P(\bar{u})m_P(\bar{u})k_P(\bar{u})) = \sigma(\bar{u}).$$

On en déduit l'inégalité de droite de l'énoncé. Quitte à conjuguer P, on peut supposer P standard. Introduisons la représentation τ_P de II.2. Alors

$$1+\sigma(\bar{u}) = 1+\sigma(\bar{u}^{-1}) \leqslant C_6(1+\log\|\tau_P(\bar{u}^{-1})e_1\|)$$

d'après II.2 (6). Mais

$$\tau_P(\bar{u}^{-1})e_1 = \tau_P(k_P(\bar{u})^{-1}m_P(\bar{u})^{-1}u_P(\bar{u})^{-1})e_1 = \delta_P^{\mathrm{alg}}(m_P(\bar{u}))^{-1}\tau_P(k_P(\bar{u})^{-1})e_1.$$

D'où d'après II.2 (5),

$$\|\tau_P(\bar{u}^{-1})e_1\| \leqslant C_7\delta_P(m_P(\bar{u}))^{-1}$$

et

$$1+\log\|\tau_P(\bar{u}^{-1})e_1\| \leqslant C_8 - \log\delta_P(m_P(\bar{u})).$$

Cela prouve la première inégalité de l'énoncé. □

Lemme II.3.5. *Soient $P = MU$ un sous-groupe parabolique standard maximal de G, $\alpha \in \Delta_0$ tel que $\Delta_0^M = \Delta_0 - \{\alpha\}$, Γ resp. $\bar{\Gamma}$ des sous-groupes ouverts compacts de U, resp. $\bar{U}$. Alors il existe $C > 0$ tel que, pour tous $a \in \bar{A}_0^+$, $g \in G$, si*

$$1+\sigma(g)+\sigma(aga^{-1}) \leqslant C\langle\alpha, H_0(a)\rangle,$$

alors $g \in a^{-1}\Gamma a M\bar{\Gamma}$.

Preuve. Montrons que

(2) il existe $C_1 > 0$ tel que, pour tous $a \in \bar{A}_0^+$, $g \in K \cap \bar{U}P$, si

$$1+\sigma(aga^{-1}) \leqslant C_1\langle\alpha, H_0(a)\rangle,$$

alors $g \in \bar{\Gamma}P$.

On introduit la représentation τ_P de II.2 et des constantes $C_2, \ldots, C_5 > 0$ telles que

- pour tout $g \in G$, $\log\|\tau_P(g)e_1\| \leqslant C_2(1+\sigma(g))$;
- pour tout $g \in K$, $-C_3 \leqslant \log\|\tau_P(g)e_1\|$;

- pour tous $i \geqslant 2$, $a \in \bar{A}_0^+$, $C_4\langle\alpha, H_0(a)\rangle \leqslant -\langle \mathrm{Re}(\chi_i), H_0(a)\rangle$;
- pour tout $\bar{u} \in \bar{U}$, si l'on écrit $\tau_P(\bar{u})e_1 = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, alors

$$\sup\{\log|y_i|_F;\ i = 2, \dots, n\} \leqslant -C_5 \quad \Rightarrow \quad \bar{u} \in \bar{\Gamma}.$$

L'existence de C_5 résulte du fait que l'application θ de la preuve de II.2 (6) est un homéomorphisme de $\bar{U}$ sur son image. Posons

$$C_1 = C_4(C_2 + C_3 + C_5)^{-1} \log q.$$

Soient a et g vérifiant les hypothèses de (2). Ecrivons $\tau_P(g)e_1 = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Alors

$$\tau_P(aga^{-1})e_1 = x_1 e_1 + \sum_{i=2}^n x_i \chi_i(a) e_i.$$

Pour $i \in \{2, \dots, n\}$, on a

$$\begin{aligned} \log|x_i|_F + C_4 \log q \langle\alpha, H_0(a)\rangle &\leqslant \log|x_i|_F - \langle \mathrm{Re}(\chi_i), H_0(a)\rangle \log q \\ &= \log|x_i \chi_i(a)|_F \\ &\leqslant \log\|\tau_P(aga^{-1})e_1\| \\ &\leqslant C_2(1 + \sigma(aga^{-1})) \\ &\leqslant C_1 C_2 \langle\alpha, H_0(a)\rangle. \end{aligned}$$

D'où

$$\log|x_i|_F \leqslant (C_1C_2 - C_4 \log q)\langle\alpha, H_0(a)\rangle.$$

Notons que $C_1C_2 - C_4 \log q < 0$ et $\langle\alpha, H_0(a)\rangle \geqslant C_1^{-1}$ d'après l'hypothèse. D'où

$$\log|x_i|_F \leqslant C_2 - C_4 C_1^{-1} \log q = -C_3 - C_5$$

pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$. D'autre part

$$-C_3 \leqslant \sup\{\log|x_i|_F;\ i = 1, \dots, n\}.$$

Donc

$$-C_3 \leqslant \log|x_1|_F.$$

Ecrivons $g = \bar{u}mu$, avec $\bar{u} \in \bar{U}$, $m \in M$, et $\tau_P(\bar{u})e_1 = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. On a $x_i = y_i \delta_P^{\mathrm{alg}}(m)$ pour tout i. Pour $i \in \{2, \dots, n\}$, on a donc

$$\log|y_i|_F = \log|y_i|_F - \log|y_1|_F = \log|x_i|_F - \log|x_1|_F \leqslant -C_5.$$

Donc $\bar{u} \in \bar{\Gamma}$ ce qui prouve (2).

Montrons maintenant que

(3) il existe $C_6 > 0$ tel que, pour tous $a \in \bar{A}_0^+$, $g \in G$, si

$$1 + \sigma(g) + \sigma(aga^{-1}) \leqslant C_6\langle\alpha, H_0(a)\rangle,$$

alors $g \in \bar{\Gamma}P$.

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Notons C_7 la constante du Lemme II.3.3 (on a $C_7 \geqslant 1$), posons $C_6 = C_1 C_7^{-1}$. Ecrivons $g = kp$ avec $k \in K$, $p \in P$. On a $aka^{-1} = aga^{-1}ap^{-1}a^{-1}$, d'où

$$\begin{aligned} 1 + \sigma(aka^{-1}) &\leqslant 1 + \sigma(aga^{-1}) + \sigma(apa^{-1}) \\ &\leqslant C_7(1 + \sigma(aga^{-1}) + \sigma(p)) \\ &= C_7(1 + \sigma(aga^{-1}) + \sigma(g)) \\ &\leqslant C_1\langle\alpha, H_0(a)\rangle. \end{aligned}$$

Supposons d'abord $g \in \bar{U}P$. Alors $k \in \bar{U}P$ donc, d'après (2), $k \in \bar{\Gamma}P$ puis $g \in \bar{\Gamma}P$. Dans le cas général, comme $\bar{U}P$ est dense dans G, on peut choisir $g' \in \bar{U}P$ aussi proche que l'on veut de g et vérifiant la même inégalité que g. Alors $g' \in \bar{\Gamma}P$. Donc g appartient à la clôture de $\bar{\Gamma}P$. Ce dernier étant fermé, on obtient $g \in \bar{\Gamma}P$.

En échangeant P_0, resp. P, et $\bar{P}_0$, resp. $\bar{P}$, on voit de même qu'il existe $C_8 > 0$ tel que, pour tout $a \in \bar{A}_0^+$, $g \in G$, si

$$1 + \sigma(g) + \sigma(a^{-1}ga) \leqslant C_8\langle\alpha, H_0(a)\rangle,$$

alors $g \in \Gamma\bar{P}$. Posons maintenant $C = \inf(C_6, C_8)$. Soient g et a vérifiant les conditions de l'énoncé. Appliquons la relation ci-dessus, resp. la relation (3), à aga^{-1}, resp. g^{-1}. On obtient $aga^{-1} \in \Gamma\bar{P}$, $g^{-1} \in \bar{\Gamma}P$, i.e. $g \in a^{-1}\Gamma a\bar{P} \cap P\bar{\Gamma}$. Mais $a^{-1}\Gamma a\bar{P} \cap P\bar{\Gamma} = a^{-1}\Gamma aM\bar{\Gamma}$. Cela achève la preuve. □

II.4.

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique standard de G. Pour tout entier $n \geqslant 1$, posons

$$\bar{U}(n) = \{\bar{u} \in \bar{U};\ \delta_0(m_0(\bar{u})) = q^{-n}\}.$$

Lemme II.4.1. *Il existe $C > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant 1$,*

$$\mathrm{mes}(\bar{U}(n)) \leqslant cq^{n/2}n^d.$$

Preuve. Pour $a \in A_M$, posons $\gamma(a) = \sup\{|\alpha(a)|_F;\ \alpha \in \Delta(P)\}$. Montrons que

(1) il existe $C_1 > 0$ et $r > 0$ tels que pour tous $\bar{u} \in \bar{U}$, $a \in A_M \cap \bar{A}_0^+$,

$$\delta_0(m_0(a^{-1}\bar{u}a))^{-1/2} \leqslant C_1[1 + \gamma(a)^r\delta_0(m_0(\bar{u}))^{-1/2}].$$

Introduisons la représentation τ_0 de II.2. Soient $\bar{u} \in \bar{U}$, $a \in A_M$. Ecrivons

$$\tau_0(\bar{u}^{-1})e_1 = e_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i e_i.$$

Alors

$$\tau_0(a^{-1}\bar{u}^{-1}a)e_1 = e_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i\chi_i(a)^{-1}e_i.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Pour $i \in \{2, \ldots, n\}$, notons λ_i la projection de $-\operatorname{Re}(\chi_i)$ sur a_M^*. Alors $|\chi_i(a)^{-1}|_F = q^{-\langle \lambda_i, H_M(a) \rangle}$. D'après II.2 (3), λ_i est combinaison linéaire à coefficients $\geqslant 0$ des éléments de $\Delta(P)$. Je dis que si $x_i \neq 0$, on a $\lambda_i \neq 0$. En effet si l'on choisit a tel que $\gamma(a) < 1$, la conjugaison par a^{-1} contracte $\bar{U}$ donc $\lim_{m\to\infty} a^{-m}\bar{u}^{-1}a^m = 1$. Alors $\lim_{m\to\infty} |x_i\chi_i(a)^{-m}|_F = 0$ pour tout $i \geqslant 2$, ce qui implique l'assertion. Il existe donc $r > 0$, indépendant de $\bar{u}$ et a, tel que $|\chi_i(a)^{-1}|_F \leqslant \gamma(a)^{2r}$ pour tout $i \geqslant 2$ tel que $x_i \neq 0$. On en déduit

$$\begin{aligned}\|\tau_0(a^{-1}\bar{u}^{-1}a)e_1\| &\leqslant \sup(1, \gamma(a)^{2r} \sup\{|x_i|_F;\ i = 2, \ldots, n\}) \\ &\leqslant \sup(1, \gamma(a)^{2r} \|\tau_0(\bar{u}^{-1})e_1\|).\end{aligned}$$

Comme

$$\tau_0(\bar{u}^{-1})e_1 = \tau_0(k_0(\bar{u})^{-1})\tau_0(m_0(\bar{u}))^{-1}\tau_0(u_0(\bar{u}))^{-1}e_1 = \delta_0^{\mathrm{alg}}(m_0(\bar{u}))^{-1}\tau_0(k_0(\bar{u})^{-1})e_1,$$

on a

$$\|\tau_0(\bar{u}^{-1})e_1\| \leqslant C_2\delta_0(m_0(\bar{u}))^{-1},$$

où C_2 est indépendant de $\bar{u}$. De même

$$C_3\delta_0(m_0(a^{-1}\bar{u}a))^{-1} \leqslant \|\tau_0(a^{-1}\bar{u}^{-1}a)e_1\|.$$

On en déduit l'existence de $C_1 > 0$ tel que

$$\delta_0(m_0(a^{-1}\bar{u}a))^{-1} \leqslant C_1^2 \sup(1, \gamma(a)^{2r}\delta_0(m_0(\bar{u}))^{-1}).$$

D'où l'inégalité (1).

Pour tout $a \in A_M$, on a l'égalité

$$\varXi(a) = \gamma(G|M)^{-1}\delta_0(a)^{1/2} \int_{\bar{U}} \delta_0(m_0(a^{-1}\bar{u}a)m_0(\bar{u}))^{1/2}\,\mathrm{d}\bar{u}. \tag{2}$$

Avec les notations de II.1, on a

$$\varXi(a) = \int_{P_0\backslash G} e(ga)e(g)\,\mathrm{d}g.$$

On déduit des formules d'intégration de I.1 l'égalité

$$\begin{aligned}\varXi(a) &= \gamma(G|M)^{-1} \int_{\bar{U}} \int_{P_0\cap M\backslash M} e(m\bar{u}a)e(m\bar{u})\delta_P(m)^{-1}\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}\bar{u} \\ &= \gamma(G|M)^{-1} \int_{\bar{U}} \int_{K\cap M} e(k\bar{u}a)e(k\bar{u})\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\bar{u}.\end{aligned}$$

Grâce au changement de variables $\bar{u} \mapsto k^{-1}\bar{u}k$ et en utilisant les faits que e est invariant à droite par K et que a commute à M, on obtient

$$\varXi(a) = \gamma(G|M)^{-1} \int_{\bar{U}} e(\bar{u}a)e(\bar{u})\,\mathrm{d}\bar{u}.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Par définition, $e(\bar{u}) = \delta_0(m_0(\bar{u}))^{1/2}$, $e(\bar{u}a) = \delta_0(m_0(\bar{u}a))^{1/2} = \delta_0(a)^{1/2}\delta_0(m_0(a^{-1}\bar{u}a))^{1/2}$, d'où l'égalité (2).

En utilisant (1), (2) et le Lemme II.1.1, on voit qu'il existe $C_3 > 0$, $r > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $a \in A_M \cap \bar{A}_0^+$,

$$\int_{\bar{U}} [1 + \gamma(a)^r \delta_0(m_0(\bar{u}))^{-1/2}]^{-1} \delta_0(m_0(\bar{u}))^{1/2} \,\mathrm{d}\bar{u} \leqslant C_3(1 + \sigma(a))^d. \tag{3}$$

Fixons $a \in A_M \cap \bar{A}_0^+$ tel que $\gamma(a) < 1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$ notons m le plus petit entier tel que $\gamma(a)^{rm} \leqslant q^{-n/2}$. Remplaçons a par a^m dans l'inégalité (3). Notons que, la fonction que l'on intègre dans le membre de gauche étant à valeurs positives, l'intégrale partielle sur $\bar{U}(n)$ est *a fortiori* inférieure au membre de droite. D'où l'inégalité

$$\int_{\bar{U}(n)} [1 + \gamma(a)^{rm} \delta_0(m_0(\bar{u}))^{-1/2}]^{-1} \delta_0(m_0(\bar{u}))^{1/2} \,\mathrm{d}\bar{u} \leqslant C_3(1 + \sigma(a^m))^d.$$

D'après les définitions de m et $\bar{U}(n)$, le membre de gauche est $\geqslant \frac{1}{2} q^{-n/2} \operatorname{mes}(\bar{U}(u))$, tandis qu'il existe $C_4 > 0$ tel que le membre de droite soit $\leqslant C_4 n^d$. D'où l'inégalité de l'énoncé. □

Lemme II.4.2. *Il existe un entier $d \in \mathbb{N}$ tel que l'intégrale*

$$\int_{\bar{U}} \delta_0(m_0(\bar{u}))^{1/2} (1 + \sigma(\bar{u}))^{-d} \,\mathrm{d}\bar{u}$$

soit convergente.

Preuve. D'après le Lemme II.3.4, $\bar{U}$ est réunion d'un compact et des ensembles $\bar{U}(n)$ pour $n \geqslant 1$. On peut remplacer le membre de gauche par la somme des intégrales sur $\bar{U}(n)$. Or, si l'on note ici d' l'entier du lemme II.4.1, ce lemme et le Lemme II.3.3 impliquent l'existence de $C > 0$ tel que pour tout $u \geqslant 1$,

$$\int_{\bar{U}(n)} \delta_0(m_0(\bar{u}))^{1/2} (1 + \sigma(\bar{u}))^{-d} \,\mathrm{d}\bar{u} \leqslant c n^{d'-d}.$$

Il suffit que $d \geqslant d' + 2$ pour assurer la convergence de la somme sur n des termes ci-dessus. □

Lemme II.4.3. *Il existe un entier $d \in \mathbb{N}$ tel que l'intégrale*

$$\int_{\bar{U}} \delta_P(m_P(\bar{u}))^{1/2} \Xi^M(m_P(\bar{u}))(1 + \sigma(\bar{u}))^{-d} \,\mathrm{d}\bar{u}$$

soit convergente.

Preuve. Pour $k \in K \cap M$, effectuons le changement de variables $\bar{u} \mapsto k\bar{u}k^{-1}$ dans l'intégrale de l'énoncé du lemme précédent puis intégrons en $k \in K \cap M$. On obtient la convergence de l'intégrale

$$\int_{\bar{U}} \int_{K \cap M} \delta_0(m_0(k\bar{u}k^{-1}))^{1/2} (1 + \sigma(\bar{u}))^{-d} \,\mathrm{d}\bar{u} \,\mathrm{d}k.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Mais $m_0(k\bar{u}k^{-1}) = m_0(km_P(\bar{u}))$, d'où

$$\begin{aligned}\delta_0(m_0(k\bar{u}k^{-1})) &= \delta_0^M[m_0(km_P(\bar{u}))]\delta_P[m_0(km_P(\bar{u}))] \\ &= \delta_0^M[m_0(km_P(\bar{u}))]\delta_P(m_P(\bar{u})).\end{aligned}$$

D'où la convergence de l'intégrale

$$\int_{\bar{U}} \delta_P(m_P(\bar{u}))^{1/2}(1+\sigma(\bar{u}))^{-d} \int_{K\cap M} \delta_0^M[m_0(km_P(\bar{u}))]^{1/2}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\bar{u}.$$

Or l'intégrale intérieure est égale à $\Xi^M(m_P(\bar{u}))$. □

Lemme II.4.4. *Il existe $d \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tels que pour tout $m \in M_0$ et tout $u \in \bar{U}$, on ait l'inégalité*

$$\Xi(m\bar{u}) \leqslant c\delta_0(m)^{1/2}\delta_0(m_0(\bar{u}))^{1/2}(1+\sigma(m\bar{u}))^d.$$

Preuve. Pour $m \in M_0$ et $u \in \bar{U}$, soit $h \in \bar{M}_0^+$ tel que $mu \in KhK$ (cf. I.1 (4)). D'après le Lemme II.1.1, on a

$$\Xi(m\bar{u}) = \Xi(h) \leqslant C_1\delta_0(h)^{1/2}(1+\sigma(h))^d,$$

l'entier d et la constante C_1, ainsi que C_2 ci-dessous, étant indépendants de m et $\bar{u}$. On a $\sigma(h) = \sigma(m\bar{u})$. D'après le Lemme II.3.2,

$$\delta_0(h) \leqslant C_2\delta_0(m_0(m\bar{u})) = C_2\delta_0(m)\delta_0(m_0(\bar{u})).$$

Cela implique l'assertion de l'énoncé. □

Proposition II.4.5. *Soit $d \in \mathbb{N}$. Il existe $d' \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tels que pour tout $m \in M$, on ait l'inégalité*

$$\delta_P(m)^{-1/2} \int_{\bar{U}} \Xi(m\bar{u})(1+\sigma(m\bar{u}))^{-d'}\,\mathrm{d}u \leqslant c\Xi^M(m)(1+\sigma(m))^{-d}.$$

Preuve. Introduisons l'ensemble $\bar{M}_0^{M+}$ analogue de $\bar{M}_0^+$ quand on rempace G par M, i.e.

$$\bar{M}_0^{M+} = \{m \in M_0;\ \forall\alpha \in \Delta_0^M,\ \langle\alpha, H_0(m)\rangle \geqslant 0\}.$$

On a l'égalité $M = (K\cap M)\bar{M}_0^{M+}(K\cap M)$. On peut se limiter à démontrer l'inégalité de l'énoncé pour $m \in \bar{M}_0^{M+}$. Soit donc $m \in \bar{M}_0^{M+}$. Notons $X(m)$ le membre de gauche de l'inégalité de l'énoncé. Grâce au Lemme II.4.4, il existe $C_1 > 0$ et $D \in \mathbb{N}$ tels que

$$X(m) \leqslant C_1\delta_0(m)^{1/2}\delta_P(m)^{-1/2} \int_{\bar{U}} \delta_0(m_0(\bar{u}))^{1/2}(1+\sigma(m\bar{u}))^{D-d'}\,\mathrm{d}\bar{u}$$

(les constantes sont indépendantes de m). D'après le Lemme II.3.1, on a une inégalité:

$$1+\sigma(m\bar{u}) \geqslant C_2(1+\sup(\sigma(m),\sigma(\bar{u}))).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

On a aussi:

$$1 + \sup(\sigma(m), \sigma(\bar{u})) \geqslant (1 + \sigma(m))^{1/2}(1 + \sigma(\bar{u}))^{1/2}.$$

Supposons $d' \geqslant D$. On déduit des inégalités précédentes la relation:

$$(1 + \sigma(m\bar{u}))^{D-d'} \leqslant C_2^{D-d'}(1 + \sigma(m))^{(D-d')/2}(1 + \sigma(\bar{u}))^{(D-d')/2}.$$

D'autre part, d'après le Lemme II.1.1,

$$\delta_0(m)^{1/2}\delta_P(m)^{-1/2} = \delta_0^M(m)^{1/2} \leqslant C_3 \Xi^M(m).$$

On obtient

$$X(m) \leqslant C_4 \Xi^M(m)(1 + \sigma(m))^{(D-d')/2} \int_{\bar{U}} \delta_0(m_0(\bar{u}))^{1/2}(1 + \sigma(\bar{u}))^{(D-d')/2} \, \mathrm{d}\bar{u}.$$

En choisissant d' assez grand, l'intégrale est convergente (Lemme II.4.2) et $\frac{1}{2}(D - d') \leqslant -d$. On obtient alors la majoration de l'énoncé. □

Remarque. Au début du paragraphe, on a supposé P standard mais le Lemme II.4.3 et la Proposition II.4.5 sont aussi valables si P n'est que semi-standard (il suffit de changer de P_0).

III. Les représentations tempérées, l'espace de Schwartz–Harish-Chandra

III.1.

Soit (π, V) une représentation admissible de G admettant un caractère central unitaire. On dit que π est de carré intégrable si tous les coefficients de π sont de carré intégrable sur $A_G \setminus G$.

Proposition III.1.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *π est de carré intégrable;*

(ii) *pour tout sous-groupe parabolique semi-standard $P = MU$ de G et pour tout $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_P)$, $\mathrm{Re}(\chi) \in {}^+a_P^{G*}$;*

(iii) *pour tout sous-groupe parabolique standard $P = MU$ de G, propre et maximal, et pour tout $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_P)$, $\mathrm{Re}(\chi) \in {}^+a_P^{G*}$.*

*Cf. [**C**, Théorème 4.4.6].*

Corollaire III.1.2. *Supposons π de carré intégrable. Alors pour tout $f \in \mathcal{A}(\pi)$ et tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $c > 0$ tel que pour tout $g \in G^1$, on ait l'inégalité*

$$|f(g)| \leqslant c\Xi(g)(1 + \sigma(g))^{-r}.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Preuve. On peut supposer f de la forme $f(g) = \langle \pi(g)v, \check{v}\rangle$ pour des éléments $v \in V$, $\check{v} \in \check{V}$. Grâce à I.1 (4) et à un argument de K-finitude, on peut se limiter à démontrer l'inégalité pour $g \in \bar{M}_0^+ \cap G^1$. Un argument analogue à celui de la preuve du Lemme II.1.1 nous conduit à fixer un sous-groupe parabolique standard $P = MU$ de G, des éléments $v_P \in V_P$ et $\check{v}_{\bar{P}} \in (\check{V})_{\bar{P}}$ et à majorer la fonction

$$a \mapsto \delta_P(a)^{1/2}\langle \pi_P(a)v_P, \check{v}_{\bar{P}}\rangle_P \tag{1}$$

pour $a \in \bar{A}_0^+ \cap A_M \cap G^1$. Une telle fonction est de la forme

$$a \mapsto \delta_P(a)^{1/2} \sum_{\chi\in\mathcal{E}} \chi(a) Q_\chi(H_M(a)),$$

où $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble fini de $\mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_P)$ et, pour tout χ, Q_χ est un polynôme sur a_M. D'après le Lemme II.1.1, il existe $C_1 > 0$ tel que

$$\delta_P(a)^{1/2} \leqslant C_1 \varXi(a)$$

pour tout $a \in \bar{A}_0^+$. Il existe $C_2 > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $\chi \in \mathcal{E}$ et tout $a \in A_M$,

$$|Q_\chi(H_M(a))| \leqslant C_2(1 + \sigma(a))^d.$$

Enfin, comme $\mathrm{Re}(\chi) \in {}^+a_P^{G*}$ pour tout $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_P)$, il existe $C_3 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$|\chi(a)| \leqslant C_3 q^{-\varepsilon\sigma(a)}$$

pour tout $\chi \in \mathcal{E}$ et tout $a \in \bar{A}_0^+ \cap A_M \cap G^1$. Pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe donc $c > 0$ tel que la fonction (1) soit majorée par $c\varXi(a)(1 + \sigma(a))^{-r}$. □

Lemme III.1.3. *Toute représentation admissible de carré intégrable de G est unitaire et semi-simple.*

Preuve. Soit (π, V) une telle représentation. Soit V' une sous-représentation de type fini de V et $\{v_1, \dots, v_n\}$ un sous-ensemble fini de V' engendrant V'. Notons $\mathrm{Ann}\, V'$ l'annulateur de V' dans $\check{V}$. Alors $\check{V}' = \check{V} / \mathrm{Ann}\, V'$. L'application

$$(\check{v}_1, \check{v}_2) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \int_{A_G\backslash G} \overline{\langle \pi(g)v_i, \check{v}_1\rangle} \langle \pi(g)v_i, \check{v}_2\rangle \, \mathrm{d}g$$

définit une forme hermitienne définie positive sur $\check{V}'$, invariante par G. Notons que les intégrales ont un sens d'après le Corollaire III.1.2 et le Lemme II.1.5. Donc la représentation de G dans $\check{V}'$ est unitaire. Donc aussi celle de G dans V'. Toute représentation admissible et unitaire est semi-simple. Donc la représentation de G dans V' est semi-simple. Comme V est réunion de ses sous-représentations de type fini, (π, V) est semi-simple. Toute sous-représentation irréductible étant unitaire d'après ce qui précède, (π, V) l'est aussi. □

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Soient (π_1, V_1) et (π_2, V_2) deux représentations irréductibles de carré intégrable de G. Supposons que les restrictions à A_G de leurs caractères centraux coïncident. Pour $v_1 \in V_1$, $\check{v}_1 \in \check{V}_1$, $v_2 \in V_2$, $\check{v}_2 \in \check{V}_2$, posons

$$I(v_1, \check{v}_1, v_2, \check{v}_2) = \int_{A_G \backslash G} \langle \pi_1(g) v_1, \check{v}_1 \rangle \langle v_2, \check{\pi}_2(g) \check{v}_2 \rangle \, \mathrm{d}g.$$

Cette intégrale est convergente d'après III.1.2 et II.1.5. On montre:

(2) si $\pi_1 \not\approx \pi_2$, $I(v_1, \check{v}_1, v_2, \check{v}_2) = 0$ pour tous $v_1, \check{v}_1, v_2, \check{v}_2$;

(3) si $(\pi_1, V_1) = (\pi_2, V_2)$, il existe un réel $d(\pi_1) > 0$ tel que

$$I(v_1, \check{v}_1, v_2, \check{v}_2) = d(\pi_1)^{-1} \langle v_1, \check{v}_2 \rangle \langle v_2, \check{v}_1 \rangle$$

pour tous $v_1, \check{v}_1, v_2, \check{v}_2$.

Cf. [**C**, Proposition 5.2.4]. Le réel $d(\pi_1)$ est appelé le degré formel de π_1.

III.2.

Notons $C^w_{\text{lisse}}(G)$ le sous-espace des $f \in C_{\text{lisse}}(G)$ pour lesquelles il existe $c > 0$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $g \in G$,

$$|f(g)| \leqslant c\Xi(g)(1 + \sigma(g))^r.$$

On pose

$$\mathcal{A}^w(G) = \mathcal{A}(G) \cap C^w_{\text{lisse}}(G).$$

Soit (π, V) une représentation admissible de G. On dit que π est tempérée si $\mathcal{A}(\pi) \subset \mathcal{A}^w(G)$.

Lemme III.2.1. *On a les égalités*

$$\mathcal{A}^w(G) = \bigcup_\pi \mathcal{A}(\pi) = \sum_\pi \mathcal{A}(\pi),$$

où π parcourt les représentations admissibles tempérées de G.

Preuve. Notons que $\mathcal{A}^w(G)$ est stable par l'action $\rho \times \lambda$ de $G \times G$, ceci d'après le Lemme II.1.2. Si $f \in \mathcal{A}^w(G)$, on a donc $V_{\rho\times\lambda}(f) \subset \mathcal{A}^w(G)$. Alors ρ_f est tempérée (cf. Lemme I.6.1). Mais $f \in \mathcal{A}(\rho_f)$. □

D'après le Corollaire III.1.2 toute représentation de carré intégrable est tempérée.

Proposition III.2.2. *Soit (π, V) une représentation admissible de G. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *π est tempérée;*

(ii) *pour tout sous-groupe parabolique semi-standard P de G et tout $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_P)$, $\mathrm{Re}(\chi) \in {}^+\bar{a}_P^{G*}$;*

(iii) *pour tout sous-groupe parabolique standard P de G tel que $P = G$ ou P soit propre et maximal, et pour tout $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_P)$, $\mathrm{Re}(\chi) \in {}^+\bar{a}_P^{G*}$.*

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Supposons π tempérée et soient $P = MU$ et χ comme en (ii). D'après I.2 et le Théorème I.4.1, il existe $v \in V$, $\check{v} \in \check{V}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\chi(a) = \delta_P(a)^{-1/2}\langle \pi(a)v, \check{v}\rangle$$

pour tout $a \in A_M$ tel que $|\alpha(a)|_F < \varepsilon$ pour tout $\alpha \in \Delta(P)$. Comme π est tempérée, le Lemme II.1.1 implique l'existence de $c > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\chi(a)| \leqslant c(1 + \sigma(a))^d$$

pour tout a comme ci-dessus. Ecrivons $\mathrm{Re}(\chi) = z + \sum_{\alpha\in\Delta(P)} x_\alpha \alpha$, avec $z \in a_G^*$ et $x_\alpha \in \mathbb{R}$ pour tout α. Notons $\{\omega_\alpha;\ \alpha \in \Delta(P)\}$ la base de a_M^G $(= a_M \cap a^G)$ duale de $\Delta(P)$. Il existe un réseau $L \subset a_G$ et un entier N tel que le réseau

$$L \oplus \biggl(\bigoplus_{\alpha\in\Delta(P)} \mathbb{Z} N \omega_\alpha\biggr)$$

soit inclus dans $H_M(A_M)$. La majoration ci-dessus entraîne qu'il existe $c' > 0$ et $N' \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\ell \in L$ et tout $(y_\alpha)_{\alpha\in\Delta(P)} \in \mathbb{N}^{\Delta(P)}$ vérifiant $y_\alpha > N'$ pour tout α, on ait

$$q^{-\langle z,\ell\rangle - \Sigma_\alpha N x_\alpha y_\alpha} \leqslant c'\biggl(1 + |\ell| + \sum_\alpha y_\alpha\biggr)^d.$$

Il en résulte que $z = 0$ et $x_\alpha \geqslant 0$ pour tout α, i.e. $\mathrm{Re}(\chi) \in {}^+\bar{a}_P^{G*}$.

Inversement, supposons (ii) vérifiée. Le même raisonnement que dans la preuve du Corollaire III.1.2 montre que tout coefficient de π est majoré par une fonction de la forme $g \mapsto c\varXi(g)(1 + \sigma(g))^r$. La seule modification à la preuve de III.1.2 est que l'on a seulement $|\chi(a)| \leqslant 1$ pour $a \in \bar{A}_0^+ \cap A_M$. Donc π est tempérée.

Evidemment (ii) implique (iii). Réciproquement, supposons (iii) vérifiée et soient P et χ comme en (ii). Quitte à conjuguer P, on peut supposer P standard. On peut aussi supposer $|\Delta(P)| \geqslant 2$ sinon la conclusion résulte immédiatement de (iii). Ecrivons $\mathrm{Re}(\chi) = z + \sum_{\alpha\in\Delta(P)} x_\alpha\alpha$ comme ci-dessus. Soit $\alpha \in \Delta(P)$. Introduisons le sous-groupe parabolique standard propre et maximal $P' = M'U'$ tel que $\Delta(P') = \{\alpha|_{a_{M'}}\}$. En vertu de l'égalité $\pi_P = (\pi_{P'})_{M'\cap P}$, la restriction $\mathrm{Re}(\chi)|_{a_{M'}}$ appartient à $\mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_{P'})$, i.e. $z + x_\alpha\alpha|_{a_{M'}} \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_{P'})$. Alors, d'après (iii), $z = 0$ et $x_\alpha \geqslant 0$. Ceci étant vrai pour tout α, $\mathrm{Re}(\chi) \in {}^+\bar{a}_P^{G*}$. □

Lemme III.2.3. *Soient $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G et (π, V) une représentation admissible tempérée de M. Alors la représentation $(I_P^G\pi, I_P^G V)$ de G est tempérée.*

Preuve. On peut supposer P standard. Soit $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique standard de G. Notons ${}^{P'}W^P$ l'ensemble des éléments $w \in W^G$ de longueur minimale dans leur double classe $W^{M'}wW^M$. D'après le calcul du module de Jacquet $(I_P^G\pi)_{P'}$, effectué en I.3, on a l'égalité

$$\mathcal{E}\mathrm{xp}((I_P^G\pi)_{P'}) = \bigcup_{w\in {}^{P'}W^P} \{(w\chi)|_{A_M};\ \chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_{M\cap w^{-1}.P'})\}.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Fixons $w \in {}^{P'}W^P$ et $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_{M\cap w^{-1}.P'})$. Posons $M_w = M \cap w^{-1} \cdot M'$, $M'_w = M' \cap w \cdot M$. Pour tout $\mu \in a_0^*$, notons par exemple $\mu_M = \mu|_{a_M}$ la restriction de μ à a_M. Comme π est tempérée, on a $\mathrm{Re}(\chi) \in {}^+\bar{a}_{M_w}^{M*}$, i.e. $\mathrm{Re}(\chi)$ est de la forme

$$\mathrm{Re}(\chi) = \sum_{\alpha\in\Delta_0^M - \Delta_0^{M_w}} x_\alpha \alpha_{M_w}$$

où les x_α sont $\geqslant 0$. Ou encore

$$\mathrm{Re}(\chi) = \Bigg(\sum_{\alpha\in\Delta_0^M - \Delta_0^{M_w}} x_\alpha \alpha\Bigg) + \mu$$

où $\mu \in a_0^{M_w *}$. Alors

$$\mathrm{Re}(w\chi) = \Bigg(\sum_{\alpha\in\Delta_0^M - \Delta_0^{M_w}} x_\alpha w\alpha\Bigg) + w\mu.$$

Evidemment $w\mu \in a_0^{M'_w *}$, *a fortiori* $(w\mu)_{M'} = 0$. D'après le choix de ${}^{P'}W^P$, $w\alpha \in \Sigma(P_0)$ pour tout $\alpha \in \Delta_0^M$. Alors $\mathrm{Re}(w\chi)_{M'}$ est la restriction à $a_{M'}$ d'un élément de ${}^+\bar{a}_0^{G*}$. Un tel élément appartient à ${}^+\bar{a}_{P'}^{G*}$. Les exposants de $(I_P^G\pi)_{P'}$ vérifient donc la condition requise au (iii) de la Proposition III.2.2 pour que $I_P^G\pi$ soit tempérée. □

III.3.

