Canad. J. Math. Vol. **56** (2), 2004 pp. 246–276

Éléments unipotents réguliers des sous-groupes de Levi

Cédric Bonnafé

Résumé. Nous étudions la structure du centralisateur d'un élément unipotent régulier d'un sous-groupe de Levi d'un groupe réductif, ainsi que la structure du groupe des composantes de ce centralisateur en relation avec la notion de système local cuspidal définie par Lusztig. Nous déterminons son radical unipotent, montrons l'existence d'un complément de Levi et étudions la structure de son groupe de Weyl. Comme application, nous démontrons des résultats qui étaient annoncés dans un précédent article de l'auteur sur les éléments unipotents réguliers.

Abstract. We investigate the structure of the centralizer of a regular unipotent element of a Levi subgroup of a reductive group. We also investigate the structure of the group of components of this centralizer in relation with the notion of cuspidal local system defined by Lusztig. We determine its unipotent radical, we prove that it admits a Levi complement, and we get some properties on its Weyl group. As an application, we prove some results which were announced in previous paper on regular unipotent elements.

Dans un précédent article [Bon1], l'auteur avait défini une application entre l'ensemble des classes unipotentes régulières d'un groupe réductif sur un corps fini et l'ensemble des classes unipotentes régulières d'un de ses sous-groupes de Levi. Nous espérions alors pouvoir préciser un théorème de Digne, Lehrer et Michel sur la restriction de Lusztig des caractères de Gel'fand-Graev en bonne caractéristique [DLM2, Théorème 3.7].

Nous sommes aujourd'hui parvenus à ce but : la publication de ce résultat sera faite dans [Bon4] et [Bon5]. Pour ce faire, reprenant la preuve de [DLM2] utilisant les faisceaux-caractères, nous avons eu besoin d'obtenir des résultats assez fins sur les éléments unipotents réguliers des sous-groupes de Levi d'un groupe réductif. Le but de ce papier est de rassembler ces résultats relativement hétéroclites dans un contexte indépendant de celui des caractères de Gel'fand-Graev.

Soient $\mathbf{G}$ un groupe réductif défini sur un corps algébriquement clos $\mathbb{F}$ de caractéristique $p \geqslant 0$, $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{L}$ un complément de Levi de $\mathbf{P}$. Notons $\pi\colon \mathbf{P} \to \mathbf{L}$ la projection canonique. Soit u un élément unipotent régulier de $\mathbf{G}$, que nous supposons appartenir à $\mathbf{P}$. Alors $v = \pi(u)$ est un élément unipotent régulier de $\mathbf{L}$. D'autre part, puisque $C_{\mathbf{G}}(u) \subset \mathbf{P}$, l'application π induit un morphisme surjectif $H_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\colon A_{\mathbf{G}}(u) \to A_{\mathbf{L}}(v)$. Si ξ est un caractère linéaire de $A_{\mathbf{G}}(u)$ (qui est abélien), on peut montrer que la paire (u, ξ) est cuspidale au sens de [Lu] si et seulement si $\operatorname{Ker} H_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \not\subset \operatorname{Ker} \xi$ pour tout sous-groupe de Levi $\mathbf{L}$ d'un sous-groupe parabolique propre $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ tel que $u \in \mathbf{P}$ (voir proposition 3.8).

Par ailleurs, si on note $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ le groupe des composantes du centre de $\mathbf{G}$, alors l'application canonique $h_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\colon \mathcal{Z}(\mathbf{G}) \to \mathcal{Z}(\mathbf{L})$ est surjective. Lorsque p est bon, l'appli-

Reçu par la rédaction le 21 mai 2002; revu le 27 novembre 2002.
Classification (AMS) par sujet: 20G.

cation canonique $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) \to A_{\mathbf{G}}(u)$ est un isomorphisme et, via cette identification, $h_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ coïncide avec $H_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$.

Ces remarques nous ont conduit à étudier systématiquement les applications $h_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ et $H_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$. Pour cela, nous posons la définition suivante : le groupe $\mathbf{G}$ est dit *cuspidal* (respectivement *quasi-cuspidal*) si, pour tout sous-groupe de Levi $\mathbf{L}$ d'un sous-groupe parabolique propre $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ contenant u, on a $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \neq \{1\}$ (respectivement $\operatorname{Ker} H_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} \neq \{1\}$). Ces deux notions coïncident bien sûr lorsque p est bon pour $\mathbf{G}$. Il se trouve que, dans la majorité des cas, un groupe (quasi-)cuspidal admet un système local cuspidal supporté par la classe unipotente régulière. Nous obtenons dans les sections 2 et 3 des résultats de classification concernant ces deux notions.

Dans [Bon4] et [Bon5], il est apparu que l'étude du centralisateur $C_{\mathbf{G}}(v)$ de v dans $\mathbf{G}$ nous serait particulièrement utile. Nous avons donc étudié le centralisateur des éléments nilpotents réguliers des sous-algèbres de Levi de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathbf{G}$ (lorsque la caractéristique est bonne, c'est-à-dire dans le cas qui nous intéresse pour les applications aux caractères de Gel'fand-Graev, les deux questions sont équivalentes).

Si n est un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$, des informations sur la structure de $C_{\mathbf{G}}(n)$ peuvent être obtenues à partir du diagramme de Dynkin-Richardson de n. Il y a peu de temps encore, l'existence de ce diagramme (ainsi que les propriétés mentionnées) n'était prouvée que lorsque p est bon pour $\mathbf{G}$, et la preuve reposait sur la classification des groupes réductifs pour les petites valeurs de p (voir [BC], [Po1] et [Po2]). Récemment, A. Premet [Pr] a donné une preuve générale de cette existence et a aussi retrouvé la décomposition de Levi du centralisateur de n dans $\mathbf{G}$ à partir du diagramme de Dynkin-Richardson.

Lorsque n est un élément nilpotent régulier de l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$, nous retrouvons par des méthodes élémentaires le résultat d'A. Premet. Nous l'améliorons même légèrement dans ce cas particulier : notre preuve reste valide en mauvaise caractéristique. Nous obtenons aussi des précisions supplémentaires sur la structure de $C_{\mathbf{G}}(n)$: nous en donnons un sous-groupe de Borel explicite (voir théorème 5.7) et nous déterminons dans plusieurs cas (notamment lorsque le sous-groupe de Levi est cuspidal) la structure du groupe de Weyl de $C_{\mathbf{G}}(n)$. Ces résultats sont contenus dans les section 4 et 5. Dans la section 6, nous supposons que p est bon, ce qui nous permet de relever ces résultats au cas du centralisateur de v dans $\mathbf{G}$.

Pour finir, lorsque $p > 0$ et $\mathbb{F}$ est une clôture algébrique de son sous-corps premier $\mathbb{F}_p$, et si $\mathbf{G}$ est muni d'une isogénie $F\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ dont une puissance est un endomorphisme de Frobenius de $\mathbf{G}$, l'auteur avait défini [Bon1] une application $\operatorname{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ entre l'ensemble des classes unipotentes régulières de $\mathbf{G}^F$ et l'ensemble correspondant pour $\mathbf{L}^F$ (lorsque $F(\mathbf{L}) = \mathbf{L}$). Certaines propriétés de cette application étaient aussi annoncées sans preuve. L'objet de la section 7 est de combler cette lacune. Le plus difficile est de montrer la transitivité des applications $\operatorname{res}_?^!$. Les résultats des sections 4, 5 et 6 jouent alors un rôle primordial (notamment ceux concernant la structure du groupe de Weyl de $C_{\mathbf{G}}(v)$).

1 Notations et préliminaires

1.A Notations générales

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos dont on notera p la caractéristique ($p \geqslant 0$). Si $\mathbf{H}$ est un groupe algébrique défini sur $\mathbb{F}$, on notera $\mathbf{H}^\circ$ la composante connexe de $\mathbf{H}$ contenant l'élément neutre, $\mathbf{D}(\mathbf{H})$ le groupe dérivé de $\mathbf{H}$, $\mathbf{R}_u(\mathbf{H})$ son radical unipotent, $\mathbf{Z}(\mathbf{H})$ son centre et $\mathcal{Z}(\mathbf{H})$ le groupe fini $\mathbf{Z}(\mathbf{H})/\mathbf{Z}(\mathbf{H})^\circ$. Si $h \in \mathbf{H}$, on notera $A_{\mathbf{H}}(h)$ le groupe fini $C_{\mathbf{H}}(h)/C^\circ_{\mathbf{H}}(h)$. On notera $X(\mathbf{H})$ le réseau des caractères rationnels $\mathbf{H} \to \mathbb{F}^\times$ et $Y(\mathbf{H})$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre $\mathbb{F}^\times \to \mathbf{H}$. Si $\mathbf{H}$ est abélien, alors $Y(\mathbf{H})$ est un groupe abélien (c'est même un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini) et on notera $\langle\ ,\ \rangle$ (ou $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{H}}$ s'il y a confusion possible) la forme $\mathbb{Z}$-bilinéaire $X(\mathbf{H}) \times Y(\mathbf{H}) \to \mathbb{Z}$ définie par

$$x\big(y(t)\big) = t^{\langle x,y\rangle}$$

pour tous $x \in X(\mathbf{H})$, $y \in Y(\mathbf{H})$ et $t \in \mathbb{F}^\times$. Lorsque $\mathbf{H}$ est un tore, c'est une dualité parfaite. Dans ce cas, nous l'étendrons en une dualité parfaite toujours notée $\langle\ ,\ \rangle\colon \big(X(\mathbf{H}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\big) \times \big(Y(\mathbf{H}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\big) \to \mathbb{Q}$.

Si H est un groupe abélien, on notera H_{tors} (respectivement $H_{p'}$) le sous-groupe de H formé des éléments de torsion (respectivement de torsion première à p si $p > 0$ ou simplement de torsion si $p = 0$). Si E est une partie de H, on notera $\langle E\rangle$ le sous-groupe de H engendré par E. On notera μ_∞ le groupe des racines de l'unité de $\mathbb{F}^\times$ et on choisira un isomorphisme

$$\iota\colon (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{p'} \xrightarrow{\sim} \mu_\infty$$

et on notera $\tilde{\iota}$ le morphisme surjectif de groupes abéliens $\mathbb{Q} \to \mu_\infty$ obtenu en composant ι avec le morphisme canonique $\mathbb{Q} \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{\mathrm{tors}} \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{p'}$. Si $\mathbf{H}$ est un groupe algébrique abélien, on notera

$$\begin{aligned} \tilde{\iota}_{\mathbf{H}}\colon Y(\mathbf{H}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} &\to \mathbf{H} \\ y \otimes_{\mathbb{Z}} &\mapsto y\big(\tilde{\iota}(r)\big). \end{aligned}$$

C'est un morphisme de groupes.

Si G est un groupe quelconque, et si E est une partie ou un élément de G, nous noterons $N_G(E)$ son normalisateur dans G (si E est un élément, on a alors $N_G(E) = C_G(E)$). Si $E_1, \dots, E_r$ sont des parties ou des éléments de G, nous noterons $N_G(E_1, \dots, E_r)$ le groupe $N_G(E_1) \cap \cdots \cap N_G(E_r)$.

1.B Le contexte

Tout au long de cet article, on fixe un groupe réductif $\mathbf{G}$ défini sur $\mathbb{F}$. On choisit un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}$ de $\mathbf{G}$ ainsi qu'un tore maximal $\mathbf{T}$ de $\mathbf{B}$. On note $\mathbf{U}$ le radical unipotent de $\mathbf{B}$. On note $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{t}$ les algèbres de Lie respectives de $\mathbf{G}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{U}$ et $\mathbf{T}$. On note Φ le système de racines de $\mathbf{G}$ relatif à $\mathbf{T}$, Δ la base de Φ associée au choix de $\mathbf{B}$, et W le groupe de Weyl de Φ, c'est-à-dire le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$

relatif à $\mathbf{T}$: $W = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$. À $\alpha \in \Phi$ sont associés une réflexion s_α, une coracine $\alpha^\vee$, un sous-groupe unipotent unidimensionnel $\mathbf{U}_\alpha$ (dont on notera $\mathfrak{u}_\alpha$ l'algèbre de Lie), un isomorphisme de groupes algébriques $x_\alpha \colon \mathbb{F} \to \mathbf{U}_\alpha$ (qui n'est pas défini de manière unique) et on pose $e_\alpha = (dx_\alpha)(1)$ (e_α est un générateur de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_\alpha$).

Si I est une partie de Δ, on notera Φ_I le sous-système de racines de Φ de base I, W_I le sous-groupe de W engendré par les $(s_\alpha)_{\alpha\in I}$, $\mathbf{P}_I$ le sous-groupe parabolique $\mathbf{B}W_I\mathbf{B}$ de $\mathbf{G}$, $\mathbf{V}_I$ son radical unipotent, $\mathbf{L}_I$ le sous-groupe de Levi de $\mathbf{P}_I$ contenant $\mathbf{T}$, $\mathbf{B}_I$ le sous-groupe de Borel $\mathbf{B} \cap \mathbf{L}_I$ de $\mathbf{L}_I$ et $\mathbf{U}_I$ le radical unipotent de $\mathbf{B}_I$. Alors Φ_I est le système de racines de $\mathbf{L}_I$ relatif à $\mathbf{T}$ et W_I est le groupe de Weyl de $\mathbf{L}_I$ relatif à $\mathbf{T}$. Remarquons que $\mathbf{B} = \mathbf{B}_I \ltimes \mathbf{V}_I$ et $\mathbf{U} = \mathbf{U}_I \ltimes \mathbf{V}_I$. On note $\pi_I \colon \mathbf{P}_I \to \mathbf{L}_I$ la projection canonique. On notera w_I l'élément de W_I de plus grande longueur (pour la longueur définie par I ou Δ) et $\mathbf{P}_I^-$ désignera le sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ opposé à $\mathbf{P}_I$ par rapport à $\mathbf{L}_I$ et $\mathbf{V}_I^- = \mathbf{R}_u(\mathbf{P}_I^-)$.

Pour finir, on se fixe un sous-groupe de Levi $\mathbf{L}$ d'un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$. On notera $\mathbf{V}$ le radical unipotent de $\mathbf{P}$, $h_{\mathbf{L}}$ (ou $h_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$) le morphisme canonique $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) \to \mathcal{Z}(\mathbf{L})$ et $\pi_{\mathbf{L}} \colon \mathbf{P} \to \mathbf{L}$ la projection canonique.

1.C Limites et sous-groupes paraboliques

Nous rappelons une définition classique. Si $\mathbf{X}$ est une variété algébrique et si $\varphi \colon \mathbb{F}^\times \to \mathbf{X}$ est un morphisme de variétés, on dit que $\lim_{t\to 0}\varphi(t)$ *existe (et est égale à $x \in \mathbf{X}$)* s'il existe un morphisme de variétés $\tilde{\varphi} \colon \mathbb{F} \to \mathbf{X}$ étendant φ (et vérifiant $\tilde{\varphi}(0) = x$). Si $\lim_{t\to 0}\varphi(t)$ existe, sa valeur est uniquement déterminée.

Fixons maintenant $\lambda \in Y(\mathbf{G})$. Nous posons alors

$$\mathbf{P}(\lambda) = \bigl\{ g \in \mathbf{G} \mid \lim_{t\to 0} \lambda(t) g \lambda(t)^{-1} \text{existe} \bigr\}$$

et nous notons $\mathbf{V}(\lambda)$ le radical unipotent de $\mathbf{P}(\lambda)$ et $\mathbf{L}(\lambda)$ le centralisateur de $\operatorname{Im}\lambda$ dans $\mathbf{G}$. On rappelle le fait suivant (voir par exemple [R, section 7]).

Proposition 1.1 *Soit $\lambda \in Y(\mathbf{G})$. Alors :*

(a) $\mathbf{P}(\lambda)$ *est un sous-groupe parabolique de* $\mathbf{G}$ *et* $\mathbf{L}(\lambda)$ *est un sous-groupe de Levi de* $\mathbf{P}(\lambda)$.

(b)

$$\mathbf{V}(\lambda) = \{ g \in \mathbf{G} \mid \lim_{t\to 0} \lambda(t) g \lambda(t)^{-1} = 1 \}$$

et

$$\mathbf{L}(\lambda) = \{ g \in \mathbf{G} \mid \lim_{t\to 0} \lambda(t) g \lambda(t)^{-1} = g \}.$$

En particulier, si $g \in \mathbf{P}(\lambda)$, alors $\lim_{t\to 0}\lambda(t)g\lambda(t)^{-1} = \pi_\lambda(g)$ où $\pi_\lambda \colon \mathbf{P}(\lambda) \to \mathbf{L}(\lambda)$ est la projection canonique.

(c) *Si $\lambda \in Y(\mathbf{T})$, alors $\mathbf{P}(\lambda) = \langle \mathbf{T}, (\mathbf{U}_\alpha)_{\langle\alpha,\lambda\rangle \geqslant 0}\rangle$, $\mathbf{V}(\lambda) = \langle \mathbf{T}, (\mathbf{U}_\alpha)_{\langle\alpha,\lambda\rangle > 0}\rangle$ et $\mathbf{L}(\lambda) = \langle \mathbf{T}, (\mathbf{U}_\alpha)_{\langle\alpha,\lambda\rangle = 0}\rangle$.*

(d) *Si* $\lambda \in Y(\mathbf{T})$, *alors*

$$\mathfrak{p}(\lambda) = \mathfrak{t} \oplus \Big(\bigoplus_{\langle \alpha, \lambda \rangle \geqslant 0} \mathfrak{u}_\alpha \Big),$$

$$\mathfrak{v}(\lambda) = \bigoplus_{\langle \alpha, \lambda \rangle > 0} \mathfrak{u}_\alpha$$

et

$$\mathfrak{l}(\lambda) = \mathfrak{t} \oplus \Big(\bigoplus_{\langle \alpha, \lambda \rangle = 0} \mathfrak{u}_\alpha \Big).$$

1.D Parties auto-opposées

Soit I une partie de Δ. On pose

$$W(I) = \{ w \in W \mid w(I) = I \}$$

et

$$W^I = \{ w \in W \mid w(I) \subset \Delta \}.$$

Il est clair que $W(I) \subset W^I$ et il est bien connu que $N_W(W_I) = W(I) \ltimes W_I$. Si $\alpha \in \Delta - I$, on pose

$$w_{I,\alpha} = w_{I \cup \{\alpha\}} w_I.$$

Notons que $w_{I,\alpha} \in W^I$.

La partie I est dite *auto-opposée* (ou W*-auto-opposée* s'il est nécessaire de préciser le groupe ambiant) si $W(I) = W^I$.

Proposition 1.2 *Soit I une partie de Δ. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *I est auto-opposée.*
(2) *Pour toute partie J de Δ contenant I, w_J normalise W_I.*
(3) *Pour tout $\alpha \in \Delta - I$, $w_{I \cup \{\alpha\}}$ normalise W_I.*
(4) *Pour tout $\alpha \in \Delta - I$, $w_{I,\alpha}$ normalise W_I.*
(5) *Pour tout $\alpha \in \Delta - I$, $w_{I,\alpha} \in W(I)$.*

Démonstration *cf.* [H]. ■

Proposition 1.3 *Si I est auto-opposée, alors $\big(W(I), (w_{I,\alpha})_{\alpha \in \Delta - I}\big)$ est un groupe de Weyl (pour son action sur l'orthogonal de $I^\vee$ dans $X(\mathbf{T})$).*

Démonstration *cf.* [H]. ■

Si I est une partie de Δ, on posera

$$I^{(1)} = \bigcap_{w \in W^I} w(I).$$

Alors $I^{(1)}$ est une partie de I et $I^{(1)} = I$ si et seulement si I est auto-opposée. On peut ainsi définir par récurrence une suite $(I^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\begin{cases} I^{(0)} = I, \\ I^{(n+1)} = (I^{(n)})^{(1)} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La suite $(I^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et stationnaire à partir d'un certain rang. On posera $I^{(\infty)} = \bigcap_{n\geqslant 0} I^{(n)}$. La proposition suivante est immédiate.

Proposition 1.4 *Si I est une partie de Δ, alors $I^{(\infty)}$ est la plus grande partie de I qui est W-auto-opposée.*

Nous terminons cette section par quelques définitions qui nous seront utiles par la suite. Un morphisme $\pi\colon \hat{\mathbf{G}} \to \mathbf{G}$ entre groupes réductifs connexes est dit *isotypique* si $\operatorname{Ker}\pi$ est central dans $\hat{\mathbf{G}}$ et $\operatorname{Im}\pi$ contient le groupe dérivé de $\mathbf{G}$. Un sous-groupe de Levi $\mathbf{L}$ d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ est dit *auto-opposé* (ou $\mathbf{G}$-*auto-opposé* s'il est nécessaire de préciser le groupe ambiant) s'il est conjugué à un $\mathbf{L}_I$ où I est une partie auto-opposée de Δ. Le groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ est dit *universellement auto-opposé* si pour tout morphisme isotypique $\hat{\mathbf{G}} \to \mathbf{G}$ et pour tout groupe réductif connexe $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ dont $\hat{\mathbf{G}}$ est un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique, le groupe $\hat{\mathbf{G}}$ est $\hat{\mathbf{\Gamma}}$-auto-opposé.

Exemple 1.5 S'il existe un élément unipotent u de $\mathbf{G}$ et un caractère irréductible ξ de $A_{\mathbf{G}}(u)$ tel que la paire (u, ξ) est cuspidale, alors le groupe $\mathbf{G}$ est universellement auto-opposé [Lu, théorème 9.2]. ■

Remarque 1.6 Si $\mathbf{L}$ est auto-opposé, alors il existe une unique partie I de Δ telle que $\mathbf{L}$ soit conjugué à $\mathbf{L}_I$. En effet, si I et J sont deux parties de Δ telles que $\mathbf{L}$ soit conjugué à $\mathbf{L}_I$ et $\mathbf{L}_J$ et si I est auto-opposée, alors il existe $w \in W$ tel que $w(I) = J$. Par suite, $w \in W^I$, donc $w \in W(I)$ car I est auto-opposée. Donc $w(I) = I = J$. ■

2 Cuspidalité

2.A Rappels sur le groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$

Nous rappelons quelques résultats classiques.

Proposition 2.1 *Le morphisme canonique $X(\mathbf{T}) \to X\big(\mathbf{Z}(\mathbf{G})\big)$ induit un isomorphisme*

$$X\big(\mathcal{Z}(\mathbf{G})\big) \simeq \big(X(\mathbf{T})/\langle\Phi\rangle\big)_{p'}.$$

Corollaire 2.2 *Le morphisme $h_{\mathbf{L}}\colon \mathcal{Z}(\mathbf{G}) \to \mathcal{Z}(\mathbf{L})$ est surjectif.*

Corollaire 2.3 *Le groupe $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$ agit trivialement sur $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$.*

Un autre résultat utile sur le groupe $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}}$ est le suivant.

Proposition 2.4 *Soient I et J deux parties de Δ. Alors*

$$\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_{I\cap J}} = (\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I}) \cdot (\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_J}).$$

Remarque 2.5 On a $\mathbf{L}_{I\cap J} = \mathbf{L}_I \cap \mathbf{L}_J$ et $\langle \mathbf{L}_I, \mathbf{L}_J \rangle = \mathbf{L}_{I\cup J}$. ■

Remarque 2.6 Dans [DLM1, lemme 1.5], le résultat suivant est annoncé : "*Soient $\mathbf{L}_1$ et $\mathbf{L}_2$ deux sous-groupes de Levi de sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}$ tels que $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ contienne un tore maximal de $\mathbf{G}$. Alors* $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2} = (\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_1}) \cdot (\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_2})$." En fait, sous cette forme générale, ce résultat est faux.

En effet, si $\mathbf{G} = \mathbf{SL}_4(\mathbb{F})$, si $p \neq 2$, si $\mathbf{T}$ est le tore maximal de $\mathbf{G}$ formé des matrices diagonales, si

$$\mathbf{L}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 \\ z & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x' & y' \\ 0 & 0 & z' & t' \end{pmatrix} \,\middle|\, (xt - yz)(x't' - y'z') = 1 \right\}$$

et si

$$\mathbf{L}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y & 0 \\ 0 & x' & 0 & y' \\ z & 0 & t & 0 \\ 0 & z' & 0 & t' \end{pmatrix} \,\middle|\, (xt - yz)(x't' - y'z') = 1 \right\},$$

alors le résultat de [DLM1, lemme 1.5] est faux dans ce cas car $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) \simeq \mu_4(\mathbb{F})$, $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_1} = \ker h_{\mathbf{L}_2} \simeq \mu_2(\mathbb{F})$ et $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_2} \simeq \mu_4(\mathbb{F})$. L'erreur dans la preuve de [DLM1] est contenue dans le fait suivant : il n'est pas vrai en général que $\mathbf{Z}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2)^\circ = \mathbf{Z}(\mathbf{L}_1)^\circ \cdot \mathbf{Z}(\mathbf{L}_2)^\circ$. En effet, dans l'exemple précédent, cette dernière égalité n'a pas lieu (pour des raisons de dimension).

En revanche, si $\mathbf{L}_1$ et $\mathbf{L}_2$ sont standard (par rapport au choix d'une base de Φ), alors $\mathbf{Z}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2)^\circ = \mathbf{Z}(\mathbf{L}_1)^\circ \cdot \mathbf{Z}(\mathbf{L}_2)^\circ$, et leur preuve s'applique. On obtient alors notre proposition 2.4. Nous en rappelons tout de même une preuve (qui diffère très légèrement de la preuve de [DLM1, lemme 1.5]). ■

Démonstration Montrons tout d'abord que

$$(*) \qquad \mathbf{Z}(\mathbf{L}_{I\cap J})^\circ = \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ \cdot \mathbf{Z}(\mathbf{L}_J)^\circ.$$

D'une part, il est clair que $\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ \cdot \mathbf{Z}(\mathbf{L}_J)^\circ \subset \mathbf{Z}(\mathbf{L}_{I\cap J})^\circ$. D'autre part, $\dim \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I) = \dim \mathbf{T} - |I|$. De plus, on a, d'après la remarque 2.5,

$$(**) \qquad \mathbf{Z}(\mathbf{L}_{I\cup J}) = \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L}_J).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \dim \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I) \cdot \mathbf{Z}(\mathbf{L}_J) &= \dim \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I) + \dim \mathbf{Z}(\mathbf{L}_J) - \dim \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L}_J) \\ &= (\dim \mathbf{T} - |I|) + (\dim \mathbf{T} - |J|) - (\dim \mathbf{T} - |I \cup J|) \\ &= \dim \mathbf{T} - |I \cap J| \\ &= \dim \mathbf{Z}(\mathbf{L}_{I\cap J}). \end{aligned}$$

Cela termine la preuve de $(*)$.

Reprenons maintenant la preuve de la proposition 2.4. Tout d'abord, il est clair que $(\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I}) \cdot (\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_J}) \subset \operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_{I\cap J}}$. Réciproquement, soit $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{G}) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L}_{I\cap J})^\circ$. Alors, d'après $(*)$, il existe $z_1 \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ$ et $z_2 \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}_J)^\circ$ tels que $z = z_1 z_2$.

Mais alors $z_1 = z z_2^{-1} \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}_J)$. Par suite, $z_1 \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L}_J)$. Donc, d'après $(**)$, et puisque $h_{\mathbf{L}_{I\cup J}}$ est surjective (*cf.* corollaire 2.2), il existe $x_1 \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}_{I\cup J})^\circ \subset \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L}_J)^\circ$ et $y_1 \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ tels que $z_1 = x_1 y_1$. De plus, $y_1 = z_1 x_1^{-1} \in \mathbf{Z}(\mathbf{G}) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ$.

De même, il existe $x_2 \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}_{I\cup J})^\circ$ et $y_2 \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ tels que $z_2 = x_2 y_2$. On a aussi $y_2 \in \mathbf{Z}(\mathbf{G}) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L}_J)^\circ$. On a alors $z = y_1 y_2 x_1 x_2$. Cela montre que $x_1 x_2 \in \mathbf{Z}(\mathbf{G}) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L}_{I\cup J})^\circ$, et donc que $z \in (\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I}) \cdot (\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_J}) \cdot (\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_{I\cup J}})$. Mais, $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_{I\cup J}} \subset \operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I}$. D'où le résultat. ∎

Si $w \in W^I$, alors $\Phi_{w(I)} = w(\Phi_I)$, donc $\mathbf{L}_{w(I)} = {}^w\mathbf{L}_I$ et donc $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I} = \operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_{w(I)}}$. Il résulte donc de la proposition 2.4 que

$$\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I} = \operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_{I(\infty)}}. \tag{2.7}$$

Nous allons maintenant décrire le groupe $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I}$ en fonction du système de racines de $\mathbf{G}$. L'ensemble Δ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} X(\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ)$: on notera $(\varpi_\alpha^\vee)_{\alpha\in\Delta}$ sa base duale dans $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Y(\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ)$ (pour la dualité définie par $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ}$). Il est alors immédiat que $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) = \langle \tilde{\iota}_{\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ}(\varpi_\alpha^\vee) \mid \alpha \in \Delta \rangle$. Le résultat suivant est démontré dans [DLM2, lemme 2.6]. Nous en proposons une preuve légèrement simplifiée.

Proposition 2.8 *Soit I une partie de Δ. Alors le groupe* $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I}$ *est engendré par la famille* $\bigl(\tilde{\iota}_{\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ}(\varpi_\alpha^\vee)\bigr)_{\alpha\in\Delta-I}$.

Démonstration Sans que cela porte à conséquence, nous supposerons, pour alléger les notations, que $\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ = 1$. On a donc par exemple $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) = \mathbf{Z}(\mathbf{G})$.

Dans ce cas, $(\varpi_\alpha^\vee)_{\alpha\in\Delta-I}$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} Y(\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ)$. Nous cherchons à déterminer $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I} = \mathbf{Z}(\mathbf{G}) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ$. Pour simplifier les notations, nous posons $\tilde{\iota}_I = \tilde{\iota}_{\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ}$.