Soient (π, V) une représentation admissible tempérée de G et $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G. On décompose le module de Jacquet (π_P, V_P) en une somme directe

$$(\pi_P, V_P) = (\pi_P^w, V_P^w) \oplus (\pi_P^+, V_P^+)$$

en posant

$$V_P^w = \bigoplus_{\chi\in\mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_P);\,\mathrm{Re}(\chi)=0} V_{P,\chi}, \qquad V_P^+ = \bigoplus_{\chi\in\mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_P);\,\mathrm{Re}(\chi)\neq 0} V_{P,\chi}.$$

Lemme III.3.1. *La représentation (π_P^w, V_P^w) est tempérée.*

Preuve. Soit $P^M = M'U^M$ un sous-groupe parabolique semi-standard de M et $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}((\pi_P^w)_{P^M})$. Posons $P' = P^M U$. Alors $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_{P'})$. Comme π est tempérée, $\mathrm{Re}(\chi) \in {}^+\bar{a}_{P'}^{G*}$. De plus $\chi|_{a_M} \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_P^w)$. Donc $\mathrm{Re}(\chi)|_{a_M} = 0$. Alors $\mathrm{Re}(\chi) \in {}^+\bar{a}_{P^M}^{M*}$ et π_P^w vérifie la condition (ii) de la Proposition III.2.2. □

On a la version suivante de la réciprocité de Frobenius: si (π', V') est une représentation admissible tempérée de M,

$$\mathrm{Hom}_G(V, I_P^G V') = \mathrm{Hom}_M(V_P^w, V').$$

Lemme III.3.2. *Soit (π, V) une représentation admissible tempérée de G admettant un caractère central. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

(i) *π est de carré intégrable;*

(ii) *pour tout sous-groupe parabolique semi-standard propre P de G, $V_P^w = \{0\}$;*

(iii) *pour tout sous-groupe parabolique standard P de G, propre et maximal, $V_P^w = \{0\}$.*

Preuve. Cela résulte de la Proposition III.1.1 compte tenu des faits suivants:

- le caractère central de π est forcément unitaire;
- si P est propre et $\mu \in {}^+a_P^{G*}$, alors $\mu \neq 0$;
- si P est propre et maximal, si $\mu \in {}^+\bar{a}_P^{G*}$ et $\mu \neq 0$, alors $\mu \in {}^+a_P^{G*}$.

□

Lemme III.3.3. *Soient $P = MU$, $P' = M'U'$ deux sous-groupes paraboliques semi-standards de G et (π, V) une représentation admissible tempérée de M. Alors $(I_P^G\pi)_{P'}^w$ admet une filtration dont le gradué associé est*

$$\bigoplus_{s \in {}^{P'}W^P} I_{M' \cap s \cdot P}^{M'}(s\pi^w_{M \cap s^{-1} \cdot P'}).$$

Rappelons que ${}^{P'}W^P$ est un système de représentants de l'ensemble de doubles classes $W^{M'} \setminus W^G / W^M$.

Preuve. On peut supposer que P et P' sont standards et que ${}^{P'}W^P$ est l'ensemble des éléments de longueur minimale dans leur double classe. On utilise le calcul de $(I_P^G\pi)_{P'}$ effectué en I.3. Il est clair que si $s \in {}^{P'}W^P$ et $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(I_{M' \cap s \cdot P}^{M'}(s\pi^w_{M \cap s^{-1} \cdot P'}))$, alors $\mathrm{Re}(\chi) = 0$. Il suffit alors de prouver que si $s \in {}^{P'}W^P$ et $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(I_{M' \cap s \cdot P}^{M'}(s\pi^+_{M \cap s^{-1} \cdot P'}))$, on a $\mathrm{Re}(\chi) \neq 0$. Fixons de tels s, χ. Soit $\chi' \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi^+_{M \cap s^{-1} \cdot P'})$ tel que $\chi = (s\chi')|_{a_{M'}}$. Comme dans la preuve du Lemme III.2.3, on a

$$\mathrm{Re}(\chi') = \left(\sum_{\alpha \in \Delta_0^M - \Delta_0^{M_s}} x_\alpha \alpha \right) + \mu,$$

où $\mu \in a_0^{M_s^*}$ et les x_α sont $\geqslant 0$. Comme $\chi' \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi^+_{M \cap s^{-1} \cdot P'})$, il existe α tel que $x_\alpha > 0$. D'après la preuve du lemme cité, il suffit de prouver que si $\alpha \in \Delta_0^M - \Delta_0^{M_s}$, alors $(s\alpha)_{M'} \neq 0$. Or si $\alpha \in \Delta_0^M - \Delta_0^{M_s}$, il existe un sous-espace non nul g_α de l'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(M \cap s^{-1} \cdot U')$ dans lequel A_0 agit par la racine α. Alors A_0 agit par $s\alpha$ sur $Ad(s)(g_\alpha)$ qui est un sous-espace de $\mathrm{Lie}(U')$. Comme 0 n'est pas valeur propre de l'action de $A_{M'}$ dans $\mathrm{Lie}(U')$, on a $(s\alpha)_{M'} \neq 0$, ce qui achève la preuve. □

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

III.4.

Proposition III.4.1. *Soit π une représentation admissible irréductible et tempérée de G. Alors:*

(i) *il existe un sous-groupe parabolique semi-standard $P = MU$ de G et une représentation admissible irréductible de carré intégrable ω de M tels que π soit sous-quotient de $I_P^G\omega$;*

(ii) *si $(P = MU, \omega)$, $(P' = M'U', \omega')$ sont deux couples vérifiant les conditions de (i), il existe $s \in W^G$ tel que $s \cdot M = M'$ et $s\omega \simeq \omega'$.*

Preuve. Notons V l'espace de π. Soit P un sous-groupe parabolique semi-standard tel que $V_P^w \neq \{0\}$ et P soit minimal pour cette propriété. Soit (ω, E) un quotient irréductible de (π_P^w, V_P^w). Alors ω est de carré intégrable d'après le Lemme III.3.2. Par réciprocité de Frobenius $\mathrm{Hom}_G(V, I_P^G E) \neq \{0\}$. D'où (i).

Sous les hypothèses de (ii), notons E et E' les espaces de ω, resp. ω'. Remarquons que l'induite d'une représentation de carré intégrable est unitaire donc semi-simple. Un sous-quotient est donc aussi sous-module et quotient. On a $\mathrm{Hom}_G(V, I_{P'}^G E') \neq \{0\}$ donc, par réciprocité de Frobenius $\mathrm{Hom}_{M'}(V_{P'}^w, E') \neq \{0\}$. Comme V est quotient de $I_P^G E$, $V_{P'}^w$ est quotient de $(I_P^G E)_{P'}^w$, donc $\mathrm{Hom}_{M'}((I_P^G E)_{P'}^w, E') \neq \{0\}$. D'après le Lemme III.3.3, il existe $s \in {}^{P'}W^P$ tel que $\mathrm{Hom}_{M'}(I_{M' \cap s \cdot P}^{M'}(sE_{M \cap s^{-1} \cdot P'}^w), E') \neq \{0\}$. Fixons un tel s. En particulier $E_{M \cap s^{-1} \cdot P'}^w \neq \{0\}$ donc, d'après le Lemme III.3.2, $M \cap s^{-1} \cdot P' = M$, i.e. $M \subset s^{-1} \cdot M'$. Et l'on a $\mathrm{Hom}_{M'}(I_{M' \cap s \cdot P}^{M'}(sE), E') \neq \{0\}$ ou encore $\mathrm{Hom}_{M'}(E', I_{M' \cap s \cdot P}^{M'}(sE)) \neq \{0\}$. Donc $\mathrm{Hom}_{M' \cap s \cdot P}(E'^w_{M' \cap s \cdot P'} sE) \neq \{0\}$. En particulier $E'^w_{M' \cap s \cdot P} \neq \{0\}$, donc $M' \cap s \cdot P = M'$, i.e. $M' \subset s \cdot M$. Finalement $M' = s \cdot M$ et $\mathrm{Hom}_{M'}(E', sE) \neq \{0\}$, ce que l'on voulait démontrer. □

III.5.

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G. Pour une fonction $f : A_M \to \mathbb{C}$, on écrit

$$\lim_{a \xrightarrow{P} \infty} f(a) = 0$$

si pour tous $\varepsilon, \eta > 0$, il existe $R > 0$ tel que, pour tout $a \in A_M$ vérifiant les conditions

(i) $\langle \alpha, H_M(a) \rangle > R$ pour tout $\alpha \in \Sigma(P)$;

(ii) $\langle \alpha, H_M(a) \rangle > \eta \langle \beta, H_M(a) \rangle$ pour tous $\alpha, \beta \in \Sigma(P)$,

on ait $|f(a)| < \varepsilon$.

Lemme III.5.1. *Soit $f \in \mathcal{A}^w(G)$. Il existe un unique élément $f_P^w \in \mathcal{A}^w(M)$ tel que pour tout $m \in M$,*

$$\lim_{a \xrightarrow{P} \infty} [\delta_P(ma)^{-1/2} f(ma) - f_P^w(ma)] = 0.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Preuve. On peut supposer qu'il existe une représentation admissible tempérée (π, V) de G et des éléments $v \in V$ et $\check{v} \in \check{V}$ tels que $f(g) = \langle \pi(g)v, \check{v}\rangle$. Notons $j_P^+ : V \to V_P^+$, $j_P^w : V \to V_P^w$, $\check{j}_{\bar{P}}^+ : \check{V} \to (\check{V})_{\bar{P}}^+$, $\check{j}_{\bar{P}}^w : \check{V} \to (\check{V})_{\bar{P}}^w$ les projections naturelles. Définissons $f_P^w \in \mathcal{A}^w(M)$ par

$$f_P^w(m) = \langle \pi_P^w(m) j_P^w(v), \check{j}_{\bar{P}}^w(\check{v})\rangle_P.$$

Fixons $m \in M$, définissons une fonction $\varphi : A_M \to \mathbb{C}$ par

$$\varphi(a) = f_P(ma) - f_P^w(ma).$$

On a l'égalité

$$\varphi(a) = \langle \pi_P^+(ma) j_P^+(v), \check{j}_{\bar{P}}^+(\check{v})\rangle_P.$$

Il existe un ensemble fini $\mathcal{E} \subset \mathrm{Hom}(A_M, \mathbb{C}^*)$ et pour tout $\chi \in \mathcal{E}$, un polynôme Q_χ sur a_M de sorte que

$$\left.\begin{array}{c}\text{pour tout } a \in A_M,\ \varphi(a) = \displaystyle\sum_{\chi \in \mathcal{E}} Q_\chi(H_M(a))\chi(a),\\ \text{pour tout } \chi \in \mathcal{E},\ \mathrm{Re}(\chi) \in {}^{+}\bar{a}_P^{G*} \text{ et } \mathrm{Re}(\chi) \neq 0.\end{array}\right\} \tag{1}$$

Ces conditions assurent que

$$\lim_{a \xrightarrow{P} \infty} \varphi(a) = 0.$$

Mais alors on a aussi

$$\lim_{a \xrightarrow{P} \infty} [\delta_P(ma)^{-1/2} f(ma) - f_P^w(ma)] = 0.$$

Donc f_P^w vérifie la condition requise.

Supposons que deux éléments f_P^w et $f_P'^w$ de $\mathcal{A}^w(M)$ vérifient cette condition. Fixons $m \in M$ et définissons une fonction $\varphi : A_M \to \mathbb{C}$ par

$$\varphi(a) = f_P^w(ma) - f_P'^w(ma).$$

Il existe $\mathcal{E}$ et des polynômes Q_χ comme ci-dessus de sorte que (1) soit vérifiée et $\mathrm{Re}(\chi) = 0$ pour tout $\chi \in \mathcal{E}$. La fonction φ vérifie

$$\lim_{a \xrightarrow{P} \infty} \varphi(a) = 0.$$

Il en est de même de toute fonction dans l'espace engendré par les translatés de φ par des élément de A_M. Or tout élément de $\mathcal{E}$ appartient à cet espace. Donc

$$\lim_{a \xrightarrow{P} \infty} \chi(a) = 0$$

pour tout $\chi \in \mathcal{E}$. Cela contredit l'unitarité des éléments de $\mathcal{E}$, sauf si $\mathcal{E} = \emptyset$. Donc $\mathcal{E} = \emptyset$, $\varphi = 0$ et $f_P^w = f_P'^w$. $\square$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

On appelle f_P^w le terme constant faible de f le long de P. Pour $f \in \mathcal{A}^w(G)$, on définit une application

$$f_P^{w,\mathrm{Ind}} : G \times G \to \mathcal{A}^w(M)$$

par $f_P^{w,\mathrm{Ind}}(g_1, g_2) = (\rho(g_1)\lambda(g_2)f)_P^w$. Cette application vérifie des propriétés analogues à celles de l'application f_P^{Ind}.

III.6.

Pour toute $f \in C_{\mathrm{lisse}}(G)$ (cf. I.6) et tout $r \in \mathbb{R}$, posons

$$\nu_r(f) = \sup\{|f(g)|\Xi(g)^{-1}(1+\sigma(g))^r;\ g \in G\}.$$

Pour tout sous-groupe ouvert compact H de G, on note $\mathcal{C}_H$ l'espace des $f \in C(H \backslash G / H)$ telles que $\nu_r(f)$ soit fini pour tout $r \in \mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}_H$ de la topologie définie par les normes ν_r. On pose

$$\mathcal{C}(G) = \bigcup_H \mathcal{C}_H,$$

où H parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de G. On munit $\mathcal{C}(G)$ de la topologie limite inductive des topologies des $\mathcal{C}_H$ [**B**, § 4.6]. L'espace $\mathcal{C}(G)$ est un espace vectoriel topologique localement convexe et complet [**B**, § 4.6, Proposition 9]. On prendra garde au fait qu'il n'est pas métrisable. La propriété suivante est vérifiée:

(1) si E est un espace vectoriel complexe, topologique, localement convexe et $\ell : \mathcal{C}(G) \to E$ une application linéaire, alors ℓ est continue si et seulement si pour tout H, $\ell|_{\mathcal{C}_H}$ est continue.

L'espace $C_c^\infty(G)$ est inclus et dense dans $\mathcal{C}(G)$. Pour $f \in \mathcal{C}(G)$ et $g_1, g_2 \in G$, la fonction $\rho(g_1)\lambda(g_2)f$ appartient à $\mathcal{C}(G)$ (cf. I.6 et Lemme II.1.2). L'application

$$G \times G \times \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G), \qquad (g_1, g_2, f) \mapsto \rho(g_1)\lambda(g_2)f$$

est continue.

Si $f_1, f_2 \in C_{\mathrm{lisse}}(G)$ sont telles que pour tout $g \in G$, l'intégrale

$$\int_G f_1(h) f_2(h^{-1}g)\,\mathrm{d}h$$

soit absolument convergente, on note $f_1 * f_2(g)$ cette intégrale, ce qui définit une fonction $f_1 * f_2 \in C_{\mathrm{lisse}}(G)$.

Lemme III.6.1. *Pour $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(G)$, l'intégrale ci-dessus est absolument convergente pour tout $g \in G$. La fonction $f_1 * f_2$ appartient à $\mathcal{C}(G)$. L'application*

$$\mathcal{C}(G) \times \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G), \qquad (f_1, f_2) \mapsto f_1 * f_2$$

est séparément continue en chacune des variables.

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Preuve. D'après (1), il suffit de fixer H et de démontrer l'énoncé obtenu en remplaçant $\mathcal{C}(G)$ par $\mathcal{C}_H$. Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_H$, r, r' des réels > 0 et $g \in G$. On a

$$\int_G |f_1(h)f_2(h^{-1}g)|\,\mathrm{d}h \leqslant \nu_{r'}(f_1)\nu_r(f_2)\int_G \Xi(h)\Xi(h^{-1}g)(1+\sigma(h))^{-r'}(1+\sigma(h^{-1}g))^{-r}\,\mathrm{d}h.$$

Pour tout h,

$$1+\sigma(g) \leqslant (1+\sigma(h))(1+\sigma(h^{-1}g)),$$

d'où

$$\int_G |f_1(h)f_2(h^{-1}g)|\,\mathrm{d}h \leqslant \nu_{r'}(f_1)\nu_r(f_2)(1+\sigma(g))^{-r}\int_G \Xi(h)\Xi(h^{-1}g)(1+\sigma(h))^{r-r'}\,\mathrm{d}h.$$

Remplaçons h par kh dans l'intégrale ci-dessus et intégrons sur $k \in K$. Grâce aux Lemmes II.1.3 et II.1.4, on obtient

$$\int_G |f_1(h)f_2(h^{-1}g)|\,\mathrm{d}h \leqslant \nu_{r'}(f_1)\nu_r(f_2)\Xi(g)(1+\sigma(g))^{-r}\int_G \Xi(h)^2(1+\sigma(h))^{r-r'}\,\mathrm{d}h.$$

Si $r'-r$ est assez grand, l'intégrale ci-dessus est convergente d'après le Lemme II.1.5. Cela démontre la première assertion de l'énoncé. On obtient de plus

$$\nu_r(f_1 * f_2) \leqslant c\nu_{r'}(f_1)\nu_r(f_2),$$

d'où la continuité. □

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G. Pour $f \in \mathcal{C}(G)$ et $m \in M$, posons

$$f^{(P)}(m) = \delta_P(m)^{1/2}\int_U f(mu)\,\mathrm{d}u.$$

Il résulte de la Proposition II.4.5 appliquée à $\bar{P}$ que l'intégrale est convergente et que la fonction $f^{(P)}$ ainsi définie sur M appartient à $\mathcal{C}(M)$. De plus l'application

$$\mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(M), \qquad f \mapsto f^{(P)}$$

est continue. On définit un homomorphisme $G \times G$ équivariant

$$\mathcal{C}(G) \to I_{P\times P}^{G\times G}\mathcal{C}(M), \qquad f \mapsto f^{(P),\mathrm{Ind}}$$

par

$$f^{(P),\mathrm{Ind}}(g_1, g_2) = (\rho(g_1)\lambda(g_2)f)^{(P)}$$

pour tous $g_1, g_2 \in G$. Si $P' = M'U'$ est un sous-groupe parabolique semi-standard contenant P, on a comme en I.6 un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & I_{P\times P}^{G\times G}\mathcal{C}(M) \arrow[dr] & \\
\mathcal{C}(G) \arrow[ur] \arrow[dr] & & I_{P'\times P'}^{G\times G} I_{M'\cap P\times M'\cap P}^{M'\times M'}\mathcal{C}(M) \\
 & I_{P'\times P'}^{G\times G}\mathcal{C}(M') \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

III.7.

Remarquons que si $\varphi \in C^w_{\text{lisse}}(G)$ et $f \in \mathcal{C}(G)$, l'intégrale

$$\int_G f(g)\varphi(g)\,\mathrm{d}g$$

est absolument convergente et que l'application qui à f associe cette intégrale est continue. La preuve est identique à celle du Lemme III.6.1 où l'on choisit $r \in \mathbb{R}$ tel que $\nu_r(\varphi)$ soit fini. En particulier, soient (π, V) une représentation admissible tempérée de G, $v \in V$, $\check{v} \in \check{V}$. Pour $f \in \mathcal{C}(G)$, l'intégrale

$$\int_G f(g)\langle \pi(g)v, \check{v}\rangle\,\mathrm{d}g$$

est absolument convergente. On vérifie qu'il existe un unique élément, noté $\pi(f)v$, de V, tel que pour tout $\check{v}$, l'intégrale ci-dessus soit égale à $\langle \pi(f)v, \check{v}\rangle$. Cela définit un opérateur $\pi(f) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. On vérifie que $\pi(f_1 * f_2) = \pi(f_1)\pi(f_2)$ pour tous $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(G)$. Comme π est admissible, $\pi(f)$ est de rang fini pour tout $f \in \mathcal{C}(G)$. On pose

$$\theta_\pi(f) = \operatorname{trace}\pi(f).$$

La forme linéaire ainsi définie sur $\mathcal{C}(G)$ est continue.

Soient (ω, E) une représentation admissible de carré intégrable de G, $f \in \mathcal{A}(\omega)$ et $\varphi \in C_c(G/G^1)$. Il résulte du Corollaire III.1.2 que la fonction produit $f\varphi$ appartient à $\mathcal{C}(G)$.

On note $\mathcal{E}_2(G)$ l'ensemble des classes de représentations admissibles irréductibles de carré intégrable de G. Le groupe $\operatorname{Im} X(G)$ agit sur $\mathcal{E}_2(G)$ par $(\chi, \omega) \mapsto \omega \otimes \chi$. Soit $\mathcal{O}$ une orbite pour cette action. Si l'on choisit un point base $\omega \in \mathcal{O}$, on a une bijection

$$\operatorname{Im} X(G)/\operatorname{Stab}_{X(G)}(\omega) \to \mathcal{O}, \qquad \chi \mapsto \omega \otimes \chi,$$

où $\operatorname{Stab}_{X(G)}(\omega) = \{\chi \in X(G);\ \omega \otimes \chi \simeq \omega\}$ (c'est un groupe fini). On appelle polynôme sur $\mathcal{O}$ une fonction $p : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ telle qu'il existe un polynôme p' sur $X(G)$ de sorte que $p(\omega \otimes \chi) = p'(\chi)$ pour tout $\chi \in \operatorname{Im} X(G)$. Cette définition ne dépend pas du choix du point base.

Proposition III.7.1. *Soient $\mathcal{O} \subset \mathcal{E}_2(G)$ une orbite pour l'action de $\operatorname{Im} X(G)$ et p un polynôme sur $\mathcal{O}$. Pour toute représentation admissible tempérée (π, V) de G, il existe un opérateur $\pi(p) \in \mathrm{End}_G V$ de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées:*

(i) *si (π_1, V_1) et (π_2, V_2) sont deux représentations admissibles tempérées de G et $f \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$, $\pi_2(p) \circ f = f \circ \pi_1(p)$;*

(ii) *si π est irréductible et $\pi \notin \mathcal{O}$, $\pi(p) = 0$;*

(iii) *si $\pi \in \mathcal{O}$, $\pi(p)$ est l'homothétie de rapport $p(\pi)$.*

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Fixons $(\omega, E) \in \mathcal{O}$. Pour tout sous-groupe ouvert compact H de G, notons ε_H et ψ_H les fonctions sur G définies par

$$\varepsilon_H(g) = \begin{cases} 0, & \text{si } g \notin H, \\ (\operatorname{mes} H)^{-1}, & \text{si } g \in H, \end{cases}$$
$$\psi_H(g) = \operatorname{trace}[\check{\omega}(\varepsilon_H)\check{\omega}(g)\check{\omega}(\varepsilon_H)].$$

Soit $\varphi \in C_c(G/G^1)$. Posons $\varphi_H = \varphi\psi_H$. Comme $\psi_H \in \mathcal{A}(\check{\omega})$, on a $\varphi_H \in \mathcal{C}(G)$. On vérifie facilement les propriétés:

(1) si $g \in G$, $\rho(g)\lambda(g)\varphi_H = \varphi_{gHg^{-1}}$;

(2) si H' est un sous-groupe ouvert compact de G contenant H, $\varphi_H * \varepsilon_{H'} = \varphi_{H'}$.

Soient (π, V) une représentation admissible tempérée de G et $v \in V$. Soit $H(v)$ un sous-groupe ouvert compact de G fixant v. On vérifie grâce à (2) que si $H \subset H(v)$,

$$\pi(\varphi_H)v = \pi(\varphi_{H(v)})v.$$

On définit un opérateur $\pi[\varphi] \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} V$ par

$$\pi[\varphi]v = \pi(\varphi_H)v,$$

où H est n'importe quel sous-groupe ouvert compact de G fixant v. Pour $g \in G$, on a $\pi(g)\pi(\varphi_H)\pi(g^{-1}) = \pi(\rho(g)\lambda(g)\varphi_H)$. On montre alors grâce à (1) que $\pi[\varphi] \in \operatorname{End}_G V$.

Supposons π irréductible et calculons $\pi[\varphi]$. Soient $v \in V$, $\check{v} \in \check{V}$ et H un sous-groupe ouvert compact de G fixant v et $\check{v}$. On a les égalités

$$\langle \pi[\varphi]v, \check{v}\rangle = \int_G \varphi(g)\psi_H(g)\langle \pi(g)v, \check{v}\rangle \, \mathrm{d}g = \int_{G^1\backslash G} \varphi(g) f(g) \, \mathrm{d}g,$$

où

$$f(g) = \int_{G^1} \psi_H(xg)\langle \pi(xg)v, \check{v}\rangle \, \mathrm{d}x.$$

Introduisons les caractères centraux χ_ω et χ_π de ω et π. Il est clair que $f = 0$ si les restrictions de χ_ω et χ_π à $A_G \cap G^1$ sont distinctes. Supposons ces restrictions égales. Posons

$$S = \{\chi \in X(G);\ \chi|_{A_G} = \chi_\pi\chi_\omega^{-1}\}.$$

Alors S est un ensemble fini non vide. Par inversion de Fourier sur le groupe abélien fini $G^1 A_G \setminus G$, on a l'égalité

$$f(g) = \sum_{\chi \in S} \chi(g) f_\chi,$$

où

$$\begin{aligned} f_\chi &= [G : G^1 A_G]^{-1} \sum_{g \in G^1 A_G \backslash G} f(g)\chi^{-1}(g) \\ &= [G : G^1 A_G]^{-1} \int_{A_G\backslash G} \psi_H(g)\langle \pi(g)v, \check{v}\rangle \chi^{-1}(g) \, \mathrm{d}g. \end{aligned}$$

D'après III.1 (2), qui se généralise au cas où π_2 est seulement tempérée, cette intégrale est nulle si $\pi \not\simeq \omega \otimes \chi$. Si $\pi \simeq \omega \otimes \chi$, elle vaut $d(\pi)^{-1}\langle v, \check{v}\rangle$ d'après III.1 (3). Notons qu'alors $d(\pi) = d(\omega)$.

Posons alors

$$\begin{aligned} S(\pi) &= \{\chi \in X(G);\ \pi \simeq \omega \otimes \chi\}, \\ P_\varphi(\pi) &= d(\omega)^{-1}[G : G^1 Z_G]^{-1} \sum_{\chi \in S(\pi)} \int_{G^1\backslash G} \varphi(g)\chi(g)\,\mathrm{d}g. \end{aligned}$$

On obtient

$$\langle \pi[\varphi]v, \check{v}\rangle = P_\varphi(\pi)\langle v, \check{v}\rangle,$$

i.e. $\pi[\varphi]$ est l'homothétie de rapport $P_\varphi(\pi)$.

Comme π est tempérée, $S(\pi) \subset \operatorname{Im} X(G)$. On a $S(\pi) \neq \phi$ si et seulement si $\pi \in \mathcal{O}$. D'autre part $P_\varphi|_{\mathcal{O}}$ est un polynôme et en faisant varier φ, on obtient ainsi tous les polynômes sur $\mathcal{O}$. Revenons alors au polynôme p de l'énoncé. On choisit φ tel que $p_\varphi|_{\mathcal{O}} = p$ et l'on pose $\pi(p) = \pi[\varphi]$. Les propriétés (ii) et (iii) de l'énoncé résultent du calcul ci-dessus. La propriété (i) est immédiate. $\square$

Corollaire III.7.2. *Soient $\omega \in \mathcal{E}_2(G)$ et (π, V) une représentation admissible tempérée de G. Alors il existe une unique décomposition en somme directe:*

$$(\pi, V) = (\pi_1, V_1) \oplus (\pi_2, V_2)$$

telle que

(i) *tous les sous-quotients irréductibles de π_1 sont isomorphes à ω;*

(ii) *aucun sous-quotient irréductible de π_2 n'est isomorphe à ω.*

Preuve. Soit $\mathcal{O}$ l'orbite de ω. Pour $\omega' \in \mathcal{O}$, $\omega'|_K \simeq \omega|_K$. Comme π est admissible, l'ensemble Σ des $\omega' \in \mathcal{O}$ intervenant comme sous-quotient de π est fini. Soit p un polynôme sur $\mathcal{O}$ s'annulant en tout point de $\Sigma - \{\omega\}$ et tel que $p(\omega) = 1$. Posons

$$V_1 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi(p)^n V, \qquad V_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}\pi(p)^n.$$

Ces sous-espaces sont invariants par G. Soit H un sous-groupe ouvert compact de G. Comme V^H est de dimension finie, il existe $n(H)$ tel que pour tout $n \geqslant n(H)$,

$$\pi(p)^n V^H = \pi(p)^{n(H)} V^H, \qquad (\operatorname{Ker}\pi(p)^n) \cap V^H = (\operatorname{Ker}\pi(p)^{n(H)}) \cap V^H. \tag{3}$$

On en déduit aisément

$$\pi(p)^n V^H \cap (\operatorname{Ker}\pi(p)^n) = \{0\} \tag{4}$$

si $n \geqslant n(H)$, puis, par comparaison des dimensions, toujours pour $n \geqslant n(H)$:

$$V^H = \pi(p)^n V^H \oplus ((\operatorname{Ker}\pi(p)^n) \cap V^H) = V_1^H \oplus V_2^H.$$

En faisant varier H, on obtient $V = V_1 \oplus V_2$.

On déduit de (3) et (4) que l'opérateur $\pi_1(p)$ est bijectif tandis que $\pi_2(p)$ est nilpotent. Mais alors $\pi_1(p)$, resp. $\pi_2(p)$, agit sur tout sous-quotient irréductible de V_1, resp. V_2, par un scalaire non nul, resp. par 0. Or $\omega(p) \neq 0$ et, d'après la définition de p, tout sous-quotient irréductible π' de π pour lequel $\pi'(p) \neq 0$ est isomorphe à ω. On en déduit les propriétés (i) et (ii) de l'énoncé. □

Soient $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G et $\omega \in \mathcal{E}_2(M)$. Posons

$$W(G|M) = \{s \in W^G;\ s \cdot M = M\}/W^M.$$

Pour $s \in W(G|M)$, la classe $s\omega$ est bien définie. On dit que ω est G-régulière si $\omega \not\simeq s\omega$ pour tout $s \in W(G|M) - \{1\}$.

Corollaire III.7.3. *Supposons ω G-régulière. Alors pour tout $P' \in \mathcal{P}(M)$, $(I_P^G\omega)_{P'}^w$ est semi-simple et isomorphe à*

$$\bigoplus_{s\in W(G|M)} s\omega.$$

Preuve. Cela résulte des Lemmes III.3.2 et III.3.3 et du Corollaire III.7.2. □

IV. Opérateurs d'entrelacement

IV.1.

Soient $P = MU$, $P' = MU'$ deux sous-groupes paraboliques semi-standards de G, de même Levi, et (π, V) une représentation admissible de M. Posons

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}} = \{\pi \otimes \chi;\ \chi \in X(M)\}$$

($\pi \otimes \chi$ désigne ici une classe d'isomorphie de représentations). Notons B l'algèbre des polynômes sur la variété algébrique $X(M)$. Comme en III.7, on définit la notion de polynôme ou de fonction rationnelle sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$: une fonction $f : \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ est un polynôme s'il existe $b \in B$ tel que $f(\pi \otimes \chi) = b(\chi)$ pour tout $\chi \in X(M)$. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$, f est dite rationnelle s'il existe $b_1, b_2 \in B$ tels que $b_1(\chi)f(\pi \otimes \chi) = b_2(\chi)$ et $b_1(\chi) \neq 0$ pour tout $\chi \in X(M)$ tel que $\pi \otimes \chi \in \mathcal{U}$. On peut dans ce cas prolonger f à $\{\pi \otimes \chi;\ \chi \in X(M),\ b_1(\chi) \neq 0\}$.

Pour éviter les confusions notons V_χ l'espace V quand il est muni de la représentation $\pi \otimes \chi$. Notons $I_{K\cap P}^K V$ l'espace des fonctions $f : K \to V$ invariantes à droite par un sous-groupe ouvert de K, telles que $f(muk) = \pi(m)f(k)$ pour tous $m \in M \cap K$, $u \in U \cap K$, $k \in K$. L'application de restriction à K

$$\mathrm{res}_P^K(\pi) : I_P^G V \to I_{K\cap P}^K V$$

est un isomorphisme. Remarquons que $I_{K\cap P}^K V_\chi = I_{K\cap P}^K V$ pour tout $\chi \in X(M)$. Supposons donné, pour toute représentation (π', V') telle que $\pi' \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, un homomorphisme G-invariant

$$A(\pi') : I_P^G V' \to I_{P'}^G V'.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Supposons que $A(\pi')$ ne dépende que de la classe de π' en ce sens que si (π'', V'') est isomorphe à (π', V') et si $\varphi : V' \to V''$ est un isomorphisme, le diagramme ci-dessous soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} I_P^G V' & \xrightarrow{A(\pi')} & I_{P'}^G V' \\ \downarrow & & \downarrow \\ I_P^G V'' & \xrightarrow{A(\pi'')} & I_{P'}^G V'' \end{array}$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes déduits de φ par fonctorialité.

On peut identifier l'homomorphisme $A(\pi \otimes \chi)$ à l'homomorphisme

$$\operatorname{res}_{P'}^K(\pi \otimes \chi) A(\pi \otimes \chi) (\operatorname{res}_P^K(\pi \otimes \chi))^{-1}$$

qui appartient à $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(I_{K\cap P}^K V, I_{K\cap P'}^K V)$. Usuellement, on notera encore $A(\pi \otimes \chi)$ cet homomorphisme. On dit que A est polynomial si pour tout $f \in I_{K\cap P}^K V$, il existe des ensembles finis $\{f_1, \dots, f_r\} \subset I_{K\cap P'}^K V$, $\{b_1, \dots, b_r\} \subset B$ tels que

$$A(\pi \otimes \chi) f = \sum_{i=1}^r b_i(\chi) f_i$$

pour tout $\chi \in X(M)$. De même, si $A(\pi')$ est défini seulement pour $\pi' \in \mathcal{U}$, où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, on dit que A est rationnel s'il existe $b \in B$ et, pour tout $f \in I_{K\cap P}^K V$, il existe $\{f_1, \dots, f_r\}$ et $\{b_1, \dots, b_r\}$ tels que

$$b(\chi) A(\pi \otimes \chi) f = \sum_{i=1}^r b_i(\chi) f_i$$

et $b(\chi) \neq 0$ pour tout χ tel que $\pi \otimes \chi \in \mathcal{U}$. On peut encore dans ce cas prolonger A à $\{\pi\otimes\chi;\ \chi \in X(M),\ b(\chi) \neq 0\}$. On peut aussi formuler ces définitions de la façon suivante. Pour $m \in M$, notons $b_m \in B$ le polynôme défini par $b_m(\chi) = \chi(m)$. Introduisons la B-famille algébrique (π_B, V_B) de représentations admissibles de M définie par

$$V_B = V \otimes_{\mathbb{C}} B, \qquad \pi_B(m)(v \otimes b) = \pi(m) v \otimes b_m b$$

pour tous $m \in M$, $v \in V$, $b \in B$. Pour tout $\chi \in X(M)$, notons B_χ l'idéal maximal de B formé des fonctions qui s'annulent en χ. De (π_B, V_B) se déduit une représentation spécialisée en χ, d'espace $V_B \otimes_B B/B_\chi$. Elle est isomorphe à $(\pi \otimes \chi, V_\chi)$. De même, la représentation déduite de $(I_P^G \pi_B, I_P^G V_B)$ par spécialisation en χ est isomorphe à $(I_P^G(\pi \otimes \chi), I_P^G V_\chi)$. On note sp_χ l'application de spécialisation en χ (de V_B dans V_χ ou de $I_P^G V_B$ dans $I_P^G V_\chi$, etc.). Alors l'opérateur A ci-dessus est polynomial si et seulement si il existe un homomorphisme de $G-B$-modules $A_B : I_P^G V_B \to I_{P'}^G V_B$ tel que pour tout $\chi \in X(M)$, $A(\pi \otimes \chi) \operatorname{sp}_\chi = \operatorname{sp}_\chi A_B$. On traduit de façon analogue le fait que A soit rationnel.

Soient $f \in I_P^G V$ et $g \in G$. Supposons qu'il existe $v \in V$ tel que pour tout $\check{v} \in \check{V}$, l'intégrale

$$\int_{U \cap U' \backslash U'} \langle f(u'g), \check{v} \rangle \, \mathrm{d}u'$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

soit abosolument convergente, égale à $\langle v, \check{v}\rangle$. Dans ce cas nous poserons

$$\int_{U\cap U'\backslash U'} f(u'g)\,\mathrm{d}u' = v.$$

Supposons ces conditions vérifiées pour tous f, g. Alors on définit un homomorphisme

$$J_{P'|P}(\pi) : I_P^G V \to I_{P'}^G V$$

par

$$(J_{P'|P}(\pi)f)(g) = \int_{U\cap U'\backslash U'} f(u'g)\,\mathrm{d}u'.$$

Nous dirons que $J_{P'|P}(\pi)$ est 'défini par des intégrales convergentes'. L'opérateur $J_{P'|P}(\pi)$ est G-invariant.

Théorème IV.1.1. *Supposons π de longueur finie. Alors il existe $R \in \mathbb{R}$ tel que si $\langle \mathrm{Re}(\chi), \alpha\rangle > R$ pour tout $\alpha \in \Sigma(P)\cap\Sigma(\bar{P}')$, $J_{P'|P}(\pi\otimes\chi)$ soit défini par des intégrales convergentes. L'opérateur $J_{P'|P}$ ainsi défini sur un cône de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ est rationnel.*

Preuve. Supposons d'abord $V = \mathbb{C}$, π triviale et P' adjacent à P. Soient $\chi \in X(M)$, $f \in I_P^G V_\chi$ et $g \in G$. Notons que $U\cap U' \setminus U' \simeq U'\cap\bar{U}$. Pour $u' \in U'\cap\bar{U}$, on a l'égalité

$$f(u'g) = \chi\delta_P^{1/2}(m_P(u'))f(k_P(u')g).$$

Il existe donc $C_1 > 0$ tel que pour tout u'

$$|f(u'g)| \leqslant C_1|\chi\delta_P^{1/2}(m_P(u'))|. \tag{1}$$

Soit α l'unique élément de $\Delta(P)\cap\Sigma(\bar{P}')$. Alors $H_P(m_P(u'))$ est proportionnel à $\check{\alpha}$. On en déduit

$$\langle \mathrm{Re}(\chi), H_P(m_P(u'))\rangle = r(\chi)\langle \mathrm{Re}(\delta_P), H_P(m_P(u'))\rangle,$$

où

$$r(\chi) = \langle \mathrm{Re}(\chi), \check{\alpha}\rangle\langle \mathrm{Re}(\delta_P), \check{\alpha}\rangle^{-1}.$$

D'où

$$|\chi(m_P(u'))| = \delta_P(m_P(u'))^{r(\chi)}.$$

On peut supposer P standard. Soit α_1 l'unique élément de Δ_0 tel que $\alpha = \alpha_1|_{a_M}$ et soit M_1 le Lévi standard tel que $\Delta_0^{M_1} = \Delta_0^M \cup \{\alpha_1\}$. Alors $U'\cap\bar{U} = M_1\cap\bar{U}$. Pour tout $u' \in M_1\cap\bar{U}$, $\delta_P(m_P(u')) = \delta_{P\cap M_1}^{M_1}(m_{P\cap M_1}(u'))$. En appliquant le Lemme II.3.4 au groupe M_1 et à son sous-groupe parabolique $P\cap M_1$, puis à $P_0\cap M_1$, on voit qu'il existe $C_2 > 0$ et $r > 0$ tels que pour tout $u' \in M_1\cap\bar{U}$,

$$\delta_{P\cap M_1}^{M_1}(m_{P\cap M_1}(u')) \leqslant C_2\delta_0^{M_1}(m_{P_0\cap M_1}(u'))^r.$$

Finalement il existe $C_3 > 0$ tel que, pour tout $u' \in M_1\cap\bar{U}$,

$$|f(u'g)| \leqslant C_3\delta_0^{M_1}(m_{P_0\cap M_1}(u'))^{r(r(\chi)+1/2)}.$$

D'après les Lemmes II.3.4 et II.4.2, l'intégrale

$$\int_{U'\cap\bar{U}} |f(u'g)|\,\mathrm{d}u'$$

est donc convergente pourvu que $r(\chi)$ soit assez grand, i.e. que $\langle \mathrm{Re}(\chi), \check{\alpha}\rangle$ le soit.

Supposons encore $V = \mathbb{C}$ et π triviale, mais P' quelconque. Soient χ, f, g comme ci-dessus. On a encore la majoration (1) et il s'agit de montrer que, sous les hypothèses de l'énoncé, l'intégrale

$$\int_{U'\cap\bar{U}} |\chi\delta_P^{1/2}(m_P(u'))|\,\mathrm{d}u' \tag{2}$$

est convergente. On peut supposer χ à valeurs positives. Pour deux paraboliques $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(M)$, posons $d(P_1, P_2) = \sharp(\Sigma_{\mathrm{red}}(P_1) \cap \Sigma_{\mathrm{red}}(\bar{P}_2))$. Supposons $d(P', P) \geqslant 2$. Fixons un parabolique $P'' \in \mathcal{P}(M)$ tel que $d(P', P'') = 1$, $d(P'', P) = d(P', P) - 1$. Notons $e_{P,\chi}$ l'unique élément de $I_P^G V_\chi$ invariant par K et tel que $e_{P,\chi}(1) = 1$. On a

$$\chi\delta_P^{1/2}(m_P(u')) = e_{P,\chi}(u')$$

pour tout $u' \in U' \cap \bar{U}$. D'autre part $U' \cap \bar{U} = U'' \cap \bar{U} \cdot U' \cap \bar{U}''$. L'intégrale (2) est égale à

$$\int_{U'\cap\bar{U}''} \int_{U''\cap\bar{U}} e_{P,\chi}(u''u')\,\mathrm{d}u''\,\mathrm{d}u'.$$

Comme la fonction à intégrer est à valeurs > 0, il suffit de montrer que l'intégrale intérieure est convergente et que, si l'on note

$$e(h) = \int_{U''\cap\bar{U}} e_{P,\chi}(u''h)\,\mathrm{d}u'' \tag{3}$$

pour tout $h \in G$, alors

$$\int_{U'\cap\bar{U}''} e(u')\,\mathrm{d}u' \tag{4}$$

est convergente. En raisonnant par récurrence sur $d(P', P)$, on peut supposer qu'il existe R'' tel que si $\langle \mathrm{Re}(\chi), \check{\alpha}\rangle > R''$ pour tout $\alpha \in \Sigma(P) \cap \Sigma(\bar{P}'')$, alors l'intégrale (3) est convergente pour tout h. Mais alors e est proportionnel à $e_{P'',\chi}$. D'après le premier cas traité, il existe R' tel que si $\langle \mathrm{Re}(\chi), \check{\alpha}\rangle > R'$ pour tout $\alpha \in \Sigma(P'') \cap \Sigma(\bar{P}')$, l'intégrale (4) soit convergente. Comme

$$\Sigma(P) \cap \Sigma(\bar{P}') = [\Sigma(P) \cap \Sigma(\bar{P}'')] \cup [\Sigma(P'') \cap \Sigma(\bar{P}')],$$

on obtient l'assertion de l'énoncé.

Passons au cas général. Soient $\chi \in X(M)$, $f \in I_P^G V_\chi$, $g \in G$, $\check{v} \in \check{V}_\chi$. On doit étudier

$$\int_{U\cap U'\backslash U'} |\langle f(u'g), \check{v}\rangle|\,\mathrm{d}u'. \tag{5}$$

On a encore $U \cap U' \backslash U' \simeq U' \cap \bar{U}$. Pour $u' \in U' \cap \bar{U}$,

$$\langle f(u'g), \check{v}\rangle = \chi\delta_P^{1/2}(m_p(u'))\langle \pi(m_P(u'))f(k_P(u')g), \check{v}\rangle.$$

Grâce au Corollaire I.4.3, il existe $C_1 > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle \pi(m_P(u'))f(k_P(u')g), \check{v}\rangle| \leqslant C_1 \|m_P(u')\|^d$$

pour tout $u' \in U' \cap \bar{U}$. Grâce au Lemme II.3.4, il existe donc $C_2 > 0$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que

$$|\langle \pi(m_P(u'))f(k_P(u')g), \check{v}\rangle| \leqslant C_2 \delta_P(m_P(u'))^r.$$

Mais alors l'intégrale (5) est majorée par

$$C_3 \int_{U' \cap \bar{U}} |\chi \delta_P^{r+1/2}(m_P(u'))| \, \mathrm{d}u'.$$

C'est l'intégrale (2) où l'on a rempacé χ par $\chi\delta_P^r$. Il reste à appliquer le résultat du cas précédent.

Démontrons maintenant la rationnalité. D'après I.3, la famille algébrique de représentations admissibles $(I_P^G V_B)_{P'}$ est filtrée par $(\mathcal{F}_{w,P'})_{w \in {}^{P'}W^P}$ et l'on a des isomorphismes

$$q_w : \mathcal{F}_{w,P'}/\mathcal{F}_{w^+,P'} \to I^M_{M \cap w \cdot P}(wV_{B, M \cap w^{-1} \cdot P'}).$$

On peut supposer que $1 \in {}^{P'}W^P$. L'image de q_1 est V_B muni de la représentation π_B. Le groupe A_M agit dans chaque quotient $\mathcal{F}_{w,P'}/\mathcal{F}_{w^+,P'}$. Grâce à l'isomorphisme q_w, on voit que cet espace possède lui-même une filtration finie dans les quotients de laquelle A_M agit par des caractères à valeurs dans $B^\times$. Notons $\mathcal{E}\mathrm{xp}_w$ l'ensemble de ces caractères. On a

$$\mathcal{E}\mathrm{xp}_w = \{(w\mu)|_{A_M}(w\mu_B)|_{A_M};\ \mu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_{M \cap w^{-1} \cdot P'})\},$$

où $\mu_B : A_0 \to B^\times$ est le caractère $a \mapsto b_a$. On a

$$\text{si } w \in {}^{P'}W^P - \{1\}, \quad \mathcal{E}\mathrm{xp}_w \cap \mathcal{E}\mathrm{xp}_1 = \emptyset. \tag{6}$$

Sinon il existerait un élément $\mu \in \mathrm{Hom}(A_M, \mathbb{C}^*)$ tel que pour tout $a \in A_M$,

$$\mu_B(w^{-1}aw) = \mu(a)\mu_B(a),$$

i.e.

$$b_{w^{-1}aw} = \mu(a) b_a$$

ou encore

$$\chi(w^{-1}aw) = \mu(a)\chi(a)$$

pour tout $\chi \in X(M)$. Cela entraîne $\mu = 1$ et $w^{-1}awa^{-1} \in M^1$ pour tout $a \in A_M$. Rappelons que W^G agit dans a_0. L'équation précédente implique

$$w^{-1}H - H \in a_0^M \quad \text{pour tout } H \in a_M.$$

Pour tout $H \in a_0$, notons H_M, resp. H^M, sa composante sur a_M, resp. a^M. Pour $H \in a_M$, on a donc $(w^{-1}H)_M = H$. D'où

$$|H|^2 = |w^{-1}H|^2 = |H|^2 + |(w^{-1}H)^M|^2$$

et $(w^{-1}H)^M = 0$. Finalement $w^{-1}H = H$ pour tout $H \in a_M$. Mais alors $w \in W^M$, i.e. $w = 1$. Cela démontre (6).

Introduisons le corps des fractions $\mathrm{Frac}(B)$ de B. On peut décomposer

$$(\mathcal{F}_{w,P'}/\mathcal{F}_{w^+,P'}) \otimes_B \mathrm{Frac}(B)$$

en sous-espaces caractéristiques pour l'action de A_M:

$$(\mathcal{F}_{w,P'}/\mathcal{F}_{w^+,P'}) \otimes_B \mathrm{Frac}(B) = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}_w} \mathcal{H}_{w,\mu}.$$

Puisque π est de longueur finie, tous les $\mathcal{E}\mathrm{xp}_w$ sont finis et, pour tout $w \in {}^{P'}W^P$ et tout $\mu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}_w$, il existe un entier $d(\mu, w)$ tel que pour tout $a \in A_M$, $(\rho(a) - \mu(a))^{d(\mu,w)}$ annule $\mathcal{H}_{w,\mu}$, où l'on désigne uniformément par ρ l'action de A_M déduite de $I_P^G \pi_B$ dans chacun des modules que l'on a introduits. On fixe de tels entiers $d(\mu, w)$.

Si μ et ν sont deux caractères distincts de A_M à valeurs dans $B^\times$, on fixe $a_{\mu,\nu} \in A_M$ tel que $\mu(a_{\mu,\nu}) \neq \nu(a_{\mu,\nu})$. Soient $w \in {}^{P'}W^P$, $\mu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}_1$ et $\nu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}_w$. On a $\mu \neq \nu$ grâce à (6). D'après la théorie du résultant, il existe des polynômes $Q_{\mu,\nu,w}(X)$, $R_{\mu,\nu,w}(X) \in B[X]$ tels que

$$\begin{aligned}(X - \mu(a_{\mu,\nu}))^{d(\mu,1)} Q_{\mu,\nu,w}(X) + (X - \nu(a_{\mu,\nu}))^{d(\nu,w)} R_{\mu,\nu,w}(X) \\ = (\mu(a_{\mu,\nu}) - \nu(a_{\mu,\nu}))^{d(\mu,1)+d(\nu,w)-1}.\end{aligned} \tag{7}$$

On fixe de tels polynômes. Introduisons l'algèbre $B[A_M]$ du groupe A_M à coefficients dans B. Pour $\mu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}_1$ et $w \in {}^{P'}W^P$, $w \leqslant 1$, on définit $R_{\mu,w} \in B[A_M]$ et $b_{\mu,w} \in B$ par

$$R_{\mu,w} = \prod_\nu (a_{\mu,\nu} - \nu(a_{\mu,\nu}))^{d(\nu,w)} R_{\mu,\nu,w}(a_{\mu,\nu}),$$
$$b_{\mu,w} = \prod_\nu (\mu(a_{\mu,\nu}) - \nu(a_{\mu,\nu}))^{d(\mu,1)+d(\nu,w)-1},$$

où ν parcourt $\mathcal{E}\mathrm{xp}_w$ si $w < 1$, $\mathcal{E}\mathrm{xp}_1 - \{\mu\}$ si $w = 1$. D'après (7), l'opérateur $\rho(R_{\mu,w})$ agit dans $\mathcal{H}_{1,\mu}$ par l'homothétie de rapport $b_{\mu,w}$. Si $w < 1$, il annule $\mathcal{F}_{w,P'}/\mathcal{F}_{w^+,P'}$. Si $w = 1$, il annule $\mathcal{H}_{1,\nu}$ pour tout $\nu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}_1 - \{\mu\}$. Définissons alors des éléments $R \in B[A_M]$ et $b \in B$ par

$$R = \sum_{\mu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}_1} \Bigg(\prod_{\nu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}_1 - \{\mu\}} \prod_{w \leqslant 1} b_{\nu,w} \Bigg) \Bigg(\prod_{w \leqslant 1} R_{\mu,w} \Bigg),$$
$$b = \prod_{\mu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}_1} \prod_{w \leqslant 1} b_{\mu,w}.$$

Alors $(I_P^G \pi_B)_{P'}(R)$ envoie $(I_P^G V_B)_{P'}$ dans $\mathcal{F}_{1,P'}$ et agit sur chaque $\mathcal{H}_{1,\mu}$, donc sur $\mathcal{F}_{1,P'}/\mathcal{F}_{1^+,P'}$ tout entier, par l'homothétie de rapport b. Notons que $b \neq 0$.

Notons p_1 la composée de q_1 et de la projection $\mathcal{F}_{1,P'} \twoheadrightarrow \mathcal{F}_{1,P'}/\mathcal{F}_{1^+,P'}$. Soit $j \in \mathrm{Hom}_{M,B}((I_P^G V_B)_{P'}, V_B)$ l'application définie par

$$j(v) = p_1[(I_P^G \pi_B)_{P'}(R)(v)]$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

pour tout $v \in I_P^G V_B$. Cette application est bien M-invariante puisque l'action de $B[A_M]$ commute à celle de M. Par réciprocité de Frobenius, on déduit de j un élément $J \in \mathrm{Hom}_{G,B}(I_P^G V_B, I_{P'}^G V_B)$.

Soit $\chi \in X(M)$ dans le cône de convergence de l'opérateur $J_{P'|P}(\pi \otimes \chi)$. Il reste à prouver que J se spécialise en $b(\chi) J_{P'|P}(\pi \otimes \chi)$ au point χ. Il suffit de prouver que pour tout $f \in I_P^G V_B$, on a l'égalité

$$\mathrm{sp}_\chi[(Jf)(1)] = b(\chi)[J_{P'|P}(\pi \otimes \chi)(\mathrm{sp}_\chi f)](1) \tag{8}$$

(les (1) signifient que l'on évalue les fonctions au point $g = 1$).

Par construction de R, il existe $\varphi \in \mathcal{F}_1$ tel que

$$(\delta_{P'}^{-1/2} \otimes I_P^G \pi_B)(R) f - \varphi \in (I_P^G V_B)(P'), \tag{9}$$

où ce dernier espace est le noyau de la projection de $I_P^G V_B$ sur son module de Jacquet. Par définition de J, on a

$$(Jf)(1) = \int_{U \cap U' \backslash U'} \varphi(u') \, \mathrm{d}u'.$$

Alors

$$\mathrm{sp}_\chi[(Jf)(1)] = \int_{U \cap U' \backslash U'} (\mathrm{sp}_\chi \varphi)(u') \, \mathrm{d}u' = [J_{P'|P}(\pi \otimes \chi)(\mathrm{sp}_\chi \varphi)](1).$$

D'après (9),

$$(\delta_{P'}^{-1/2} \otimes I_P^G(\pi \otimes \chi))(\mathrm{sp}_\chi R) \, \mathrm{sp}_\chi f - \mathrm{sp}_\chi \varphi \in (I_P^G V_\chi)(P').$$

Or l'application $\psi \mapsto (J_{P'|P}(\pi \otimes \chi)\psi)(1)$ annule $(I_P^G V_\chi)(P')$. On obtient

$$[J_{P'|P}(\pi \otimes \chi)(\mathrm{sp}_\chi \varphi)](1) = (T(\mathrm{sp}_\chi f))(1),$$

où

$$T = J_{P'|P}(\pi \otimes \chi) \circ (\delta_{P'}^{-1/2} \otimes I_P^G(\pi \otimes \chi))(\mathrm{sp}_\chi R).$$

Comme $J_{P'|P}(\pi \otimes \chi)$ est un entrelacement, on a aussi

$$T = (\delta_{P'}^{-1/2} \otimes I_{P'}^G(\pi \otimes \chi))(\mathrm{sp}_\chi R) \circ J_{P'|P}(\pi \otimes \chi),$$

puis, d'après la définition de $I_{P'}^G V_\chi$,

$$(T(\mathrm{sp}_\chi f))(1) = \pi \otimes \chi(\mathrm{sp}_\chi R)[(J_{P'|P}(\pi \otimes \chi)(\mathrm{sp}_\chi f))(1)].$$

Or R agit dans $\mathcal{F}_{1,P'}/\mathcal{F}_{1^+,P'}$ par l'homothétie de rapport b et les $M-B$-modules $\mathcal{F}_{1,P'}/\mathcal{F}_{1^+,P'}$ et V_B sont isomorphes. Donc $\pi_B(R)$ est l'homothétie de rapport b et $\pi \otimes \chi(\mathrm{sp}_\chi R)$ est celle de rapport $b(\chi)$. En rassemblant les égalités ci-dessus, on obtient l'égalité (8) qui achève la preuve du théorème. □

Remarque. Fixons $f \in I_{K\cap P}^K V$ et $\check{v} \in \check{V}$. Pour $\chi \in X(M)$ notons f_χ l'image réciproque de f dans $I_P^G V_\chi$ par l'application $\mathrm{res}_P^K(\pi \otimes \chi)$. Il résulte de la preuve du théorème que l'intégrale

$$\int_{U\cap U'\backslash U'} |\langle f_\chi(u'g), \check{v}\rangle| \,\mathrm{d}u'$$

est uniformément convergente quand g reste dans un compact de G et χ dans un compact du domaine de convergence.

Notons les propriétés supplémentaires suivantes des opérateurs $J_{P'|P}(\pi)$, que l'on considère comme des fonctions 'rationnelles' en π,

$$J_{P'|P}(\pi) \neq 0. \tag{10}$$

Avec les notations de la preuve du théorème, pour $f \in \mathcal{F}_1$, on a toujours

$$[J_{P'|P}(\pi \otimes \chi)\,\mathrm{sp}_\chi f](1) = \int_{U\cap U'\backslash U'} (\mathrm{sp}_\chi f)(u') \,\mathrm{d}u'.$$

En effet, c'est la définition du membre de gauche pour χ dans le domaine de convergence, et, comme le membre de droite est toujours convergent, l'égalité se prolonge algébriquement à tout χ. Or il est facile de construire $f \in \mathcal{F}_1$ tel que le membre de droite soit non nul en $\chi = 1$.

(11) Pour tous $f \in I_P^G V, \check{f}' \in I_{P'}^G \check{V}$, $\langle J_{P'|P}(\pi) f, \check{f}'\rangle = \langle f, J_{P|P'}(\check{\pi})\check{f}'\rangle$.

(12) Si $P'' \in \mathcal{P}(M)$ vérifie

$$d(P', P) = d(P', P'') + d(P'', P),$$

alors $J_{P'|P}(\pi) = J_{P'|P''}(\pi) J_{P''|P}(\pi)$.

Cela a été prouvé au cours de la démonstration du théorème.

(13) Si $J_{P'|P}$ est singulier en π, il existe $\mu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi)$, $w \in W^G - W^M$, $\nu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_{M\cap w^{-1}.P'})$ tels que $(w\nu)|_{A_M} = \mu$.

On vérifie en effet que, s'il n'existe pas de tel triplet, on peut choisir les $a_{\mu,\nu}$ de la preuve du théorème de sorte que le polynôme b soit non nul en $\chi = 1$.

On peut en fait préciser l'ordre des singularités. Simplifions la situation en supposant P propre maximal, $P' = \bar{P}$ et π irréductible. Notons α l'unique élément de $\Delta(P)$. Pour $\lambda \in a_{M,\mathbb{C}}^*$, notons χ_λ son image par la surjection $a_{M,\mathbb{C}}^* \to X(M)$. La fonction:

$$\lambda \mapsto J_{\bar{P}|P}(\pi \otimes \chi_\lambda)$$

ne dépend que de la variable $\langle \lambda, \check{\alpha}\rangle$ et est méromorphe en cette variable. Notons χ_π le caractère central de π. Avec les notations de la preuve du théorème, posons:

$$D = \sum_{w \in {}^{\bar{P}}W^P \backslash \{1\}} \ \sum_{\nu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_{M\cap w^{-1}.\bar{P}});\, (w\nu)_{|A_M} = \chi_{\pi|A_M}} d(\nu, w).$$

Corollaire IV.1.2.

(i) *Sous ces hypothèses, l'ordre du pôle en $\lambda = 0$ de la fonction:*

$$\lambda \mapsto J_{\bar{P}|P}(\pi \otimes \chi_\lambda)$$

est au plus égal à D.

(ii) *Supposons de plus π de carré intégrable. Alors:*

- *si $\bar{P}$ n'est pas conjugué à P, $D = 0$;*
- *si $\bar{P}$ est conjugué à P, $D \leqslant 1$.*

Preuve. La fonction b que l'on a construite a un pôle d'ordre au plus D en $\lambda = 0$. Le (i) en résulte. Supposons π de carré intégrable. Alors χ_π est unitaire. Pour $w \in^{\bar{P}} W^P$ et $\nu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi^+_{M\cap w^{-1}.\bar{P}})$, $(w\nu)_{|A_M}$ n'est pas unitaire, cf. preuve du Lemme III.3.3. Dans la définition de D, on peut donc remplacer $\mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_{M\cap w^{-1}.\bar{P}})$ par $\mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi^w_{M\cap w^{-1}.\bar{P}})$. Grâce au Lemme III.3.2, on peut aussi ne sommer que sur les $w \in^{\bar{P}} W^P \setminus \{1\}$ tels que $w \cdot M = M$. Si $\bar{P}$ n'est pas conjugué à P, cet ensemble est vide et $D = 0$. Si $\bar{P}$ est conjugué à P, cet ensemble est réduit à un élément. Notons cet élément w. On a $w^{-1} \cdot \bar{P} = P$, $\pi_{M\cap w^{-1}.\bar{P}} = \pi$, $\mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_{M\cap w^{-1}.\bar{P}}) = \{\chi_\pi\}$ et $d(\chi_\pi, w) = 1$. Donc $D \leqslant 1$. □

Notons plus précisément $J^G_{P'|P}$ l'opérateur noté jusqu'à présent $J_{P'|P}$. Soit $P'' = M''U''$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G, supposons $P \subset P''$, $P' \subset P''$. Rappelons que l'on a des isomorphismes

$$I^G_P V \simeq I^G_{P''} I^{M''}_{P\cap M''} V, \qquad I^G_{P'} V \simeq I^G_{P''} I^{M''}_{P'\cap M''} V.$$

Alors

$$J^G_{P'|P}(\pi) \text{ est l'opérateur déduit par fonctorialité de } J^{M''}_{P'\cap M'', P\cap M''}(\pi). \tag{14}$$

IV.2.

On conserve les mêmes hypothèses sur P, P' et (π, V).

Proposition IV.2.1. *Supposons π de longueur finie et tempérée. Si $\chi \in X(M)$ vérifie $\langle \mathrm{Re}(\chi), \check{\alpha} \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma(P) \cap \Sigma(\bar{P}')$, alors l'opérateur $J_{P'|P}(\pi \otimes \chi)$ est défini par des intégrales convergentes.*

Preuve. La preuve est analogue à celle du Théorème IV.1.1. On peut supposer P standard. On commence par traiter le cas où $\pi = I^M_{P_0\cap M}\mathbf{1}$ et P' est adjacent à P ($\mathbf{1}$ est le caractère trivial de M_0). La convergence résulte alors du Lemme II.4.3. On généralise ensuite aux cas P' quelconque puis π quelconque. □

Proposition IV.2.2. *Supposons π irréductible, de carré intégrable et G-régulière. Alors:*

(i) *$I^G_P \pi$ est irréductible;*

(ii) *l'opérateur rationnel $J_{P'|P}$ est régulier en π et $J_{P'|P}(\pi)$ est un isomorphisme.*

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Preuve. La représentation $I_P^G\pi$ est unitaire donc semi-simple. Pour montrer que $I_P^G\pi$ est irréductible, il suffit de prouver que $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(I_P^G V, I_P^G V) = 1$. Cela résulte du Corollaire III.7.3 et de la réciprocité de Frobenius.

Pour prouver (ii), il suffit, d'après IV.1 (12) et (14), de considérer le cas où P est un sous-groupe parabolique propre et maximal et $P' = \bar{P}$. Notons α l'unique élément de $\Delta(P)$. Pour $\lambda \in a_{M,\mathbb{C}}^*$, notons χ_λ son image par la surjection $a_{M,\mathbb{C}}^* \to X(M)$. Il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que la fonction J définie au voisinage de 0 dans $a_{M,\mathbb{C}}^*$ par

$$J(\lambda) = \langle \lambda, \check{\alpha} \rangle^n J_{\bar{P}|P}(\pi \otimes \chi_\lambda)$$

soit régulière en $\lambda = 0$. Supposons n minimal. Alors $J(0)$ est un élément non nul de $\mathrm{Hom}_G(I_P^G V, I_{\bar{P}}^G V)$. Notons $J(0)_{\bar{P}}$ l'élément de $\mathrm{Hom}_M((I_P^G V)_{\bar{P}}, V)$ qui s'en déduit par réciprocité de Frobenius. Introduisons la filtration $(\mathcal{F}_w)_{w \in {}^{\bar{P}}W^P}$ de $I_P^G V_B$. Notons que $(\mathrm{sp}_1 \mathcal{F}_w)_{w \in {}^{\bar{P}}W^P}$ est la filtration analogue de $I_P^G V$. D'après le Corollaire III.7.3, π intervient avec multiplicité 1 dans $(I_P^G V)_{\bar{P}}$. D'autre part, d'après I.3, π intervient dans $(\mathrm{sp}_1 \mathcal{F}_1)_{\bar{P}}$. Donc π n'intervient pas dans $(I_P^G V)_{\bar{P}}/(\mathrm{sp}_1 \mathcal{F}_1)_{\bar{P}}$. Comme $J(0)_{\bar{P}} \neq 0$, la restriction de $J(0)_{\bar{P}}$ à $(\mathrm{sp}_1 \mathcal{F}_1)_{\bar{P}}$ est donc non nulle. Or pour tout $f \in I_P^G V$,

$$J(0)_{\bar{P}} j_{\bar{P}}(f) = (J(0)f)(1).$$

Il existe donc $f \in \mathcal{F}_1$ tel que

$$(J(0)\,\mathrm{sp}_1 f)(1) \neq 0.$$

Mais on a vu dans la preuve de IV.1 (10) que, pour $f \in \mathcal{F}_1$, l'application

$$(J_{\bar{P}|P}(\pi \otimes \chi_\lambda)\,\mathrm{sp}_{\chi_\lambda} f)(1)$$

était régulière en $\lambda = 0$. La non-nullité ci-dessus implique donc $n = 0$, i.e. $J_{\bar{P}|P}$ est régulier en π. Alors $J_{\bar{P}|P}(\pi)$ est non nul d'après ce qui précède et c'est un isomorphisme par l'irréductibilité. □

IV.3.

Supposons π irréductible. On peut montrer qu'il existe $\pi' \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ tel que $I_P^G\pi'$ soit irréductible [**S**, Théorème IV.1]. Nous ne le démontrerons pas, mais, si π est de carré intégrable, cela résulte de la Proposition IV.2.2. Admettons donc qu'il existe un tel π'. Alors l'ensemble de ces π' est un ouvert de Zariski non vide de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. Pour π' dans cet ensemble, l'opérateur

$$J_{P|\bar{P}}(\pi')J_{\bar{P}|P}(\pi') \in \mathrm{End}_G(I_P^G V')$$

est une homothétie. Il existe donc une fonction rationnelle j_P sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ telle que cet opérateur soit l'homothétie de rapport $j_P(\pi')$. On considère maintenant π comme un point quelconque de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. On a

$$j_P(\pi) \text{ est indépendant de } P \in \mathcal{P}(M). \tag{1}$$

En effet, si $P' \in \mathcal{P}(M)$, on a

$$j_{P'}(\pi)J_{P'|P}(\pi) = J_{P'|\bar{P}'}(\pi)J_{\bar{P}'|P'}(\pi)J_{P'|P}(\pi).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

D'après IV.1 (12),

$$J_{P'|\bar{P}'}(\pi) = J_{P'|P}(\pi) J_{P|\bar{P}'}(\pi),$$
$$J_{\bar{P}'|P'}(\pi) = J_{\bar{P}'|\bar{P}}(\pi) J_{\bar{P}|P'}(\pi).$$

D'où

$$j_{P'}(\pi) J_{P'|P}(\pi) = J_{P'|P}(\pi) J_{P|\bar{P}'}(\pi) J_{\bar{P}'|\bar{P}}(\pi) J_{\bar{P}|P'}(\pi) J_{P'|P}(\pi).$$

Toujours d'après IV.1 (12),

$$J_{P|\bar{P}'}(\pi) J_{\bar{P}'|\bar{P}}(\pi) = J_{P|\bar{P}}(\pi),$$
$$J_{\bar{P}|P'}(\pi) J_{P'|P}(\pi) = J_{\bar{P}|P}(\pi).$$

D'où

$$j_{P'}(\pi) J_{P'|P}(\pi) = J_{P'|P}(\pi) J_{P|\bar{P}}(\pi) J_{\bar{P}|P}(\pi) = j_P(\pi) J_{P'|P}(\pi).$$

Cela démontre (1).

On notera simplement $j(\pi)$ le terme $j_P(\pi)$ pour n'importe quel $P \in \mathcal{P}(M)$. On a:

$$j(\pi) = j(\check{\pi}). \tag{2}$$

Cela résulte de IV.1 (11).

$$\text{Si } w \in W^G,\ j(w\pi) = j(\pi) \tag{3}$$

($w\pi$ est une représentation de $w \cdot M$).

En effet pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$, la translation à gauche par w définit un isomorphisme

$$\lambda(w) : I_P^G V \to I_{w\cdot P}^G wV$$

et, si $P, P' \in \mathcal{P}(M)$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} I_P^G V \arrow[r, "J_{P'|P}(\pi)"] \arrow[d, "\lambda(w)"] & I_{P'}^G V' \arrow[d, "\lambda(w)"'] \\ I_{w\cdot P}^G wV \arrow[r, "J_{w\cdot P'|w\cdot P}(w\pi)"] & I_{w\cdot P'}^G wV \end{tikzcd}$$

Pour une racine réduite $\alpha \in \Sigma(A_M)$, on a introduit en I.1 le groupe M_α. On note $j_\alpha(\pi)$ le terme analogue à $j(\pi)$ obtenu en remplaçant G par M_α. Alors

$$\text{pour } P, P', P'' \in \mathcal{P}(M), \quad J_{P''|P'}(\pi) J_{P'|P}(\pi) = (\Pi j_\alpha(\pi)) J_{P''|P}(\pi), \tag{4}$$

où le produit est pris sur $\Sigma_{\mathrm{red}}(P) \cap \Sigma_{\mathrm{red}}(P'') \cap \Sigma_{\mathrm{red}}(\bar{P}')$.