Tout d'abord, il est clair que $\tilde{\iota}_{\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ}(\varpi_\alpha^\vee) = \tilde{\iota}_I(\varpi_\alpha^\vee) \in \mathbf{Z}(\mathbf{G}) \cap \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ$. D'autre part, soit $\sum_{\alpha\in\Delta-I} n_\alpha \varpi_\alpha^\vee \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} Y\bigl(\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ\bigr)$. Alors $\tilde{\iota}_I(\sum_{\alpha\in\Delta-I} n_\alpha \varpi_\alpha^\vee) \in \mathbf{Z}(\mathbf{G})$ si et seulement si $\tilde{\iota}(n_\alpha) = 1$ pour tout $\alpha \in \Delta - I$. Si $p = 0$, cela signifie que $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Delta - I$ et cela termine la démonstration. Si $p > 0$, cela signifie que $n_\alpha \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ pour tout $\alpha \in \Delta - I$. On conclut alors en utilisant le fait que $\mathbf{Z}(\mathbf{G})$ est d'ordre premier à p. ∎

Cette proposition 2.8 aurait pu être utilisée pour donner une preuve immédiate de la proposition 2.4.

Corollaire 2.9 *Si $\mathbf{G}$ est quasi-simple, et si K est un sous-groupe de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$, alors il existe $I \subset \Delta$ tel que $K =$* $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I}$.

Démonstration En effet, dans ce cas, on a, d'après [Bou, Chapitre VI, section 2, corollaire de la proposition 6], $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) = \{1\} \cup \{\tilde{\iota}_{\mathbf{T}/\mathbf{Z}(\mathbf{G})^\circ}(\varpi_\alpha^\vee) \mid \alpha \in \Delta\}$. La conclusion provient alors immédiatement de la proposition 2.8. ∎

2.B Morphismes isotypiques

Fixons nous dans cette sous-section, et seulement dans cette sous-section, un morphisme isotypique $\pi \colon \hat{\mathbf{G}} \to \mathbf{G}$. Notons $\hat{\mathbf{L}} = \pi^{-1}(\mathbf{L})$ et $\hat{\mathbf{P}} = \pi^{-1}(\mathbf{P})$. Alors $\hat{\mathbf{P}}$ est un sous-groupe parabolique de $\hat{\mathbf{G}}$ et $\hat{\mathbf{L}}$ est un sous-groupe de Levi de $\hat{\mathbf{P}}$. De plus, le diagramme
(2.10)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \operatorname{Ker} h_{\hat{\mathbf{L}}} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_h"'] & \mathcal{Z}(\hat{\mathbf{G}}) \arrow[r, "h_{\hat{\mathbf{L}}}"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{Z}(\mathbf{G})}"'] & \mathcal{Z}(\hat{\mathbf{L}}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{Z}(\mathbf{L})}"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}} \arrow[r] & \mathcal{Z}(\mathbf{G}) \arrow[r, "h_{\mathbf{L}}"] & \mathcal{Z}(\mathbf{L}) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

est commutatif et les lignes de ce diagramme sont des suites exactes (les applications π_h, $\pi_{\mathcal{Z}(\mathbf{G})}$ et $\pi_{\mathcal{Z}(\mathbf{L})}$ sont induites par π).

Proposition 2.11 *Les applications π_h, $\pi_{\mathcal{Z}(\mathbf{G})}$ et $\pi_{\mathcal{Z}(\mathbf{L})}$ sont surjectives.*

Démonstration *cf.* [Bon2, Proposition 1.1.2]. ■

En théorie au moins, la commutativité du diagramme 2.10 et la proposition 2.11 permettent de ramener le calcul de $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}}$ au cas où $\mathbf{G}$ est semi-simple simplement connexe (et même quasi-simple par produit direct).

2.C Définition d'un groupe cuspidal

Le groupe $\mathbf{G}$ est dit *cuspidal* si $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}} \neq \{1\}$ pour tout sous-groupe de Levi $\mathbf{L}$ d'un sous-groupe parabolique propre de $\mathbf{G}$. Le résultat suivant découle facilement de la proposition 2.11.

Proposition 2.12 *Si $\mathbf{G}$ est cuspidal et si $\pi \colon \hat{\mathbf{G}} \to \mathbf{G}$ est un morphisme isotypique, alors $\hat{\mathbf{G}}$ est cuspidal.*

Remarque 2.13 Il est à noter que la définition de groupe cuspidal donnée ici coïncide avec celle donnée dans [Bon1, section 1]. ■

Remarque 2.14 Un groupe cuspidal est universellement auto-opposé. Cela résulte des propositions 2.12, 1.4 et de l'égalité 2.7. ■

Exemples 2.15 (1) Un tore est cuspidal.

(2) Le groupe $\mathbf{SL}_n(\mathbb{F})$ est cuspidal si et seulement si p ne divise pas n.

(3) Le groupe $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_4(\mathbb{F})$ n'est pas cuspidal. En effet, si $p = 2$, alors $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) = \{1\}$. D'autre part, si $p \neq 2$, alors $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et il existe un sous-groupe de Levi $\mathbf{L}$ d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ qui est isomorphe à $\mathbf{SL}_2(\mathbb{F}) \times \mathbb{F}^{\times}$. On a alors $\mathcal{Z}(\mathbf{L}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et comme le morphisme $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) \to \mathcal{Z}(\mathbf{L})$ est surjectif, on en déduit que $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}} = \{1\}$. ■

2.D Classification

Si K est un sous-groupe de $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$, nous noterons $\mathcal{L}(K)$ (ou bien $\mathcal{L}^{\mathbf{G}}(K)$ s'il est nécessaire de préciser le groupe ambiant) l'ensemble des sous-groupes de Levi $\mathbf{L}$ de sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}$ tels que $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}} \subset K$. Nous noterons $\mathcal{L}_{\min}(K)$ (ou $\mathcal{L}^{\mathbf{G}}_{\min}(K)$) l'ensemble des éléments minimaux (pour l'inclusion) de $\mathcal{L}(K)$. Le lemme suivant résulte facilement des définitions et de la proposition 2.4 (voir aussi [Bon1, lemme 1.5]).

Lemme 2.16

(a) *Un élément de $\mathcal{L}_{\min}(K)$ est cuspidal.*
(b) *Deux éléments de $\mathcal{L}_{\min}(K)$ sont $\mathbf{G}$-conjugués.*
(c) *Si $\mathbf{L}$ est cuspidal, alors $\mathbf{L} \in \mathcal{L}_{\min}(\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}})$.*

Démonstration (a) Soit $\mathbf{L} \in \mathcal{L}_{\min}(K)$ et soit $\mathbf{M}$ un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{L}$ tel que $\operatorname{Ker} h^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}} = \{1\}$. Alors par transitivité, $\operatorname{Ker} h^{\mathbf{G}}_{\mathbf{M}} = \operatorname{Ker} h^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}} \subset K$. Donc $\mathbf{M} \in \mathcal{L}(K)$ et donc $\mathbf{M} = \mathbf{L}$ par minimalité de $\mathbf{L}$.

(b) Soient I et J deux parties de Δ telles que $\mathbf{L}_I$ et $\mathbf{L}_J$ appartiennent à $\mathcal{L}_{\min}(K)$. Alors, d'après la proposition 2.4, on a $\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_{I\cap J}} = (\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_I}) \cdot (\operatorname{Ker} h_{\mathbf{L}_J}) \subset K$. Donc, par minimalité de $\mathbf{L}_I$ et $\mathbf{L}_J$, on a $I = I \cap J$ et $J = I \cap J$. Donc $I = J$.

(c) est évident. ■

Grâce à la proposition 2.11, déterminer les éléments de $\mathcal{L}_{\min}(K)$ se ramène au cas où $\mathbf{G}$ est semi-simple simplement connexe et quasi-simple. Une classification complète dans ce cas est donnée par la table 2.17.

Supposons donc jusqu'à la fin de cette sous-section que $\mathbf{G}$ est semi-simple, simplement connexe et quasi-simple. Puisque $\mathcal{L}_{\min}\big(\mathcal{Z}(\mathbf{G})\big)$ est la classe de conjugaison des tores maximaux, nous n'avons pas inclus ce cas dans cette table. En particulier, si $\mathcal{Z}(\mathbf{G}) = 1$, alors le groupe $\mathbf{G}$ n'apparaît pas dans la table. Ce cas a lieu si et seulement si on est $\mathbf{G}$ est de type E_8, F_4 ou G_2, ou $\mathbf{G}$ est de type B, C ou D et $p = 2$, ou $\mathbf{G}$ est de type E_6 et $p = 3$, ou $\mathbf{G}$ est de type E_7 et $p = 2$ ou $\mathbf{G}$ est de type A_r et $r + 1$ est une puissance de p.

Cette table se lit de la façon suivante. Dans la première colonne est donné le type de $\mathbf{G}$. Dans la deuxième est donné le groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ (μ_n désigne le groupe des racines n-ièmes de l'unité de $\mathbb{F}^{\times}$, même lorsque n n'est pas premier à p). Dans la troisième colonne est donnée la liste de tous les cas possibles pour le groupe K. À chaque cas est associé dans la quatrième colonne le type de $\mathbf{L}$, dans la cinquième colonne le groupe $\mathcal{Z}(\mathbf{L})$ et dans la dernière, le diagramme du couple $(\mathbf{G}, \mathbf{L})$ dans lequel $\mathbf{L}$ est représenté par les sommets noirs.

Nous devons cependant donner quelques explications supplémentaires pour le cas du type D_{2r}. Dans ce cas, si $1 \leqslant i \leqslant 2r$, nous notons $\varpi_i^\vee$ l'élément $\varpi_{\alpha_i}^\vee$ défini dans la section 2 (ici, les racines sont numérotées comme dans [Bou, chapitre VI, Planche IV]).

2.E Conséquence de la classification

Pour montrer le résultat suivant, il suffit de se ramener au cas où $\mathbf{G}$ est semi-simple, simplement connexe et quasi-simple grâce à la proposition 2.12 et d'utiliser la table 2.17.

Proposition 2.18 *Si $\mathbf{G}$ est cuspidal, alors toutes les composantes irréductibles de Φ sont de type A.*

3 Quasi-cuspidalité

3.A Définition

Fixons un élément unipotent régulier u de $\mathbf{G}$ appartenant à $\mathbf{U}$ et posons $u_I = \pi_I(u)$ pour toute partie I de Δ. Remarquons que $u_\varnothing = 1$ et $u_\Delta = u$. Alors u_I est un élément unipotent régulier de $\mathbf{L}_I$ et, d'après [Lu, corollaire 7.3 (d)], π_I induit un morphisme naturel $H_{\mathbf{L}_I}^{\mathbf{G}} \colon A_{\mathbf{G}}(u) \to A_{\mathbf{L}_I}(u_I)$ qui est surjectif (le fait que π_I induise ce morphisme découle de ce que $C_{\mathbf{G}}(u) \subset \mathbf{P}_I$). S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le groupe ambiant, nous noterons $H_{\mathbf{L}_I}$ le morphisme $H_{\mathbf{L}_I}^{\mathbf{G}}$.

Le groupe $\mathbf{G}$ est dit *quasi-cuspidal* si $\operatorname{Ker} H_{\mathbf{L}_I} \neq \{1\}$ pour toute partie propre I de Δ. La proposition suivante rappelle les propriétés classiques du centralisateur d'un élément unipotent régulier (voir par exemple [SpSt]), ce qui permet de faire le lien entre les notions de groupe cuspidal et de groupe quasi-cuspidal.

Proposition 3.1

(a) *$C_{\mathbf{G}}(u) = \mathbf{Z}(\mathbf{G}) \times C_{\mathbf{U}}(u)$ et $C_{\mathbf{G}}(u)$ est abélien.*
(b) *$A_{\mathbf{G}}(u) = \mathcal{Z}(\mathbf{G}) \times A_{\mathbf{U}}(u)$ et $A_{\mathbf{G}}(u)$ est abélien.*
(c) *Si p est bon pour $\mathbf{G}$, alors $C_{\mathbf{U}}(u)$ est connexe, et donc $A_{\mathbf{G}}(u) = \mathcal{Z}(\mathbf{G})$. En particulier, le morphisme $H_{\mathbf{L}_I}$ coïncide avec le morphisme $h_{\mathbf{L}_I}$.*
(d) *Si p est mauvais pour $\mathbf{G}$ et si $\mathbf{G}$ est quasi-simple, alors $A_{\mathbf{U}}(u)$ est cyclique engendré par l'image de u. De plus, $|A_{\mathbf{U}}(u)| = p$ sauf si $p = 2$ et $\mathbf{G}$ est de type E_7 ou E_8, auquel cas $|A_{\mathbf{U}}(u)| = p^2 = 4$.*

Corollaire 3.2 *Si $\mathbf{G}$ est cuspidal, alors il est quasi-cuspidal. Si p est bon pour $\mathbf{G}$, alors $\mathbf{G}$ est quasi-cuspidal si et seulement si il est cuspidal.*

Exemple 3.3 Si $p = 2$, le groupe $\mathbf{Sp}_4(\mathbb{F})$ est quasi-cuspidal mais n'est pas cuspidal (voir l'exemple 2.15(3) et la proposition 3.1(d)). ■

Proposition 3.4 *Si $\mathbf{G}$ est quasi-simple et si p est mauvais pour $\mathbf{G}$, alors $A_{\mathbf{G}}(u)$ est cyclique.*

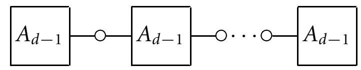
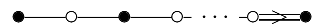
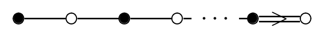
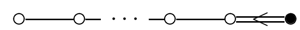
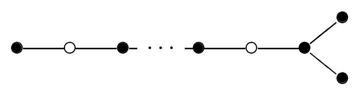
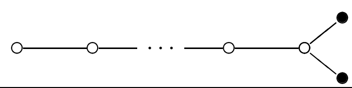
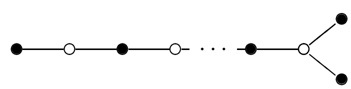
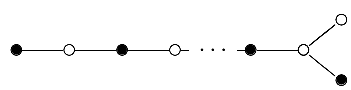
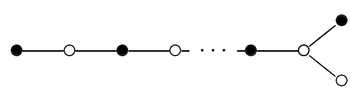
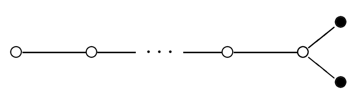
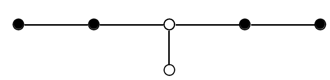
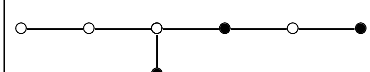
Type de $\mathbf{G}$	$\mathcal{Z}(\mathbf{G})$	K	Type de $\mathbf{L} \in \mathcal{L}_{\min}(K)$	$\mathcal{Z}(\mathbf{L})$	Diagramme de $(\mathbf{G}, \mathbf{L})$
A_r	μ_{r+1}	$\mu_{r+1/d}$ où $d \mid r+1$ et $p \nmid d$	$\underbrace{A_{d-1} \times \cdots \times A_{d-1}}_{\frac{r+1}{d} \text{ fois}}$	μ_d	
B_{2r+1} $p \neq 2$	μ_2	1	$\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{r+1 \text{ fois}}$	μ_2	
B_{2r} $p \neq 2$	μ_2	1	$\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{r \text{ fois}}$	μ_2	
C_r $p \neq 2$	μ_2	1	A_1 (grande racine)	μ_2	
D_{2r+1} $p \neq 2$	μ_4	1	$\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{r-1 \text{ fois}} \times A_3$	μ_4	
		μ_2	$A_1 \times A_1$	μ_2	
D_{2r} $p \neq 2$	$\mu_2 \times \mu_2$	1	$\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{r+1 \text{ fois}}$	$\mu_2 \times \mu_2$	
		$\langle \tilde{\iota}_{\mathbf{T}}(\varpi_{2r-1}^{\vee}) \rangle$	$\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{r \text{ fois}}$	μ_2	
		$\langle \tilde{\iota}_{\mathbf{T}}(\varpi_{2r}^{\vee}) \rangle$	$\underbrace{A_1 \times \cdots \times A_1}_{r \text{ fois}}$	μ_2	
		$\langle \tilde{\iota}_{\mathbf{T}}(\varpi_{1}^{\vee}) \rangle$	$A_1 \times A_1$	μ_2	
E_6 $p \neq 3$	μ_3	1	$A_2 \times A_2$	μ_3	
E_7 $p \neq 2$	μ_2	1	$A_1 \times A_1 \times A_1$	μ_2	