Supposons $d(P', P) = 1$. Si $d(P'', P') + d(P', P) = d(P'', P)$, la formule résulte de IV.1 (12). Sinon $d(P'', P') = d(P'', P) + d(P, P')$. Alors, toujours d'après IV.1 (12),

$$J_{P''|P'}(\pi) = J_{P''|P}(\pi) J_{P|P'}(\pi).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

L'unique élément α de $\Sigma_{\mathrm{red}}(P) \cap \Sigma_{\mathrm{red}}(P'') \cap \Sigma_{\mathrm{red}}(\bar{P}')$ est aussi la racine simple, unique au signe près, séparant P de P'. Il résulte de IV.1 (14) que $J_{P|P'}(\pi)J_{P'|P}(\pi)$ est l'homothétie de rapport $j_\alpha(\pi)$. On obtient la formule (4). Une récurrence facile sur $d(P', P)$ conduit au cas général.

En particulier pour $P = P''$, $P' = \bar{P}$, on obtient

$$j(\pi) = \Pi j_\alpha(\pi), \text{ produit sur les racines réduites de } \Sigma(A_M), \text{ au signe près.} \qquad (5)$$

Enfin,

$$\text{si } \pi \text{ est de carré intégrable, } j(\pi) \neq 0. \qquad (6)$$

D'après la formule précédente, on peut supposer M propre maximal. Soit $P \in \mathcal{P}(M)$. Fixons $e \in I_{K\cap P}^K V$ tel que $(J_{\bar{P}|P}(\pi \otimes \chi)e)(1)$ soit régulier et non nul pour $\chi = 1$ (cf. IV.1 (10)). Munissons V d'un produit hermitien défini positif, $I_{K\cap P}^K V$ du produit hermitien défini positif:

$$(f, f') = \int_K (f(k), f'(k))\,\mathrm{d}k$$

et $I_{K\cap\bar{P}}^K V$ du produit analogue. Pour $\chi \in \operatorname{Im} X(M)$, $f \in I_{K\cap P}^K V$, $f' \in I_{K\cap\bar{P}}^K V$, on a la relation d'adjonction

$$(J_{\bar{P}|P}(\pi\otimes\chi)f, f') = (f, J_{P|\bar{P}}(\pi\otimes\chi)f').$$

Alors

$$j(\pi\otimes\chi)(e,e) = (e, J_{P|\bar{P}}(\pi\otimes\chi)J_{\bar{P}|P}(\pi\otimes\chi)e) = (J_{\bar{P}|P}(\pi\otimes\chi)e, J_{\bar{P}|P}(\pi\otimes\chi)e).$$

Si $j(\pi) = 0$, on a donc

$$\lim_{\chi\to 1}(J_{\bar{P}|P}(\pi\otimes\chi)e, J_{\bar{P}|P}(\pi\otimes\chi)e) = 0.$$

Or les éléments $J_{\bar{P}|P}(\pi\otimes\chi)e$ restent dans un espace de dimension finie (ils sont fixés par un même sous-groupe ouvert compact). Leur convergence en norme vers 0 implique leur convergence point par point vers 0. Donc

$$\lim_{\chi\to 1}(J_{\bar{P}|P}(\pi\otimes\chi)e)(1) = 0,$$

contradiction.

V. Termes constants faibles des coefficients de représentations induites; les fonctions c et μ d'Harish-Chandra

V.1.

Soient M le sous-groupe de Lévi semi-standard d'un sous-groupe parabolique semi-standard de G et $(\omega_0, E_0) \in \mathcal{E}_2(M)$. Posons

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}} = \{\omega_0\otimes\chi;\ \chi\in X(M)\}, \qquad \mathcal{O} = \{\omega_0\otimes\chi;\ \chi\in \operatorname{Im} X(M)\}.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

On a défini en IV.1 les notions de polynômes et de fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. On dit qu'une fonction sur $\mathcal{O}$ est rationnelle et régulière si c'est la restriction à $\mathcal{O}$ d'une fonction rationnelle sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, régulière en tout point de $\mathcal{O}$. Cette définition admet diverses généralisations. Par exemple, si $P, P' \in \mathcal{P}(M)$ et si, pour tout $(\omega, E) \in \mathcal{O}$, on se donne un élément $A(\omega) \in \mathrm{Hom}_G(I_P^G E, I_{P'}^G E)$, on dit que l'opérateur A est rationnel et régulier sur $\mathcal{O}$ si on peut prolonger A en un opérateur rationnel sur un ouvert de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ contenant $\mathcal{O}$, cf. IV.1.

Pour $P \in \mathcal{P}(M)$ et $(\omega, E) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, on pose

$$L(\omega, P) = I_{P\times P}^{G\times G}(E \otimes \check{E}).$$

Le cas échéant, on notera plus précisément $L^G(\omega, P)$ cet espace. On définit une application

$$E_P^G : L(\omega, P) \to C_{\mathrm{lisse}}(G)$$

de la façon suivante. Identifions $L(\omega, P)$ à $(I_P^G E) \otimes (I_P^G E)\check{}$. Pour $v \in I_P^G E$, $\check{v} \in (I_P^G E)\check{}$ et $g \in G$, on pose

$$E_P^G(v \otimes \check{v})(g) = \langle \pi(g)v, \check{v}\rangle,$$

où $\pi = I_P^G \omega$. Par linéarité, on prolonge E_P^G à $L(\omega, P)$ tout entier. Il est clair que l'image de E_P^G est $\mathcal{A}(\pi)$. Si π est irréductible, E_P^G est un isomorphisme de $L(\omega, P)$ sur $\mathcal{A}(\pi)$.

Plus généralement, soit $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G tel que $M \subset M'$ et soit P un sous-groupe parabolique de M' de Lévi M. De l'application

$$E_P^{M'} : L^{M'}(\omega, P) \to C_{\mathrm{lisse}}(M')$$

se déduit par fonctorialité une application notée

$$E_P^{P'} : I_{P'\times\bar{P}'}^{G\times G} L^{M'}(\omega, P) \to I_{P'\times\bar{P}'}^{G\times G} C_{\mathrm{lisse}}(M').$$

Soit maintenant $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G quelconque. On pose

$$\mathcal{W}(M'|G|M) = \{s \in W^G;\ s \cdot M \subset M'\}, \qquad W(M'|G|M) = W^{M'} \setminus \mathcal{W}(M'|G|M).$$

Ces ensembles peuvent être vides. En fait, dans les formules qui suivent, on identifie $W(M'|G|M)$ à un système de représentants dans $\mathcal{W}(M'|G|M)$, les formules en question étant essentiellement indépendantes du choix de ce système. Pour $P \in \mathcal{P}(M)$ et $s \in \mathcal{W}(M'|G|M)$, définissons une application

$$c_{P'|P}(s, \omega) : L(\omega, P) \to I_{P'\times\bar{P}'}^{G\times G} L^{M'}(s\omega, M' \cap s \cdot P)$$

de la façon suivante. Introduisons les sous-groupes paraboliques de G:

$$P_s = (M' \cap s \cdot P)U', \qquad \tilde{P}_s = (M' \cap s \cdot P)\bar{U}'.$$

On a des isomorphismes naturels

$$L(\omega, P) \simeq (I_P^G E) \otimes (I_P^G \check{E}),$$

$$I_{P'\times\bar{P}'}^{G\times G} L^{M'}(s\omega, M' \cap s \cdot P) \simeq (I_{P_s}^G sE) \otimes (I_{\tilde{P}_s}^G s\check{E}).$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Moyennant ces identifications, pour $v \in I_P^G E$, $\check{v} \in I_P^G \check{E}$, on pose

$$c_{P'|P}(s,\omega)(v \times \check{v}) = \gamma(G|M')^{-1}[J_{P_s|s\cdot P}(s\omega)\lambda(s)v \otimes J_{\bar{P}_s|s\cdot P}(s\check{\omega})\lambda(s)\check{v}].$$

Rappelons que $\lambda(s)$ est la translation à gauche par s. L'opérateur $c_{P'|P}(s,\omega)$ est rationnel en ω. Il est régulier aux points G-réguliers de $\mathcal{O}$, d'après la propositon IV.2.2.

On a défini en III.5 le terme constant faible d'un coefficient d'une représentation tempérée.

Proposition V.1.1. *Soient ω un élément G-régulier de $\mathcal{O}$ et $\psi \in L(\omega, P)$. On a l'égalité*

$$(E_P^G \psi)_{P'}^{w,\mathrm{Ind}} = \sum_{s \in W(M'|G|M)} E_{M' \cap s\cdot P}^{P'}(c_{P'|P}(s,\omega)\psi).$$

Preuve. Posons $\pi = I_P^G \omega$, $V = I_P^G E$. On définit des applications

$$\begin{aligned} \alpha : V &\to \bigoplus_{s \in W(M'|G|M)} I_{M' \cap s\cdot P}^{M'} sE, & \check{\alpha} : \check{V} &\to \bigoplus_{s \in W(M'|G|M)} I_{M' \cap s\cdot P}^{M'} s\check{E}, \\ v &\mapsto (v_s)_{s \in W(M'|G|M)} & \check{v} &\mapsto (\check{v}_s)_{s \in W(M'|G|M)} \end{aligned}$$

par

$$\begin{aligned} v_s(m') &= \delta_{P'}(m')^{-1/2}(J_{P_s|s\cdot P}(s\omega)\lambda(s)v)(m'), \\ \check{v}_s(m') &= \delta_{\bar{P}'}(m')^{-1/2}(J_{\bar{P}_s|s\cdot P}(s\check{\omega})\lambda(s)\check{v})(m') \end{aligned}$$

pour tout $m' \in M'$. On a

(1) les applications α, resp. $\check{\alpha}$, se factorisent par les modules de Jacquet faibles $V_{P'}^w$, resp. $\check{V}_{\bar{P}'}^w$, et définissent par passage aux quotients des isomorphismes M'-invariants de ces modules sur les espaces d'arrivée.

On vérifie aisément que, pour tout s, l'application $v \mapsto v_s$ se factorise par le module de Jacquet $V_{P'}$ et définit un homomorphisme M'-invariant de $V_{P'}$ dans $I_{M' \cap s\cdot P}^{M'} sE$. Comme le caractère central de cette dernière représentation est unitaire, l'application se factorise même par $V_{P'}^w$. Elle est non nulle d'après la Proposition IV.2.2. Les représentations $I_{M' \cap s\cdot P}^{M'} s\omega$ étant irréductibles et deux à deux non isomorphes (Propositions IV.2.2 et III.4.1), α est surjective. On obtient alors l'assertion concernant α en appliquant le Lemme III.3.3. Idem pour $\check{\alpha}$.

Toujours parce que les représentations $I_{M' \cap s\cdot P}^{M'} s\omega$, resp. $I_{M' \cap s\cdot P}^{M'} s\check{\omega}$ sont irréductibles et deux à deux non isomorphes, les seuls produits bilinéaires M'-invariants sur

$$\left(\bigoplus_{s \in W(M'|G|M)} I_{M' \cap s\cdot P}^{M'} sE\right) \times \left(\bigoplus_{s \in W(M'|G|M)} I_{M' \cap s\cdot P}^{M'} s\check{E}\right)$$

sont de la forme

$$\langle (v_s), (\check{v}_s) \rangle = \sum_{s \in W(M'|G|M)} \gamma_s \langle v_s, \check{v}_s \rangle,$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

pour des constantes $\gamma_s \in \mathbb{C}$. On en déduit qu'il existe des constantes, notées $\gamma(P,s,\omega)$ telles que, pour tous $v \in V$, $\check{v} \in \check{V}$,

$$\langle j^w_{P'}(v), \check{j}^w_{\bar{P}'}(\check{v})\rangle_{P'} = \sum_{s\in W(M'|G|M)} \gamma(P,s,\omega)\langle v_s, \check{v}_s\rangle \tag{2}$$

(rappelons que $j^w_{P'}$, resp. $\check{j}^w_{\bar{P}'}$, est la projection de V sur $V^w_{P'}$, resp. de $\check{V}$ sur $\check{V}^w_{\bar{P}'}$).

Soient $v \in V$, $\check{v} \in \check{V}$, $g_1, g_2 \in G$. Posons

$$\varphi = (E^G_P(v\otimes\check{v}))^{w,\mathrm{Ind}}_{P'}(g_1,g_2)$$

et pour tout $s \in W(M'|G|M)$,

$$\varphi_s = E^{P'}_{M'\cap s\cdot P}(c_{P'|P}(s,\omega)(v\otimes\check{v}))(g_1,g_2).$$

D'après la preuve du Lemme III.5.1, on a l'égalité

$$\varphi(m') = \langle \pi^w_{P'}(m') j^w_{P'}(\pi(g_1)v), j^w_{\bar{P}'}(\check{\pi}(g_2)\check{v})\rangle_{P'}$$

pour tout $m' \in M'$. D'après la définition des opérateurs $c_{P'|P}(s,\omega)$, on a l'égalité

$$\varphi_s(m') = \gamma(G|M')^{-1}\langle \pi_0(m')(\pi(g_1)v)_s, (\check{\pi}(g_2)\check{v})_s\rangle$$

pour tout $m' \in M'$ et tout $s \in W(M'|G|M)$, où $\pi_s = I^{M'}_{M'\cap s\cdot P} s\omega$. En comparant avec (2), on voit qu'il suffit de prouver que $\gamma(P,s,\omega) = \gamma(G|M')^{-1}$ pour tout s.

Soient $t \in W^G$, $P_1 \in \mathcal{P}(t^{-1}\cdot M)$. Montrons que l'on a l'égalité

$$\gamma(P,s,\omega) = \gamma(P_1, st, t^{-1}\omega). \tag{3}$$

Posons $(\pi_1, V_1) = (I^G_{P_1} t^{-1}\omega, I^G_{P_1} t^{-1}E)$, affectons d'un indice 1 tous les objets relatifs à cette représentation. Soient $v_1 \in V_1$, $\check{v} \in \check{V}$. Posons

$$v = J_{P|t\cdot P_1}(\omega)\lambda(t)v_1, \qquad \check{v}_1 = \lambda(t^{-1})J_{t\cdot P_1|P}(\check{\omega})\check{v}.$$

On a $v \in V$, $\check{v}_1 \in \check{V}_1$. Soit $a \in A_{M'}$, supposons $|\alpha(a)|_F$ assez petit pour tout $\alpha \in \Sigma(P')$. On a alors les égalités

$$\langle \pi_{P'}(a) j^w_{P'}(v), \check{j}^w_{\bar{P}'}(\check{v})\rangle_{P'} = \delta_{P'}(a)^{-1/2}\langle \pi(a)v, \check{v}\rangle,$$
$$\langle \pi_{1,P'}(a) j^w_{1,P'}(v_1), \check{j}^w_{1,\bar{P}'}(\check{v}_1)\rangle_{1,P'} = \delta_{P'}(a)^{-1/2}\langle \pi_1(a)v_1, \check{v}_1\rangle.$$

En vertu de la formule d'adjonction IV.1 (11) et d'une formule analogue pour les opérateurs $\lambda(t)$, on a l'égalité

$$\langle \pi(a)v, \check{v}\rangle = \langle \pi_1(a)v_1, \check{v}_1\rangle.$$

D'où l'égalité

$$\langle \pi_{P'}(a) j^w_{P'}(v), \check{j}^w_{\bar{P}'}(\check{v})\rangle_{P'} = \langle \pi_{1,P'}(a) j^w_{1,P'}(v_1), \check{j}^w_{1,\bar{P}'}(\check{v}_1)\rangle_{1,P'}.$$

Les deux membres sont des fonctions $A_{M'}$-finies en a. Leur égalité dans un cône ouvert implique leur égalité partout. En particulier

$$\langle j^w_{P'}(v), \check{j}^w_{\bar{P}'}(\check{v})\rangle_{P'} = \langle j^w_{1,P'}(v_1), \check{j}^w_{1,\bar{P}'}(\check{v}_1)\rangle_{1,P'}.$$

Appliquons la formule (2). Remarquons que l'on a l'égalité

$$W(M'|G|t^{-1}\cdot M) = \{st;\ s \in W(M'|G|M)\}.$$

On obtient

$$\sum_{s\in W(M'|G|M)} \gamma(P,s,\omega)\langle v_s, \check{v}_s\rangle = \sum_{s\in W(M'|G|M)} \gamma(P_1, st, t^{-1}\omega)\langle v_{1,st}, \check{v}_{1,st}\rangle.$$

Soit $s \in W(M'|G|M)$. Pour $m' \in M'$, on a

$$v_s(m') = \delta_{P'}(m')^{-1/2}(J_{P_s|s\cdot P}(s\omega)\lambda(s)J_{P|t\cdot P_1}(\omega)\lambda(t)v_1)(m').$$

Il est clair que $\lambda(s)J_{P|t\cdot P_1}(\omega) = J_{s\cdot P|st\cdot P_1}(s\omega)\lambda(s)$. Soit $x_s \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$J_{P_s|s\cdot P}(s\omega)J_{s\cdot P|st\cdot P_1}(s\omega) = x_s J_{P_s|P_{1,st}}(s\omega)J_{P_{1,st}|st\cdot P_1}(s\omega).$$

Alors

$$v_s(m') = x_s\delta_{P'}(m')^{-1/2}(J_{P_s|P_{1,st}}(s\omega)v_{1,st})(m'),$$

i.e. en utilisant IV.1 (14),

$$v_s = x_s J^{M'}_{M'\cap s\cdot P|M'\cap st\cdot P_1}(s\omega)v_{1,st}.$$

Idem

$$\check{v}_{1,st} = y_s J^{M'}_{M'\cap st\cdot P_1|M'\cap s\cdot P}(s\check{\omega})\check{v}_s,$$

où y_s est tel que

$$J_{\tilde{P}_{1,st}|st\cdot P_1}(s\check{\omega})J_{st\cdot P_1|s\cdot P}(s\check{\omega}) = y_s J_{\tilde{P}_{1,st}|\tilde{P}_s}J_{\tilde{P}_s|s\cdot P}(s\check{\omega}).$$

On montre facilement grâce à IV.3 (2) et (4) que $x_s = y_s$. On obtient l'égalité

$$\sum_{s\in W(M'|G|M)} \gamma(P,s,\omega)x_s\langle J^{M'}_{M'\cap s\cdot P|M'\cap st\cdot P_1}(s\omega)v_{1,st}, \check{v}_s\rangle$$
$$= \sum_{s\in W(M'|G|M)} \gamma(P_1, st, t^{-1}\omega)x_s\langle v_{1,st}, J^{M'}_{M'\cap st\cdot P_1|M'\cap s\cdot P}(s\check{\omega})\check{v}_s\rangle.$$

Cette égalité étant vraie pour tous $v_1, \check{v}$, donc pour toutes familles $(v_{1,st}), (\check{v}_s)$, on a pour tout s l'égalité des termes indicés par s. Il reste à appliquer dans M' la formule d'adjonction IV.1 (11) pour obtenir l'égalité (3).

Montrons maintenant que l'on a

$$\text{supposons } P \subset P';\ \text{alors } \gamma(P,1,\omega) = \gamma(G|M')^{-1}. \tag{4}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Posons $(\pi', V') = (I_{M'\cap P}^{M'}\omega, I_{M'\cap P}^{M'}E)$, identifions (π, V) à $(I_{P'}^G\pi', I_{P'}^G V')$. Soient $v \in V$, $\check{v} \in \check{V}$ et $a \in A_{M'}$. On a l'égalité

$$\langle \pi(a)v, \check{v}\rangle = \int_{P'\backslash G} \langle v(ga), \check{v}(g)\rangle \,\mathrm{d}g = \gamma(G|M')^{-1} \int_{\bar{U}'} \langle v(\bar{u}'a), \check{v}(\bar{u}')\rangle \,\mathrm{d}\bar{u}',$$

où les produits intérieurs sont le produit naturel sur $V' \times \check{V}'$. Supposons $\check{v}$ à support dans $P'(\bar{U}' \cap K)$. On peut remplacer $\bar{U}'$ par $\bar{U}' \cap K$ dans la dernière intégrale. Supposons $|\alpha(a)|_F$ assez petit pour tout $\alpha \in \Sigma(P')$. Alors v est invariant à droite par $a^{-1}(\bar{U}' \cap K)a$ et l'on obtient

$$\begin{aligned}\langle \pi(a)v, \check{v}\rangle &= \gamma(G|M')^{-1} \int_{\bar{U}'\cap K} \delta_{P'}(a)^{1/2} \langle \pi'(a)v(1), \check{v}(\bar{u}')\rangle \,\mathrm{d}\bar{u}' \\ &= \gamma(G|M')^{-1} \delta_{P'}(a)^{1/2} \int_{\bar{U}'} \langle \pi'(a)v(1), \check{v}(\bar{u}')\rangle \,\mathrm{d}\bar{u}', \\ &= \gamma(G|M')^{-1} \delta_{P'}(a)^{1/2} \langle \pi'(a)v(1), (J_{\bar{P}'|P'}(\check{\pi}')\check{v})(1)\rangle\end{aligned}$$

par définition de l'opérateur $J_{\bar{P}'|P'}(\check{\pi}')$. En se rappelant la définition du produit $\langle\cdot,\cdot\rangle_{P'}$, et puisque le caractère central de π' est unitaire, on obtient

$$\langle j_{P'}^w(v), \check{j}_{\bar{P}'}^w(\check{v})\rangle_{P'} = \gamma(G|M')^{-1} \langle v(1), (J_{\bar{P}'|P'}(\check{\pi}')\check{v})(1)\rangle.$$

Mais, avec nos définitions précédentes, on a l'égalité

$$\langle v(1), (J_{\bar{P}'|P'}(\check{\pi}')\check{v})(1)\rangle = \langle v_1, \check{v}_1\rangle.$$

On compare avec l'égalité (2). Notons que l'on peut trouver $\check{v}$ vérifiant les conditions ci-dessus et tel que $(J_{\bar{P}'|P'}(\check{\pi}')\check{v})(1) \neq 0$. L'égalité obtenue étant vraie pour tout v, on obtient (4).

Maintenant pour $P \in \mathcal{P}(M)$ et $s \in W(M'|G|M)$, on a $\gamma(P, s, \omega) = \gamma(s \cdot P, ss^{-1}, s\omega)$ d'après (3), d'où $\gamma(P, s, \omega) = \gamma(G|M')^{-1}$ d'après (4). On a déjà dit que cela achevait la démonstration. □

V.2.

On conserve les mêmes hypothèses sur M, $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. Pour $\omega \in \mathcal{O}$, on pose

$$\mu(\omega) = j(\omega)^{-1} \prod_\alpha \gamma(M_\alpha|M)^2,$$

où α parcourt les racines réduites de A_M au signe près. On notera parfois plus précisément $\mu^G(\omega) = \mu(\omega)$. Pour α comme ci-dessus, on posera simplement $\mu_\alpha(\omega) = \mu^{M_\alpha}(\omega)$.

Lemme V.2.1. *La fonction μ est une fonction rationnelle régulière sur $\mathcal{O}$. Pour tout $\omega \in \mathcal{O}$, on a*

- $\mu(\omega) \geqslant 0$;
- $\mu^G(\omega) = \prod_\alpha \mu_\alpha(\omega)$, *où α parcourt les racines réduites de A_M, au signe près;*
- *pour tout $s \in W^G$, $\mu(s\omega) = \mu(\omega)$;*
- $\mu(\check{\omega}) = \mu(\omega)$.

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Cela résulte des propriétés (2), (3), (5) et (6) de IV.3. □

Soit $(\omega, E) \in \mathcal{O}$ et $P \in \mathcal{P}(M)$. Munissons E d'un produit hermitien défini positif invariant par G (pour nous, un tel produit est antilinéaire en la première variable). L'espace $\check{E}$ d'identifie à $\bar{E}$ et se retrouve lui-même muni d'un tel produit. On définit un produit hermitien sur $I_P^G E$ par

$$(v_1, v_2) = \int_{P\backslash G} (v_1(g), v_2(g))\,\mathrm{d}g.$$

On construit de même un produit sur $I_P^G \check{E}$. Ils sont définis positifs et invariants par G. On munit alors l'espace $L(\omega, P)$ du produit ainsi défini: pour $v_1, v_2 \in I_P^G E$, $\check{v}_1, \check{v}_2 \in I_P^G \check{E}$, on pose

$$(v_1 \otimes \check{v}_1, v_2 \otimes \check{v}_2) = d(\omega)^{-1}(v_1, v_2)(\check{v}_1, \check{v}_2)$$

cf. III.1 (3) pour la définition de $d(\omega)$. Il est défini positif, invariant par $G \times G$. Il ne dépend pas du produit choisi sur E car, si l'on multiplie celui-ci par $\lambda > 0$, le produit sur $\check{E}$ est multiplié par λ^{-1}.

Plus généralement soit $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G tel que $M \subset M'$ et soit P un sous-groupe parabolique de M' de Lévi M. On munit $I_{P' \times \bar{P}'}^{G \times G} L^{M'}(\omega, P)$ d'un produit analogue à celui ci-dessus.

Pour tout espace muni d'un produit hermitien défini positif, on note $\|\cdot\|$ la norme déduite de ce produit.

Lemme V.2.2. *Soient ω un élément G-régulier de $\mathcal{O}$, $P \in \mathcal{P}(M)$, $\psi \in L(\omega, P)$, $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G et $s \in \mathcal{W}(M'|G|M)$. On a l'égalité*

$$c(M'|s \cdot M)^2 \mu^G(\omega) \|c_{P'|P}(s, \omega)\psi\|^2 = c(G|M)^2 \mu^{M'}(s\omega)\|\psi\|^2.$$

Preuve. Munissons comme ci-dessus l'espace E de ω d'un produit hermitien défini positif. On en déduit de tels produits sur $\check{E}$ et les représentations induites. Soient $v \in I_P^G E$, $\check{v} \in I_P^G \check{E}$. D'après les définitions (cf. V.1), on a l'égalité

$$\|c_{P'|P}(s, \omega)(v \otimes \check{v})\|^2 = d(\omega)^{-1}\gamma(G|M')^{-2}\|J_{P_s|s\cdot P}(s\omega)\lambda(s)v\|^2 \|J_{\tilde{P}_s|s\cdot P}(s\check{\omega})\lambda(s)\check{v}\|^2.$$

Grâce à des formules d'adjonction analogues à IV.1 (11), on a les égalités

$$\|J_{P_s|s\cdot P}(s\omega)\lambda(s)v\|^2 = x\|v\|^2, \qquad \|J_{\tilde{P}_s|s\cdot P}(s\check{\omega})\lambda(s)\check{v}\|^2 = y\|\check{v}\|^2,$$

où x et y sont les scalaires tels que

$$\begin{aligned} J_{s\cdot P|P_s}(s\omega) J_{P_s|s\cdot P}(s\omega) &= x\,\mathrm{id}, \\ J_{s\cdot P|\tilde{P}_s}(s\check{\omega}) J_{\tilde{P}_s|s\cdot P}(s\check{\omega}) &= y\,\mathrm{id}\,. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|c_{P'|P}(s, \omega)(v \otimes \check{v})\|^2 &= \gamma(G|M')^{-2} xy d(\omega)^{-1}\|v\|^2\|\check{v}\|^2 \\ &= \gamma(G|M')^{-2} xy \|v \otimes \check{v}\|^2. \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

On calcule grâce à IV.3 (2) et (4):

$$xy = \Pi j_\alpha(s\omega),$$

où le produit est pris sur $\Sigma^G_{\mathrm{red}}(s\cdot P) - \Sigma^{M'}_{\mathrm{red}}(M'\cap s\cdot P)$, avec une notation évidente. On vérifie alors l'égalité

$$\begin{aligned}\gamma(G|M')^{-2}xy &= c(G|s\cdot M)^2\mu^{M'}(s\omega)c(M'|s\cdot M)^{-2}\mu^G(s\omega)^{-1}\\ &= c(G|M)^2\mu^{M'}(s\omega)c(M'|s\cdot M)^{-2}\mu^G(\omega)^{-1}.\end{aligned}$$

On obtient l'égalité de l'énoncé. □

Corollaire V.2.3. *Soient $P\in\mathcal{P}(M)$, $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G et $s\in\mathcal{W}(M'|G|M)$. Alors l'application*

$$\omega \mapsto \mu^G(\omega)\mu^{M'}(s\omega)^{-1}c_{P'|P}(s,\omega)$$

est rationnelle et régulière sur $\mathcal{O}$.

Preuve. Fixons $(\omega,E)\in\mathcal{O}$. Pour $\lambda\in a^*_{M,\mathbb{C}}$, notons χ_λ son image par la surjection $a^*_{M,\mathbb{C}}\to X(M)$. On peut identifier $L(\omega\otimes\chi_\lambda,P)$ à $I^{K\times K}_{K\cap P\times K\cap P}(E\otimes\check{E})$ et $I^{G\times G}_{P'\times\bar{P}'}L^{M'}(s(\omega\otimes\chi_\lambda),M'\cap s\cdot P)$ à $I^{K\times K}_{K\cap P'\times K\cap\bar{P}'}I^{K\cap M'\times K\cap M'}_{K\cap M'\cap s\cdot P\times K\cap M'\cap s\cdot P}(sE\otimes s\check{E})$. Notons que si $\lambda\in \mathrm{i}a^*_M$, les normes hermitiennes sur les premiers espaces s'identifient en des normes indépendantes de λ sur les seconds. On peut identifier $c_{P'|P}(s,\omega\otimes\chi_\lambda)$ à une application

$$I^{K\times K}_{K\cap P\times K\cap P}(E\otimes\check{E}) \to I^{K\times K}_{K\cap P'\times K\cap\bar{P}'}I^{K\cap M'\times K\cap M'}_{K\cap M'\cap s\cdot P\times K\cap M'\cap s\cdot P}(sE\otimes s\check{E}).$$

Il résulte des définitions et de IV.1 (12) qu'il existe un polynôme Q sur a^*_M tel que

- Q est de la forme $Q(\lambda)=\prod_\alpha\langle\lambda,\check{\alpha}\rangle^{n(\alpha)}$, où α parcourt les racines réduites de A_M, au signe près, et les $n(\alpha)$ sont des entiers $\geqslant 0$;
- l'application $\lambda\mapsto Q(\lambda)\mu^G(\omega\otimes\chi_\lambda)\mu^{M'}(s(\omega\otimes\chi_\lambda))^{-1}c_{P'|P}(s,\omega\otimes\chi_\lambda)$ est régulière en $\lambda=0$.

On suppose les $n(\alpha)$ minimaux. Notons $C(\lambda)$ l'application ci-dessus. Soit α une racine réduite de A_M. Supposons $n(\alpha)>0$. Notons $H_\alpha\subset a^*_{M,\mathbb{C}}$ l'annulateur de $\check{\alpha}$ et $\mathcal{U}$ l'ensemble des $\lambda\in\mathrm{i}a^*_M$ tels que $\omega\otimes\chi_\lambda$ soit G-régulière. Pour $\psi\in I^{K\times K}_{K\cap P\times K\cap P}(E\otimes\check{E})$ et $\lambda\in\mathcal{U}$, on a

$$\|C(\lambda)\psi\|^2 = c(G|M)^2c(M'|s\cdot M)^{-2}|Q(\lambda)|^2\mu^G(\omega\otimes\chi_\lambda)\mu^{M'}(s(\omega\otimes\chi_\lambda))^{-1} \qquad (1)$$

d'après le Lemme V.2.2. Notons que

$$\mu^G(\omega\otimes\chi_\lambda)\mu^{M'}(s(\omega\otimes\chi_\lambda))^{-1} = \Pi\mu_\alpha(s(\omega\otimes\chi_\lambda)),$$

où α parcourt $\Sigma^G_{\mathrm{red}}(s\cdot P)-\Sigma^{M'}_{\mathrm{red}}(M'\cap s\cdot P)$. Cette fonction est régulière. Comme $\mathcal{U}$ est dense dans $\mathrm{i}a^*_M$, on déduit par continuité de (1) que $\|C(\lambda)\psi\|=0$ pour $\lambda\in H_\alpha\cap\mathrm{i}a^*_M$, i.e. $C(\lambda)=0$ pour $\lambda\in H_\alpha\cap\mathrm{i}a^*_M$. Comme $H_\alpha\cap\mathrm{i}a^*_M$ est Zariski-dense dans H_α, C est nulle sur H_α. Mais alors $\langle\lambda,\check{\alpha}\rangle^{-1}C$ est encore régulière en $\lambda=0$, ce qui contredit la minimalité de $n(\alpha)$. On conclut que $Q=1$ et que la fonction de l'énoncé est régulière. □

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

V.3.

On pose simplement

$$\mathcal{W}(G|M) = \mathcal{W}(M|G|M), \qquad W(G|M) = W(M|G|M).$$

Pour $P, P' \in \mathcal{P}(M)$, $s \in \mathcal{W}(G|M)$, et $\omega \in \mathcal{O}$, on définit

$${}^o c_{P'|P}(s,\omega) \in \mathrm{Hom}_{G\times G}(L(\omega,P), L(s\omega,P'))$$

par

$${}^o c_{P'|P}(s,\omega) = c_{P'|P'}(1,s\omega)^{-1} c_{P'|P}(s,\omega).$$

Lemme V.3.1. *La fonction $\omega \mapsto {}^o c_{P'|P}(s,\omega)$ est régulière sur $\mathcal{O}$. Soit $\omega \in \mathcal{O}$. Alors ${}^o c_{P'|P}(s,\omega)$ est un opérateur unitaire et, pour tout $\psi \in L(\omega,P)$, on a l'égalité*

$$E^G_{P'}({}^o c_{P'|P}(s,\omega)\psi) = E^G_P \psi.$$

Preuve. Pour ω G-régulière, l'unitarité résulte du Lemme V.2.2. On en déduit la régularité comme dans le Corollaire V.2.3. Par définition

$${}^o c_{P'|P}(s,\omega) = J_{P'|s\cdot P}(s\omega)\lambda(s) \otimes J_{\bar P'|P'}(s\breve\omega)^{-1} J_{\bar P'|s\cdot P}(s\breve\omega)\lambda(s).$$

Grâce à IV.1 (12),

$$\begin{aligned} J_{\bar P'|P'}(s\breve\omega)^{-1} J_{\bar P'|s\cdot P}(s\breve\omega) &= J_{s\cdot P|P'}(s\breve\omega)^{-1} J_{\bar P'|s\cdot P}(s\breve\omega)^{-1} J_{\bar P'|s\cdot P}(s\breve\omega) \\ &= J_{s\cdot P|P'}(s\breve\omega)^{-1}. \end{aligned}$$

D'où

$${}^o c_{P'|P}(s,\omega) = J_{P'|s\cdot P}(s\omega)\lambda(s) \otimes J_{s\cdot P|P'}(s\breve\omega)^{-1}\lambda(s). \tag{1}$$

La dernière relation de l'énoncé résulte de IV.1 (11). □

Lemme V.3.2. *Pour $s,t \in \mathcal{W}(G|M)$, $P,P',P'' \in \mathcal{P}(M)$ et $\omega \in \mathcal{O}$, on a l'égalité*

$${}^o c_{P''|P'}(s,t\omega)\,{}^o c_{P'|P}(t,\omega) = {}^o c_{P''|P}(st,\omega).$$

Preuve. Cela résulte de la formule (1). □

VI. Des paquets d'ondes aux fonctions de Schwartz–Harish-Chandra

VI.1.