Table 2.17

https://doi.org/10.4153/CJM-2004-012-0 Published online by Cambridge University Press

Démonstration En effet, $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ est un p'-groupe et $A_{\mathbf{U}}(u)$ est cyclique (voir la proposition 3.1(d)). Il suffit donc de montrer que $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ est cyclique. Cela se fait en regardant la classification des systèmes de racines. Le seul cas où le groupe $\big(X(\mathbf{T})/\langle\Phi\rangle\big)_{\mathrm{tors}}$ n'est pas cyclique se produit en type D_{2r} : ce groupe est alors isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Mais, puisque p est supposé mauvais (c'est-à-dire égal à 2 dans ce cas), on a alors $\big(X(\mathbf{T})/\langle\Phi\rangle\big)_{p'} = 1$. ■

3.B Morphismes isotypiques

Soit $\pi\colon \hat{\mathbf{G}} \to \mathbf{G}$ un morphisme isotypique. Soit $\hat{u}$ l'unique élément unipotent de $\hat{\mathbf{G}}$ tel que $\pi(\hat{u}) = u$ et, si I est une partie de Δ, soit $\hat{u}_I$ l'unique élément unipotent de $\hat{\mathbf{L}}_I = \pi^{-1}(\mathbf{L}_I)$ tel que $\pi(\hat{u}_I) = u_I$. Alors le diagramme
(3.5)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \operatorname{Ker} H_{\hat{\mathbf{L}}_I}^{\hat{\mathbf{G}}} \arrow[r] \arrow[d, "\pi_H"'] & A_{\hat{\mathbf{G}}}(\hat{u}) \arrow[r, "H_{\hat{\mathbf{L}}_I}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A_{\hat{\mathbf{L}}_I}(\hat{u}_I) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_2"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \operatorname{Ker} H_{\mathbf{L}_I} \arrow[r] & A_{\mathbf{G}}(u) \arrow[r, "H_{\mathbf{L}_I}"] & A_{\mathbf{L}_I}(\hat{u}_I) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

est commutatif et les lignes de ce diagramme sont des suites exactes (les applications π_H, π_1 et π_2 sont induites par π). En effet, cela résulte de la commutativité du diagramme 2.10 et du fait que π induit un isomorphisme de groupes $A_{\hat{\mathbf{U}}}(\hat{u}) \simeq A_{\mathbf{U}}(u)$. Ce même fait combiné avec la proposition 2.11 montre la proposition suivante.

Proposition 3.6 *Les applications π_H, π_1 et π_2 sont surjectives.*

Corollaire 3.7 *Si $\pi\colon \hat{\mathbf{G}} \to \mathbf{G}$ est un morphisme isotypique et si $\mathbf{G}$ est quasi-cuspidal, alors $\hat{\mathbf{G}}$ est quasi-cuspidal.*

3.C Quasi-cuspidalité et systèmes locaux cuspidaux

Les notions de groupes quasi-cuspidaux et de paires cuspidales sont reliées par la proposition suivante et ses corollaires.

Proposition 3.8 *Soit u un élément unipotent régulier de $\mathbf{G}$ et soit ξ un caractère irréductible de $A_{\mathbf{G}}(u)$. La paire (u,ξ) est cuspidale (au sens de [Lu, introduction]) si et seulement si* $\operatorname{Ker} H_{\mathbf{L}_I} \not\subset \operatorname{Ker} \xi$ *pour toute partie propre I de Δ.*

Remarque 3.9 Le groupe $A_{\mathbf{G}}(u)$ est abélien donc tous ses caractères irréductibles sont linéaires. ■

Démonstration Nous rappelons ici une preuve de ce résultat bien connu. Soit I une partie de Δ et soit v un élément unipotent de $\mathbf{L}_I$. Posons

$$\mathbf{Y}_{u,v} = \{gC^{\circ}_{\mathbf{L}_I}(v)\mathbf{V}_I \in \mathbf{G}/C^{\circ}_{\mathbf{L}_I}(v)\mathbf{V}_I \mid g^{-1}ug \in v\mathbf{V}_I\},$$

et soit $S_{u,v}$ l'ensemble de ses composantes irréductibles de dimension égale à $\dim C_{\mathbf{G}}(u) - \dim C_{\mathbf{L}_I}(v)/2$ (cet ensemble peut être vide). Le groupe $A_{\mathbf{G}}(u)$ agit sur $S_{u,v}$ et nous noterons $\varepsilon_{u,v}$ la caractère de permutation de $A_{\mathbf{G}}(u)$ associé à cet ensemble. Par définition [Lu, Introduction], la paire (u, ξ) est cuspidale si et seulement si $\langle \xi, \varepsilon_{u,v}\rangle_{A_{\mathbf{G}}(u)} \neq 0$ pour toute paire (I, v) comme précédemment et telle que $I \neq \Delta$.

Mais, puisque u est régulier, $\mathbf{Y}_{u,v}$ est non vide si et seulement si v est lui aussi un élément unipotent régulier de $\mathbf{L}_I$. Dans ce cas, on peut supposer que $v = u_I$. On a alors $\mathbf{Y}_{u,u_I} = A_{\mathbf{L}_I}(u_I)$: en effet, tout élément $g \in \mathbf{G}$ tel que $g^{-1}ug \in \mathbf{B}$ doit appartenir à $\mathbf{B}$ car $\mathbf{B}$ est l'unique sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$ contenant u. Donc ε_{u,u_I} est le caractère du $\bar{\mathbb{Q}}_\ell A_{\mathbf{G}}(u)$-module $\bar{\mathbb{Q}}_\ell A_{\mathbf{L}_I}(u_I)$, où $A_{\mathbf{G}}(u)$ agit par translation à gauche via $H_{\mathbf{L}_I}$. La preuve de la proposition est complète. ■

Corollaire 3.10 *Si ξ est un caractère irréductible de $A_{\mathbf{G}}(u)$ tel que la paire (u, ξ) est cuspidale, alors $\mathbf{G}$ est quasi-cuspidal.*

Démonstration Claire. ■

Corollaire 3.11 *Si $\mathbf{G}$ est quasi-simple et quasi-cuspidal et si p est mauvais pour $\mathbf{G}$, alors il existe un caractère linéaire ξ de $A_{\mathbf{G}}(u)$ tel que (u, ξ) soit une paire cuspidale.*

Démonstration D'après la proposition 3.4, le groupe $A_{\mathbf{G}}(u)$ est cyclique. Soit alors ξ un caractère linéaire fidèle de $A_{\mathbf{G}}(u)$. Puisque le groupe $\mathbf{G}$ est quasi-cuspidal, il résulte de la proposition 3.8 que la paire (u, ξ) est cuspidale. ■

Corollaire 3.12 *Si $\mathbf{G}$ est quasi-cuspidal, alors $\mathbf{G}$ est universellement auto-opposé.*

Démonstration Si p est bon pour $\mathbf{G}$, cela résulte de la remarque 2.14 et de la proposition 3.1(c).

Supposons donc que p est mauvais pour $\mathbf{G}$. Soit $\pi\colon \hat{\mathbf{G}} \to \mathbf{G}$ un morphisme isotypique et soit $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ un groupe réductif connexe tel que $\hat{\mathbf{G}}$ soit un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de $\hat{\mathbf{\Gamma}}$. Alors $\hat{\mathbf{G}}$ est quasi-cuspidal d'après le corollaire 3.7. D'autre part, p est aussi mauvais pour $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ et, toujours d'après le corollaire 3.7, on peut supposer que $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ est semi-simple, simplement connexe et quasi-simple. Alors $A_{\hat{\mathbf{\Gamma}}}(\hat{u}')$ est cyclique d'après la proposition 3.4 (ici, $\hat{u}'$ est un élément unipotent régulier de $\hat{\mathbf{\Gamma}}$). Le morphisme $H^{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_{\hat{\mathbf{G}}}$ étant surjectif, on en déduit que $A_{\hat{\mathbf{G}}}(\hat{u})$ est cyclique (ici, $\hat{u}$ est un élément unipotent régulier de $\hat{\mathbf{G}}$). Par suite, si ξ est un caractère linéaire fidèle de $A_{\hat{\mathbf{G}}}(\hat{u})$, on déduit de la quasi-cuspidalité de $\hat{\mathbf{G}}$ et de la proposition 3.8 que la paire $(\hat{u}, \xi)$ est cuspidale. Le résultat découle alors de l'exemple 1.5. ■

Lorsque p est bon pour $\mathbf{G}$, la preuve de la deuxième assertion du corollaire suivant est donnée dans [Bon1, proposition 1.4].

Corollaire 3.13 *Soit I une partie de Δ telle que $\mathbf{L}_I$ est quasi-cuspidal. Alors $A_{\mathbf{L}_I}(u_I) = A_{\mathbf{G}}(u_I)$.*

Démonstration Supposons donc $\mathbf{L}_I$ quasi-cuspidal. Il est à noter que le morphisme naturel $A_{\mathbf{L}_I}(u_I) \longrightarrow A_{\mathbf{G}}(u_I)$ est injectif. Il suffit donc de montrer que ce morphisme est surjectif. Pour cela, on peut supposer que est $\mathbf{G}$ semi-simple simplement connexe et quasi-simple.

Le cas où p est bon étant traité dans [Bon1, proposition 1.4], supposons ici que p est mauvais pour $\mathbf{G}$. Alors, d'après la proposition 3.4, le groupe $A_{\mathbf{G}}(u)$ est cyclique, donc le groupe $A_{\mathbf{L}_I}(u_I)$ l'est aussi (par la surjectivité de $H_{\mathbf{L}_I}$). Par suite, d'après la proposition 3.8, si ξ est un caractère linéaire fidèle de $A_{\mathbf{L}_I}(u_I)$, alors la paire (u_I, ξ) est cuspidale (car $\mathbf{L}_I$ est quasi-cuspidal). Le résultat découle alors de [Bon1, corollaire de la proposition 1.1]. ■

3.D Classification

Nous allons ici classifier les paires $(\mathbf{G}, \mathbf{L})$ où $\mathbf{G}$ est un groupe semi-simple, simplement connexe et quasi-simple, et $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi quasi-cuspidal d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$. Si p est bon pour $\mathbf{G}$, le groupe $\mathbf{L}$ est quasi-cuspidal si et seulement si il est cuspidal : on peut alors se référer à la table 2.17. Nous allons donc supposer que p est mauvais pour $\mathbf{G}$ jusqu'à la fin de cette sous-section. Le résultat est donné dans la table 3.14.

Cette table se lit comme suit. Dans la première colonne est donné le type de $\mathbf{G}$ (semi-simple simplement connexe et quasi-simple). Dans la deuxième est donnée la liste des mauvais nombres premiers pour $\mathbf{G}$. Pour chacun de ces mauvais nombres premiers, la troisième colonne décrit le groupe $A_{\mathbf{G}}(u)$. Ce dernier est noté de la façon suivante : $\mu_n \times Z_{p^\nu}$ signifie que $\mathcal{Z}(\mathbf{G})$ est isomorphe à μ_n (en particulier n est premier à p) et que $A_{\mathbf{U}}(u)$ est isomorphe au groupe cyclique Z_{p^ν} d'ordre p^ν (où ν est un entier naturel non nul). Dans la quatrième colonne on trouve, pour chaque mauvais nombre premier p, la liste des types possibles de sous-groupes de Levi quasi-cuspidaux $\mathbf{L}_I$. La cinquième colonne contient le groupe fini $A_{\mathbf{L}_I}(u_I)$, noté en utilisant les mêmes conventions que pour $A_{\mathbf{G}}(u)$. Il est à noter que le diagramme du couple $(\mathbf{G}, \mathbf{L}_I)$ n'est pas donné (alors qu'il l'était dans la table 2.17) car, dans chaque cas, il n'y a qu'une seule possibilité pour la partie I étant donnés les types de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{L}_I$ (sauf dans le cas où $\mathbf{G}$ est de type E_7, $p = 3$ et $\mathbf{L}_I$ est de type $A_1 \times A_1 \times A_1$, auquel cas on retrouve le même diagramme que dans la table 2.17). Tout comme dans la table 2.17, le cas où $I = \varnothing$ n'est pas mentionné.

3.E Conséquences de la classification

Nous revenons au cas général, c'est-à-dire que nous ne supposons plus que p est mauvais pour $\mathbf{G}$. En utilisant les tables 2.17 et 3.14, on retrouve le résultat suivant bien connu :

Proposition 3.15 *Si $\mathbf{G}$ est quasi-simple de type exceptionnel, si $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique propre de $\mathbf{G}$ et si v est un élément unipotent de $\mathbf{L}$*

Type de $\mathbf{G}$	p	$\mathcal{Z}(\mathbf{G}) \times A_{\mathbf{U}}(u)$	Type de $\mathbf{L}_I$	$\mathcal{Z}(\mathbf{L}_I) \times A_{\mathbf{U}_I}(u_I)$
$B_n, n \geqslant 2$	2	$\mu_1 \times Z_2$	B_2	$\mu_1 \times Z_2$
$C_n, n \geqslant 2$	2	$\mu_1 \times Z_2$	C_2	$\mu_1 \times Z_2$
$D_n, n \geqslant 4$	2	$\mu_1 \times Z_2$	D_4	$\mu_1 \times Z_2$
E_6	2	$\mu_3 \times Z_2$	E_6	$\mu_3 \times Z_2$
			$A_2 \times A_2$	$\mu_3 \times Z_1$
			D_4	$\mu_1 \times Z_2$
	3	$\mu_1 \times Z_3$	E_6	$\mu_1 \times Z_3$
E_7	2	$\mu_1 \times Z_4$	E_7	$\mu_1 \times Z_4$
			D_4	$\mu_1 \times Z_2$
	3	$\mu_2 \times Z_3$	E_7	$\mu_2 \times Z_3$
			E_6	$\mu_1 \times Z_3$
			$A_1 \times A_1 \times A_1$	$\mu_2 \times Z_1$
E_8	2	$\mu_1 \times Z_4$	E_7	$\mu_1 \times Z_4$
			D_4	$\mu_1 \times Z_2$
	3	$\mu_1 \times Z_3$	E_6	$\mu_1 \times Z_3$
	5	$\mu_1 \times Z_5$	E_8	$\mu_1 \times Z_5$
F_4	2	$\mu_1 \times Z_2$	B_2	$\mu_1 \times Z_2$
	3	$\mu_1 \times Z_3$	F_4	$\mu_1 \times Z_3$
G_2	2	$\mu_1 \times Z_2$	G_2	$\mu_1 \times Z_2$
	3	$\mu_1 \times Z_3$	G_2	$\mu_1 \times Z_3$

Table 3.14

dont la classe supporte un système local cuspidal, alors v est régulier dans $\mathbf{L}$.