Soient $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G et $\mathcal{O} \in \mathcal{E}_2(M)$ une orbite pour l'action de $\mathrm{Im}\, X(M)$. Notons que si $(\omega,E), (\omega',E') \in \mathcal{O}$ et si $\omega \simeq \omega'$, il y a un isomorphisme canonique de $L(\omega,P)$ sur $L(\omega',P)$: on fixe un isomorphisme $E \simeq E'$, on en déduit un isomorphisme $\check E \simeq \check E'$, d'où un isomorphisme $I^{G\times G}_{P\times P}(E\otimes \check E) \simeq I^{G\times G}_{P\times P}(E'\otimes \check E')$ qui ne dépend pas du choix du premier isomorphisme. Soit ψ une fonction qui, à un élément (ω,E) de $\mathcal{O}$, associe un élément $\psi_\omega \in L(\omega,P)$. On demande que ψ_ω ne dépende

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

que de la classe de ω: si $(\omega, E) \simeq (\omega', E')$, $\psi_{\omega'}$ est l'image de ψ_ω par l'isomorphisme ci-dessus. On peut comme en IV.1 donner un sens à l'expression 'ψ est rationnelle régulière'. De même on peut donner un sens à l'expression 'ψ est C^∞'. Fixons $(\omega, E) \in \mathcal{O}$, posons

$$L_K(\omega, P) = I_{K\cap P, K\cap P}^{K\times K}(E \otimes \check{E}).$$

Pour tout $\chi \in \operatorname{Im} X(M)$, $L(\omega \otimes \chi, P)$ s'identifie à $L_K(\omega, P)$ par restriction à K. La fonction ψ s'identifie à une fonction sur $\operatorname{Im} X(M)$ à valeurs dans $L_K(\omega, P)$. Alors ψ est C^∞ si cette dernière fonction l'est. Notons $\operatorname{Stab}_{X(M)}(\omega)$ le stabilisateur de la classe de ω dans $X(M)$. Il est inclus dans $\operatorname{Im} X(M)$. Il agit sur $C^\infty(\operatorname{Im} X(M))$ par translations. Il agit aussi sur $L_K(\omega, P)$: pour $\chi \in \operatorname{Stab}_{X(M)}(\omega)$, on a un automorphisme de $L_K(\omega, P)$ qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} L_K(\omega, P) & \xrightarrow{\sim} & L_K(\omega, P) \\ \big\downarrow\wr & & \big\downarrow\wr \\ L(\omega, P) & \xrightarrow{\sim} & L(\omega \otimes \chi, P) \end{array}$$

Les flèches verticales sont les restrictions à K, la flèche du bas l'isomorphisme canonique défini ci-dessus.

Donnons un exemple concret où la flèche du haut n'est pas triviale. Supposons $G = P = M = GL(2)$. Le groupe $\operatorname{Im} X(M)$ est l'ensemble des caractères de M de la forme $g \mapsto |\det(g)|_F^s$, où

$$s \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Big/ \frac{2\pi \mathrm{i}}{\log(q)}\mathbb{Z}.$$

Soit χ_0 l'élément quadratique non trivial de $\operatorname{Im} X(M)$, autrement dit le caractère $g \mapsto |\det(g)|^{\pi \mathrm{i}/\log(q)}$. Soit (ω, E) une représentation cuspidale irréductible de $GL(2)$ telle que $\omega \simeq \omega \otimes \chi_0$ (il en existe). Alors $\operatorname{Stab}_{X(M)}(\omega) = \{1, \chi_0\}$. Soit A un automorphisme de E qui réalise l'isomorphisme $\omega \simeq \omega \otimes \chi_0$, autrement dit tel que $(\omega \otimes \chi_0)(g)A = A\omega(g)$ pour tout $g \in M = G$. On a évidemment $L_K(\omega, P) = E \otimes \check{E}$. Pour $\chi = \chi_0$, la flèche horizontale supérieure du diagramme ci-dessus est égale à $A \otimes {}^tA^{-1}$. Cet automorphisme n'est pas l'identité car A n'est pas une homothétie.

Notons $C^\infty(\mathcal{O}, P)$ l'ensemble des applications ψ comme ci-dessus qui sont C^∞. Alors $C^\infty(\mathcal{O}, P)$ s'identifie à l'espace des invariants sous l'action diagonale:

$$[C^\infty(\operatorname{Im} X(M)) \otimes_{\mathbb{C}} L_K(\omega, P)]^{\operatorname{Stab}_{X(M)}(\omega)}.$$

VI.2.

Lemme VI.2.1. *Soit $\psi \in C^\infty(\mathcal{O}, P)$.*

(i) *Pour tout $g \in G$, l'application $\omega \mapsto (E_P^G \psi_\omega)(g)$ est C^∞ sur $\mathcal{O}$.*

(ii) *Pour tout sous-groupe parabolique semi-standard $P' = M'U'$ de G et tout $m' \in M'$, les applications $\omega \mapsto (E_P^G \psi_\omega)_{P'}(m')$ et $\omega \mapsto (E_P^G \psi_\omega)_{P'}^w(m')$ sont C^∞ sur $\mathcal{O}$.*

Preuve. Le (i) est immédiat. Comme en IV.1, notons B l'algèbre des polynômes sur $X(M)$, fixons $(\omega, E) \in \mathcal{O}$ et introduisons la B-famille algébrique (ω_B, E_B) de représentations admissibles de M. Remarquons qu'avec les notations de I.5, on a un isomorphisme

$$((\omega_B)^{\check{}B}, (E_B)^{\check{}B}) \simeq (\check{\omega}_B, \check{E}_B).$$

On pose

$$L(\omega_B, P) = I_{P\times P}^{G\times G}(E_B \otimes \check{E}_B).$$

Pour tout $\chi \in X(M)$, on a l'application de spécialisation

$$\mathrm{sp}_\chi : L(\omega_B, P) \to L(\omega \otimes \chi, P).$$

Au voisinage de ω, tout élément de $C^\infty(\mathcal{O}, P)$ est combinaison linéaire de fonctions

$$\omega \otimes \chi \mapsto \varphi(\chi)\, \mathrm{sp}_\chi\, \psi$$

pour $\psi \in L(\omega_B, P)$ et φ une fonction C^∞ à valeurs complexes définie dans un voisinage de 1 dans $\mathrm{Im}\, X(M)$. Il suffit donc de fixer $\psi \in L(\omega_B, P)$ et de prouver que les applications $\chi \mapsto (E_P^G\, \mathrm{sp}_\chi\, \psi)_{P'}(m')$ et $\chi \mapsto (E_P^G\, \mathrm{sp}_\chi\, \psi)_{P'}^w(m')$ sont C^∞ sur $\mathrm{Im}\, X(M)$. On va montrer qu'elles sont rationnelles régulières.

On définit $E_P^G\psi$ et $\mathcal{A}(I_P^G\omega_B)$. Grâce à I.5, on montre comme à la Proposition I.6.2 qu'il existe $(E_P^G\psi)_{P'} \in \mathcal{A}((I_P^G\omega_B)_{P'})$ tel que pour tout $m' \in M'$ et tout $a \in A_{M'}$ 'assez positif relativement à P'', on ait l'égalité

$$(E_P^G\psi)(am') = \delta_{P'}(am')^{1/2}(E_P^G\psi)_{P'}(am').$$

Alors, pour tout $\chi \in X(M)$,

$$(E_P^G\, \mathrm{sp}_\chi\, \psi)_{P'}(am') = \mathrm{sp}_\chi[(E_P^G\psi)_{P'}(am')].$$

Les deux membres étant $A_{M'}$-finis, ils sont égaux pour tout a, d'où

$$(E_P^G\, \mathrm{sp}_\chi\, \psi)_{P'}(m') = \mathrm{sp}_\chi[(E_P^G\psi)_{P'}(m')].$$

Le membre de droite est un polynôme en χ, ce qui démontre la première assertion de (ii).

Posons $\mathcal{E} = \mathcal{E}\mathrm{xp}((I_P^G\omega_B)_{P'})$. En notant $\mu_B : A_0 \to B^\times$ le caractère défini par $\mu_B(a)(\chi) = \chi(a)$, on a

$$\mathcal{E} = \bigcup_{w\in W^{M'}\backslash W^G/W^M} \{(w\mu)|_{A_{M'}}(w\mu_B)|_{A_{M'}};\ \mu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\omega_{M\cap w^{-1}\cdot P'})\}.$$

La représentation $(I_P^G\omega_B)_{P'}$ admet une filtration finie sur les quotients de laquelle $A_{M'}$ agit par des éléments de $\mathcal{E}$. Pour tout $\nu \in \mathcal{E}$, notons $n(\nu)$ le nombre de quotients de la filtration sur laquelle $A_{M'}$ agit par ν. Notons $\mathcal{E}^w$, resp. $\mathcal{E}^+$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ de la forme $(w\mu)|_{A_{M'}}(w\mu_B)|_{A_{M'}}$ où $\mathrm{Re}[(w\mu)|_{A_{M'}}] = 0$, resp. $\mathrm{Re}[(w\mu)|_{A_{M'}}] \neq 0$. Fixons

$a \in A_{M'}$ tel que $|\alpha(a)|_F < 1$ pour tout $\alpha \in \Sigma(P')$. La théorie du résultant entraîne l'existence de polynômes $Q(X), R(X) \in B[X]$ tels que

$$Q(X) \prod_{\nu \in \mathcal{E}^w} (X - \nu(a))^{n(\nu)} + R(X) \prod_{\nu \in \mathcal{E}^+} (X - \nu(a))^{n(\nu)} = b,$$

où

$$b = \prod_{\nu \in \mathcal{E}^w} \prod_{\nu' \in \mathcal{E}^+} (\nu(a) - \nu'(a))^{n(\nu)n(\nu')}.$$

Posons $S = R(a) \prod_{\nu \in \mathcal{E}^+} (a - \nu(a))^{n(\nu)}$. C'est un élément de $B[A_{M'}]$.

Soit $\chi \in \operatorname{Im} X(M)$. Posons $(\pi_\chi, V_\chi) = (I_P^G(\omega \otimes \chi), I_P^G E_\chi)$. Comme $\operatorname{sp}_\chi \mu_B$ est unitaire, il est clair que

$$\mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi^w_{\chi,P'}) = \{\operatorname{sp}_\chi \nu;\ \nu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}^w\}, \qquad \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi^+_{\chi,P'}) = \{\operatorname{sp}_\chi \nu;\ \nu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}^+\}.$$

Pour tout $\nu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_{\chi,P'})$, on définit la multiplicité $n_\chi(\nu)$ comme on a défini plus haut $n(\nu)$ pour $\nu \in \mathcal{E}\mathrm{xp}$. On a l'égalité

$$n_\chi(\nu) = \sum n(\nu'),$$

sommé sur les $\nu' \in \mathcal{E}\mathrm{xp}$ tels que $\operatorname{sp}_\chi \nu' = \nu$. On en déduit que l'opérateur $\pi_{\chi,P'}(\operatorname{sp}_\chi S)$ annule $V^+_{\chi,P'}$ et agit sur $V^w_{\chi,P'}$ par l'homothétie de rapport $b(\chi)$. Or b ne s'annule pas sur $\operatorname{Im} X(M)$. En effet, si $\nu \in \mathcal{E}^w$, $\operatorname{Re}(\operatorname{sp}_\chi \nu) = 0$ donc $|(\operatorname{sp}_\chi \nu)(a)| = 1$. Tandis que si $\nu' \in \mathcal{E}^+$, $\operatorname{Re}(\operatorname{sp}_\chi \nu') \in {}^+\bar{\mathfrak{a}}^{G*}_{P'}$ d'après la Proposition III.2.2 et $\operatorname{Re}(\operatorname{sp}_\chi \nu') \neq 0$ d'après la définition de $\mathcal{E}^+$, donc $|(\operatorname{sp}_\chi \nu')(a)| < 1$. L'assertion en résulte.

L'opérateur $b(\chi)^{-1}\pi_{\chi,P'}(\operatorname{sp}_\chi S)$ est donc rationnel et régulier sur $\operatorname{Im} X(M)$, il annule $V^+_{\chi,P'}$ et agit par l'identité sur $V^w_{\chi,P'}$. On a alors l'égalité

$$(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)^w_{P'} = b(\chi)^{-1} \rho(\operatorname{sp}_\chi S)(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}.$$

Le membre de droite est rationnel et régulier sur $\operatorname{Im} X(M)$. Celui de gauche l'est donc aussi, ce qui achève la preuve. □

Lemme VI.2.2. *Soit $\psi \in C^\infty(\mathcal{O}, P)$. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\omega \in \mathcal{O}$ et tout $g \in G$, on ait l'inégalité*

$$|(E_P^G \psi_\omega)(g)| \leqslant C \Xi(g).$$

Preuve. On se ramène facilement à prouver l'assertion suivante: soient $(\omega, E) \in \mathcal{O}$, $v \in I^K_{K\cap P} E$, $\check{v} \in I^K_{K\cap P} \check{E}$; alors il existe $C > 0$ tel que pour tous $\chi \in \operatorname{Im} X(M)$ et tout $g \in G$, on ait

$$|\langle I_P^G(\omega \otimes \chi)(g)v, \check{v}\rangle| \leqslant C \Xi(g).$$

Notons v_χ l'élément de $I_P^G E_\chi$ dont la restriction à K est v. Pour tout $g \in G$, on a

$$\begin{aligned}\langle I_P^G(\omega \otimes \chi)(g)v, \check{v}\rangle &= \int_K \langle v_\chi(kg), \check{v}(k)\rangle \,\mathrm{d}k \\ &= \int_K \chi\delta_P^{1/2}(m_P(kg))\langle \omega(m_P(kg))v(k_P(kg)), \check{v}(k)\rangle \,\mathrm{d}k.\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Quand k et g varient, les éléments $v(k_P(kg))$ de E, resp. $\check{v}(k)$ de $\check{E}$, restent dans des sous-espaces de dimension finie. D'après le Corollaire III.1.2, il existe donc $C > 0$ tel que, pour tout $g \in G$ et tout $k \in K$, on ait

$$|\langle \omega(m_P(kg))v(k_P(kg)), \check{v}(k)\rangle| \leqslant C\Xi^M(m_P(kg)).$$

Alors

$$|\langle I_P^G(\omega \otimes \chi)(g)v, \check{v}\rangle| \leqslant C \int_K \delta_P^{1/2}(m_P(kg))\Xi^M(m_P(kg))\,\mathrm{d}k$$

et il reste à appliquer le Lemme II.1.6. □

Si $P' = M'U'$ est un sous-groupe parabolique standard de G et δ un réel > 0, on pose

$$D_{M'}(\delta) = \{m \in \bar{M}_0^+;\ \forall \alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^{M'},\ \langle \alpha, H_0(m)\rangle \geqslant \delta |H_0(m)|\}.$$

Pour tout $f \in \mathcal{A}^w(G)$, on pose $f_{P'}^+ = f_{P'} - f_{P'}^w$.

Lemme VI.2.3. *Soient $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique standard de G, δ un réel > 0 et $\psi \in C^\infty(\mathcal{O}, P)$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tous $\omega \in \mathcal{O}$ et $m \in D_{M'}(\delta)$, on ait l'inégalité*

$$|(E_P^G \psi_\omega)_{P'}^+(m)| \leqslant C\Xi^{M'}(m)\mathrm{e}^{-\varepsilon|H_0(m)|}.$$

Preuve. On suppose P' propre sinon $(E_P^G\psi_\omega)_{P'}^+ = 0$. Comme dans le Lemme VI.2.1, on peut fixer $(\omega, E) \in \mathcal{O}$, $\psi \in L(\omega_B, P)$ et remplacer dans l'énoncé ci-dessus ψ_ω par $\mathrm{sp}_\chi\,\psi$ pour $\chi \in \mathrm{Im}\,X(M)$.

Montrons qu'il existe $t > 0$, $C_1 > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\chi \in \mathrm{Im}\,X(M)$ et tout $m \in \bar{M}_0^+$ tel que $\langle \alpha, H_0(m)\rangle \geqslant t$ pour tout $\alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^{M'}$, on ait l'inégalité

$$|(E_P^G\,\mathrm{sp}_\chi\,\psi)_{P'}^+(m)| \leqslant C_1\Xi^{M'}(m)(1+\sigma(m))^d. \tag{1}$$

D'après I.5 et la Proposition I.4.3, il existe $t > 0$ tel que, si m vérifie les conditions ci-dessus, on ait l'égalité

$$(E_P^G\psi)_{P'}(m) = \delta_{P'}(m)^{-1/2}(E_P^G\psi)(m).$$

Grâce au Lemme VI.2.2, il existe donc $C_2 > 0$ tel que, sous les mêmes hypothèses sur m, et pour tout $\chi \in \mathrm{Im}\,X(M)$,

$$|(E_P^G\,\mathrm{sp}_\chi\,\psi)_{P'}(m)| \leqslant C_2\Xi(m)\delta_{P'}(m)^{-1/2}.$$

D'après le Lemme II.1.1, il existe $C_3, C_4 > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $m \in \bar{M}_0^+$, on ait:

$$\Xi(m) \leqslant C_3\delta_0(m)^{1/2}(1+\sigma(m))^d, \qquad C_4\delta_0^{M'}(m)^{1/2} \leqslant \Xi^{M'}(m).$$

D'où l'inégalité:

$$\Xi(m)\delta_{P'}(m)^{-1/2} \leqslant C_3C_4^{-1}\Xi^{M'}(m)(1+\sigma(m))^d.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

On en déduit une majoration analogue à (1) pour le terme constant $(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}(m)$. D'après la preuve du Lemme VI.2.1, il existe un élément $a \in A_{M'} \cap \bar{M}_0^+$, un entier n et, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, une fonction rationnelle b_i, régulière sur $\operatorname{Im} X(M)$, de sorte que pour tous $\chi \in \operatorname{Im} X(M)$, $m' \in M'$, on ait l'égalité

$$(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}^w(m') = \sum_{i=0}^{n} b_i(\chi)(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}(a^i m').$$

Les fonctions b_i sont bornées d'après la compacité de l'ensemble $\operatorname{Im} X(M)$. De la majoration déjà démontrée de $(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}(m)$, on déduit alors une majoration analogue pour $(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}^w(m')$ puis, par différence, la majoration (1).

Reprenons les notations de la preuve du Lemme VI.2.1. Pour $\chi \in \operatorname{Im} X(M)$, posons

$$r_\chi(X) = \prod_{\nu \in \mathcal{E}^+} (X - \operatorname{sp}_\chi \nu(a))^{n(\nu)}.$$

Développons ce polynôme:

$$r_\chi(X) = \sum_{i=0}^{N} r_{i,\chi} X^{N-i}.$$

Pour tout $\nu \in \mathcal{E}^+$, $|\operatorname{sp}_\chi \nu(a)|$ est indépendant de χ et appartient à l'intervalle $]0,1[$. Quitte à remplacer a par une puissance convenable, on peut donc supposer que pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$ et tout $\chi \in \operatorname{Im} X(M)$,

$$|r_{i,\chi}| \leqslant 2^{-i} N^{-1}.$$

Montrons que

(2) il existe $C_5 > 0$ tel que pour tout $\chi \in \operatorname{Im} X(M)$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \bar{M}_0^+$ tel que $\langle \alpha, H_0(m) \rangle \geqslant t$ pour tout $\alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^{M'}$, on ait l'inégalité

$$|(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}^+(a^n m)| \leqslant C_5 2^{-n} \varXi^{M'}(m)(1 + \sigma(m))^d$$

(t et d sont comme en (1)).

On pose

$$C_5 = C_1 \sup\{2^n (1 + \sigma(a^n))^d;\ 0 \leqslant n \leqslant N-1\}$$

(en supposant $N > 0$; si $N = 0$, on va voir que $(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}^+$ est nul). Pour $n < N$, la majoration (2) résulte de (1). Soit $n \geqslant N$, supposons la majoration (2) prouvée pour tout $n' < n$. Rappelons que l'opérateur $(I_P^G(\omega \otimes \chi))_{P'}^+(r_\chi(a))$ est nul donc $\rho(r_\chi(a))$ annule $(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}^+$. Pour tout $m \in \bar{M}_0^+$, on a donc l'égalité

$$(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}^+(a^n m) = -\sum_{i=1}^{N} r_{i,\chi}(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}^+(a^{n-i} m).$$

La majoration cherchée du membre de gauche résulte de l'hypothèse de récurrence et de la majoration des coefficients $r_{i,\chi}$ (si $N = 0$, on obtient la nullité du membre de gauche).

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

L'ensemble

$$\{m \in D_{M'}(\delta);\ |H_0(m)| \leqslant t\delta^{-1}\}$$

est compact. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver $C > 0$ tel que la majoration de l'énoncé soit vérifiée pour m dans cet ensemble. Posons

$$D = \{m \in D_{M'}(\delta);\ |H_0(m)| > t\delta^{-1}\}.$$

Soit $m \in D$, notons n la plus petite des parties entières de

$$(\delta|H_0(m)| - t)\langle\alpha, H_0(a)\rangle^{-1}$$

quand α parcourt $\Delta_0 - \Delta_0^{M'}$. D'après la définition de $D_{M'}(\delta)$, l'élément ma^{-n} appartient à $\bar{M}_0^+$ et vérifie l'inégalité $\langle\alpha, H_0(ma^{-n})\rangle \geqslant t$ pour tout $\alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^{M'}$. En appliquant (2) à l'élément ma^{-n} et à l'entier n, on obtient

$$|(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}^+(m)| \leqslant C_5 2^{-n} \Xi^{M'}(ma^{-n})(1 + \sigma(ma^{-n}))^d$$

pour tout $\chi \in \operatorname{Im} X(M)$. On a l'égalité $\Xi^{M'}(ma^{-n}) = \Xi^{M'}(m)$. Il existe $C_6 > 0$ et $r > 0$, indépendants de m, tels que

$$\begin{aligned} 1 + \sigma(ma^{-n}) &\leqslant C_6(1 + |H_0(m)|), \\ r|H_0(m)| &\leqslant n. \end{aligned}$$

On obtient

$$|(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}^+(m)| \leqslant C_5 C_6^d 2^{-r|H_0(m)|}(1 + |H_0(m)|)^d \Xi^{M'}(m).$$

Enfin, il existe $\varepsilon > 0$ et $C_7 > 0$ tels que pour tout $x \geqslant 0$,

$$2^{-rx}(1 + x)^d \leqslant C_7 \mathrm{e}^{-\varepsilon x}.$$

On obtient alors la majoration cherchée pour tout $m \in D$ et tout $\chi \in \operatorname{Im} X(M)$. Cela achève la démonstration. □

VI.3.

On munit $C^\infty(\operatorname{Im} X(M))$ de sa topologie usuelle. Fixons provisoirement $(\omega, E) \in \mathcal{O}$. Pour tout sous-groupe ouvert compact H de K, l'espace des invariants $L_K(\omega, P)^{H \times H}$ est de dimension finie, donc muni d'une topologie canonique. L'espace

$$C^\infty(\operatorname{Im} X(M)) \otimes_{\mathbb{C}} L_K(\omega, P)^{H \times H}$$

est muni de la topologie produit. Grâce à la description donnée en VI.1, son sous-espace $C^\infty(\mathcal{O}, P)^{H \times H}$ se retrouve muni d'une topologie. On munit $C^\infty(\mathcal{O}, P)$ de la toplogie limite inductive des topologies de ces sous-espaces quand H décrit l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de K.

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

On a muni $\operatorname{Im} X(M)$ d'une mesure. On munit $\mathcal{O}$ d'une mesure telle que l'application

$$\operatorname{Im} X(M) \to \mathcal{O}, \qquad \chi \mapsto \omega \otimes \chi$$

préserve localement les mesures.

Pour $\psi \in C^\infty(\mathcal{O}, P)$ définissons une fonction f_ψ sur G par

$$f_\psi(g) = \int_{\mathcal{O}} \mu(\omega)(E_P^G \psi_\omega)(g)\,\mathrm{d}\omega.$$

Proposition VI.3.1. *Pour tout $\psi \in C^\infty(\mathcal{O}, P)$, $f_\psi \in \mathcal{C}(G)$. L'application*

$$C^\infty(\mathcal{O}, P) \to \mathcal{C}(G), \qquad \psi \mapsto f_\psi$$

est continue.

Preuve. Fixons $(\omega, E) \in \mathcal{O}$, $\psi \in L(\omega_B, P)$ et un sous-groupe ouvert compact H de G tel que $H \times H$ fixe ψ. Pour $\varphi \in C^\infty(\operatorname{Im} X(M))$ et $g \in G$, posons

$$f_{\varphi,\psi}(g) = \int_{\operatorname{Im} X(M)} \mu(\omega \otimes \chi)\varphi(\chi)(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)(g)\,\mathrm{d}\chi. \tag{1}$$

Il s'agit de prouver que $f_{\varphi,\psi} \in \mathcal{C}_H$ (cf. III.6) et que l'application

$$C^\infty(\operatorname{Im} X(M)) \to \mathcal{C}_H, \qquad \varphi \mapsto f_{\varphi,\psi}$$

est continue. On a défini en III.6 la norme ν_r pour $r \in \mathbb{R}$. Notons $\mathcal{D}^M$ l'ensemble des ensembles finis d'opérateurs différentiels sur $\operatorname{Im} X(M)$, à coefficients constants. Pour $D \in \mathcal{D}^M$ et $\varphi \in C^\infty(\operatorname{Im} X(M))$, posons

$$\nu^M(D, \varphi) = \sup\{|d\varphi(\chi)|;\ d \in D,\ \chi \in \operatorname{Im} X(M)\}.$$

Il s'agit de prouver que pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $D \in \mathcal{D}^M$ tel que pour tout $\varphi \in C^\infty(\operatorname{Im} X(M))$, $\nu_r(f_{\varphi,\psi}) \leqslant \nu^M(D, \varphi)$.

Pour $m \in M$, posons $s(m) = \sup\{|\langle \alpha, H_0(m)\rangle|;\ \alpha \in \Delta_0\}$. Pour tout sous-ensemble $J \subset \Delta_0$, posons

$$\bar{M}_0^+(J) = \{m \in \bar{M}_0^+;\ \{\alpha \in \Delta_0;\ \langle \alpha, H_0(m)\rangle = s(m)\} = J\}$$

(si $\Delta_0 = \emptyset$, on pose $\bar{M}_0^+(\emptyset) = \bar{M}_0^+$). Pour $f \in C_{\text{lisse}}(G)$, $r \in \mathbb{R}$, $J \subset \Delta_0$, posons

$$\nu_{r,J}(f) = \sup\{|f(m)|\Xi(m)^{-1}(1 + \sigma(m))^r;\ m \in \bar{M}_0^+(J)\}.$$

En vertu de I.1 (4) et de l'égalité

$$\bar{M}_0^+ = \bigcup_{J \subset \Delta_0} \bar{M}_0^+(J),$$

il existe un ensemble fini $\mathcal{F} \subset L(\omega_B, P)$ tel que pour tout φ et tout r,

$$\nu_r(f_{\varphi,\psi}) = \sup\{\nu_{r,J}(f_{\varphi,\psi'});\ \psi' \in \mathcal{F},\ J \subset \Delta_0\}.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Quitte à remplacer ψ par les éléments de $\mathcal{F}$, il sufit donc de prouver que pour tout $r \in \mathbb{R}$ et tout $J \subset \Delta_0$, il existe $D \in \mathcal{D}^M$ tel que pour tout $\varphi \in C^\infty(\operatorname{Im} X(M))$, $\nu_{r,J}(f_{\varphi,\psi}) \leqslant \nu^M(D,\varphi)$. Fixons $J \subset \Delta_0$. Soit $P' = M'U'$ le sous-groupe parabolique standard de G tel que $\Delta_0^{M'} = \Delta_0 - J$. D'après I.5 et la Proposition I.4.3, il existe $t > 0$ tel que pour tout $m \in \bar{M}_0^+(J)$ vérifiant $s(m) \geqslant t$, et pour tout $\chi \in \operatorname{Im} X(M)$, on ait les égalités

$$\begin{aligned}(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)(m) &= \delta_{P'}(m)^{1/2}(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}(m) \\ &= \delta_{P'}(m)^{1/2}[(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}^w(m) + (E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}^+(m)].\end{aligned}$$

Fixons un tel t. Pour $\varphi \in C^\infty(\operatorname{Im} X(M))$, définissons des fonctions $f_{\varphi,\psi}^w$ et $f_{\varphi,\psi}^+$ sur M' en remplaçant dans l'intégrale (1) le terme $(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)(g)$ par $(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}^w(m')$, resp. $(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)_{P'}^+(m')$. Fixons $r \in \mathbb{R}$. Posons

$$\begin{aligned} n(\varphi) &= \sup\{|f_{\varphi,\psi}(m)|\Xi(m)^{-1}(1+\sigma(m))^r;\ m \in \bar{M}_0^+(J) \text{ et } s(m) \leqslant t\}, \\ n^w(\varphi) &= \sup\{|f_{\varphi,\psi}^w(m)|\delta_{P'}(m)^{1/2}\Xi(m)^{-1}(1+\sigma(m))^r;\ m \in \bar{M}_0^+(J)\}, \\ n^+(\varphi) &= \sup\{|f_{\varphi,w}^+(m)|\delta_{P'}(m)^{1/2}\Xi(m)^{-1}(1+\sigma(m))^r;\ m \in \bar{M}_0^+(J)\}. \end{aligned}$$

Alors $\nu_{r,J}(f_{\varphi,\psi}) \leqslant n(\varphi) + n^w(\varphi) + n^+(\varphi)$. En définitive, on est ramené à prouver

$$\left.\begin{aligned} &\text{il existe } D \in \mathcal{D}^M \text{ tel que pour tout } \varphi \in C^\infty(\operatorname{Im} X(M)), \\ &\qquad \sup(n(\varphi), n^w(\varphi), n^+(\varphi)) \leqslant \nu^M(D,\varphi). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Pour $\chi \in \operatorname{Im} X(M)$, $\lambda \in \operatorname{Im} X(G)$ et $g \in G$, on a

$$(E_P^G \operatorname{sp}_{\lambda\chi} \psi)(g) = \lambda(g)(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)(g).$$

Pour $g \in G$ et $\varphi \in C^\infty(\operatorname{Im} X(M))$, définissons une fonction φ_g sur $\operatorname{Im} X(M)$ par

$$\varphi_g(\chi) = \int_{\operatorname{Im} X(G)} \varphi(\lambda\chi)\lambda(g)\,\mathrm{d}\lambda. \tag{3}$$

Alors

$$f_{\varphi,\psi}(g) = \int_{\operatorname{Im} X(G)\backslash \operatorname{Im} X(M)} \mu(\omega \otimes \chi)\varphi_g(\chi)(E_P^G \operatorname{sp}_\chi \psi)(g)\,\mathrm{d}\chi.$$

La théorie usuelle de la transformation de Fourier sur le groupe abélien compact $\operatorname{Im} X(G)$ nous dit qu'il existe $D \in \mathcal{D}^G$ tel que pour tout $\varphi' \in C^\infty(\operatorname{Im} X(G))$ et tout $g \in G$, on ait

$$\left|\int_{\operatorname{Im} X(G)} \varphi'(\lambda)\lambda(g)\,\mathrm{d}\lambda\right| \leqslant (1 + (H_G(g)))^{-r}\nu^G(D,\varphi'). \tag{4}$$

En utilisant le Lemme VI.2.2, on en déduit qu'il existe $D \in \mathcal{D}^M$ tel que pour tout $\varphi \in C^\infty(\operatorname{Im} X(M))$ et tout $g \in G$, on ait l'inégalité

$$|f_{\varphi,\psi}(g)| \leqslant (1 + |H_G(g)|)^{-r}\Xi(g)\nu^M(D,\varphi).$$

Remarquons qu'il existe $C > 0$ tel que si $m \in M_0$ vérifie $s(m) \leqslant t$, alors

$$1 + \sigma(m) \leqslant C(1 + |H_G(m)|).$$

On en déduit l'assertion (2) pour le terme $n(\varphi)$ (pour peu que r soit > 0, ce que l'on peut évidemment supposer).

Notons que si $\Delta_0 = \emptyset$, on a $n^+(\varphi) = 0$, $n^w(\varphi) = n(\varphi)$ et (2) est donc démontrée (en fait l'introduction de $n^w(\varphi)$ ne sert à rien dans ce cas). On suppose désormais $\Delta_0 \neq \emptyset$. On peut alors supposer $J \neq \emptyset$, sinon $\bar{M}_0^+(J) = \emptyset$.

D'après la Proposition V.1.1 et le Corollaire V.2.3, pour tout $s \in W(M'|G|M)$, il existe une application rationnelle

$$\tilde{c}_{P'|P}(s) : L(\omega_B, P) \to L^{M'}(s\omega_B, M' \cap s \cdot P) \otimes_B \mathrm{Frac}(B)$$

telle que $\chi \mapsto \mathrm{sp}_\chi \tilde{c}_{P'|P}(s)$ soit régulière sur $\mathrm{Im}\, X(M)$ et telle que pour tout $m' \in M'$ et tout $\chi \in \mathrm{Im}\, X(M)$, on ait l'égalité

$$\mu(\omega \otimes \chi)(E_P^G \mathrm{sp}_\chi \psi)_{P'}^w(m') = \sum_{s \in W(M'|G|M)} \mu^{M'}(s(\omega \otimes \chi))(E_{M' \cap s \cdot P}^{M'} \mathrm{sp}_\chi \tilde{c}_{P'|P}(s)\psi)(m').$$

Pour $s \in W(M'|G|M)$, notons $s\mathcal{O}$ l'orbite de $s\omega$ sous $\mathrm{Im}\, X(s \cdot M)$; choisissons des ensembles finis $\mathcal{F}_s \subset L^{M'}(s\omega_B, M' \cap s \cdot P)$ et pour tout $\psi' \in \mathcal{F}_s$, $\varphi_{\psi'} \in C^\infty(\mathrm{Im}\, X(s \cdot M))$ de sorte que pour tout $\chi \in \mathrm{Im}\, X(M)$,

$$\mathrm{sp}_\chi \tilde{c}_{P'|P}(s)\psi = \sum_{\psi' \in \mathcal{F}_s} \varphi_{\psi'}(s\chi)\, \mathrm{sp}_{s\chi} \psi'.$$

Pour tout $\varphi \in C^\infty(\mathrm{Im}\, X(M))$ et tout $m' \in M'$, on obtient l'égalité

$$f_{\varphi,\psi}^w(m') = \sum_{s \in W(M'|G|M)} \int_{\mathrm{Im}\, X(s \cdot M)} \mu^{M'}(s\omega \otimes \chi)\varphi(s^{-1}\chi) \times \sum_{\psi' \in \mathcal{F}_s} \varphi_{\psi'}(\chi)(E_{M' \cap s \cdot P}^{M'} \mathrm{sp}_\chi \psi')(m')\, \mathrm{d}\chi.$$

Autrement dit

$$f_{\varphi,\psi}^w = \sum_{s \in W(M'|G|M)} \sum_{\psi' \in \mathcal{F}_s} f_{s(\varphi)\varphi_{\psi'},\psi'}^{M'},$$

où l'exposant M' signifie comme toujours que l'on remplace G par M' dans les définitions. Comme $J \neq \emptyset$, le rang semi-simple de M' est strictement inférieur à celui de G. En raisonnant par récurrence sur ce rang, on voit que pour tout réel r', il existe $D_{r'} \in \mathcal{D}^M$ tel que pour tout $\varphi \in C^\infty(\mathrm{Im}\, X(M))$ et tout $m' \in M'$, on ait l'inégalité

$$|f_{\varphi,\psi}^w(m')| \leqslant \nu^M(D_{r'}, \varphi)\Xi^{M'}(m')(1 + \sigma(m'))^{-r'}. \tag{5}$$

D'autre part, d'après II.1.1, il existe $c > 0$ et $r'' \in \mathbb{R}$ tels que

$$\delta_{P'}^{1/2}(m)\Xi^{M'}(m) \leqslant c\Xi(m)(1 + \sigma(m))^{r''} \tag{6}$$

pour tout $m \in \bar{M}_0^+$. En appliquant la majoration ci-dessus pour $r' = r + r''$, on obtient l'assertion (2) pour le terme $n^w(\varphi)$.

Il existe $\delta > 0$ tel que $\bar{M}_0^+(J) \subset A_G D_{M'}(\delta)$, cf VI.2. Soient $a \in G$ et $m \in D_{M'}(\delta)$. En utilisant la définition (3), on a l'égalité

$$f^+_{\varphi,\psi}(am) = \int_{\operatorname{Im} X(G)\backslash \operatorname{Im} X(M)} \mu(\omega\otimes\chi)\varphi_{am}(\chi)(E^G_P \operatorname{sp}_\chi \psi)^+_{P'}(am)\,\mathrm{d}\chi$$

pour tout $\varphi \in C^\infty(\operatorname{Im} X(M))$. Remarquons que

$$|(E^G_P \operatorname{sp}_\chi \psi)^+_{P'}(am)| = |(E^G_P \operatorname{sp}_\chi \psi)^+_{P'}(m')|.$$

En utilisant le Lemme VI.2.3 et les relations (4) et (6) ci-dessus, on voit qu'il existe $\varepsilon > 0$, $r'' \in \mathbb{R}$ et $D \in \mathcal{D}^M$ tels que pour tout $\varphi \in C^\infty(\operatorname{Im} X(M))$, tout $a \in A_G$ et tout $m \in D_{M'}(\delta)$,

$$\delta^{1/2}_{P'}(m)|f^+_{\varphi,\psi}(am)| \leqslant \nu^M(D,\varphi)(1+\sigma(m))^{r''}(1+|H_G(am)|)^{-r}\mathrm{e}^{-\varepsilon|H_0(m)|}\varXi(m).$$

Remarquons que $\delta_{P'}(m) = \delta_{P'}(am)$, $\varXi(m) = \varXi(am)$. Notons $H_0^G(m)$ la projection sur a_0^G de $H_0(m)$. Il existe $c > 0$ tel que

$$1+\sigma(am) \leqslant c(1+|H_0(am)|) \leqslant c(1+|H_G(am)|)(1+|H_0^G(m)|)$$

pour tous $a \in A_G$, $m \in M_0$. Sous les hypothèses ci-dessus (en en supposant $r > 0$), on obtient

$$\begin{aligned}&\delta^{1/2}_{P'}(am)|f^+_{\varphi,\psi}(am)|\\ &\qquad\leqslant C^r\nu^M(D,\varphi)(1+\sigma(am))^{-r}\varXi(am)(1+|H_0^G(m)|)^r(1+\sigma(m))^{r''}\mathrm{e}^{-\varepsilon|H_0(m)|}.\end{aligned}$$

Il reste à remarquer que la fonction

$$m \mapsto (1+|H_0^G(m)|)^r(1+\sigma(m))^{r''}\mathrm{e}^{-\varepsilon|H_0(m)|}$$

est bornée sur M_0 pour obtenir l'assertion (2) pour le terme $n^+(\varphi)$. Cela achève la démonstration. □

Notons $\varTheta$ l'ensemble des couples $(\mathcal{O}, P = MU)$ où P est un sous-groupe parabolique semi-standard de G et $\mathcal{O} \subset \mathcal{E}_2(M)$ une orbite sous l'action de $\operatorname{Im} X(M)$. On pose

$$C^\infty(\varTheta) = \bigoplus_{(\mathcal{O},P)\in\varTheta} C^\infty(\mathcal{O},P).$$

Pour $\psi \in C^\infty(\varTheta)$, on note $\psi[\mathcal{O},P]$ sa composante dans $C^\infty(\mathcal{O},P)$. On définit une application $\tilde{\kappa} : C^\infty(\varTheta) \to \mathcal{C}(G)$ par

$$\tilde{\kappa}(\psi) = \sum_{(\mathcal{O},P=MU)\in\varTheta} C(G|M)^{-2}\gamma(G|M)^{-1}|W^M|\,|W^G|^{-1}|\mathcal{P}(M)|^{-1}f_{\psi[\mathcal{O},P]}.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Notons $C^\infty(\Theta)^{\mathrm{inv}}$ le sous-espace des $\psi \in C^\infty(\Theta)$ vérifiant la condition suivante: pour tout $s \in W^G$, tous $(\mathcal{O}, P = MU) \in \Theta$, tout $P' \in \mathcal{P}(s \cdot M)$ et tout $\omega \in \mathcal{O}$,

$$\psi[s\mathcal{O}, P']_{s\omega} = {}^{o}c_{P'|P}(s,\omega)\psi[\mathcal{O}, P]_{\omega}.$$

Notons que si $s \in W^M$ et $P' = P$, cette condition est automatique: $\psi[\mathcal{O}, P]_\omega$ ne dépend que de la classe de ω. On pourrait remplacer ci-dessus W^G par un ensemble de représentants de W^G/W^M. On note κ la restriction de $\tilde{\kappa}$ à $C^\infty(\Theta)^{\mathrm{inv}}$.

On définit un projecteur $P^{\mathrm{inv}} : C^\infty(\Theta) \to C^\infty(\Theta)^{\mathrm{inv}}$ par:

$$(P^{\mathrm{inv}}\psi)[\mathcal{O}, P]_\omega = |W^G|^{-1}|\mathcal{P}(M)|^{-1} \sum_{s \in W^G} \sum_{P' \in \mathcal{P}(s \cdot M)} {}^{o}c_{P'|P}(s,\omega)^{-1}\psi[s\mathcal{O}, P']_{s\omega}.$$

Lemme VI.3.2. *L'application $\tilde{\kappa}$ se factorise par le projecteur P^{inv}.*

Preuve. Cela résulte du Lemme V.3.1. □

VI.4.

Soient de nouveau $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G et $\mathcal{O} \subset \mathcal{E}_2(M)$ une orbite pour l'action de $\operatorname{Im} X(M)$. Rappelons qu'à une fonction $f \in \mathcal{C}(G)$ et à un sous-groupe parabolique semi-standard $P' = M'U'$ de G, on a associé en III.6 un élément $f^{(P'),\mathrm{Ind}}$ de $I^{G\times G}_{P'\times P'}\mathcal{C}(M')$.

Proposition VI.4.1. *Soient $\psi \in C^\infty(\mathcal{O}, P)$ et $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G.*

(i) *Si le rang semi-simple de M' est inférieur ou égal à celui de M et M' n'est pas conjugué à M, $f_\psi^{(P'),\mathrm{Ind}} = 0$.*

(ii) *Supposons $M' = M$. Alors pour tous $g_1, g_2 \in G$, $m \in M$, on a l'égalité*

$$f_\psi^{(P'),\mathrm{Ind}}(g_1,g_2)(m) = \gamma(G|M)c(G|M)^2 \int_{\mathcal{O}} \sum_{s \in W(G|M)} E_M^M[({}^{o}c_{P'|P}(s,\omega)\psi_\omega)(g_1,g_2)](m)\,\mathrm{d}\omega$$

(pour $(\omega, E) \in \mathcal{O}$, ${}^{o}c_{P'|P}(s,\omega)\psi_\omega$ appartient à $L(s\omega, P')$, $({}^{o}c_{P'|P}(s,\omega)\psi_\omega)(g_1,g_2)$ appartient à $sE \otimes s\check{E}$ et $E_M^M : sE \otimes s\check{E} \to \mathcal{C}(M)$ est l'application 'coefficient' définie en V.1).

Preuve. Pour tout $\omega \in \mathcal{O}$, le groupe $G \times G$ agit sur $L(\omega, P)$. Nous noterons $\rho_1 \times \rho_2$ cette action. On notera $\rho_1 \times \rho_2$ l'action qui s'en déduit sur $C^\infty(\mathcal{O}, P)$. Fixons $m' \in M'$ et un sous-groupe ouvert compact H de K tel que

- $H = (H \cap U')(H \cap M')(H \cap U')$;
- il existe $C_H > 0$ tel que pour tout $\varphi \in C^\infty(H)$,

$$\int_H \varphi(h)\,\mathrm{d}h = C_H \int_{H\cap U' \times H \cap M' \times H \cap U'} \varphi(u'm_1'\bar{u}')\,\mathrm{d}\bar{u}'\,\mathrm{d}m_1'\,\mathrm{d}u';$$

- $\rho_2(m'^{-1})\psi$ soit invariante par $H \times H$.

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Fixons $a \in A_{M'}$ tel que $|\alpha(a)|_F < 1$ pour tout $\alpha \in \Sigma(P')$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$U'_n = a^{-n}(H \cap U')a^n.$$

Par définition,

$$\begin{aligned} f_\psi^{(P')}(m') &= \delta_{P'}(m')^{1/2} \int_{U'} f_\psi(m'u')\,\mathrm{d}u', \\ &= \delta_{P'}(m')^{1/2} \lim_{n\to\infty} \int_{U'_n} f_\psi(m'u')\,\mathrm{d}u', \\ &= \delta_{P'}(m')^{1/2} \lim_{n\to\infty} \delta_{P'}(a)^{-n} \int_{H\cap U'} f_\psi(m'a^{-n}u'a^n)\,\mathrm{d}u'. \end{aligned} \tag{1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{H\cap U'} f_\psi(m'a^{-n}u'a^n)\,\mathrm{d}u' = \int_{H\cap U'} \int_{\mathcal{O}} \mu(\omega)(E_P^G\psi_\omega)(m'a^{-n}u'a^n)\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}u'.$$

Notons que $(E_P^G\psi_\omega)(m'a^{-n}u'a^n) = (E_P^G\rho_1(u'a^n)\rho_2(m'^{-1})\psi_\omega)(a^{-n})$. Posons

$$\psi_n = \int_{H\cap U'} \rho_1(u'a^n)\rho_2(m'^{-1})\psi\,\mathrm{d}u'.$$

Alors

$$\int_{U'\cap H} f_\psi(m'a^{-n}u'a^n)\,\mathrm{d}u' = \int_{\mathcal{O}} \mu(\omega)(E_P^G\psi_{n,\omega})(a^{-n})\,\mathrm{d}\omega. \tag{2}$$

Comme $a^{-n}(H\cap M')(H\cap \bar{U}')a^n \subset H$, on a l'égalité

$$\begin{aligned} \psi_n &= C \int_{H\cap U' \times H\cap M' \times H\cap \bar{U}'} \rho_1(u'm'_1\bar{u}'a^n)\rho_2(m'^{-1})\psi\,\mathrm{d}\bar{u}'\,\mathrm{d}m'_1\,\mathrm{d}u', \\ &= CC_H^{-1} \int_H \rho_1(ha^n)\rho_2(m'^{-1})\psi\,\mathrm{d}h, \end{aligned}$$

où $C = \mathrm{mes}(H\cap M')^{-1}\,\mathrm{mes}(H\cap \bar{U}')^{-1}$. Donc $\psi_n \in C^\infty(\mathcal{O}, P)^{H\times H}$. Il résulte de la description donnée en VI.1 que $C^\infty(\mathcal{O}, P)^{H\times H}$ est un $C^\infty(\mathrm{Im}\,X(M))$-module de type fini, engendré par ses éléments rationnels réguliers. D'après I.5 et la Proposition I.4.3, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, on ait les égalités

$$\begin{aligned} (E_P^G\psi_{n,\omega})(a^{-n}) &= \delta_{\bar{P}'}(a)^{-n/2}(E_P^G\psi_{n,\omega})_{\bar{P}'}(a^{-n}), \\ &= \delta_{\bar{P}'}(a)^{-n/2}[(E_P^G\psi_{n,\omega})_{\bar{P}'}^w(a^{-n}) + (E_P^G\psi_{n,\omega})_{\bar{P}'}^+(a^{-n})], \end{aligned}$$

pour tout $\omega \in \mathcal{O}$. En reportant ces égalités dans (2) puis (1), on obtient

$$f_\psi^{(P')}(m') = X^w + X^+, \tag{3}$$

où

$$\begin{aligned} X^w &= \delta_{P'}(m')^{1/2} \lim_{n\to\infty} \delta_{P'}(a)^{-n/2} \int_{\mathcal{O}} \mu(\omega)(E_P^G\psi_{n,\omega})_{\bar{P}'}^w(a^{-n})\,\mathrm{d}\omega, \\ X^+ &= \delta_{P'}(m')^{1/2} \lim_{n\to\infty} \delta_{P'}(a)^{-n/2} \int_{\mathcal{O}} \mu(\omega)(E_P^G\psi_{n,\omega})_{\bar{P}'}^+(a^{-n})\,\mathrm{d}\omega, \end{aligned}$$

pour peu que ces limites existent.

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Montrons que

(4) il existe $\varepsilon > 0$, $C > 0$, et $d \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tout $\omega \in \mathcal{O}$, on ait l'inégalité

$$|(E_P^G \psi_{n,\omega})^+_{\bar{P}'}(a^{-n})| \leqslant C\delta_{P'}(a)^{n/2}(1+\sigma(a^n))^d \mathrm{e}^{-\varepsilon|H_0(a^n)|}.$$

Comme $\mathcal{O}$ est compact, il suffit de prouver que pour $\omega_0 \in \mathcal{O}$, on a une telle majoration dans un voisinage convenable de ω_0. Fixons $\omega_0 \in \mathcal{O}$ et un ensemble fini $\mathcal{F} \subset C^\infty(\mathcal{O}, P)^{H\times H}$, formé de fonctions rationnelles régulières, tel que $\{\psi'_{\omega_0};\ \psi' \in \mathcal{F}\}$ soit une base de $L(\omega_0, P)^{H\times H}$. Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de ω_0 dans $\mathcal{O}$ tel que, pour tout $\omega \in \mathcal{U}$, $\{\psi'_\omega;\ \psi' \in \mathcal{F}\}$ soit encore une base de $L(\omega, P)^{H\times H}$. Pour tout $\psi'' \in C^\infty(\mathcal{O}; P)^{H\times H}$ et tout $\omega \in \mathcal{U}$, on peut donc écrire de façon unique

$$\psi''_\omega = \sum_{\psi' \in \mathcal{F}} C(\psi', \psi'', \omega)\psi'_\omega.$$

Quitte à restreindre $\mathcal{U}$, on peut supposer qu'il existe $C_1 > 0$, tel que pour tout $\psi'' \in C^\infty(\mathcal{O}; P)^{H\times H}$ et tout $\omega \in \mathcal{U}$, on ait l'inégalité

$$\sum_{\psi' \in \mathcal{F}} |C(\psi', \psi'', \omega)| \leqslant C_1 \sup\{|(\psi'_\omega, \psi''_\omega)|;\ \psi' \in \mathcal{F}\}$$

(le produit hermitien intervenant dans le membre de droite est celui de V.2). Il est clair qu'en conjugant la situation, on peut supposer $\bar{P}'$ standard. Choisissons $\delta > 0$ tel que $a^{-n} \in D_{M'}(\delta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le Lemme VI.2.3, il existe $\varepsilon > 0$ et $C_2 > 0$ tels que, pour tout $\psi' \in \mathcal{F}$, tout $\omega \in \mathcal{O}$ et tout $m \in D_{M'}(\delta)$, on ait l'inégalité

$$|(E_P^G \psi'_\omega)^+_{\bar{P}'}(m)| \leqslant C_2 \Xi^{M'}(m)\mathrm{e}^{-\varepsilon|H_0(m)|}.$$

Pour $\omega \in \mathcal{U}$ et $n \in \mathbb{N}$, en remarquant que $\Xi^{M'}(a^{-n}) = 1$ et $H_0(a^{-n}) = -H_0(a^n)$, on obtient

$$\begin{aligned} |(E_P^G \psi_{n,\omega})^+_{\bar{P}'}(a^{-n})| &\leqslant C_2 \mathrm{e}^{-\varepsilon|H_0(a^n)|} \sum_{\psi' \in \mathcal{F}} |C(\psi', \psi_n, \omega)| \\ &\leqslant C_1 C_2 \mathrm{e}^{-\varepsilon|H_0(a^n)|} \sup\{|(\psi'_\omega, \psi_{n,\omega})|;\ \psi' \in \mathcal{F}\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Fixons $\psi' \in \mathcal{F}$. Pour $\omega \in \mathcal{U}$, on a l'égalité

$$\begin{aligned} (\psi'_\omega, \psi_{n,\omega}) &= \int_{H\cap U'} (\psi'_\omega, \rho_1(u'a^n)\rho_2(m'^{-1})\psi_\omega)\,\mathrm{d}u' \\ &= \int_{H\cap U'} (\rho_1(u'^{-1})\psi'_\omega, \rho_1(a^n)\rho_2(m'^{-1})\psi_\omega)\,\mathrm{d}u' \\ &= \mathrm{mes}(H\cap U')(\psi'_\omega, \rho_1(a^n)\rho_2(m'^{-1})\psi_\omega) \end{aligned}$$

car ψ'_ω est invariant par $H \times H$. D'autre part soit $(\omega, E) \in \mathcal{O}$. On définit un produit sesquilinéaire

$$L(\omega, P) \times L(\omega, P) \to L(\omega, P), \qquad (\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \varphi_1 \times \varphi_2$$

de la façon suivante. Munissons $I_P^G E$ et $I_P^G \check{E}$ de produits hermitiens comme en V.2. Notons $\theta : I_P^G E \to I_P^G \check{E}$ l'application antilinéaire telle que pour tous $v_1, v_2 \in I_P^G E$, $(v_1, v_2) = \langle v_2, \theta v_1 \rangle$. Alors, pour $v_1, v_2 \in I_P^G E$, $\check{v}_1, \check{v}_2 \in I_P^G \check{E}$, on pose

$$(\check{v}_1 \otimes \check{v}_1) \times (v_2 \otimes \check{v}_2) = d(\omega)^{-1} (\check{v}_1, \check{v}_2) v_2 \otimes \theta v_1.$$

On vérifie que pour $\varphi_1, \varphi_2 \in L(\omega, P)$ et $g \in G$, on a l'égalité

$$(\varphi_1, \rho_1(g)\varphi_2) = (E_P^G(\varphi_1 \times \varphi_2))(g).$$

Pour $\psi_1, \psi_2 \in C^\infty(\mathcal{O}, P)$ on définit une fonction $\psi_1 \times \psi_2$ sur $\mathcal{O}$ par $(\psi_1 \times \psi_2)_\omega = \psi_{1,\omega} \times \psi_{2,\omega} \in L(\omega, P)$ pour tout $\omega \in \mathcal{O}$. On vérifie que $\psi_1 \times \psi_2 \in C^\infty(\mathcal{O}, P)$. Revenons à notre calcul. Pour $\omega \in \mathcal{U}$, on obtient l'égalité

$$(\psi'_\omega, \psi_{n,\omega}) = \operatorname{mes}(H \cap U')[E_P^G(\psi' \times \rho_2(m'^{-1})\psi)_\omega](a^n).$$

D'après le Lemme VI.2.2, il existe donc $C_3 > 0$ tel que pour tout $\omega \in \mathcal{U}$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\psi' \in \mathcal{F}$,

$$|(\psi'_\omega, \psi_{n,\omega})| \leqslant C_3 \mathit{\Xi}(a^n).$$

Ou encore, d'après le Lemme II.1.1, il existe $C_4 > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que pour tous ω, n, ψ',

$$|(\psi'_\omega, \psi_{n,\omega})| \leqslant C_4 \delta_0(a)^{n/2}(1 + \sigma(a^n))^d.$$

En remarquant que $\delta_0(a) = \delta_{P'}(a)$, cette inégalité jointe à l'inégalité (5) démontrent la propriété (4).

On déduit de (4) l'égalité $X^+ = 0$.

Sous les hypothèses du (i) de l'énoncé, on a $W(M'|G|M) = \emptyset$, donc $(E_P^G \psi_{n,\omega})_{\bar{P}'}^w(a^{-n}) = 0$ pour tous n, ω d'après la Proposition V.1.1. Alors $X^w = 0$ et $f_\psi^{(P')} = 0$. Cela démontre le (i) de l'énoncé.

Supposons maintenant $M' = M$, notons simplement m l'élément noté jusqu'à présent m'. Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \mathcal{O}$, on a les égalités

$$\begin{aligned}
&(E_P^G \psi_{n,\omega})_{\bar{P}'}^w(a^{-n}) \\
&\quad = \int_{H \cap U'} [(E_P^G \psi_\omega)_{\bar{P}'}^{w,\mathrm{Ind}}(u'a^n, m^{-1})](a^{-n}) \,\mathrm{d}u', \\
&\quad = \delta_{P'}(a)^{-n/2} \delta_{P'}(m)^{-1/2} \int_{H \cap U'} [(E_P^G \psi_\omega)_{\bar{P}'}^{w,\mathrm{Ind}}(a^{-n}u'a^n, 1)](m) \,\mathrm{d}u' \\
&\quad = \delta_{P'}(a)^{n/2} \delta_{P'}(m)^{-1/2} \int_{U'_n} [(E_P^G \psi_\omega)_{\bar{P}'}^{w,\mathrm{Ind}}(u', 1)](m) \,\mathrm{d}u' \\
&\quad = \delta_{P'}(a)^{n/2} \delta_{P'}(m)^{-1/2} \int_{U'_n} \delta_{\bar{P}'}(m_{\bar{P}'}(u'))^{1/2} [(E_P^G \psi_\omega)_{\bar{P}'}^{w,\mathrm{Ind}}(k_{\bar{P}'}(u'), 1)](m m_{\bar{P}'}(u')) \,\mathrm{d}u'.
\end{aligned}$$

D'où

$$X^w = \lim_{n \to \infty} \int_{U'_n} \delta_{\bar{P}'}(m_{\bar{P}'}(u'))^{1/2} e(u') \,\mathrm{d}u',$$

où
$$e(u') = \int_{\mathcal{O}} \mu(\omega)[(E_P^G\psi_\omega)_{\bar{P}'}^{w,\mathrm{Ind}}(k_{\bar{P}'}(u'),1)](mm_{\bar{P}'}(u'))\,\mathrm{d}u'.$$
D'après VI.3 (5), pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $c > 0$ tel que pour tout $u' \in U'$, on ait l'inégalité
$$|e(u')| \leqslant c\Xi^M(mm_{\bar{P}'}(u'))(1+\sigma(mm_{\bar{P}'}(u')))^{-r}.$$
Grâce au Lemme II.4.3, l'intégrale
$$\int_{U'} \delta_{\bar{P}'}(m_{\bar{P}'}(u'))^{1/2}|e(u')|\,\mathrm{d}u'$$
est donc convergente. On obtient
$$X^w = \int_{U'} \delta_{\bar{P}'}(m_{\bar{P}'}(u'))^{1/2}e(u')\,\mathrm{d}u'.$$
Pour $\varepsilon \geqslant 0$, posons
$$X^w(\varepsilon) = \int_{U'} \delta_{\bar{P}'}(m_{\bar{P}'}(u))^{(1/2)+\varepsilon}e(u')\,\mathrm{d}u'.$$
Grâce au Lemme II.3.4, cette intégrale est absolument convergente, uniformément en ε. La fonction X^w est donc continue en 0.

Pour $s \in W(G|M)$, $\omega \in \mathcal{O}$ et $u' \in U'$, posons pour simplifier
$$e(s,\omega,u') = E_M^{\bar{P}'}(c_{\bar{P}'|P}(s,\omega)\psi_\omega)(k_{\bar{P}'}(u'),1).$$
On a $e(s,\omega,u') \in C_{\mathrm{lisse}}(M)$, cf. V.1. D'après la Proposition V.1.1, pour tout $u' \in U'$ et tout élément G-régulier $\omega \in \mathcal{O}$, on a l'égalité
$$\mu(\omega)[(E_P^G\psi_\omega)_{\bar{P}'}^{w,\mathrm{Ind}}(k_{\bar{P}'}(u'),1)](mm_{\bar{P}'}(u')) = \sum_{s\in W(G|M)} \mu(\omega)[e(s,\omega,u')](mm_{\bar{P}'}(u')). \quad (6)$$
Mais, d'après le Corollaire V.2.3, les applications
$$\omega \mapsto \mu(\omega)e(s,\omega,u')$$
sont rationnelles régulières sur $\mathcal{O}$. L'égalité ci-dessus se prolonge à tout $\omega \in \mathcal{O}$. De plus, grâce au Corollaire III.1.2, il existe $c > 0$ tel que pour tous $u' \in U'$, $\omega \in \mathcal{O}$, $s \in W(G|M)$,
$$|\mu(\omega)[e(s,\omega,u')](mm_{\bar{P}'}(u'))| \leqslant c\Xi^M(mm_{\bar{P}'}(u')).$$
Pour $s \in W(G|M)$ et $\varepsilon > 0$, posons
$$X_s^w(\varepsilon) = \int_{\mathcal{O}}\int_{U'} \delta_{\bar{P}'}(m_{\bar{P}'}(u'))^{1/2+\varepsilon}\mu(\omega)[e(s,\omega,u')](mm_{\bar{P}'}(u'))\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}\omega. \quad (7)$$
Cette expression est absolument convergente d'après les Lemmes II.3.4 et II.4.3. D'après l'égalité (6), on a l'égalité
$$X^w(\varepsilon) = \sum_{s\in W(G|M)} X_s^w(\varepsilon).$$

Notons $Y_s(\omega, \varepsilon)$ l'intégrale intérieure du membre de droite de l'égalité (7). Nous allons prouver

(8) il existe ε_0 tel que Y_s soit bornée sur $\mathcal{O}\times]0, \varepsilon_0[$; pour presque tout $\omega \in \mathcal{O}$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} Y_s(\omega, \varepsilon) = \gamma(G|M)c(G|M)^2 E_M^M[({}^o c_{P'|P}(s, \omega)\psi_\omega)(1,1)](m).$$

En admettant cela, et en utilisant les égalités

$$f_\psi^{(P')}(m) = X^w = \lim_{\varepsilon \to 0} X^w(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{s \in W(G|M)} X_s^w(\varepsilon),$$

on obtient l'égalité (ii) de l'énoncé pour $g_1 = g_2 = 1$. Le cas général s'en déduit en remplaçant ψ par $\rho_1(g_1)\rho_2(g_2)\psi$.

Pour prouver (8), fixons $(\omega, E) \in \mathcal{O}$. Par restriction à K, on identifie tous les espaces de représentations induites intervenant à des espaces fixes (par exemple $I_{K\cap P}^K E$, $I_{K\cap \bar{P}'}^K sE$, etc.) et tous les opérateurs d'entrelacement à des opérateurs entre ces espaces fixes. Pour $v \in I_{K\cap P}^K E$, $\check{v} \in I_{K\cap P}^K \check{E}$, $\chi \in \operatorname{Im} X(M)$, $\varepsilon > 0$ et $u' \in U'$, posons

$$\begin{aligned} e(s, v, \check{v}, \chi, u') &= E_M^{\bar{P}'}(c_{\bar{P}'|P}(s, \omega \otimes \chi)(v \otimes \check{v}))(k_{\bar{P}'}(u'), 1), \\ Y_s(v, \check{v}, \chi, \varepsilon) &= \int_{U'} \delta_{\bar{P}'}(m_{\bar{P}'}(u'))^{1/2+2\varepsilon} \mu(\omega \otimes \chi)[e(s, v, \check{v}, \chi, u')](m m_{\bar{P}'}(u'))\, \mathrm{d}u'. \end{aligned}$$

Il existe des ensembles finis $\{v_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset I_{K\cap P}^K E$, $\{\check{v}_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset I_{K\cap P}^K \check{E}$, $\{\varphi_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset C^\infty(\operatorname{Im} X(M))$ de sorte que pour tout $\chi \in \operatorname{Im} X(M)$,

$$\psi_{\omega\otimes\chi} = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\chi)(v_i \otimes \check{v}_i),$$

d'où

$$Y_s(\omega \otimes \chi, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\chi) Y_s(v_i, \check{v}_i, \chi, \varepsilon).$$

Il suffit donc de prouver une propriété analogue à (8) pour les intégrales $Y_s(v, \check{v}, \chi, \varepsilon)$. Fixons donc v, $\check{v}$, posons pour simplifier $Y(\chi, \varepsilon) = Y_s(v, \check{v}, \chi, \varepsilon)$, $e(\chi, u') = e(s, v, \check{v}, \chi, u')$. Notons $Z \subset \operatorname{Im} X(M)$ la réunion des ensembles des pôles des fonctions

$$\chi \mapsto J_{\bar{P}'|s\cdot P}(s(\omega \otimes \chi)), \qquad \chi \mapsto J_{P'|s\cdot P}(s(\check{\omega} \otimes \chi^{-1})), \qquad \chi \mapsto J_{P'|\bar{P}'}(s(\omega \otimes \chi)).$$

C'est un ensemble fermé de mesure nulle. Pour $\chi \in \operatorname{Im} X(M) - Z$, posons

$$\begin{aligned} v[\chi] &= J_{\bar{P}'|s\cdot P}(s(\omega \otimes \chi))\lambda(s)v, \\ \check{e}[\chi] &= s(\check{\omega} \otimes \chi^{-1})(m^{-1})[(J_{P'|s\cdot P}(s(\check{\omega} \otimes \chi^{-1}))\lambda(s)\check{v})(1)]. \end{aligned}$$

On a $v[\chi] \in I_{K\cap \bar{P}'}^K sE$, $\check{e}[\chi] \in s\check{E}$. D'après les définitions de V.1, pour $\chi \in \operatorname{Im} X(M) - Z$ et $u' \in U'$, on a l'égalité

$$e(\chi, u') = \gamma(G|M)^{-1} \langle s(\omega \otimes \chi)(m_{\bar{P}'}(u'))[v[\chi](k_{\bar{P}'}(u'))], \check{e}[\chi] \rangle.$$

Pour $\varepsilon > 0$, notons V_ε l'espace de la représentation induite $I_{\bar{P}'}^G[s(\omega\otimes\chi)\otimes\delta_{\bar{P}'}^{\varepsilon}]$ et $v[\chi]_\varepsilon$ l'élément de V_ε dont la restriction à K est égale à $v[\chi]$. Pour tout $u'\in U'$, on a l'égalité

$$\delta_{\bar{P}'}(m_{\bar{P}'}(u'))^{1/2+\varepsilon}s(\omega\otimes\chi)(m_{\bar{P}'}(u'))[v[\chi](k_{\bar{P}'}(u'))] = v[\chi]_\varepsilon(u').$$

Donc pour $\chi\in\operatorname{Im}X(M)-Z$ et $\varepsilon>0$,

$$Y(\chi,\varepsilon)=\gamma(G|M)^{-1}\mu(\omega\otimes\chi)\int_{U'}\langle v[\chi]_\varepsilon(u'),\check{e}[\chi]\rangle\,\mathrm{d}u'.$$

Par définition de l'opérateur d'entrelacement et grâce à la Proposition IV.2.1, c'est aussi

$$Y(\chi,\varepsilon)=\gamma(G|M)^{-1}\mu(\omega\otimes\chi)\langle(J_{P'|\bar{P}'}[s(\omega\otimes\chi)\otimes\delta_{\bar{P}'}^{\varepsilon}]v[\chi])(1),\check{e}[\chi]\rangle. \tag{9}$$

Pour prouver (8), il suffit de fixer $\chi\in\operatorname{Im}X(M)$ et d'étudier le comportement de Y au voisinage du point $(\chi,0)$. Quitte à remplacer ω par $\omega\otimes\chi$, il suffit d'étudier le comportement de Y au voisinage du point $(1,0)$.

Pour $\lambda\in a_{M,\mathbb{C}}^*$, notons χ_λ son image par l'application naturelle $a_{M,\mathbb{C}}^*\to X(M)$, posons pour simplifier $\omega_\lambda=\omega\otimes\chi_\lambda$, $\rho=\frac{1}{2}\operatorname{Re}(\delta_{\bar{P}'})$. Pour tout $\alpha\in\Sigma_{\mathrm{red}}(P)$, il existe $n(\alpha)\in\mathbb{N}$ de sorte que la fonction

$$\lambda\mapsto\Bigl[\prod_{\alpha\in\Sigma_{\mathrm{red}}(P)}\langle\lambda,\check{\alpha}\rangle^{-n(\alpha)}\Bigr]\mu(\omega_\lambda)$$

soit holomorphe au voisinage de 0 et non nulle en 0. Comme μ est à valeurs $\geqslant 0$ sur $\mathcal{O}$, les $n(\alpha)$ sont tous pairs. Le même argument que celui de la preuve du Corollaire V.2.3 montre que les fonctions

$$\lambda\mapsto\Bigl[\prod_{\alpha\in\Sigma_{\mathrm{red}}(P)}\langle\lambda,\check{\alpha}\rangle^{n(\alpha)/2}\Bigr]J_{\bar{P}'|s\cdot P}(s\omega_\lambda)\otimes J_{P'|s\cdot P}(s\check{\omega}_{-\lambda})$$

et

$$\lambda\mapsto\Bigl[\prod_{\alpha\in\Sigma_{\mathrm{red}}(P)}\langle\lambda,\check{\alpha}\rangle^{n(\alpha)/2}\Bigr]J_{P'|\bar{P}'}(s\omega_\lambda)$$

sont holomorphes au voisinage de 0. Notons que $s\omega_\lambda\otimes\delta_{\bar{P}'}^{\varepsilon}=s\omega_{\lambda+2\varepsilon s^{-1}\rho}$. Posons

$$\zeta(\lambda,\varepsilon)=\prod_{\alpha\in\Sigma_{\mathrm{red}}(P)}[\langle\lambda,\check{\alpha}\rangle^{n(\alpha)/2}\langle\lambda+2\varepsilon s^{-1}\rho,\check{\alpha}\rangle^{-n(\alpha)/2}].$$

Les considérations ci-dessus prouvent l'existence d'un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathrm{i}a_M^*$, d'un réel $\varepsilon_0>0$ et d'une fonction continue $y:\mathcal{U}\times]-\varepsilon_0,\varepsilon_0[\,\to\mathbb{C}$ tels que l'on ait l'égalité

$$Y(\chi_\lambda,\varepsilon)=\zeta(\lambda,\varepsilon)y(\lambda,\varepsilon)$$

pour tout $(\lambda,\varepsilon)\in\mathcal{U}'\times]0,\varepsilon_0[$, où $\mathcal{U}'=\{\lambda\in\mathcal{U};\ \chi_\lambda\notin Z\}$. Pour $\varepsilon\in\,]0,\varepsilon_0[$, les deux membres de l'égalité ci-dessus sont continus en λ. L'égalité est donc vraie pour tout

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

$(\lambda,\varepsilon)\in\mathcal{U}\times\,]0,\varepsilon_0[$. Mais la fonction ζ est bornée sur $\mathrm{i}a_M^*\times\mathbb{R}$ car pour tout $(\lambda,\varepsilon)\in\mathrm{i}a_M^*\times\mathbb{R}$ et tout $\alpha\in\Sigma_{\mathrm{red}}(P)$,

$$|\langle\lambda,\check\alpha\rangle|\leqslant|\langle\lambda+2\varepsilon s^{-1}\rho,\check\alpha\rangle|.$$

La fonction Y est donc bornée sur $\{\chi_\lambda;\ \lambda\in\mathcal{U}\}\times\,]0,\varepsilon_0[$. D'où la première assertion de (8).