Démonstration Dans [Lu, section 15], le nombre de systèmes locaux cuspidaux des sous-groupes de Levi propres des groupes exceptionnels est donné. Grâce aux tables 2.17 et 3.14 et grâce à la proposition 3.8, on remarque que ce nombre est égal au nombre de systèmes locaux cuspidaux des sous-groupes de Levi propres des groupes exceptionnels supportés par la classe unipotente régulière. Cela montre la proposition 3.15. ■

La proposition suivante se montre facilement en se ramenant au cas où $\mathbf{G}$ est semi-simple simplement connexe et en utilisant les tables 2.17 et 3.14.

Proposition 3.16 *Si* $\mathbf{G}$ *est quasi-simple et si* $K \subset A_{\mathbf{G}}(u)$*, alors il existe une partie* I *de* Δ *telle que* $\operatorname{Ker} H_{\mathbf{L}_I} = K$.

Nous terminons en donnant la liste des groupes semi-simples simplement connexes quasi-simples et quasi-cuspidaux en mauvaise caractéristique.

Proposition 3.17 *Supposons que* p *est mauvais pour* $\mathbf{G}$ *et que* $\mathbf{G}$ *est semi-simple, simplement connexe et quasi-simple. Alors* $\mathbf{G}$ *est quasi-cuspidal si et seulement si on est dans un des cas suivants :*

(1) $p = 2$ *et* $\mathbf{G}$ *est de type* $B_2 = C_2$, D_4, E_6, E_7 *ou* G_2 *;*
(2) $p = 3$ *et* $\mathbf{G}$ *est de type* E_6, E_7, F_4 *ou* G_2 *;*
(3) $p = 5$ *et* $\mathbf{G}$ *est de type* E_8.

4 Groupe de Weyl de $C_{\mathbf{G}}(u_I)$

4.A Premières propriétés

Soit I une partie de Δ. Posons
$$e_I = \sum_{\alpha \in I} e_\alpha.$$
Alors e_I est un élément nilpotent régulier de $\mathfrak{l}_I$. Dans la suite de cette section 4, on notera x_I l'un des éléments $e_I \in \mathfrak{g}$ ou $u_I \in \mathbf{G}$.

Puisqu'il n'y a qu'une seule classe de conjugaison d'éléments nilpotents (respectivement unipotents) réguliers dans $\mathfrak{l}_I$ (respectivement $\mathbf{L}_I$), l'application naturelle
$$N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I)/C_{\mathbf{L}_I}(x_I) \longrightarrow N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I)/\mathbf{L}_I \simeq W(I)$$
est un isomorphisme de groupes. Posons
$$W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I) = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I)/C^\circ_{\mathbf{L}_I}(x_I)$$
et
$$W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I) = \big(N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I) \cap C^\circ_{\mathbf{G}}(x_I)\big) \big/ C^\circ_{\mathbf{L}_I}(x_I).$$
Alors $W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I)$ est un sous-groupe distingué de $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I)$. D'autre part, $A_{\mathbf{L}_I}(x_I)$ est aussi un sous-groupe distingué de $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I)$, dont l'intersection avec $W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I)$ est triviale. Par suite, $W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I) \times A_{\mathbf{L}_I}(x_I)$ est un sous-groupe distingué de $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I)$. Remarquons que $W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I) = N_{C^\circ_{\mathbf{G}}(x_I)}\big(\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ\big) \big/ C_{C^\circ_{\mathbf{G}}(x_I)}\big(\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ\big)$ est le groupe de Weyl de $C^\circ_{\mathbf{G}}(x_I)$ relatif au tore maximal $\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ$. En particulier, c'est un groupe de réflexions pour son action sur $X\big(\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ\big)$.

Lemme 4.1 $C^\circ_{\mathbf{U}_I}(x_I)$ *est contenu dans le radical unipotent de* $C_{\mathbf{G}}(x_I)$.

Démonstration D'après [Bor, 13.17, corollaire 1], on a
$$\mathbf{R}_u\Big(C_{C_{\mathbf{G}}(x_I)}\big(\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ\big)\Big) = C_{\mathbf{R}_u(C_{\mathbf{G}}(x_I))}\big(\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ\big) \subset \mathbf{R}_u\big(C_{\mathbf{G}}(x_I)\big).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2004-012-0 Published online by Cambridge University Press

Or, $C_{C_{\mathbf{G}}(x_I)}\big(\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ\big) = C_{\mathbf{L}_I}(x_I) = \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I) \times C_{\mathbf{U}_I}(x_I)$. Cela complète la preuve du lemme 4.1. ■

Nous fixons maintenant un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}(x_I)$ de $C^\circ_{\mathbf{G}}(x_I)$ contenant $\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ$. D'après le lemme 4.1, il contient donc $C^\circ_{\mathbf{L}_I}(x_I)$. Nous identifierons par la suite $A_{\mathbf{G}}(x_I)$ avec le sous-groupe

$$\{w \in W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I) \mid {}^w\mathbf{B}(x_I) = \mathbf{B}(x_I)\}.$$

de $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I)$. Avec cette identification, $A_{\mathbf{L}_I}(x_I)$ est un sous-groupe distingué de $A_{\mathbf{G}}(x_I)$. Remarquons qu'alors

$$W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I) = A_{\mathbf{G}}(x_I) \ltimes W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I). \tag{4.2}$$

Puisque $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I)/\mathbf{L}_I$ est canoniquement isomorphe à $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I)/A_{\mathbf{L}_I}(x_I)$, on en déduit que

$$N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I)/\mathbf{L}_I \simeq \big(A_{\mathbf{G}}(x_I)/A_{\mathbf{L}_I}(x_I)\big) \ltimes W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I). \tag{4.3}$$

Le lemme suivant découle immédiatement de toutes les observations faites dans cette sous-section.

Lemme 4.4 *Avec ces notations, on a :*

(a) *$W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I)$ est un sous-groupe de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I)/\mathbf{L}_I$ engendré par des réflexions (dans son action sur $X\big(\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ\big)$).*
(b) *$W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I) \times A_{\mathbf{L}_I}(x_I) = W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I)$ si et seulement si $A_{\mathbf{L}_I}(x_I) = A_{\mathbf{G}}(x_I)$.*
(c) *Si $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I)/\mathbf{L}_I$ n'est pas un groupe de réflexions dans son action sur $X\big(\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ\big)$, alors $A_{\mathbf{L}_I}(x_I)$ est un sous-groupe strict de $A_{\mathbf{G}}(x_I)$.*

4.B Sous-groupes de Levi auto-opposés

Soient I et J deux parties de Δ telles que $I \subset J$. *Nous supposerons dans ce paragraphe 4.B et seulement dans ce paragraphe que I est W-auto-opposée.*

Proposition 4.5 *Soit $g \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J) \cap C_{\mathbf{G}}(x_J)$. Alors :*

(a) *$g \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{B}_J)$.*
(b) *Il existe un unique $a_g \in \mathbf{U}_J$ tel que $a_g g \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, \mathbf{B}_J, \mathbf{T}) \subset N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I)$. En particulier, $g \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{P}_I \cap \mathbf{L}_J)$.*
(c) *$\pi_I(a_g)^{-1}a_g g \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I) \cap C_{\mathbf{G}}(x_I)$.*
(d) *L'application $\rho_{I,J,x}\colon N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J) \cap C_{\mathbf{G}}(x_J) \to N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I) \cap C_{\mathbf{G}}(x_I)$, $g \mapsto \pi_I(a_g)^{-1}a_g g$ est un morphisme de groupes.*

(e) *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, x_J) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{I,J,x}"'] & W(J) \arrow[d] \\
N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I) \arrow[r] & W(I)
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Dans ce diagramme, les morphismes horizontaux sont les morphismes naturels vers $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_?)/\mathbf{L}_? \simeq W(?)$ *et le morphisme* $W(J) \to W(I)$ *est juste l'inclusion canonique* $W(J) \hookrightarrow W^J \hookrightarrow W^I = W(I)$.

Démonstration (a) découle du fait qu'un élément unipotent (nilpotent) régulier n'appartient qu'à un seul sous-groupe (une seule sous-algèbre) de Borel.

(b) Tout d'abord, d'après (a), il existe $a_g \in \mathbf{U}_J$ tel que $a_g g \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, \mathbf{B}_J, \mathbf{T})$. L'unicité provient du fait que $N_{\mathbf{B}_J}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$. D'autre part, un élément de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, \mathbf{B}_J, \mathbf{T})$ normalise I (donc $\mathbf{L}_I$) car I est auto-opposée. La dernière assertion résulte de ce que $a_g g \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ stabilise I et J donc normalise $\mathbf{P}_I \cap \mathbf{L}_J$ et du fait que $a_g \in \mathbf{P}_I \cap \mathbf{L}_J$.

(c) Nous allons montrer (c), (d) et (e) lorsque $x = u$: la même preuve vaut pour $x = e$. Puisque $a_g g \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, \mathbf{B}_J, \mathbf{T})$, on a

$$\pi_I({}^{a_g g} u_J) = {}^{a_g g} \pi_I(u_J) = {}^{a_g g} u_I.$$

Mais $\pi_I({}^{a_g g} u_J) = \pi_I({}^{a_g} u_J) = {}^{\pi_I(a_g)} u_I$. Cela montre le (c).

(d) Soient g et h deux éléments de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J) \cap C_{\mathbf{G}}(u_J)$. Nous allons calculer a_{gh}. Remarquons que $a_g g a_h h \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, \mathbf{B}_J, \mathbf{T})$. D'autre part, $a_g g a_h h = a_g g a_h g^{-1} g h$ et $a_g g a_h g^{-1} \in \mathbf{U}_J$ car g normalise $\mathbf{U}_J$ d'après (a). Par suite,

$$a_{gh} = a_g g a_h g^{-1}.$$

On en déduit que

$$\pi_I(a_{gh}) = \pi_I(a_g g a_h g^{-1} a_g^{-1}) \pi_I(a_g) = {}^{a_g g} \pi_I(a_h) \pi_I(a_g).$$

Le fait que $\rho_{I,J,u}$ est un morphisme de groupes découle alors facilement de ce calcul.

(e) est évident. ■

Fixons nous un élément $b \in \mathbf{B}$ et posons $b_J = \pi_J(b)$. Posons aussi $u' = {}^b u$, $e'_\Delta = (\mathrm{ad}\, b)(e_\Delta)$, $u'_J = \pi_J(u') = {}^{b_J} u_J$ et $e'_J = (d\pi_J)(e'_\Delta) = (\mathrm{ad}\, b_J)(e_J)$. Si $x \in \{u, e\}$,

https://doi.org/10.4153/CJM-2004-012-0 Published online by Cambridge University Press

alors le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, x_J) \arrow[r, "\operatorname{int} b_J"] \arrow[d, "\rho_{I,J,x}"'] & N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, x'_J) \arrow[d, "\rho_{I,J,x'}"'] \\
N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I) \arrow[r, "\operatorname{int} b_I"] & N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x'_I)
\end{tikzcd}
\tag{4.6}
$$

est commutatif.

Preuve de la commutativité du diagramme 4.6 Notons a'_h l'unique élément de $\mathbf{U}_J$ tel que $a'_h h \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, \mathbf{B}_J, \mathbf{T})$ (où $h \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, x'_J)$).

Supposons tout d'abord que $b \in \mathbf{T}$. Alors $b_K = b$ pour toute partie K de Δ. Il est alors facile de vérifier que $a'_h = b a_{b^{-1}hb} b^{-1}$ pour tout $h \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, x'_J)$. Un calcul élémentaire permet de conclure.

Supposons maintenant que $b \in \mathbf{U}$. Alors $b_K \in \mathbf{U}_K$ pour toute partie K de Δ. Soit $h \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, x'_J)$. Alors $a_{b_J^{-1}hb_J} b_J^{-1} h b_J = a_{b_J^{-1}hb_J} b_J^{-1} h b_J h^{-1} h \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$. Or, $a_{b_J^{-1}hb_J} b_J^{-1} h b_J h^{-1} \in \mathbf{U}_J$ car h normalise $\mathbf{B}_J$ donc il normalise $\mathbf{U}_J$. Cela montre que

$$a'_h = a_{b_J^{-1}hb_J} b_J^{-1} h b_J h^{-1}.$$

Calculons maintenant $\pi_I(a'_h)$. On a

$$
\begin{aligned}
\pi_I(a'_h) &= \pi_I(a_{b_J^{-1}hb_J}) b_I^{-1} \pi_I(a'^{-1}_h \, {}^{a'_h h} b_J a'_h) \\
&= \pi_I(a_{b_J^{-1}hb_J}) b_I^{-1} \pi_I(a'_h)^{-1} \, {}^{a'_h h} b_I \pi_I(a'_h).
\end{aligned}
$$

On en déduit que

$$\pi_I(a'_h)^{-1} = b_I \pi_I(a_{b_J^{-1}hb_J})^{-1} \, {}^{a'_h h} b_I^{-1}.$$

Par conséquent,

$$\pi_I(a'_h)^{-1} a'_h h = b_I \big(\pi_I(a_{b_J^{-1}hb_J})^{-1} \, a'_h h \big) \, b_I^{-1}.$$

Or, $a'_h h = a_{b_J^{-1}hb_J} b_J h b_J^{-1}$. Cela montre le résultat dans le cas où $b \in \mathbf{U}$.

Le cas général (c'est-à-dire $b \in \mathbf{B}$) se déduit des deux précédents en décomposant $b = ty$ avec $t \in \mathbf{T}$ et $y \in \mathbf{U}$. ■

Notons ρ_x le morphisme composé $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, x_J) \stackrel{\rho_{I,J,x}}{\to} N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I) \to W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I)$. Soit $g \in C^\circ_{\mathbf{L}}(\mathbf{L}_J, x_J) = \mathbf{Z}(\mathbf{L}_J)^\circ \times C^\circ_{\mathbf{U}_J}(x_J)$. Écrivons $g = zy$ avec $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}_J)^\circ$ et $y \in C^\circ_{\mathbf{U}_J}(x_J)$. Alors $a_g = y^{-1}$ et donc $\rho_{I,J,x}(g) = \pi_I(y) z$. Or $\pi_I(y) \in C^\circ_{\mathbf{U}_I}(x_I)$ et $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}_J)^\circ \subset$

$\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ$. Donc $\rho_x(g) = 1$. Cela montre que le morphisme ρ_x peut se factoriser en un morphisme

$$\bar{\rho}_{I,J,x} \colon W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, x_J) \to W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I).$$

Il résulte de la commutativité du diagramme 4.6 que le diagramme

$$\begin{tikzcd} W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, x_J) \arrow[r, "\operatorname{int} b_J"] \arrow[d, "\bar{\rho}_{I,J,x}"'] & W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, x'_J) \arrow[d, "\bar{\rho}_{I,J,x'}"'] \\ W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x_I) \arrow[r, "\operatorname{int} b_I"] & W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, x'_I) \end{tikzcd} \tag{4.7}$$

est commutatif. Nous terminons par un résultat élémentaire sur le morphisme $\bar{\rho}_{I,J,u}$.

Lemme 4.8 Ker $\bar{\rho}_{I,J,u} =$ Ker $H_{\mathbf{L}_I}^{\mathbf{L}_J}$.

Démonstration Il suffit de déterminer le noyau du morphisme ρ_u défini ci-dessus. Soit donc $g \in$ Ker ρ_u. Alors $\pi_I(a_g)^{-1} a_g g \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ \times C^\circ_{\mathbf{U}_I}(u_I)$. Cela montre que $g \in \mathbf{L}_J$ et donc que $g \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}_J) \times C_{\mathbf{U}_J}(u_J)$. Écrivons $g = zy$ avec $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}_J)$ et $y \in C_{\mathbf{U}_J}(u_J)$. Alors $a_g = y^{-1}$ et donc $\rho_{I,J,u}(g) = \pi_I(y)z$. Mais $\rho_u(g) = 1$ donc $\pi_I(y) \in C^\circ_{\mathbf{U}_I}(u_I)$ et $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ$. Cela montre que Ker $\bar{\rho}_{I,J,u} \subset$ Ker $H_{\mathbf{L}_I}^{\mathbf{L}_J}$.

L'inclusion réciproque est immédiate. ■

5 Structure du centralisateur de e_I

5.A Tores e-adaptés

Si e est un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$, on pose

$$\mathcal{N}_{\mathbf{G}}(e) = \{g \in \mathbf{G} \mid (\operatorname{ad} g)(e) \in \mathbb{F}e\}.$$

On notera $\mathcal{N}^\circ_{\mathbf{G}}(e)$ la composante neutre de $\mathcal{N}_{\mathbf{G}}(e)$. Si e est non nul, alors $\mathcal{N}_{\mathbf{G}}(e)/C_{\mathbf{G}}(e)$ est un tore de dimension 1 (*cf.* [SpSt, corollaire I.5.7]).

Supposons jusqu'à la fin de cette section que e est non nul. Un sous-tore $\mathbf{S}$ de dimension 1 de $\mathcal{N}_{\mathbf{G}}(e)$ est dit *e-adapté* s'il existe un tore maximal $\mathbf{S}'$ de $C_{\mathbf{G}}(e)$ tel que $\mathbf{S}$ est inclus dans le groupe dérivé du centralisateur de $\mathbf{S}'$ dans $\mathbf{G}$. Si tel est le cas, alors $\mathbf{S} \cap \mathbf{S}'$ est un groupe fini et donc $\mathbf{S} \cdot C_{\mathbf{G}}(e) = \mathcal{N}_{\mathbf{G}}(e)$ (et $\mathbf{S} \cdot C^\circ_{\mathbf{G}}(e) = \mathcal{N}^\circ_{\mathbf{G}}(e)$).

Proposition 5.1 *Deux tores e-adaptés sont conjugués sous $C^\circ_{\mathbf{G}}(e)$.*

Démonstration Voir par exemple [Bon6, proposition 1.3]. ■

Un sous-groupe à un paramètre $\lambda \in Y(\mathbf{G})$ est dit *e-adapté* si $\operatorname{Im}\lambda$ est un tore e-adapté et si

$$\big(\operatorname{ad}\lambda(t)\big)(e) = t^2 e$$

pour tout $t \in \mathbb{F}^\times$. Il résulte de la proposition 5.1 que deux sous-groupes à un paramètre e-adaptés sont conjugués sous $C^\circ_{\mathbf{G}}(e)$.

Remarque 5.2 L'existence d'un sous-groupe à un paramètre e-adapté est assurée pour p assez grand par des arguments généraux (*cf.* par exemple [SpSt, section III.4]), et elle résulte des travaux de Pommerenning [Po1] et [Po2] pour le cas où p est bon. Cependant, les travaux de Pommerenning dépendent de la classification des groupes réductifs. Premet [Pr] a récemment retrouvé les résultats de Pommerenning par des méthodes n'utilisant pas la classification des groupes réductifs. ■

Remarque Se donner un sous-groupe à un paramètre e-adapté est équivalent à associer à e un diagramme de Dynkin-Richardson. ■

5.B Éléments unipotents réguliers de sous-groupes de Levi

Soit I une partie de Δ. Nous nous proposons ici de démontrer l'existence d'un sous-groupe à un paramètre e_I-adapté sans utiliser la classification des groupes réductifs. Lorsque p est bon, c'est un cas particulier des résultats de Premet [Pr] : cependant, nous proposons ici une preuve différente qui a le mérite de marcher en toutes caractéristiques. Comme nous travaillons dans un cas particulier, nous obtiendrons aussi des résultats plus précis que ceux de Premet sur la structure du centralisateur de e_I.

Le candidat au poste de "sous-groupe à un paramètre e_I-adapté" est le suivant :

$$\rho_I^\vee = \sum_{\alpha\in\Phi_I\cap\Phi^+} \alpha^\vee.$$

Proposition 5.3 *Soit I une partie non vide de Δ. Alors $\rho_I^\vee$ est e_I-adapté.*

Démonstration D'après [Bou, chapitre VI, section 1, proposition 29], on a

$$\forall\alpha \in I,\ \ \langle \alpha, \rho_I^\vee\rangle = 2, \tag{5.4}$$

ce qui montre que $\big(\operatorname{ad}\rho_I^\vee(t)\big)(e_I) = t^2 e_I$ pour tout $t \in \mathbb{F}^\times$. D'autre part, $\operatorname{Im}\rho_I^\vee$ est inclus dans $\mathbf{D}(\mathbf{L}_I)$, $\mathbf{L}_I = C_{\mathbf{G}}\big(\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ\big)$ et $\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ$ est un tore maximal de $C_{\mathbf{G}}(e_I)$. Donc $\rho_I^\vee$ est e_I-adapté. ■

Remarque 5.5 D'après l'égalité 5.4, on a

$$\mathbf{L}(\rho_I^\vee) \cap \mathbf{L}_I = \{1\}.$$ ■

https://doi.org/10.4153/CJM-2004-012-0 Published online by Cambridge University Press

Avant de montrer le prochain théorème sur la structure du centralisateur de e_I dans $\mathbf{G}$, nous aurons besoin de quelques résultats élémentaires concernant le sous-groupe à un paramètre $\rho_I^\vee$. Introduisons d'abord quelques notations. Si λ est un sous-groupe à un paramètre de $\mathbf{T}$, on pose

$$\mathbf{B}_*(\lambda) = \big(\mathbf{B} \cap \mathbf{L}(\lambda)\big) \cdot \mathbf{V}(\lambda),$$
$$\mathbf{U}_*(\lambda) = \mathbf{R}_u\big(\mathbf{B}_*(\lambda)\big)$$

et

$$\Phi_*(\lambda) = \{\alpha \in \Phi \mid \mathbf{U}_\alpha \subset \mathbf{U}_*(\lambda)\}.$$

Notons que $\mathbf{B}_*(\lambda)$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$ (contenant $\mathbf{T}$ et contenu dans $\mathbf{P}(\lambda)$) car $\mathbf{L}(\lambda)$ contient $\mathbf{T}$ et donc $\mathbf{B} \cap \mathbf{L}(\lambda)$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{L}(\lambda)$. On note $\mathbf{B}_*^-(\lambda)$ le sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$ opposé à $\mathbf{B}_*(\lambda)$ par rapport à $\mathbf{T}$ et $\mathbf{U}_*^-(\lambda)$ le radical unipotent de $\mathbf{B}_*^-(\lambda)$.

Lemme 5.6

(a) *Si $\beta_1, \dots, \beta_r \in \Phi_*(\rho_I^\vee)$ et si $\alpha \in I$, alors $\langle n\alpha + \beta_1 + \cdots + \beta_r, \rho_I^\vee \rangle \geqslant 2$ et $n\alpha + \beta_1 + \cdots + \beta_r \notin I$ ($n \in \mathbb{N}^*$).*

(b) *Si $w \in W$ est tel que $\langle w(\alpha), \rho_I^\vee \rangle \geqslant \langle \alpha, \rho_I^\vee \rangle = 2$ et $\langle w^{-1}(\alpha), \rho_I^\vee \rangle \geqslant \langle \alpha, \rho_I^\vee \rangle = 2$ pour tout $\alpha \in I$, alors $w(\rho_I^\vee) = \rho_I^\vee$.*

Démonstration (a) On a $\langle \gamma, \rho_I^\vee \rangle = 2$ pour tout $\gamma \in I$ et $\langle \beta, \rho_I^\vee \rangle \geqslant 0$ pour tout $\beta \in \Phi_*(\rho_I^\vee)$. Cela montre la première assertion. Pour la deuxième, remarquons que si $\langle n\alpha + \beta_1 + \cdots + \beta_r, \rho_I^\vee \rangle = 2$, alors $n = 1$ et $\langle \beta_i, \rho_I^\vee \rangle = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$. Donc $\beta_i \in \Phi^+$, ce qui termine la preuve de (a).

(b) Choisissons un produit scalaire $[\,,\,]$ sur $X(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ qui soit invariant par W et identifions $Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ avec $X(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ grâce à ce produit scalaire. L'hypothèse se traduit alors ainsi. Pour tout $\alpha \in I$,

$$[(w-1)(\alpha), \rho_I^\vee] \geqslant 0 \quad \text{et} \quad [(w^{-1}-1)(\alpha), \rho_I^\vee] \geqslant 0.$$

On peut réécrire la deuxième inégalité ainsi :

$$[(w-1)(\alpha), -w(\rho_I^\vee)] \geqslant 0.$$

En sommant la première inégalité avec cette dernière, on obtient que

$$[(w-1)(\alpha), (w-1)(\rho_I^\vee)] \leqslant 0$$

pour tout $\alpha \in I$. Mais $\rho_I^\vee$ est une combinaison linéaire à coefficients réels positifs des α, donc

$$[(w-1)(\rho_I^\vee), (w-1)(\rho_I^\vee)] \leqslant 0.$$

Cela montre bien que $w(\rho_I^\vee) = \rho_I^\vee$. ■

Théorème 5.7 *Soit I une partie de Δ et soit $\lambda \in Y(\mathbf{G})$ un sous-groupe à un paramètre e_I-adapté. Alors :*

(a) $C_{\mathbf{G}}(e_I) \subset \mathbf{P}(\lambda)$.
(b) *Si $\mu \in Y(\mathbf{G})$ est e_I-adapté, alors $\mathbf{P}(\lambda) = \mathbf{P}(\mu)$.*
(c) *$C_{\mathbf{G}}(e_I) = C_{\mathbf{L}(\lambda)}(e_I) \ltimes C_{\mathbf{V}(\lambda)}(e_I)$ et $C^\circ_{\mathbf{V}(\lambda)}(e_I)$ est le radical unipotent de $C_{\mathbf{G}}(e_I)$.*
(d) *$C^\circ_{\mathbf{B}\cap\mathbf{L}(\rho_I^\vee)}(e_I)$ est un sous-groupe de Borel de $C_{\mathbf{L}(\rho_I^\vee)}(e_I)$.*

Remarque Dans l'énoncé (d), on ne peut pas remplacer $\rho_I^\vee$ par n'importe quel sous-groupe à un paramètre e_I-adapté. ■

Démonstration du théorème 5.7 Puisque tous les sous-groupes à un paramètre e_I-adaptés sont conjugués sous $C^\circ_{\mathbf{G}}(e_I)$, on peut supposer (et nous le ferons) que $\lambda = \rho_I^\vee$.

(a) Soit $g \in C_{\mathbf{G}}(e_I)$. Il existe un unique élément $n \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ et des uniques éléments $x \in \mathbf{U}_*(\rho_I^\vee)$ et $y \in \mathbf{U}_*(\rho_I^\vee) \cap {}^n\mathbf{U}_*^-(\rho_I^\vee)$ tels que $g = ynx$. Par suite,

$$(\mathrm{ad}\, nx)(e_I) = (\mathrm{ad}\, y^{-1})(e_I).$$

D'après la proposition 5.6 (a), les coordonnées de $(\mathrm{ad}\, x)(e_I)$ et $(\mathrm{ad}\, y^{-1})(e_I)$ en les e_α ($\alpha \in I$) sont non nulles (pour la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus (\bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{u}_\alpha)$), et ces deux éléments appartiennent à $\bigoplus_{\langle\alpha,\rho_I^\vee\rangle\geqslant 2} \mathfrak{u}_\alpha$. Par conséquent, si on note w l'image de n dans W, cela implique que, pour tout $\alpha \in I$,

$$\langle w(\alpha), \rho_I^\vee\rangle \geqslant \langle \alpha, \rho_I^\vee\rangle = 2.$$

De même, puisque g^{-1} appartient aussi au centralisateur de e_I, on obtient que

$$\langle w^{-1}(\alpha), \rho_I^\vee\rangle \geqslant \langle \alpha, \rho_I^\vee\rangle = 2$$

pour tout $\alpha \in I$. Il résulte alors de la proposition 5.6(b) que $w(\rho_I^\vee) = \rho_I^\vee$. Par suite, $g \in \mathbf{P}(\rho_I^\vee)$. Cela montre (a).

(b) résulte immédiatement de (a) et du fait que tous les sous-groupes à un paramètres e_I-adaptés sont conjugués sous $C^\circ_{\mathbf{G}}(e_I)$.

(c) Soit $g \in C_{\mathbf{G}}(e_I)$. D'après (a), on peut écrire $g = lx$, avec $l \in \mathbf{L}(\rho_I^\vee)$ et $x \in \mathbf{V}(\rho_I^\vee)$. Graduons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de la façon suivante. Si $i \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\mathfrak{g}_i = \left\{ X \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \left(\mathrm{ad}\, \rho_I^\vee(t)\right)(X) = t^i X \right\}.$$

Alors $e_I \in \mathfrak{g}_2$. Or, $(\mathrm{ad}\, x)(e_I) \in e_I + \bigoplus_{i>2} \mathfrak{g}_i$ et $(\mathrm{ad}\, l)(e_I) \in \mathfrak{g}_2$. Par suite, l centralise e_I, et donc x centralise e_I. Cela montre la première assertion de (c).

Montrons la deuxième. Il suffit pour cela de montrer que $C_{\mathbf{L}(\rho_I^\vee)}(e_I)$ est un groupe réductif. Pour commencer, $\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ$ est un tore maximal de $C_{\mathbf{G}}(e_I)$ (et donc de $C_{\mathbf{L}(\rho_I^\vee)}(e_I)$). Notons $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, \rho_I^\vee, e_I)$ son normalisateur dans $C_{\mathbf{L}(\rho_I^\vee)}(e_I)$, c'est-à-dire $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, \rho_I^\vee, e_I) = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I) \cap \mathbf{L}(\rho_I^\vee) \cap C_{\mathbf{G}}(e_I)$. Notons $\mathfrak{U}$ le radical unipotent de $C_{\mathbf{L}(\rho_I^\vee)}(e_I)$. Alors

$$N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, \rho_I^\vee, e_I) \cap \mathfrak{U} = \{1\}. \tag{5.8}$$

En effet, $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, \rho_I^\vee, e_I) \cap \mathfrak{U}$ est égal au centralisateur de $\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ$ dans $\mathfrak{U}$, c'est-à-dire à $\mathbf{L}_I \cap \mathfrak{U}$. Mais $\mathbf{L}_I \cap \mathbf{L}(\rho_I^\vee) = \{1\}$, d'où le résultat.