Pour $\chi\in\operatorname{Im}X(M)-Z$, on a d'après (9):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}Y(\chi,\varepsilon)=\gamma(G|M)^{-1}\mu(\omega\otimes\chi)\langle(J_{P'|\bar P'}(s(\omega\otimes\chi))v[\chi])(1),\check e[\chi]\rangle. \tag{10}$$

Grâce à IV.3 (4), on prouve l'égalité

$$\begin{aligned}J_{P'|\bar P'}(s(\omega\otimes\chi))J_{\bar P'|s\cdot P}(s(\omega\otimes\chi))\otimes J_{P'|s\cdot P}(s(\check\omega\otimes\chi^{-1}))&\\ =j(\omega\otimes\chi)J_{P'|s\cdot P}(s(\omega\otimes\chi))\otimes J_{s\cdot P|P'}(s(\check\omega\otimes\chi^{-1}))^{-1}.&\end{aligned}$$

Il résulte alors des définitions que

$$\langle(J_{P'|\bar P'}(s(\omega\otimes\chi))v[\chi])(1),\check e[\chi]\rangle=j(\omega\otimes\chi)E_M^M[({}^oc_{P'|P}(s,\omega\otimes\chi)(v\otimes\check v))(1,1)](m).$$

Il reste à se rappeler que $\mu(\omega\otimes\chi)=\gamma(G|M)^2c(G|M)^2j(\omega\otimes\chi)^{-1}$ pour déduire de (10) la deuxième assertion de (8). Cela achève la démonstration. □

VII. Des fonctions de Schwartz–Harish-Chandra aux paquets d'ondes

VII.1.

Soient $P=MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G et $(\omega,E)\in\mathcal{E}_2(M)$. On définit une application

$$\mathcal{C}(G)\to L(\omega,P),\qquad f\mapsto\hat f(\omega,P)$$

de la façon suivante. Posons $\pi=I_P^G\omega$. Notons $\check f$ la fonction sur G définie par $\check f(g)=f(g^{-1})$. On a $\check f\in\mathcal{C}(G)$, on peut donc définir $\pi(\check f)\in\operatorname{End}(I_P^GE)$, cf. III.7. D'autre part, on a un plongement

$$L(\omega,P)=(I_P^GE)\otimes(I_P^GE)\check{}\hookrightarrow\operatorname{End}(I_P^GE). \tag{1}$$

Comme $\check f$ est bi-invariante par un sous-groupe ouvert compact de G, $\pi(\check f)$ appartient à l'image de cette application et s'identifie donc à un élément de $L(\omega,P)$. Alors $\hat f(\omega,P)$ est le produit de cet élément par $d(\omega)$.

Notons θ_ω^G le caractère de π, cf. III.7. D'autre part, si X est un espace muni d'une mesure, si f_1, f_2 sont deux fonctions sur X telles que $\bar f_1f_2\in L^1(X)$, posons

$$(f_1,f_2)_X=\int_X\bar f_1(x)f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Lemme VII.1.1. *Soient $f \in \mathcal{C}(G)$, $g, h \in G$ et $\psi \in L(\omega, P)$. On a les égalités*

(i) $(\rho(g)\lambda(h)f)\hat{}(\omega, P) = (\pi(g) \otimes \check{\pi}(h))(\hat{f}(\omega, P))$;

(ii) $(E_P^G \psi, f)_G = (\psi, \hat{f}(\omega, P))$;

(iii) $(E_P^G \hat{f}(\omega, P))(g) = d(\omega)\theta_\omega^G(\lambda(g)\check{f})$.

Preuve. Pour (i), le calcul est immédiat. Munissons E d'un produit hermitien défini positif invariant par G et $I_P^G E$, $I_P^G \check{E}$ des produits qui s'en déduisent. On peut supposer que $\psi = v \otimes \check{v}$, avec $v \in I_P^G E$, $\check{v} \in I_P^G \check{E}$. Introduisons des ensembles finis $\{v_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset I_P^G E$, $\{\check{v}_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset I_P^G \check{E}$ tels que

$$\hat{f}(\omega, P) = d(\omega) \sum_{i=1}^n v_i \otimes \check{v}_i.$$

D'après la définition du produit dans $L(\omega, P)$, on a

$$(\psi, \hat{f}(\omega, P)) = \sum_{i=1}^n (v, v_i)(\check{v}, \check{v}_i).$$

D'autre part

$$(E_P^G \psi, f)_G = \int_G \langle \overline{\pi(g)v, \check{v}} \rangle f(g)\,\mathrm{d}g.$$

Soit v' l'élément de $I_P^G E$ tel que pour tout $v'' \in I_P^G E$, $\langle v'', \check{v} \rangle = (v', v'')$. On vérifie que l'on a aussi $\langle v', \check{v}'' \rangle = (\check{v}, \check{v}'')$ pour tout $\check{v}'' \in I_P^G \check{E}$. Alors

$$\begin{aligned}
(E_P^G \psi, f)_G &= \int_G \overline{(v', \pi(g)v)} f(g)\,\mathrm{d}g \\
&= \int_G (v, \pi(g^{-1})v') f(g)\,\mathrm{d}g \\
&= (v, \pi(\check{f})v') \\
&= \left(v, \sum_{i=1}^n v_i \langle v', \check{v}_i \rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^n (v, v_i)(\check{v}, \check{v}_i).
\end{aligned}$$

D'où (ii).

Avec les notations ci-dessus, on a

$$(E_P^G \hat{f}(\omega, P))(1) = d(\omega) \sum_{i=1}^n \langle v_i, \check{v}_i \rangle.$$

Mais on vérifie aisément que la composée de la fonction trace avec l'application (1) est l'application déduite par bilinéarité de l'application $v \otimes \check{v} \mapsto \langle v, \check{v} \rangle$. On obtient

$$(E_P^G \hat{f}(\omega, P))(1) = d(\omega)\,\mathrm{trace}\,\pi(\check{f}) = d(\omega)\theta_\omega^G(\check{f}).$$

On en déduit (iii) en remplaçant f par $\rho(g)f$, en utilisant (i) et en remarquant que $\lambda(g)\check{f} = (\rho(g)f)\check{}$. $\square$

Pour $f \in \mathcal{C}(G)$, on a défini $f^{(P)} \in \mathcal{C}(M)$ en III.6. On peut donc définir

$$\hat{f}^{(P)}(\omega, M) \in L^M(\omega, M) = E \otimes \check{E}.$$

On déduit de cette construction un élément noté $\hat{f}^{(P),\mathrm{Ind}}(\omega) \in \mathrm{Ind}_{P\times P}^{G\times G}(E\otimes\check{E}) = L(\omega, P)$, défini par

$$\hat{f}^{(P),\mathrm{Ind}}(\omega)(g_1, g_2) = [f^{(P),\mathrm{Ind}}(g_1, g_2)]\hat{}(\omega, M)$$

pour tous $g_1, g_2 \in G$.

Lemme VII.1.2. *Pour tout $f \in \mathcal{C}(G)$, on a l'égalité $\hat{f}(\omega, P) = \hat{f}^{(P),\mathrm{Ind}}(\omega)$.*

Preuve. Soient $v \in I_P^G E$, $\check{v} \in I_P^G \check{E}$, $f \in \mathcal{C}(G)$. D'après le (ii) du lemme précédent,

$$\begin{aligned}(v \otimes \check{v}, \hat{f}(\omega, P)) &= (E_P^G(v \otimes \check{v}), f)_G \\ &= \int_G \langle \overline{\pi(g)v, \check{v}} \rangle f(g)\,\mathrm{d}g \\ &= \int_G \int_{P\backslash G} \langle \overline{v(hg), \check{v}(h)} \rangle f(g)\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}g.\end{aligned}$$

Il résulte de la preuve du Lemme VI.2.2 et du Lemme II.1.5 que cette dernière intégrale est absolument convergente. On permute les intégrales:

$$\begin{aligned}(v \otimes \check{v}, \hat{f}(\omega, P)) &= \int_{P\backslash G} \int_G \langle \overline{v(g), \check{v}(h)} \rangle f(h^{-1}g)\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h \\ &= \int_{(P\backslash G)^2} \int_M \int_U \langle \overline{v(umg), \check{v}(h)} \rangle f(h^{-1}umg)\delta_P(m)^{-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h.\end{aligned}$$

Mais

$$\langle v(umg), \check{v}(h) \rangle = \delta_P(m)^{1/2} \langle \omega(m)v(g), \check{v}(h) \rangle = \delta_P(m)^{1/2} E_M^M(v(g) \otimes \check{v}(h))(m)$$

et

$$\int_U f(h^{-1}umg)\,\mathrm{d}u = \delta_P(m)^{1/2} f^{(P),\mathrm{Ind}}(g, h)(m).$$

D'où l'égalité

$$(v \otimes \check{v}, \hat{f}(\omega, P)) = \int_{(P\backslash G)^2} (E_M^M(v(g) \otimes \check{v}(h)), f^{(P),\mathrm{Ind}}(g, h))_M\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h.$$

En appliquant le Lemme VII.1.1(ii) pour le groupe M, on obtient

$$(v \otimes \check{v}, \hat{f}(\omega, P)) = \int_{(P\backslash G)^2} (v(g) \otimes \check{v}(h), \hat{f}^{(P),\mathrm{Ind}}(\omega)(g, h))\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}h.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Mais il résulte de la définition du produit hermitien dans $L(\omega, P)$ que cette dernière intégrale n'est autre que $(v \otimes \check{v}, \hat{f}^{(P),\mathrm{Ind}}(\omega))$. D'où l'égalité

$$(v \otimes \check{v}, \hat{f}(\omega, P)) = (v \otimes \check{v}, \hat{f}^{(P),\mathrm{Ind}}(\omega)).$$

Ceci étant vrai pour tous v, $\check{v}$, on obtient l'énoncé. □

Soit $\mathcal{O}$ une orbite dans $\mathcal{E}_2(M)$ pour l'action de $\operatorname{Im} X(M)$. Pour $f \in \mathcal{C}(G)$, on définit une fonction $\psi_f[\mathcal{O}, P]$ sur $\mathcal{O}$ par:

$$\psi_f[\mathcal{O}, P]_\omega = \hat{f}(\omega, P)$$

pour tout $\omega \in \mathcal{O}$.

Proposition VII.1.3. *Pour tout $f \in \mathcal{C}(G)$, la fonction $\psi_f[\mathcal{O}, P]$ appartient à $C^\infty(\mathcal{O}, P)$. L'application*

$$\mathcal{C}(G) \to C^\infty(\mathcal{O}, P), \qquad f \mapsto \psi_f[\mathcal{O}, P]$$

est continue.

Preuve. Grâce au Lemme VII.1.2 et à la continuité de l'application $f \mapsto f^{(P)}$, on est ramené au cas $M = G$. Fixons $(\omega, E) \in \mathcal{O}$ et un sous-groupe ouvert compact H de G. Pour $v \in E^H$, $\check{v} \in \check{E}^H$, $f \in \mathcal{C}_H$, $\chi \in \operatorname{Im} X(G)$, posons

$$C_{v\otimes\check{v},f}(\chi) = d(\omega \otimes \chi)\langle(\omega \otimes \chi)(\check{f})v, \check{v}\rangle.$$

L'énoncé résulte des assertions suivantes: pour tous $v \in E^M$, $\check{v} \in \check{E}^M$, on a:

- pour tout $f \in \mathcal{C}_H$, $C_{v\otimes\check{v},f} \in C^\infty(\operatorname{Im} X(G))$;
- l'application
$$\mathcal{C}_H \to C^\infty(\operatorname{Im} X(G)), \qquad f \mapsto C_{v\otimes\check{v},f}$$
est continue.

Notons que $d(\omega \otimes \chi) = d(\omega)$ pour tout $\chi \in \operatorname{Im} X(G)$. Les propriétés ci-dessus résultent de la majoration suivante. Soient $v \in E^H$, $\check{v} \in \check{E}^H$, D un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\operatorname{Im} X(G)$. Alors

$$\left.\begin{array}{c}\text{il existe } c > 0 \text{ et } r \in \mathbb{R} \text{ tels que pour tous } f \in \mathcal{C}_H,\\ \displaystyle\int_G |\check{f}(g)\langle\omega(g)v, \check{v}\rangle D(\chi(g))| \,\mathrm{d}g \leqslant c\nu_r(f).\end{array}\right\} \tag{2}$$

Pour $\lambda \in \mathrm{i}a_G^*$, notons χ_λ son image par l'application $\mathrm{i}a_G^* \to \operatorname{Im} X(G)$. Il existe un opérateur différentiel à coefficients constants D' sur $\mathrm{i}a_G^*$ tel que, pour tout $g \in G$ et tout $\lambda \in \mathrm{i}a_G^*$, $D(\chi_\lambda(g)) = D'(\chi_\lambda(g)) = D'(q^{-\langle\lambda, H_G(g)\rangle})$. On en déduit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $C_1 > 0$ tels que

$$|D(\chi(g))| \leqslant C_1(1 + |H_G(g)|)^n$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

pour tous $\chi \in \operatorname{Im} X(G)$, $g \in G$. D'autre part, il existe $C_2 > 0$ tel que

$$|\langle \omega(g)v, \check{v}\rangle| \leqslant C_2 \varXi(g)$$

pour tout $g \in G$, cf. Corollaire III.1.2. La majoration (2) résulte alors du Lemme II.1.5. □

Sous les mêmes hypothèses on a le lemme suivant.

Lemme VII.1.4. *Pour tout $f \in \mathcal{C}(G)$, tout $s \in W^G$, tout $P' \in \mathcal{P}(s\cdot M)$ et tout $\omega \in \mathcal{O}$,*

$$\psi_f[s\mathcal{O}, P']_{s\omega} = {}^o c_{P'|P}(s,\omega)\psi_f[\mathcal{O}, P]_\omega.$$

Preuve. Pour $\psi \in L(\omega, P)$, on a les égalités

$$\begin{aligned}({}^o c_{P'|P}(s,\omega)\psi, \hat{f}(s\omega, P')) &= (E^G_{P'}\,{}^o c_{P'|P}(s,\omega)\psi, f)_G,\\ &= (E^G_P\psi, f)_G,\\ &= (\psi, \hat{f}(\omega, P)),\\ &= ({}^o c_{P'|P}(s,\omega)\psi, {}^o c_{P'|P}(s,\omega)\hat{f}(\omega, P)),\end{aligned}$$

grâce aux Lemmes VII.1.1(ii) et V.3.1 appliqués deux fois. Cela démontre l'assertion. □

VII.2.

Soient $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G et $\mathcal{O} \subset \mathcal{E}_2(M)$ une orbite pour l'action de $\operatorname{Im} X(M)$.

Proposition VII.2.1. *Soient $\psi \in C^\infty(\mathcal{O}, P)$ et $\omega' \in \mathcal{E}_2(M)$. On a l'égalité*

$$\hat{f}_\psi(\omega', P) = \gamma(G|M)c(G|M)^2 \sum_{s\in W(G|M);\, s^{-1}\omega'\in\mathcal{O}} {}^o c_{P|P}(s, s^{-1}\omega')\psi_{s^{-1}\omega'}.$$

Preuve. Supposons d'abord $M = G$. Notons E' l'espace de ω'. Pour toute représentation lisse π de G admettant un caractère central, notons χ_π la restriction à A_G de ce caractère. Soit $\psi' \in E' \otimes \check{E}'$. On a l'égalité

$$(E^G_G\psi', f_\psi)_G = \int_G \overline{(E^G_G\psi')(g)} f_\psi(g)\,\mathrm{d}g = \int_{A_G\backslash G} \overline{(E^G_G\psi')(g)}\varphi(g)\,\mathrm{d}g,$$

où

$$\varphi(g) = \int_{A_G} f_\psi(ag)\chi_{\omega'}(a^{-1})\,\mathrm{d}a.$$

On a l'égalité

$$\varphi(g) = \int_{A_G} \chi_{\omega'}(a^{-1}) \int_{\mathcal{O}} (E^G_G\psi_\omega)(g)\chi_\omega(a)\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}a.$$

La restriction à $A_G \cap K$ de χ_ω ne dépend pas du point $\omega \in \mathcal{O}$. Si cette restriction est différente de celle de $\chi_{\omega'}$, on a $\varphi(g) = 0$. Supposons ces restrictions égales. Comme

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

la fonction $\omega \mapsto (E_G^G \psi_\omega)(g)$ est continue, on peut appliquer la formule d'inversion de Fourier. Compte tenu des définitions de nos mesures, on obtient

$$\varphi(g) = \sum_{\omega \in \mathcal{O};\, \chi_\omega = \chi_{\omega'}} (E_G^G \psi_\omega)(g).$$

D'où l'égalité

$$(E_G^G \psi', f_\psi)_G = \sum_{\omega \in \mathcal{O};\, \chi_\omega = \chi_{\omega'}} (E_G^G \psi', E_G^G \psi_\omega)_{A_G \backslash G}.$$

Des formules analogues à III.1 (2) et (3) (pour des produits hermitiens) impliquent que

$$(E_G^G \psi', E_G^G \psi_\omega)_{A_G \backslash G} = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega' \not\simeq \omega, \\ (\psi', \psi_\omega), & \text{si } \omega' \simeq \omega. \end{cases}$$

On obtient

$$(E_G^G \psi', f_\psi)_G = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega' \notin \mathcal{O}, \\ (\psi', \psi_{\omega'}), & \text{si } \omega' \in \mathcal{O}. \end{cases}$$

En comparant avec l'égalité (ii) du Lemme VII.1.1, on obtient la formule de l'énoncé.

Dans le cas général, appliquons la Proposition VI.4.1(ii). Pour $g_1, g_2 \in G$, on a l'égalité

$$f_\psi^{(P),\mathrm{Ind}}(g_1, g_2) = \gamma(G|M) c(G|M)^2 \sum_{s \in W(G|M)} f_{\psi_s}^M,$$

l'exposant M signifiant comme toujours que G est remplacé par M dans les définitions, où, pour tout s, ψ_s est l'élément de $C^{\infty,M}(s\mathcal{O}, M)$ tel que

$$\psi_{s,\omega} = ({}^o c_{P|P}(s, s^{-1}\omega) \psi_{s^{-1}\omega})(g_1, g_2)$$

pour tout $\omega \in s\mathcal{O}$. En appliquant le Lemme VII.1.2 et ce que l'on vient de démontrer pour le groupe M, on obtient la formule de l'énoncé. □

Proposition VII.2.2. *Soient $P = MU$, $P' = M'U'$ deux sous-groupes paraboliques semi-standards de G, $\mathcal{O} \subset \mathcal{E}_2(M)$, $\mathcal{O}' \subset \mathcal{E}_2(M')$ des orbites pour l'action de* $\mathrm{Im}\, X(M)$, *resp.* $\mathrm{Im}\, X(M')$, *$\psi \in C^\infty(\mathcal{O}; P)$, $\psi' \in C^\infty(\mathcal{O}', P')$.*

(i) *Si M' n'est pas conjugué à M dans G, $(f_{\psi'}, f_\psi)_G = 0$.*

(ii) *Si M' est conjugué à M dans G, on a l'égalité*

$$(f_{\psi'}, f_\psi)_G = \gamma(G|M) c(G|M)^2 \times \sum_{s \in W(M'|G|M);\, s\mathcal{O} = \mathcal{O}'} \int_{\mathcal{O}} \mu(\omega) (\psi'_{s\omega}, {}^o c_{P'|P}(s, \omega) \psi_\omega)\, \mathrm{d}\omega.$$

Preuve. On a l'égalité

$$(f_{\psi'}, f_\psi)_G = \int_G \int_{\mathcal{O}'} \mu(\omega') \overline{(E_{P'}^G \psi'_{\omega'})(g)} \, \mathrm{d}\omega' f_\psi(g) \, \mathrm{d}g.$$

D'après le Lemme VI.2.2, l'intégrale double est absolument convergente. On obtient

$$(f_{\psi'}, f_\psi)_G = \int_{\mathcal{O}'} \mu(\omega')(E_{P'}^G \psi'_{\omega'}, f_\psi)_G \, \mathrm{d}\omega',$$

d'où, d'après le Lemme VII.1.1(ii),

$$(f_{\psi'}, f_\psi)_G = \int_{\mathcal{O}'} \mu(\omega')(\psi'_{\omega'}, \hat{f}_\psi(\omega', P')) \, \mathrm{d}\omega'. \tag{1}$$

Supposons le rang semi-simple de M' inférieur ou égal à celui de M. En utilisant le Lemme VII.1.2 et la Proposition VI.4.1 (i), on obtient

$$(\psi'_{\omega'}, \hat{f}_\psi(\omega', P')) = 0$$

si M' n'est pas conjugué à M dans G. Donc $(f_{\psi'}, f_\psi)_G = 0$ dans ce cas. Si le rang semi-simple de M' est strictement supérieur à celui de M, il suffit d'appliquer la relation $(f_{\psi'}, f_\psi)_G = \overline{(f_\psi, f_{\psi'})_G}$ pour achever la preuve du (i) de l'énoncé.

Supposons M' conjugué à M. Le Lemme VII.1.4 et la Proposition VII.2.1 calculent le terme $\hat{f}_\psi(\omega', P')$. Un changement de variables simple conduit à la formule (ii) de l'énoncé. □

Corollaire VII.2.3. *Soient $P = MU$, $P' = M'U'$ deux sous-groupes paraboliques semi-standards de G, $\mathcal{O} \subset \mathcal{E}_2(M)$ une orbite pour l'action de* $\operatorname{Im} X(M)$*, $\omega' \in \mathcal{E}_2(M')$ et $\psi \in C^\infty(\mathcal{O}; P)$. Supposons M' non conjugué à M. Alors $\hat{f}_\psi(\omega', P') = 0$.*

Preuve. Notons $\mathcal{O}'$ l'orbite de ω' pour l'action de $\operatorname{Im} X(M')$. Soit $\psi' \in C^\infty(\mathcal{O}'; P')$. D'après le (i) de la proposition précédente et la formule (1) de sa preuve on a l'égalité

$$\int_{\mathcal{O}'} \mu(\omega'')(\psi'_{\omega''}, \hat{f}_\psi(\omega'', P')) \, \mathrm{d}\omega'' = 0.$$

Cette égalité valant pour tout ψ', elle entraîne $\hat{f}_\psi(\omega'', P') = 0$ pour tout $\omega'' \in \mathcal{O}'$. □

On a défini en VI.3 l'espace $C^\infty(\Theta)^{\mathrm{inv}}$ et l'application

$$\kappa : C^\infty(\Theta)^{\mathrm{inv}} \to \mathcal{C}(G).$$

Pour $\psi, \psi' \in C^\infty(\Theta)^{\mathrm{inv}}$, posons

$$(\psi', \psi) = \sum_{(\mathcal{O}, P=MU) \in \Theta} c(G|M)^{-2} \gamma(G|M)^{-1} |W^M| \, |W^G|^{-1} |\mathcal{P}(M)|^{-1} \times \int_{\mathcal{O}} \mu(\omega)(\psi'[\mathcal{O}, P]_\omega, \psi[\mathcal{O}, P]_\omega) \, \mathrm{d}\omega.$$

Cela définit un produit hermitien défini positif invariant par $G \times G$ sur $C^\infty(\Theta)^{\mathrm{inv}}$.

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Remarque VII.2.4. Les définitions de ce produit et de l'application κ font intervenir beaucoup de termes en fait égaux. On peut formuler les définitions de façon différente. Disons que deux éléments $(\mathcal{O}, P = MU)$ et $(\mathcal{O}', P' = M'U')$ de Θ sont associés s'il existe $s \in W^G$ tel que $s \cdot M = M'$, $s\mathcal{O} = \mathcal{O}'$. Fixons un sous-ensemble Θ/ass représentants dans Θ des classes d'association. Pour $(\mathcal{O}, P = MU) \in \Theta$, posons

$$\operatorname{Stab}(\mathcal{O}, M) = \{s \in W(G|M);\ s\mathcal{O} = \mathcal{O}\}.$$

Pour $\psi, \psi' \in C^\infty(\Theta)^{\mathrm{inv}}$, on a alors

$$\begin{aligned} \kappa(\psi) &= \sum_{(\mathcal{O},P=MU)\in\Theta/ass} c(G|M)^{-2}\gamma(G|M)^{-1}|\operatorname{Stab}(\mathcal{O}, M)|^{-1} f_{\psi[\mathcal{O},P]}, \\ (\psi', \psi) &= \sum_{(\mathcal{O},P=MU)\in\Theta/ass} c(G|M)^{-2}\gamma(G|M)^{-1}|\operatorname{Stab}(\mathcal{O}, M)|^{-1} \\ &\qquad\qquad \times \int_{\mathcal{O}} \mu(\omega)(\psi'[\mathcal{O}, P]_\omega, \psi[\mathcal{O}, P]_\omega)\,\mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

Théorème VII.2.5. *L'application κ est une isométrie de $C^\infty(\Theta)^{\mathrm{inv}}$ sur son image. Pour $\psi \in C^\infty(\Theta)^{\mathrm{inv}}$ et $(\mathcal{O}, P) \in \Theta$, on a l'égalité*

$$\psi_{\kappa(\psi)}[\mathcal{O}, P] = \psi[\mathcal{O}, P].$$

Preuve. Cela résulte des Propositions VII.2.1, VII.2.2, du Corollaire VII.2.3 et du Lemme VII.1.4. □

VIII. La formule de Plancherel

VIII.1.

Notre but est de démontrer le théorème suivant.

Théorème VIII.1.1. *L'application κ est surjective.*

En vertu du Théorème VII.2.5, cette assertion est équivalente aux assertions (1) et (2) suivantes:

(1) pour tout $f \in \mathcal{C}(G)$, l'ensemble des $(\mathcal{O}, P) \in \Theta$ tels que $\psi_f[\mathcal{O}, P] \neq 0$ est fini;

(2) pour tout $f \in \mathcal{C}(G)$, on a l'égalité

$$f = \sum_{(\mathcal{O},P=MU)\in\Theta} c(G|M)^{-2}\gamma(G|M)^{-1}|W^M|\,|W^G|^{-1}|\mathcal{P}(M)|^{-1} f_{\psi_f[\mathcal{O},P]}.$$

En vertu du Lemme VII.1.1 (iii) et de la Remarque VII.2.4, (2) est aussi équivalent à

(3) pour tout $f \in \mathcal{C}(G)$ et tout $g \in G$, on a l'égalité

$$\begin{aligned} f(g) = \sum_{(\mathcal{O},P=MU)\in\Theta/ass} & c(G|M)^{-2}\gamma(G|M)^{-1}|\operatorname{Stab}(\mathcal{O}, M)|^{-1} \\ & \times \int_{\mathcal{O}} \mu(\omega)d(\omega)\theta^G_\omega(\lambda(g)\check{f})\,\mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Notons Θ_G l'ensemble des orbites dans $\mathcal{E}_2(G)$ pour l'action de $\operatorname{Im} X(G)$. On identifie Θ_G à un sous-ensemble de Θ par $\mathcal{O} \mapsto (\mathcal{O}, G)$. Soit H un sous-groupe ouvert compact de G. Pour $(\mathcal{O}, P) \in \Theta$ et $(\omega, E) \in \mathcal{O}$, la propriété '$I_P^G E$ possède des éléments non nuls invariants par H' ne dépend pas du choix de $(\omega, E) \in \mathcal{O}$. On note Θ^H l'ensemble des $(\mathcal{O}, P)$ tels que cette propriété soit vérifiée pour un (ou pour tout) $(\omega, E) \in \mathcal{O}$. On pose $\Theta_G^H = \Theta_G \cap \Theta^H$. Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème VIII.1.2. *Pour tout sous-groupe ouvert compact H de G, Θ_G^H est fini.*

Remarque VIII.1.3. Supposons le Théorème VIII.1.2 vrai pour tout sous-groupe de Lévi d'un sous-groupe parabolique semi-standard, resp. et propre, de G. Alors

(i) Θ^H, resp. $\Theta^H - \Theta_G^H$, est fini pour tout sous-groupe ouvert compact H de G;

(ii) pour tout $f \in \mathcal{C}(G)$, l'ensemble des $(\mathcal{O}, P) \in \Theta$, resp. $\Theta - \Theta_G$, tels que $\psi_f[\mathcal{O}, P] \neq 0$ est fini.

En effet, pour (i), on peut supposer que H est un sous-groupe distingué de K. Pour $(\mathcal{O}, P = MU) \in \Theta$, on a alors $(\mathcal{O}, P) \in \Theta^H$ si et seulement si $\mathcal{O} \in \Theta_M^{M \cap H}$.

D'autre part si $f \in \mathcal{C}(G)$ et si H est un sous-groupe ouvert compact de G tel que f soit bi-invariante par H, il est clair que, pour $(\mathcal{O}, P) \in \Theta$, $\psi_f[\mathcal{O}, P] \neq 0$ seulement si $(\mathcal{O}, P) \in \Theta^H$.

Pour démontrer les deux théorèmes, nous raisonnerons par récurrence sur le rang semi-simple de G. Nous supposerons désormais les deux théorèmes démontrés pour tout groupe de rang semi-simple strictement inférieur à celui de G.

VIII.2.

Soit $f \in \mathcal{C}(G)$. En vertu de l'hypothèse de récurrence et de la Remarque VII.1.3, on peut définir $\psi \in C^\infty(\Theta)$ par

$$\psi[\mathcal{O}, P] = \begin{cases} 0, & \text{si } P = G, \\ \psi_f[\mathcal{O}, P], & \text{si } P \neq G, \end{cases}$$

pour tout $(\mathcal{O}, P) \in \Theta$. On a $\psi \in C^\infty(\Theta)^{\mathrm{inv}}$ d'après le Lemme VII.1.4. On pose

$${}^o f = f - \kappa(\psi),$$

et ${}^o\mathcal{C}(G) = \{{}^o f;\ f \in \mathcal{C}(G)\}$.

Lemme VIII.2.1. *Pour $f \in \mathcal{C}(G)$, f appartient à ${}^o\mathcal{C}(G)$ si et seulement si $f^{(P),\mathrm{Ind}} = 0$ pour tout sous-groupe parabolique semi-standard propre P de G.*

Preuve. Si f vérifie cette dernière condition, on a $\psi_f[\mathcal{O}, P] = 0$ pour tout $(\mathcal{O}, P) \in \Theta$ tel que $P \neq G$, d'après le Lemme VII.1.2. Donc $f = {}^o f$.

Inversement soit $f \in {}^o\mathcal{C}(G)$. D'après la définition de cet espace et le Théorème VII.2.5, on a $\psi_f[\mathcal{O}, P] = 0$ pour tout $(\mathcal{O}, P) \in \Theta$ tel que $P \neq G$. Soient $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard propre de G et $g_1, g_2 \in G$. Posons $f^M = f^{(P),\mathrm{Ind}}(g_1, g_2)$. Soit

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

$(\mathcal{O}', P^M = M'U^M) \in \Theta^M$, $\omega' \in \mathcal{O}'$ et $m_1, m_2 \in M$. Posons $P' = P^M U$. D'après le Lemme VII.1.2 et le diagramme commutatif de III.6, on a les égalités

$$\begin{aligned}\hat{f}^M(\omega', P^M)(m_1, m_2) &= [f^{M,(P^M),\mathrm{Ind}}(m_1, m_2)]\hat{}(\omega', M'),\\ &= \delta_P(m_1)^{-1/2}\delta_P(m_2)^{-1/2}[f^{(P'),\mathrm{Ind}}(m_1 g_1, m_2 g_2)]\hat{}(\omega', M')\\ &= \delta_P(m_1)^{-1/2}\delta_P(m_2)^{-1/2}\hat{f}(\omega', P')(m_1 g_1, m_2 g_2)\\ &= \delta_P(m_1)^{-1/2}\delta_P(m_2)^{-1/2}\psi_f[\mathcal{O}', P']_{\omega'}(m_1 g_1, m_2 g_2)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $\hat{f}^M(\omega', P^M) = 0$ et $\psi_{f^M}[\mathcal{O}', P^M] = 0$. Mais alors la formule (2) de VIII.1 appliquée pour le groupe M montre que $f^M = 0$. Cela achève la démonstration. $\square$

Remarque VIII.2.2. Pour $f \in \mathcal{C}(G)$ et $\chi \in \operatorname{Im} X(G)$, on a les égalités

$$({}^o f)\check{} = {}^o(\check{f}), \qquad \overline{{}^o f} = {}^o(\bar{f}), \qquad ({}^o f)\chi = {}^o(f\chi).$$

Cela résulte des définitions et des égalités suivantes. Pour un sous-groupe parabolique semi-standard $P = MU$ de G, pour $\omega \in \mathcal{E}_2(M)$ et $G \in G$, on a

$$\begin{aligned}\theta^G_\omega(\lambda(g^{-1})\check{f}) &= \theta^G_{\check{\omega}}(\lambda(g)f),\\ \overline{\theta^G_\omega(\lambda(g)\check{f})} &= \theta^G_{\bar{\omega}}(\lambda(g)\check{\bar{f}}),\\ \chi(g)\theta^G_\omega(\lambda(g)\check{f}) &= \theta^G_{\omega\otimes\chi}(\lambda(g)(f\chi)\check{}),\\ \mu(\omega\otimes\chi) &= \mu(\omega).\end{aligned}$$

Lemme VIII.2.3. *Pour $f_1 \in {}^o\mathcal{C}(G)$ et $f_2 \in \mathcal{C}(G)$, on a les égalités*

$$f_1 * f_2 = f_1 * {}^o f_2, \qquad f_2 * f_1 = {}^o f_2 * f_1.$$

Preuve. Il suffit de prouver que si $(\mathcal{O}, P) \in \Theta$, $P \neq G$, et si $\psi \in C^\infty(\mathcal{O}, P)$, on a

$$f_1 * f_\psi = f_\psi * f_1 = 0.$$

Soit $g \in G$, notons f_1' la fonction définie par $f_1'(h) = \overline{f_1(gh^{-1})}$. On a l'égalité

$$(f_1 * f_\psi)(g) = (f_1', f_\psi)_G.$$

On montre comme en VII.2 (1) que

$$(f_1', f_\psi)_G = \int_{\mathcal{O}} \mu(\omega)(\hat{f}_1'(\omega, P), \psi_\omega)\,\mathrm{d}\omega.$$

Mais $f_1' \in {}^o\mathcal{C}(G)$ d'après le Lemme VIII.2.1, donc $\widehat{f_1'}(\omega, P) = 0$ pour tout ω. On en déduit $f_1 * f_\psi = 0$. Idem $f_\psi * f_1 = 0$. $\square$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

VIII.3.