Soit $g \in C_{\mathbf{L}(\rho_I^\vee)}(e_I)$. Comme pour la preuve de (a), écrivons $g = ynx$ avec $n \in N_{\mathbf{L}(\rho_I^\vee)}(\mathbf{T})$, $x \in \mathbf{U}_*(\rho_I^\vee) \cap \mathbf{L}(\rho_I^\vee)$ et $y \in \mathbf{U}_*(\rho_I^\vee) \cap {}^n\mathbf{U}_*^-(\rho_I^\vee) \cap \mathbf{L}(\rho_I^\vee)$. Notons w la classe de n dans W. En reprenant la preuve de (a), on remarque que $w(\alpha) \in \Phi^+$ pour tout $\alpha \in I$ et que $w(\rho_I^\vee) = \rho_I^\vee$. Par suite, $w(I) = I$ et donc $n \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I)$. Mais $(\operatorname{ad} y^{-1})(e_I) = (\operatorname{ad} n) \circ (\operatorname{ad} x)(e_I)$. Or, toujours d'après la proposition 5.6, la coordonnée de $(\operatorname{ad} y^{-1})(e_I)$ (ou $(\operatorname{ad} x)(e_I)$) suivant e_α $(\alpha \in I)$ est égale à 1. Puisque $w(I) = I$, on en déduit que $n \in C_{\mathbf{G}}(e_I)$. Finalement, on a prouvé que $n \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, \rho_I^\vee, e_I)$.

Il en résulte que $\big(\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} - \operatorname{ad}(n^{-1}y^{-1}n)\big)(e_I) = (\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} - \operatorname{ad} x)(e_I)$. Or, $n^{-1}y^{-1}n \in \mathbf{U}_*^-(\rho_I^\vee) \cap \mathbf{L}(\rho_I^\vee) \subset \mathbf{V}_I^-$ et $x \in \mathbf{V}_I$. Donc $(\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} - \operatorname{ad} x)(e_I) \in \mathfrak{v}_I^- \cap \mathfrak{v}_I = \{0\}$ (ici, $\mathfrak{v}_I$ et $\mathfrak{v}_I^-$ désigne les algèbres de Lie de $\mathbf{V}_I$ et $\mathbf{V}_I^-$ respectivement). Donc x et y centralisent e_I. On a donc montré que

$$(5.9) \qquad C_{\mathbf{L}(\rho_I^\vee)}(e_I) = C_{\mathbf{U}\cap\mathbf{L}(\rho_I^\vee)}(e_I) \cdot N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, \rho_I^\vee, e_I) \cdot C_{\mathbf{U}\cap\mathbf{L}(\rho_I^\vee)}(e_I).$$

D'après la décomposition de Bruhat dans $C_{\mathbf{L}(\rho_I^\vee)}(e_I)$ et compte tenu de 5.8, on obtient que $\mathfrak{U}$ est contenu dans $C_{\mathbf{B}\cap\mathbf{L}(\rho_I^\vee)}(e_I)$. Or, on aurait tout aussi bien pu depuis le début travailler avec le sous-groupe de Borel $\mathbf{B}' = \mathbf{B}_I.\mathbf{V}_I^-$ à la place de $\mathbf{B}$. On en aurait alors déduit que $\mathfrak{U}$ est contenu dans $\mathbf{B}' \cap \mathbf{L}(\rho_I^\vee)$. Finalement, $\mathfrak{U}$ est contenu dans $\mathbf{B} \cap \mathbf{B}' \cap \mathbf{L}(\rho_I^\vee) = \mathbf{B}_I \cap \mathbf{L}(\rho_I^\vee) = \{1\}$. Cela termine la preuve de (c).

(d) D'après (c) et 5.9, il résulte de la décomposition de Bruhat dans $C_{\mathbf{L}(\rho_I^\vee)}(e_I)$ que $C^\circ_{\mathbf{B}\cap\mathbf{L}(\rho_I^\vee)}(e_I)$ est un sous-groupe de Borel de $C_{\mathbf{L}(\rho_I^\vee)}(e_I)$. Cela montre (d). Cela montre aussi que 5.9 est une décomposition de Bruhat dans $C_{\mathbf{L}(\rho_I^\vee)}(e_I)$. ∎

Deux sous-groupes à un paramètre e_I-adaptés de $\mathbf{L}_I$ étant conjugués sous $C^\circ_{\mathbf{L}_I}(e_I)$, l'application canonique $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, e_I) \cap \mathbf{L}(\rho_I^\vee) \to W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, e_I)$ est surjective, et son noyau est $\mathbf{L}(\rho_I^\vee) \cap C^\circ_{\mathbf{L}_I}(e_I) = \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ$ (en effet, d'après 5.4, $C_{\mathbf{L}_I}(\rho_I^\vee) = \mathbf{T}$). Par la suite, nous identifierons le groupe $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, e_I)$ avec le groupe $\big(N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I) \cap \mathbf{L}(\rho_I^\vee) \cap C_{\mathbf{G}}(e_I)\big) \big/ \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ$, et nous identifierons les sous-groupes $A_{\mathbf{L}_I}(e_I)$, $A_{\mathbf{G}}(e_I)$ et $W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, e_I)$ avec les sous-groupes correspondants.

5.C Une inclusion de sous-groupes

Fixons maintenant deux parties I et J de Δ telles que $I \subset J$. *Nous supposons d'autre part jusqu'à la fin de cette section que I est W-auto-opposée.*

Soit $g \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J) \cap \mathbf{L}(\rho_J^\vee) \cap C_{\mathbf{G}}(e_J)$. Alors g normalise $C_{\mathbf{L}_J}(\rho_J^\vee) = \mathbf{T}$ et, puisqu'il centralise e_J, il stabilise J. Par conséquent, puisque I est auto-opposée et contenue dans J, on en déduit que g stabilise I. Par suite, il centralise $\rho_I^\vee$ et $\pi_I(e_J) = e_I$. Cela montre que

$$(5.10) \qquad N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J) \cap \mathbf{L}(\rho_J^\vee) \cap C_{\mathbf{G}}(e_J) \subset N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I) \cap \mathbf{L}(\rho_I^\vee) \cap C_{\mathbf{G}}(e_I).$$

Le lemme suivant est certainement vrai dans une bien plus grande généralité, mais nous n'en aurons besoin que dans les cas où il est énoncé.

Lemme 5.11 *Si $\mathbf{L}_I$ et $\mathbf{L}_J$ sont cuspidaux, alors*

$$N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J) \cap \mathbf{L}(\rho_J^\vee) \cap \mathbf{L}^\circ(e_J) \subset N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I) \cap \mathbf{L}(\rho_I^\vee) \cap C^\circ_{\mathbf{G}}(e_I).$$

Démonstration Cette preuve (non satisfaisante) se fait en utilisant la classification des sous-groupes de Levi cuspidaux. Remarquons tout d'abord que l'on peut supposer que $\mathbf{G}$ est semi-simple, simplement connexe, et quasi-simple. D'autre part, d'après le corollaire 3.13 et le lemme 4.4(b), l'application canonique $W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, e_J) \to W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J)$ est un isomorphisme. Puisque $\mathbf{L}_J$ est auto-opposé on peut donc supposer que $\mathbf{P}_J$ est un sous-groupe parabolique maximal de $\mathbf{G}$ (voir proposition 1.3). Dans ce cas $W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, e_J)$ est d'ordre 2. Compte tenu de la classification des sous-groupes de Levi cuspidaux donnée par la table 2.17, on est ramené à l'un des cas suivants :

1. Si $\mathbf{G}$ est de type A, un calcul direct montre le résultat.

2. Si la paire $(\mathbf{G}, \mathbf{L}_J)$ est de type (C_2, A_1) (ici, A_1 correspond à la grande racine), $(B_3, A_1 \times A_1)$, $(D_5, A_3 \times A_1)$ ou $(D_4, A_1 \times A_1 \times A_1)$, alors la plus grande racine α de Φ pour l'ordre défini par Δ vérifie la propriété suivante : $\alpha + \beta$ (respectivement $\alpha - \beta$) n'est pas une racine pour tout $\beta \in J$. Alors $\mathbf{U}_\alpha$ et $\mathbf{U}_{-\alpha}$ sont contenus dans $\mathbf{L}(\rho_J^\vee) \cap C^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{U}_J)$. Notons $\dot{s}_\alpha$ un représentant de s_α dans $\langle \mathbf{U}_\alpha, \mathbf{U}_{-\alpha}\rangle$. Alors $\dot{s}_\alpha \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J) \cap \mathbf{L}(\rho_J^\vee) \cap C^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{U}_J)$. Puisque $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J) \cap \mathbf{L}(\rho_J^\vee) \cap C^\circ_{\mathbf{G}}(e_J)$ est engendré par $\mathbf{Z}(\mathbf{L}_J)^\circ$ (qui est contenu dans $\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^\circ$) et $\dot{s}_\alpha$, et puisque $C_{\mathbf{G}}(\mathbf{U}_J) \subset C_{\mathbf{G}}(e_J) \cap C_{\mathbf{G}}(e_I)$ (car e_I et e_J appartiennent à l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_J$ de $\mathbf{U}_J$), on en déduit le résultat. ■

Corollaire 5.12 *Si $\mathbf{L}_I$ et $\mathbf{L}_J$ sont cuspidaux, alors $\bar{\rho}_{I,J,e}\big(W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, e_J)\big)$ est contenu dans $W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, e_I)$.*

Démonstration Puisque le morphisme naturel

$$N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J) \cap \mathbf{L}(\rho_J^\vee) \cap C^\circ_{\mathbf{G}}(e_J) \to W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, e_J)$$

est un isomorphisme (*cf.* corollaire 3.13 et lemme 4.4(b)), cela résulte immédiatement de la proposition 5.11. ■

6 Centralisateur de u_I en bonne caractéristique

Hypothèse *À partir de maintenant, et ce jusqu'à la fin de cet article, nous supposerons que p est bon pour $\mathbf{G}$.*

6.A Homéomorphisme de Springer

Soit $\mathbf{G}_{\mathrm{uni}}$ (respectivement $\mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}$) l'ensemble des éléments unipotents (respectivement nilpotents) de $\mathbf{G}$ (respectivement $\mathfrak{g}$). Ce sont des sous-variétés fermées de $\mathbf{G}$ et $\mathfrak{g}$ respectivement. D'après [SpSt, théorème 3.12] et puisque p est bon pour $\mathbf{G}$, il existe un homéomorphisme $\mathbf{G}$-équivariant

$$\eta \colon \mathfrak{g}_{\mathrm{nil}} \to \mathbf{G}_{\mathrm{uni}}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2004-012-0 Published online by Cambridge University Press

tel que η soit un morphisme de variétés.

Remarque Il est à noter que η^{-1} n'est pas forcément un morphisme de variétés. Par contre, si $\mathbf{G}$ est semi-simple simplement connexe, alors η est un (iso)morphisme de variétés. ■

Remarquons que $\eta(1) = 0$. La proposition suivante va nous être utile pour calculer certaines images par l'application η.

Proposition 6.1 *Soit v un élément unipotent de $\mathbf{G}$. Alors :*

(a) *$v \in \mathbf{L}$ si et seulement si $\eta(v) \in \mathfrak{l}$.*
(b) *$v \in \mathbf{P}$ si et seulement si $\eta(v) \in \mathfrak{p}$.*
(c) *Si $v \in \mathbf{P}$, alors $\eta\big(\pi_{\mathbf{L}}(v)\big) = (d\pi_{\mathbf{L}})\big(\eta(v)\big)$.*
(d) *$v \in \mathbf{V}$ si et seulement si $\eta(v) \in \mathfrak{v}$.*

Démonstration On peut supposer que $\mathbf{G}$ est semi-simple simplement connexe, auquel cas le lecteur peut se référer à [Bon6, Lemme 3.2]. ■

6.B Une propriété du morphisme $\bar{\rho}_{I,J,u}$

Nous fixons une fois pour toutes un élément $b \in \mathbf{B}$ tel que $\eta(u) = (\operatorname{ad} b)(e)$. Pour tout $I \subset \Delta$, nous poserons $b_I = \pi_I(b)$. Il résulte de la proposition 6.1 que

$$\eta(u_I) = (\operatorname{ad} b_I)(e_I). \tag{6.2}$$

Alors $C_{\mathbf{G}}(u_I) = {}^{b_I}C_{\mathbf{G}}(e_I)$. Le corollaire 5.12 et la commutativité du diagramme 4.7 montrent alors que :

Proposition 6.3 *Si I et J sont deux parties de Δ telles que $I \subset J$ et $\mathbf{L}_I$ et $\mathbf{L}_J$ sont cuspidaux, alors $\bar{\rho}_{I,J,u}\big(W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, u_J)\big)$ est contenu dans $W^\circ_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I, u_I)$.*

7 Corps finis

7.A Notations et hypothèses

Nous supposons dans cette dernière section que $\mathbb{F}$ est une clôture algébrique d'un corps fini. On a alors $p > 0$. On rappelle que p est bon pour $\mathbf{G}$. Si q est une puissance de p, nous noterons $\mathbb{F}_q$ le sous-corps de $\mathbb{F}$ à q éléments. Nous supposons aussi que $\mathbf{G}$ est muni d'un isogénie $F\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ dont une puissance F^δ est un endomorphisme de Frobenius associé à une $\mathbb{F}_q$-structure de $\mathbf{G}$. Nous noterons $\operatorname{Reg}_{\mathrm{uni}}(\mathbf{G}^F)$ l'ensemble des classes de $\mathbf{G}^F$-conjugaison d'éléments unipotents réguliers de $\mathbf{G}^F$. Nous supposerons que $u \in \mathbf{G}^F$. En particulier, si $\mathbf{L}_I$ est F-stable (où $I \subset \Delta$), alors u_I est F-stable. Si $g \in \mathbf{G}^F$, nous noterons $[g]_{\mathbf{G}^F}$ sa classe de conjugaison dans $\mathbf{G}^F$.

Nous supposons aussi que $\mathbf{B}$ et $\mathbf{T}$ sont F-stables. Nous avions fixé un sous-groupe de Levi $\mathbf{L}$ d'un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$. Nous supposerons que $\mathbf{L}$ est F-stable : par contre, $\mathbf{P}$ n'est pas forcément F-stable.

Remarque 7.1 Si $\mathbf{L}$ est cuspidal, alors il existe une unique partie I de Δ telle que $\mathbf{L}$ soit conjugué à $\mathbf{L}_I$ sous l'action de $\mathbf{G}$ (cela résulte des remarques 1.6 et 2.14). Par conséquent, $\mathbf{L}_I$ et $\mathbf{P}_I$ sont F-stables. ■

Si $\mathbf{P}$ est F-stable, on pose

$$\begin{aligned}\rho^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}\colon \operatorname{Reg}_{\mathrm{uni}}(\mathbf{G}^F) &\to \operatorname{Reg}_{\mathrm{uni}}(\mathbf{L}^F)\\ C &\mapsto \pi_{\mathbf{L}}(C\cap\mathbf{P}^F).\end{aligned}$$

Cette fonction est bien définie [DLM1]. Si $\operatorname{Ker} h^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}=1$, alors elle est bijective.

Dans [Bon1, page 279], l'auteur avait construit une application explicite

$$\operatorname{res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}\colon \operatorname{Reg}_{\mathrm{uni}}(\mathbf{G}^F)\to\operatorname{Reg}_{\mathrm{uni}}(\mathbf{L}^F)$$

même lorsque $\mathbf{P}$ n'est pas F-stable. Nous rappelons cette construction. Tout d'abord, soit $\mathbf{M}'$ un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique F-stable $\mathbf{P}'$ de $\mathbf{L}$ appartenant à $\mathcal{L}^{\mathbf{L}}_{\min}\big(\mathcal{Z}(\mathbf{L})\big)$ ($\mathbf{M}'$ existe d'après la remarque 7.1). Alors $\mathbf{M}'$ est un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{M}'$ est cuspidal. Donc il existe, toujours d'après la remarque 7.1, une unique partie I de Δ telle que $\mathbf{M}'$ soit conjugué à $\mathbf{L}_I$. De plus, $\mathbf{L}_I$ et $\mathbf{P}_I$ sont F-stables. Si $C\in\operatorname{Reg}_{\mathrm{uni}}(\mathbf{G}^F)$, on pose

$$\operatorname{res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}(C)=(\rho^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}'\subset\mathbf{P}'})^{-1}\big(C'\cap\mathbf{M}'^F\big)$$

où C' est la $\mathbf{G}^F$-classe de conjugaison contenant $\rho^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_I\subset\mathbf{P}_I}(C)$. Ceci est bien défini car, d'après les remarques précédentes, $\rho^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}'\subset\mathbf{P}'}$ est bijective et, d'après [Bon1], la $\mathbf{G}^F$-classe de conjugaison contenant $\rho^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_I\subset\mathbf{P}_I}(C)$ rencontre $\mathbf{M}'^F$ suivant une seule classe de conjugaison. Il est clair que, si $\mathbf{P}$ est F-stable, alors $\operatorname{res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}=\rho^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}$.

Remarque Dans [Bon1], cette construction était faite lorsque F est un endomorphisme de Frobenius associé à une $\mathbb{F}_q$-structure $\mathbf{G}$ mais le lecteur peut vérifier qu'elle s'adapte mot à mot à ce cadre légèrement plus général (on n'a besoin que de la propriété de Lang). ■

Nous noterons $h^1_{\mathbf{L}}\colon H^1\big(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G})\big)\to H^1\big(F,\mathcal{Z}(\mathbf{L})\big)$ l'application induite par $h_{\mathbf{L}}$. Si $z\in H^1\big(F,\mathcal{Z}(\mathbf{G})\big)$ et si $\mathcal{U}\in\operatorname{Reg}_{\mathrm{uni}}(\mathbf{G}^F)$, nous noterons $\mathcal{U}_z$ l'image de $\mathcal{U}$ par l'automorphisme extérieur de $\mathbf{G}^F$ induit par z (voir par exemple [Bon3, section 1.8]).

7.B Transitivité des applications $\operatorname{res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}$

La proposition suivante était annoncée dans [Bon1, proposition 2.2]. En voici enfin une preuve :

Proposition 7.2 *Avec les notations ci-dessus, on a :*

(a) $\operatorname{res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}$ *ne dépend pas de* $\mathbf{P}$.
(b) *Si* $I\subset\Delta$ *est telle que* $\mathbf{L}_I$ *est F-stable, alors* $\operatorname{res}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}_I}([u]_{\mathbf{G}^F})=[u_I]_{\mathbf{L}_I^F}$.

(c) *Si* $\mathcal{U} \in \mathrm{Reg}_{\mathrm{uni}}(\mathbf{G}^F)$ *et si* $z \in H^1\big(F, \mathcal{Z}(\mathbf{G})\big)$, *alors* $\mathrm{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\mathcal{U}_z) = (\mathrm{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\mathcal{U})_{h_{\mathbf{L}}^1(z)}$. *En particulier,* $\mathrm{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ *est surjective.*

(d) *Soit* $\mathbf{M}$ *un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique de* $\mathbf{L}$*. Alors*

$$\mathrm{res}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} \circ \mathrm{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = \mathrm{res}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}}.$$

Démonstration (a) et (b) sont faciles tandis que (c) découle de [Bon3, 1.8.2]. Montrons maintenant (d). Soit $\mathbf{L}'$ (respectivement $\mathbf{M}'$) un sous-groupe de Levi cuspidal F-stable d'un sous-groupe parabolique F-stable de $\mathbf{L}$ (respectivement $\mathbf{M}$) tel que $\mathrm{Ker}\, h_{\mathbf{L}'}^{\mathbf{L}} = 1$ (respectivement $\mathrm{Ker}\, h_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{M}} = 1$). Ces groupes existent d'après la remarque 7.1 (voir aussi [Bon1, page 279]). Soit $\mathbf{M}''$ un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique F-stable de $\mathbf{L}'$ conjugué à $\mathbf{M}'$ sous l'action de $\mathbf{L}$ (voir encore la remarque 7.1). Notons I (respectivement J) l'unique partie de Δ telle que $\mathbf{M}'$ (respectivement $\mathbf{L}'$) est conjugué à $\mathbf{L}_I$ (respectivement $\mathbf{L}_J$) sous l'action de $\mathbf{G}$. Encore une fois, $\mathbf{P}_I$ et $\mathbf{P}_J$ sont F-stables d'après la remarque 7.1.

Soit $\tau_1\colon \mathrm{Reg}_{\mathrm{uni}}(\mathbf{M}''^F) \to \mathrm{Reg}_{\mathrm{uni}}(\mathbf{M}'^F)$ (respectivement $\tau_J\colon \mathrm{Reg}_{\mathrm{uni}}(\mathbf{L}_J^F) \to \mathrm{Reg}_{\mathrm{uni}}(\mathbf{L}'^F)$, respectivement $\tau_I\colon \mathrm{Reg}_{\mathrm{uni}}(\mathbf{L}_I^F) \to \mathrm{Reg}_{\mathrm{uni}}(\mathbf{M}''^F)$) la bijection induite par la conjugaison dans $\mathbf{M}^F$ (respectivement $\mathbf{G}^F$) : son existence est garantie par [Bon1, proposition 2.1] (voir aussi [Bon1, page 279]).

Il est clair que $\mathrm{res}_{\mathbf{L}_I}^{\mathbf{L}_J} \circ \mathrm{res}_{\mathbf{L}_J}^{\mathbf{G}} = \mathrm{res}_{\mathbf{L}_I}^{\mathbf{G}}$ et que $\mathrm{res}_{\mathbf{M}''}^{\mathbf{L}'} \circ \mathrm{res}_{\mathbf{L}'}^{\mathbf{L}} = \mathrm{res}_{\mathbf{M}''}^{\mathbf{L}}$ car dans tous les cas on est en présence de sous-groupes de Levi F-stables de sous-groupes paraboliques F-stables (voir (b)). D'autre part, par définition [Bon1, page 279], on a

$$\mathrm{res}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}} = (\mathrm{res}_{\mathbf{L}'}^{\mathbf{L}})^{-1} \circ \tau_J \circ \mathrm{res}_{\mathbf{L}_J}^{\mathbf{G}},$$

$$\mathrm{res}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{L}} = (\mathrm{res}_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{M}})^{-1} \circ \tau_1 \circ \mathrm{res}_{\mathbf{M}''}^{\mathbf{L}}$$

et

$$\mathrm{res}_{\mathbf{M}}^{\mathbf{G}} = (\mathrm{res}_{\mathbf{M}'}^{\mathbf{M}})^{-1} \circ \tau_1 \circ \tau_I \circ \mathrm{res}_{\mathbf{L}_I}^{\mathbf{G}}.$$

Par conséquent, il suffit de montrer que

$$\tau_I \circ \mathrm{res}_{\mathbf{L}_I}^{\mathbf{L}_J} = \mathrm{res}_{\mathbf{M}''}^{\mathbf{L}'} \circ \tau_J.$$

Compte tenu de (c), il suffit de montrer que

$$(*) \qquad \mathrm{res}_{\mathbf{M}''}^{\mathbf{L}'} \circ \tau_J(u_J) = \tau_I(u_I).$$

Dans cette dernière écriture, on a confondu abusivement élément et classe de conjugaison. Nous ferons de même par la suite : le lecteur pourra vérifier que cela ne cause pas de problème.

Cela montre que l'on peut supposer (et ce sera fait par la suite pour alléger les notations) que $\mathbf{L} = \mathbf{L}'$ et $\mathbf{M} = \mathbf{M}''$. Il existe un élément $g \in \mathbf{G}$ tel que ${}^g(\mathbf{L}_J, \mathbf{P}_J) = (\mathbf{L}, \mathbf{P})$. Puisque $\mathbf{L}_J$ et $\mathbf{L}$ sont F-stables, on a $g^{-1}F(g) \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J)$. Puisque l'on peut multiplier g à droite par n'importe quel élément de $\mathbf{L}_J$, on peut supposer (grâce au corollaire 3.13 et au lemme 4.4(b)) que $g^{-1}F(g) = n \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J) \cap C_{\mathbf{G}}^{\circ}(u_J)$. On a alors

$$\tau_J(u_J) = {}^g u_J.$$

Notons a_n l'unique élément de $\mathbf{U}_J$ tel que $a_n n \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_J, \mathbf{B}_J, \mathbf{T})$ (voir proposition 4.5(b)). On pose $b_n = \pi_I(a_n)^{-1} a_n$. Alors, d'après la proposition 4.5(c) et la proposition 6.3, $b_n n \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_I) \cap C^{\circ}_{\mathbf{G}}(u_I)$. D'après le théorème de Lang, il existe $a \in \mathbf{U}_J$ tel que $a^{-1} n F(a) n^{-1} = b_n$ (car n normalise $\mathbf{U}_J$). Posons alors $h = ga$. Un calcul simple montre que $h^{-1}F(h) = b_n n$. Alors $\mathbf{Q} = {}^h(\mathbf{P}_I \cap \mathbf{L}_J) = {}^g(\mathbf{P}_I \cap \mathbf{L}_J)$ est un sous-groupe parabolique F-stable de $\mathbf{L}$ et on peut supposer que $\mathbf{M} = {}^h\mathbf{L}_I$.

On a alors $\tau_I(u_I) = {}^h u_I$. Notons $\pi_{\mathbf{M} \subset \mathbf{Q}} \colon \mathbf{Q} \to \mathbf{M}$ la projection canonique. Pour montrer $(*)$, il reste donc à montrer que

$$(**) \qquad \pi_{\mathbf{M}\subset\mathbf{Q}}({}^g u_J) \quad \text{et } {}^h u_I \text{ sont conjugué sous } \mathbf{M}^F.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\pi_{\mathbf{M}\subset\mathbf{Q}}({}^g u_J) &= \pi_{\mathbf{M}\subset\mathbf{Q}}({}^{ha^{-1}} u_J) \\
&= {}^h\pi_I({}^{a^{-1}} u_J). \\
&= {}^b({}^h u_I)
\end{aligned}$$

où on a posé $b = h\pi_I(a)^{-1}h^{-1}$. Mais,

$$\begin{aligned}
b^{-1}F(b) &= h\pi_I(a)h^{-1}F(h)\pi_I(F(a)^{-1})F(h)^{-1} \\
&= h\pi_I(a)b_n n\pi_I\left(F(a)^{-1}\right) n^{-1} b_n^{-1} h^{-1} F(h) F(h)^{-1} \\
&= h\pi_I(aa_n^{-1})\pi_I\left(a_n n F(a)^{-1} n^{-1} a_n^{-1}\right) \pi_I(a_n) h^{-1} \\
&= h\pi_I(aa_n^{-1})\pi_I(a_n b_n^{-1} a^{-1} a_n^{-1})\pi_I(a_n) h^{-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

car $\pi_I(b_n) = 1$. Donc $F(b) = b$ et $b \in {}^h\mathbf{L}_I = \mathbf{M}$. D'où $(**)$. La preuve de (d) est maintenant complt̀e. ∎

Références

[BC] P. Bala and R. W. Carter, *Classes of unipotent elements in simple algebraic groups I*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **79**(1976), 401–425; *Classes of unipotent elements in simple algebraic groups II*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **80**(1976), 1–17.

[Bon1] C. Bonnafé, *Regular unipotent elements*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328**(1999), 275–280.

[Bon2] ———, *Opérateurs de torsion dans* $\mathbf{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ *et* $\mathbf{SU}_n(\mathbb{F}_q)$. Bull. Soc. Math. France **128**(2000), 309–345.

[Bon3] ———, *Mackey formula in type A*. Bull. London Math. Soc. **128**(2000), 309–345.

[Bon4] ———, *Actions of relative Weyl groups I*. À paraître au J. Group Theory.

[Bon5] ———, *Actions of relative Weyl groups II*. À paraître au J. Group Theory.

[Bon6] ———, *A note on centralizers of unipotent elements*. À paraître à l'Ital. J. of Pure and App. Math.

[Bor] A. Borel, *Linear algebraic groups*. Graduate Texts in Math. **126**, Springer, 1991.

[Bou] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres IV, V et VI*. Hermann, Paris, 1968.

[DLM1] F. Digne, G. Lehrer and J. Michel, *The characters of the group of rational points of a reductive group with non-connected centre*. J. Reine Angew. Math. **425**(1992), 155–192.

[DLM2] ———, *On Gel'fand-Graev characters of reductive groups with non-connected centre*. J. Reine. Angew. Math. **491**(1997), 131–147.

[H] R. B. Howlett, *Normalizers of parabolic subgroups of reflection groups*. J. London Math. Soc. (2) **21**(1980), 62–80.

[Lu] G. Lusztig, *Intersection cohomology complexes on a reductive group*. Invent. Math. **75**(1984), 205–272.

[Po1] K. Pommerening, *Über die unipotenten Klassen reduktiver Gruppen*. J. Algebra **49**(1977), 525–536.

[Po2] ———, *Über die unipotenten Klassen reduktiver Gruppen II*. J. Algebra **65**(1980), 373–398.

[Pr] A. Premet, *Nilpotent orbits in good characteristic and the Kempf-Rousseau theory*. J. Algebra **260**(2003), 338–366.

[R] R. W. Richardson, *On orbits of algebraic groups and Lie groups*. Bull. Austral. Math. Soc. **25**(1982), 1–29.

[SpSt] T. A. Springer and R. Steinberg, *Conjugacy classes*. Seminar in algebraic groups and related finite groups, Lect. Notes in Math. **131**(1970), 167–266.

Département de Mathématiques
Université de Franche-Comté
16 Route de Gray
25000 Besançon,
France
email: bonnafe@math.univ-fcomte.fr

https://doi.org/10.4153/CJM-2004-012-0 Published online by Cambridge University Press