Proposition VIII.3.1. *Soient $f_1 \in {}^o\mathcal{C}(G)$, $f_2 \in \mathcal{C}(G)$ et $r \in \mathbb{R}$. Alors il existe $c > 0$ tel que pour tout $a \in \bar{A}_0^+ \cap G^1$, on ait l'inégalité*

$$\left| \int_G f_1(aga^{-1}) f_2(g) \,\mathrm{d}g \right| \leqslant c\delta_0(a)(1+\sigma(a))^{-r}.$$

Preuve. Si $G = M_0$, $A_0 \cap G^1$ est compact et l'assertion est claire. Supposons $G \neq M_0$, pour $\alpha \in \Delta_0$, posons

$$\bar{A}_0^+(\alpha) = \{a \in \bar{A}_0^+;\ \forall \beta \in \Delta_0,\ \langle \beta, H_0(a) \rangle \leqslant \langle \alpha, H_0(a) \rangle\}.$$

Il suffit de prouver que pour tout $\alpha \in \Delta_0$, on a la majoration de l'énoncé pour tout $a \in \bar{A}_0^+(\alpha) \cap G^1$. Fixons donc $\alpha \in \Delta_0$. Remarquons qu'il existe $C_1 > 0$ tel que

$$1 + \sigma(a) \leqslant C_1(1 + \langle \alpha, H_0(a) \rangle) \tag{1}$$

pour tout $a \in \bar{A}_0^+(\alpha) \cap G^1$. Soit $P = MU$ le sous-groupe parabolique standard de G tel que $\Delta_0^M = \Delta_0 - \{\alpha\}$. Fixons des sous-groupes ouverts compacts $\mathit{\Gamma}$, resp. $\bar{\mathit{\Gamma}}$, de U, resp. $\bar{U}$, tels que f_1, resp. f_2, soit invariante à gauche par $\mathit{\Gamma}$, resp. à droite par $\bar{\mathit{\Gamma}}$. Pour $a \in \bar{A}_0^+(\alpha) \cap G^1$, posons

$$S(a) = G - a^{-1}\mathit{\Gamma} a M \bar{\mathit{\Gamma}}.$$

Remarquons qu'en vertu de l'inégalité (1), le Lemme II.3.5 implique l'existence de $C_2 > 0$ tel que

$$1 + \sigma(a) \leqslant C_2(1 + \sigma(g) + \sigma(aga^{-1})) \tag{2}$$

pour tout $a \in \bar{A}_0^+(\alpha) \cap G^1$ et tout $g \in S(a)$.

Montrons que

$$\left.\begin{array}{c}\text{il existe } C_3 > 0 \text{ tel que pour tout } a \in \bar{A}_0^+(\alpha) \cap G^1, \text{ on ait l'inégalité} \\ \displaystyle\int_{S(a)} |f_1(aga^{-1}) f_2(g)| \,\mathrm{d}g \leqslant C_3\delta_0(a)(1+\sigma(a))^{-r}.\end{array}\right\} \tag{3}$$

Notons $I(a)$ le membre de gauche de cette inégalité. Soient $r', r'' > 0$ que l'on précisera plus tard. Pour tout a, on a l'inégalité

$$I(a) \leqslant \nu_{r'}(f_1)\nu_{r'+r''}(f_2) \int_{S(a)} \mathit{\Xi}(aga^{-1})\mathit{\Xi}(g)(1+\sigma(aga^{-1}))^{-r'}(1+\sigma(g))^{-r'-r''} \,\mathrm{d}g.$$

Grâce à (2), il existe donc $C_4 > 0$ tel que, pour tout $a \in \bar{A}_0^+(\alpha) \cap G^1$,

$$\begin{aligned} I(a) &\leqslant C_4(1+\sigma(a))^{-r'} \int_{S(a)} \mathit{\Xi}(aga^{-1})\mathit{\Xi}(g)(1+\sigma(g))^{-r''} \,\mathrm{d}g \\ &\leqslant C_4(1+\sigma(a))^{-r'} \int_G \mathit{\Xi}(aga^{-1})\mathit{\Xi}(g)(1+\sigma(g))^{-r''} \,\mathrm{d}g. \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Dans cette dernière intégrale, on peut remplacer g par hgk, avec $h, k \in K$, puis intégrer en h et k. Grâce aux Lemmes II.1.3 et II.1.4, on obtient

$$I(a) \leqslant C_4(1+\sigma(a))^{-r'} \Xi(a)^2 \int_G \Xi(g)^2(1+\sigma(g))^{-r''} \,\mathrm{d}g.$$

On fixe r'' tel que cette dernière intégrale soit convergente (Lemme II.1.5). D'après le Lemme II.1.1, il existe alors $C_5 > 0$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que

$$I(a) \leqslant C_5(1+\sigma(a))^{-r'+d}\delta_0(a).$$

Il suffit de choisir $r' \geqslant r + d$ pour obtenir l'inégalité (3).

Pour $a \in \bar{A}_0^+(\alpha) \cap G^1$, posons

$$J(a) = \int_{a^{-1}\Gamma a M \bar{\Gamma}} f_1(aga^{-1}) f_2(g) \,\mathrm{d}g.$$

On a l'égalité

$$J(a) = \gamma(G|M)^{-1} \int_{a^{-1}\Gamma a \times M \times \bar{\Gamma}} f_1(aum\bar{u}a^{-1}) f_2(um\bar{u}) \delta_P(m)^{-1} \,\mathrm{d}\bar{u} \,\mathrm{d}m \,\mathrm{d}u.$$

Pour $m \in M$, posons

$$\varphi_1(a, m) = \delta_P(m)^{-1/2} \int_{\bar{\Gamma}} f_1(ma\bar{u}a^{-1}) \,\mathrm{d}\bar{u},$$
$$\varphi_2(a, m) = \delta_P(m)^{-1/2} \int_{a^{-1}\Gamma a} f_2(um) \,\mathrm{d}u.$$

D'après les choix de Γ et $\bar{\Gamma}$, on a l'égalité

$$J(a) = \gamma(G|M)^{-1} \int_M \varphi_1(a, ama^{-1}) \varphi_2(a, m) \,\mathrm{d}m.$$

Montrons que

(4) pour tout $d \in \mathbb{N}$, il existe $C_6 > 0$ tel que pour tout $a \in A_0$ et tout $m \in M$, on ait l'inégalité
$$|\varphi_2(a, m)| \leqslant C_6 \Xi^M(m)(1+\sigma(m))^{-d}.$$

En effet, soient $d' \in \mathbb{N}$ et $C_7 > 0$ vérifiant la Proposition II.4.5 pour le groupe $\bar{P}$. On a les inégalités:

$$\begin{aligned}
|\varphi_2(a, m)| &\leqslant \nu_{d'}(f_2)\delta_P(m)^{-1/2} \int_{a^{-1}\Gamma a} \Xi(um)(1+\sigma(um))^{-d'} \,\mathrm{d}u \\
&\leqslant \nu_{d'}(f_2)\delta_P(m)^{1/2} \int_U \Xi(mu)(1+\sigma(mu))^{-d'} \,\mathrm{d}u \\
&\leqslant C_7 \nu_{d'}(f_2) \Xi^M(m)(1+\sigma(m))^{-d}.
\end{aligned}$$

Cela démontre (4).

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

On a l'égalité

$$\varphi_1(a,m) = \delta_P(a)\delta_P(m)^{-1/2}\int_{a\bar{\Gamma}a^{-1}} f_1(m\bar{u})\,\mathrm{d}\bar{u}.$$

Comme $f_1 \in {}^o\mathcal{C}(G)$, on a $f_1^{(\bar{P})} = 0$ (Lemme VII.2.1), donc

$$\int_{\bar{U}} f_1(m\bar{u})\,\mathrm{d}\bar{u} = 0,$$

d'où

$$\varphi_1(a,m) = -\delta_P(a)\delta_P(m)^{-1/2}\int_{\bar{U}-a\bar{\Gamma}a^{-1}} f_1(m\bar{u})\,\mathrm{d}\bar{u}.$$

Pour $a \in \bar{A}_0^+(\alpha) \cap G^1$ et $\delta > 0$, posons

$$\bar{U}_a(\delta) = \{\bar{u} \in \bar{U};\ \delta(1+\sigma(a)) \leqslant 1+\sigma(\bar{u})\}.$$

Je dis qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $a \in \bar{A}_0^+(\alpha) \cap G^1$,

$$\bar{U} - a\bar{\Gamma}a^{-1} \subset \bar{U}_a(\delta).$$

En effet, pour $\bar{u} \in \bar{U} - a\bar{\Gamma}a^{-1}$, on a $a^{-1}\bar{u}a \in S(a)$, donc, d'après (2),

$$1+\sigma(a) \leqslant C_2(1+\sigma(a^{-1}\bar{u}a)+\sigma(\bar{u})).$$

Mais, d'après le Lemme II.3.3, il existe $C_8 > 0$ tel que pour tout $a \in \bar{A}_0^+$ et tout $\bar{u} \in \bar{U}$,

$$1+\sigma(a^{-1}\bar{u}a) \leqslant C_8(1+\sigma(\bar{u})).$$

On en déduit l'assertion. Fixons donc un tel δ, posons simplement $\bar{U}_a = \bar{U}_a(\delta)$. On obtient

$$|\varphi_1(a,m)| \leqslant \delta_P(a)\delta_P(m)^{-1/2}\int_{\bar{U}_a} |f_1(m\bar{u})|\,\mathrm{d}\bar{u}. \tag{5}$$

Pour $r' > 0$, $a \in \bar{A}_0^+(\alpha) \cap G^1$ et $m \in M$, posons

$$\psi_1(r',a,m) = \delta_P(m)^{-1/2}\int_{\bar{U}_a} \Xi(m\bar{u})(1+\sigma(m\bar{u}))^{-r'}\,\mathrm{d}\bar{u}.$$

Montrons que

(6) pour tout $d' \in \mathbb{N}$, il existe $r' > 0$ et $C_9 > 0$ tels que pour tout $a \in \bar{A}_0^+(\alpha) \cap G^1$ et tout $m \in M$, on ait l'inégalité

$$\psi_1(r',a,m) \leqslant C_9(1+\sigma(a))^{-d'}\,\Xi^M(m).$$

Le membre de droite est bi-invariant par $K \cap M$ en la variable m. Celui de gauche l'est aussi car $\bar{U}_a$ est invariant par conjugaison par $K \cap M$. On peut se limiter à démontrer

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

l'inégalité pour $m \in \bar{M}_0^{M+}$, analogue de $\bar{M}_0^+$ quand on remplace G par M. D'après les Lemmes II.3.1 et II.4.4, il existe $D \in \mathbb{N}$ et $C_{10} > 0$ tels que

$$\psi_1(r', a, m) \leqslant C_{10}\delta_P(m)^{-1/2}\delta_0(m)^{1/2}(1+\sigma(m))^{D-r'/2} \times \int_{\bar{U}_a} \delta_0(m_0(\bar{u}))^{1/2}(1+\sigma(\bar{u}))^{D-r'/2}\,\mathrm{d}\bar{u}$$

pour tout $a \in \bar{A}_0^+(\alpha) \cap G^1$ et tout $m \in M_0$. Notons que $\delta_P(m)^{-1}\delta_0(m) = \delta_0^M(m)$. Grâce au Lemme II.1.1, si $r' \geqslant 2D$, il existe $C_{11} > 0$ tel que

$$\delta_P(m)^{-1/2}\delta_0(m)^{1/2}(1+\sigma(m))^{D-r'/2} \leqslant C_{11}\Xi^M(m)$$

pour tout $m \in \bar{M}_0^{M+}$.

Introduisons les ensembles $\bar{U}(n)$ de II.4. Grâce au Lemme II.3.4 appliqué à P_0 et à la définition de $\bar{U}_a$, il existe $C_{12} > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\int_{\bar{U}_a} \delta_0(m_0(\bar{u}))^{1/2}(1+\sigma(\bar{u}))^{D-r'/2}\,\mathrm{d}\bar{u} \leqslant C_{12} \sum_{n \geqslant \varepsilon\sigma(a)} q^{-n/2}(1+n)^{D-r'/2}\operatorname{mes}\bar{U}(n),$$

pourvu que $\sigma(a)$ soit assez grand, ce que l'on peut supposer. Grâce au Lemme II.4.1, on voit que si r' est assez grand, il existe $C_{13} > 0$ tel que cette dernière série soit majorée par

$$C_{13}(1+\sigma(a))^{-d'}.$$

Cela achève la preuve de (6).

En utilisant (4), (5) et (6), on voit que pour tous $d, d' \in \mathbb{N}$, il existe $C_{14} > 0$ tel que, pour tout $a \in \bar{A}_0^+(\alpha) \cap G^1$, on ait l'inégalité

$$|J(a)| \leqslant C_{14}\delta_P(a)(1+\sigma(a))^{-d'} \int_M \Xi^M(m)\Xi^M(ama^{-1})(1+\sigma(m))^{-d}\,\mathrm{d}m.$$

Le même raisonnement que dans la preuve de (3) conduit à la majoration

$$|J(a)| \leqslant C_{14}\delta_P(a)\Xi^M(a)^2(1+\sigma(a))^{-d'} \int_M \Xi^M(m)^2(1+\sigma(m))^{-d}\,\mathrm{d}m.$$

En appliquant les Lemmes II.1.1 et II.1.5, on voit qu'en choisissant d et d' assez grands, on obtient une majoration

$$|J(a)| \leqslant C_{15}\delta_0(a)(1+\sigma(a))^{-r}$$

pour tout $a \in \bar{A}_0^+(\alpha) \cap G^1$. Jointe à (3), cette majoration entraîne l'inégalité de l'énoncé. □

Corollaire VIII.3.2. *Soient $f_1 \in {}^o\mathcal{C}(G)$ et $f_2 \in \mathcal{C}(G)$. Alors l'intégrale*

$$\int_{A_G\backslash G} \left| \int_G f_1(hgh^{-1})f_2(g)\,\mathrm{d}g \right| \mathrm{d}h$$

est convergente.

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Il existe un sous-ensemble compact Γ de M_0 tel que l'ensemble

$$\bigcup_{a \in (\bar{A}_0^+ \cap G^1)/(\bar{A}_0^+ \cap M_0^1)} Ka\Gamma K$$

se projette surjectivement sur $A_G \setminus G$. En utilisant la lissité de f_1 et f_2, la Proposition VIII.3.1 montre que pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $a \in \bar{A}_0^+ \cap G^1$,

$$\int_{Ka\Gamma K} \left| \int_G f_1(hgh^{-1}) f_2(g) \, \mathrm{d}g \right| \mathrm{d}h \leqslant C_1 \operatorname{mes}(Ka\Gamma K) \delta_0(a)(1 + \sigma(a))^{-r}.$$

D'autre part, d'après I.1 (5), il existe $C_2 > 0$ tel que

$$\operatorname{mes}(Ka\Gamma K) \leqslant C_2 \delta_0(a)^{-1}$$

pour tout $a \in \bar{A}_0^+$. Si r est assez grand, la série

$$\sum_{a \in (\bar{A}_0^+ \cap G^1)/(\bar{A}_0^+ \cap M_0^1)} (1 + \sigma(a))^{-r}$$

est convergente. Cela achève la démonstration. □

VIII.4.

Notons $\hat{A}_G$ l'ensemble des caractères unitaires de A_G, i.e.

$$\hat{A}_G = \{\chi \in \operatorname{Hom}(A_G, \mathbb{C}^\times);\ \operatorname{Re}(\chi) = 0\}.$$

Pour $\chi \in \hat{A}_G$, notons $C_{\text{lisse}}(G)_\chi$ l'espace des fonctions $f : G \to \mathbb{C}$, bi-invariantes par un sous-groupe ouvert compact et vérifiant l'égalité

$$f(ag) = \chi(a) f(g)$$

pour tout $a \in A_G$ et tout $g \in G$. On définit une application

$$p_\chi : \mathcal{C}(G) \to C_{\text{lisse}}(G)_\chi$$

par la formule

$$(p_\chi f)(g) = \int_{A_G} \chi^{-1}(a) f(ag) \, \mathrm{d}a.$$

L'intégrale est absolument convergente.

Pour tout sous-groupe ouvert compact H de G, posons ${}^o\mathcal{C}_H = {}^o\mathcal{C}(G) \cap \mathcal{C}_H$, cf. III.6.

Proposition VIII.4.1. *Pour tout sous-groupe ouvert compact H de G et tout $\chi \in \hat{A}_G$, l'espace $p_\chi({}^o\mathcal{C}_H)$ est de dimension finie.*

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Preuve. On peut supposer que la restriction de χ à $A_G \cap H$ est triviale, sinon $p_\chi({}^o\mathcal{C}_H) = \{0\}$. Notons e la fonction caractéristique de H, introduisons la fonction ${}^oe$. Elle a les propriétés suivantes:

- ${}^oe \in {}^o\mathcal{C}_H$: cela résulte de la relation évidente ${}^o(\rho(g_1)\lambda(g_2)f) = \rho(g_1)\lambda(g_2){}^of$ pour toute $f \in \mathcal{C}(G)$ et tous $g_1, g_2 \in G$;
- ${}^oe$ est à valeurs réelles: $\overline{{}^oe} = {}^o(\bar{e}) = {}^oe$, d'après la Remarque VIII.2.2;
- ${}^oe$ est à support dans G^1: pour $\chi \in \operatorname{Im} X(G)$, on a $\chi{}^oe = {}^o(\chi e) = {}^oe$, d'après la même remarque.

Pour $g_1, g_2 \in G$, posons

$$\alpha(g_1, g_2) = \operatorname{mes}(H)^{-2} \int_H {}^oe(g_1^{-1}hg_2)\,\mathrm{d}h,$$

$$\alpha_\chi(g_1, g_2) = \int_{A_G} \alpha(g_1a, g_2)\chi^{-1}(a)\,\mathrm{d}a = \int_{A_G} \alpha(g_1, ag_2)\chi(a)\,\mathrm{d}a.$$

Pour $g_2 \in G$, on note $\alpha(\cdot, g_2)$, resp. $\alpha_\chi(\cdot, g_2)$, les fonctions sur G qui à g_1 associent $\alpha(g_1, g_2)$, resp. $\alpha_\chi(g_1, g_2)$. On a $\alpha(\cdot, g_2) \in {}^o\mathcal{C}_H$, donc $\alpha_\chi(\cdot, g_2) = p_\chi\alpha(\cdot, g_2) \in p_\chi({}^o\mathcal{C}_H)$.

Pour $f_1, f_2 \in p_\chi({}^o\mathcal{C}_H)$, posons

$$(f_1, f_2)_{A_G\backslash G} = \int_{A_G\backslash G} \overline{f_1(g)}f_2(g)\,\mathrm{d}g.$$

L'intégrale est absolument convergente. En effet il existe un sous-ensemble compact Γ de G tel que $G^1\Gamma$ se projette surjectivement sur $A_G \backslash G$. D'autre part, on vérifie aisément que pour tout $f \in p_\chi({}^o\mathcal{C}(G))$ et tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $c > 0$ tel que, pour tout $g \in G^1$, on ait l'inégalité

$$|f(g)| \leqslant c\Xi(g)(1 + \sigma(g))^{-r}.$$

Cela assure la convergence. L'espace $p_\chi({}^o\mathcal{C}(G))$ est ainsi muni d'un produit hermitien défini positif invariant par l'action de $G \times G$.

Montrons que

$$\text{pour tout } f \in p_\chi({}^o\mathcal{C}_H) \text{ et tout } g \in G, (\alpha_\chi(\cdot, g), f)_{A_G\backslash G} = f(g). \tag{1}$$

Soit $\varphi \in {}^o\mathcal{C}_H$ tel que $f = p_\chi\varphi$. Alors

$$\begin{aligned}(\alpha_\chi(\cdot, g), f)_{A_G\backslash G} &= \int_G \overline{\alpha_\chi(g', g)}\varphi(g')\,\mathrm{d}g' \\ &= \operatorname{mes}(H)^{-2} \int_G \int_{A_G} \int_H {}^oe(g'^{-1}hag)\chi^{-1}(a)\varphi(g')\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}g'.\end{aligned}$$

Cette expression est absolument convergente et on obtient:

$$(\alpha_\chi(\cdot, g), f)_{A_G\backslash G} = \operatorname{mes}(H)^{-2} \int_{A_G} \int_H \varphi * {}^oe(hag)\chi^{-1}(a)\,\mathrm{d}h\,\mathrm{d}a.$$

Comme $\varphi \in {}^o\mathcal{C}_H$, on a, d'après le Lemme VIII.2.3,

$$\varphi * {}^o e = \varphi * e = \mathrm{mes}(H)\varphi.$$

L'intégrale en H disparaît par invariance de φ à gauche et l'on obtient

$$(\alpha_\chi(\cdot, g), f)_{A_G\backslash G} = \int_{A_G} \varphi(ag)\chi^{-1}(a)\,\mathrm{d}a = f(g).$$

Cela prouve (1).

Notons $\mathcal{F}$ le sous-espace de $p_\chi({}^o\mathcal{C}_H)$ engendré par les fonctions $\alpha_\chi(\cdot, g)$ pour $g \in G$. Comme en fait ces fonctions ne dépendent que de la classe de g dans $H \setminus G/H$, qui est dénombrable, $\mathcal{F}$ est de dimension dénombrable. Il existe une base orthonormée $(f_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{F}$, où I est un ensemble dénombrable. Fixons une telle base. Pour $g \in G$, écrivons

$$\alpha_\chi(\cdot, g) = \sum_{i\in I} c_i(g) f_i,$$

avec des coefficients $c_i(g) \in \mathbb{C}$. En appliquant (1) à une fonction f_i, on voit qu'en fait $c_i(g) = \overline{f_i(g)}$ pour tout i, i.e. pour tous $g_1, g_2 \in G$,

$$\alpha_\chi(g_1, g_2) = \sum_{i\in I} f_i(g_1)\overline{f_i(g_2)}.$$

Alors l'intégrale

$$\int_{A_G\backslash G} \alpha_\chi(g, g)\,\mathrm{d}g$$

est convergente si et seulement si I est fini. Or, par définition, pour tout $g \in G$,

$$\alpha_\chi(g, g) = \int_G {}^o e(g^{-1}g'g)\psi(g')\,\mathrm{d}g',$$

où ψ est la fonction sur G définie par

$$\begin{aligned} \psi(g) &= 0, && \text{si } g \notin A_G H,\\ \psi(ah) &= \chi(a)\,\mathrm{mes}(A_G \cap H)\,\mathrm{mes}(H)^{-2}, && \text{si } a \in A_G,\ h \in H. \end{aligned}$$

Comme ${}^o e$ est à support dans G^1, on peut remplacer ψ par le produit φ de ψ par la fonction caractéristique de G^1. Alors

$$\int_{A_G\backslash G} \alpha_\chi(g, g)\,\mathrm{d}g = \int_{A_G\backslash G}\int_G {}^o e(g^{-1}g'g)\varphi(g')\,\mathrm{d}g'\,\mathrm{d}g.$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Comme $\varphi \in \mathcal{C}(G)$ et ${}^o e \in {}^o\mathcal{C}(G)$, cette expression est convergente d'après le Corollaire III.3.2. Alors I est fini, i.e. $\mathcal{F}$ est de dimension finie. D'après (1), l'orthogonal de $\mathcal{F}$ dans $p_\chi({}^o\mathcal{C}_H)$ est nul. Donc $p_\chi({}^o\mathcal{C}_H) = \mathcal{F}$ et $p_\chi({}^o\mathcal{C}_H)$ est de dimension finie. □

Pour $\chi \in \hat{A}_G$, notons $\mathcal{E}_2(G)_\chi$ l'ensemble des $\omega \in \mathcal{E}_2(G)$ tels que la restriction χ_ω à A_G de leur caractère central soit égale à χ. Posons

$$\mathcal{A}_2(G)_\chi = \bigoplus_{\omega \in \mathcal{E}_2(G)_\chi} \mathcal{A}(\omega).$$

C'est un sous-espace de $C_{\text{lisse}}(G)_\chi$ (la somme est directe dans cet espace d'après III.1 (2)).

Théorème VIII.4.2. *Pour tout $\chi \in \hat{A}_G$, on a l'égalité*

$$p_\chi({}^o\mathcal{C}(G)) = \mathcal{A}_2(G)_\chi.$$

Preuve. Soit $\omega \in \mathcal{E}_2(G)_\chi$. Notons $\mathcal{O}$ son orbite pour l'action de $\operatorname{Im} X(G)$. Soit $\psi \in C^\infty(\mathcal{O}, G)$. D'après le Théorème VII.2.5, on a l'égalité ${}^o f_\psi = f_\psi$, donc $f_\psi \in {}^o\mathcal{C}(G)$. Pour tout $g \in G$, on a les égalités

$$\begin{aligned}(p_\chi f_\psi)(g) &= \int_{A_G} \chi^{-1}(a) f_\psi(ag)\,\mathrm{d}a \\ &= \int_{A_G} \chi^{-1}(a) \int_{\mathcal{O}} (E_G^G \psi_{\omega'})(ag)\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}a \\ &= \int_{A_G} \chi^{-1}(a) \int_{\mathcal{O}} \chi_{\omega'}(a)(E_G^G \psi_{\omega'})(g)\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}a.\end{aligned}$$

Par inversion de Fourier, on obtient

$$(p_\chi f_\psi)(g) = \sum_{\omega' \in \mathcal{O}_\chi} (E_G^G \psi_{\omega'})(g),$$

où $\mathcal{O}_\chi = \{\omega' \in \mathcal{O};\ \chi_{\omega'} = \chi\}$. C'est un ensemble fini contenant ω. Pour tout $\varphi \in \mathcal{A}(\omega)$, on peut trouver $\psi \in C^\infty(\mathcal{O}, G)$ tel que $\psi_{\omega'} = 0$ si $\omega' \in \mathcal{O}_\chi - \{\omega\}$ et $E_G^G \psi_\omega = \varphi$. Pour un tel ψ, on a $\varphi = p_\chi f_\psi$ donc $\varphi \in p_\chi({}^o\mathcal{C}(G))$. D'où l'inclusion $\mathcal{A}_2(G)_\chi \subset p_\chi({}^o\mathcal{C}(G))$.

Inversement, soit H un sous-groupe ouvert compact de G. Notons ${}^o\mathcal{C}(H \setminus G)$ le sous-espace des éléments de ${}^o\mathcal{C}(G)$ invariants à gauche par H. Posons $V = p_\chi({}^o\mathcal{C}(H \setminus G))$. Le groupe G opère dans V par translations à droite. On note ρ cette action. La représentation (ρ, V) est unitaire: on a défini un produit hermitien défini positif et invariant par G dans la preuve de la Proposition VIII.4.1. Elle est admissible: pour tout sous-groupe ouvert compact H' de H, l'espace des invariants $V^{H'}$ est inclus dans $p_\chi({}^o\mathcal{C}_{H'})$ qui est de dimension finie. Elle est donc semi-simple. L'espace des coefficients $\mathcal{A}(\rho)$ est engendré par les fonctions

$$g \mapsto (f_1, \rho(g) f_2)_{A_G \setminus G}$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

pour $f_1, f_2 \in V$. Calculons un tel produit. Soient donc $f_1, f_2 \in V$, $g \in G$, introduisons $\varphi_1, \varphi_2 \in {}^o\mathcal{C}(H \setminus G)$ tels que $f_1 = p_\chi \varphi_1$, $f_2 = p_\chi \varphi_2$. On a les égalités:

$$\begin{aligned}
(f_1, \rho(g) f_2) &= \int_{A_G \backslash G} \overline{f_1(g')} f_2(g'g)\,\mathrm{d}g' \\
&= \int_{A_G \backslash G} \int_{A_G} \overline{f_1(g')} \varphi_2(g'ag) \chi^{-1}(a)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}g' \\
&= \int_G \overline{f_1(g')} \varphi_2(g'g)\,\mathrm{d}g' \\
&= \int_G \int_{A_G} \overline{\varphi_1(ag')} \chi(a) \varphi_2(g'g)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}g' \\
&= \int_{A_G} \int_G \chi^{-1}(a) \overline{\varphi_1(g')} \varphi_2(g'ag)\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}a \\
&= \int_{A_G} \chi^{-1}(a) \check{\bar{\varphi}}_1 * \varphi_2(ag)\,\mathrm{d}a.
\end{aligned}$$

La permutation des intégrales est justifiée car, si l'on remplace φ_1 et φ_2 par leurs valeurs absolues, la dernière intégrale est absolument convergente. D'où l'égalité

$$(f_1, \rho(g) f_2)_{A_G \backslash G} = (p_\chi(\check{\bar{\varphi}}_1 * \varphi_2))(g). \tag{2}$$

En particulier cette fonction est de carré intégrable sur $A_G \setminus G$. Donc toute sous-représentation irréductible de (ρ, V) est de carré intégrable. Comme la restriction à A_G du caractère central d'une telle sous-représentation est évidemment égale à χ, on a $\mathcal{A}(\rho) \subset \mathcal{A}_2(G)_\chi$. Soit maintenant $f \in V$. Appliquons l'égalité (2) à $f_2 = f$ et $f_1 = p_\chi {}^o e$, où e est la fonction caractéristique de H. On choisit $\varphi_1 = {}^o e$. D'après la Remarque VIII.2.2, $\check{\overline{{}^o e}} = {}^o e$. D'après le Lemme VIII.2.3, puisque $\varphi_2 \in {}^o\mathcal{C}(H \setminus G)$, ${}^o e * \varphi_2 = e * \varphi_2 = \mathrm{mes}(H) \varphi_2$. D'où l'égalité

$$f(g) = \mathrm{mes}(H)^{-1} (p_\chi {}^o e, \rho(g) f)_{A_G \backslash G}.$$

Donc $f \in \mathcal{A}(\rho)$. Cela démontre l'inclusion $V \subset \mathcal{A}_2(G)_\chi$. Comme $p_\chi({}^o\mathcal{C}(G))$ est réunion des $p_\chi({}^o\mathcal{C}(H \setminus G))$ quand H parcourt les sous-groupes ouverts compacts de G, on obtient l'inclusion $p_\chi({}^o\mathcal{C}(G)) \subset \mathcal{A}_2(G)_\chi$. Cela achève la démonstration. □

VIII.5.

Démontrons le Théorème VIII.1.2. Soit H un sous-groupe ouvert compact de G. Notons $\hat{A}_G^H$ l'ensemble des $\chi \in \hat{A}_G$ sont la restriction à $A_G \cap H$ est triviale. Le groupe $\mathrm{Im}\, X(G)$ agit sur $\hat{A}_G^H$ par multiplication. Le quotient $\hat{A}_G^H / \mathrm{Im}\, X(G)$ est fini. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{X}$ de ce quotient. D'autre part pour tout $\chi \in \hat{A}_G^H$, notons $\mathcal{E}_2(G)_\chi^H$ l'ensemble des $(\omega, E) \in \mathcal{E}_2(G)_\chi$ tels que l'espace des invariants E^H soit non nul. On définit une application

$$\bigcup_{\chi \in \mathcal{X}} \mathcal{E}_2(G)_\chi^H \to \Theta_G^H$$

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

qui à ω associe son orbite pour l'action de $\operatorname{Im} X(G)$. Cette application est surjective. Il suffit donc de fixer $\chi \in \mathcal{X}$ et de prouver que $\mathcal{E}_2(G)^H_\chi$ est fini. Mais, d'après le Théorème VIII.4.2, et puisque p_χ est $G \times G$-invariante, on a

$$\bigoplus_{\omega \in \mathcal{E}_2(G)^H_\chi} \mathcal{A}(\omega)^{H \times H} \subset p_\chi({}^o\mathcal{C}_H),$$

où l'exposant $H \times H$ désigne les invariants par $H \times H$. Pour tout $\omega \in \mathcal{E}_2(G)^H_\chi$, $\mathcal{A}(\omega)^{H \times H} \neq \{0\}$. Comme $p_\chi({}^o\mathcal{C}_H)$ est de dimension finie (Proposition VIII.4.1), $\mathcal{E}_2(G)^H_\chi$ est fini. Cela démontre le Théorème VIII.1.2. $\square$

Démontrons maintenant le Théorème VIII.1.1. Soit $f \in \mathcal{C}(G)$. D'après la Remarque VIII.1.3(ii), on peut définir $\psi \in C^\infty(\Theta)$ par

$$\psi[\mathcal{O}, P] = \psi_f[\mathcal{O}, P]$$

pour tout $(\mathcal{O}, P) \in \Theta$. Posons $\varphi = f - \kappa(\psi)$. On va montrer que $\varphi = 0$. Il est clair que $\varphi \in {}^o\mathcal{C}(G)$. De plus $\psi_\varphi[\mathcal{O}, G] = 0$ pour tout $\mathcal{O} \in \Theta_G$ (Théorème VII.2.5). Donc $\hat{\varphi}(\omega, G) = 0$ pour tout $\omega \in \mathcal{E}_2(G)$, i.e. $\omega(\check{\varphi}) = 0$ pour tout $\omega \in \mathcal{E}_2(G)$. Supposons $\varphi \neq 0$. Par inversion de Fourier sur le groupe A_G, il existe $\chi \in \hat{A}_G$ tel que $p_\chi \varphi \neq 0$. D'après le Théorème VIII.4.2, on peut alors trouver

- $(\omega, E) \in \mathcal{E}_2(G)_\chi$, l'espace E étant muni d'un produit hermitien défini positif invariant par G;
- $v_1, v_2 \in E$,

de sorte que l'intégrale

$$\int_{A_G \backslash G} \overline{(v_1, \omega(g) v_2)} p_\chi \varphi(g) \, \mathrm{d}g$$

soit non nulle. Mais cette intégrale est égale à

$$\int_G \overline{(v_1, \omega(g) v_2)} \varphi(g) \, \mathrm{d}g,$$

où encore à

$$\int_G (v_2, \omega(g) v_1) \varphi(g^{-1}) \, \mathrm{d}g,$$

i.e. à $(v_2, \omega(\check{\varphi}) v_1)$. Or $\omega(\check{\varphi}) = 0$. Contradiction qui démontre le Théorème VIII.1.1. $\square$

Remerciements. Nous remercions G. Laumon pour un discret coup de pouce concernant le cas d'un corps de caractéristique positive, et Mme A. Bardot, qui a effectué rapidement et efficacement la frappe de notre manuscrit.

https://doi.org/10.1017/S1474748003000082 Published online by Cambridge University Press

Références

[BD] J. N. Bernstein and P. Deligne, Le 'centre' de Bernstein, in *Représentations des groupes réductifs sur un corps local* (ed. J. N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan and M.-F. Vignéras), Travaux en Cours (Hermann, Paris, 1984).

[BZ] J. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky, Induced representations of reductive p-adic groups I, *Annls Sci. Ec. Norm. Super.* **10** (1977), 441–472.

[B] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques,* ch. I and II (Hermann, Paris, 1966).

[C] W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups*, non publié.

[HC1] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups III. The Maass–Selberg relation and the Plancherel formula, *Ann. Math.* **104** (1977), 117–201.

[HC2] Harish-Chandra, *The Plancherel formula for reductive p-adic groups,* Collected Papers vol. IV, p. 353–367 (Springer, 1984).

[H] J. Humphreys, *Linear algebraic groups,* Graduate Texts in Mathematics, vol. 21 (Springer, 1975).

[S] F. Sauvageot, Principe de densité pour les groupes réductifs, *Compositio Math.* **108** (1997), 151–184.

[Si] A. Silberger, Harish-Chandra's Plancherel theorem for p-adic groups, *Trans. Am. Math. Soc.* **348** (1996), 4673–4686.