Canad. Math. Bull. Vol. **65** (2), 2022, pp. 409–415
http://dx.doi.org/10.4153/S0008439521000357
© Canadian Mathematical Society 2021. This is an Open Access article, distributed under the terms of the Creative Commons Attribution licence (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/), which permits unrestricted re-use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Une note sur la densité des zéros des sommes partielles de la fonction zeta de Dedekind sur un corps quadratique

Eric Dubon

Résumé. En s'appuyant sur la notion d'équivalence au sens de Bohr entre polynômes de Dirichlet et sur le fait que sur un corps quadratique la fonction zeta de Dedekind peut s'écrire comme produit de la fonction zeta de Riemann et d'une fonction L, nous montrons que, pour certaines valeurs du discriminant du corps quadratique, les sommes partielles de la fonction zeta de Dedekind ont leurs zéros dans des bandes verticales du plan complexe appelées bandes critiques et que les parties réelles de leurs zéros y sont denses.

1 Introduction

En 1859, Bernhard Riemann exposa la fameuse conjecture devenue depuis hypothèse sur le fait que la fonction zeta $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ avec $\mathrm{Re}(s) > 1$ admet, hormis les zéros triviaux, tous ses zéros sur la droite d'équation $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ dans le plan complexe.

L'utilisation des sommes partielles fait partie d'une longue liste de techniques employées en vue de démontrer cette conjecture. Bien que le théorème d'Hurwitz nous dise qu'il est impossible d'utiliser les zéros des sommes partielles pour trouver ceux de la série, on peut attaquer le problème de la localisation des zéros en cherchant les régions du plan complexe où ils ne sont pas.

Un des premiers à avoir employé les sommes partielles de la fonction zeta de Riemann avec l'équivalence de Bohr [5] fut Turán. Il proposa une relation entre les sommes partielles de la fonction zeta $\zeta_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$ et l'hypothèse de Riemann. Il déclara que la conjecture de Riemann serait vraie à condition qu'il soit impossible de trouver des zéros des sommes partielles dans le demi-plan ouvert $\mathrm{Re}\, s > 1 + \frac{c}{\sqrt{n}}$, pour

Received by the editors January 2, 2021, accepted May 12, 2021.
Published online on Cambridge Core May 24, 2021.
AMS subject classification: **11M06, 11M26, 11L03, 11R42, 30C15, 30Axx.**
Keywords: Dirichlet polynomials, Dirichlet character, multiplicative functions, Bohr's equivalence, zeros of entire functions, Riemann's zeta function, Dedekind's zeta function.

https://doi.org/10.4153/S0008439521000357 Published online by Cambridge University Press

un quelconque $c > 0$ [23, Theorem I, p. 4]. Il donna un résultat plus précis en disant que les zéros des sommes partielles avec des parties réelles plus grandes que $1 + N^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$ n'existent pas. Il fut démontré, en 1983, par Montgomery dans [13] que cette conjecture est fausse.

Parmi les nombreux auteurs qui travaillèrent avec les sommes partielles de la fonction zeta de Riemann, on peut citer Spira [20–22]. Il utilisa, lui-aussi, le théorème d'équivalence de Bohr comme outil pour étudier la distribution des zéros de $\zeta_n(s)$, il exposa, dans [21], comme conjecture, la possibilité que les parties réelles des zéros de $\zeta_n(z)$ soient denses dans certains intervalles inclus dans leurs bandes critiques respectives.

Une réponse partielle à cette conjecture fut publiée par C. Moreno dans [17] où il montra qu'effectivement il y avait bien densité des parties réelles des zéros de cas particuliers de sommes partielles: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k^s}$ où les p_k représentent les n premiers nombres premiers. Il aborda le thème de densité en disant que l'on peut trouver des zéros de ces sommes partielles, dans la bande critique, proches de n'importe quelle droite perpendiculaire à l'axe des abscisses.

Ce résultat fut généralisé dans [6] pour $\zeta_n(s)$ dans le cas où n est premier puis pour un n quelconque dans [15].

L'étude des zéros des sommes partielles représente toujours un angle d'attaque de la conjecture de Riemann voir, par exemple, [8] et sert à mieux comprendre la répartition des zéros des fonctions L de Dirichlet de façon plus générale voir, par exemple, [11–18].

Richard Dedekind proposa une généralisation de la fonction zeta de Riemann en introduisant la fonction zeta de Dedekind associée à un corps de nombres K de degré $d = [K : \mathbb{Q}]$.

Cette fonction est définie, elle-aussi, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K} (1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

où la somme est prise pour tous les idéaux entiers non nuls de $\mathcal{O}_K$, $\mathfrak{p}$ appartient à l'ensemble des idéaux premiers et $N(\mathfrak{a})$ désigne la norme absolue de l'idéal $\mathfrak{a}$.

Dans le cas particulier où $K = \mathbb{Q}$ alors on retrouve la fonction zeta de Riemann.

On sait très peu de choses concernant la répartition des zéros des sommes partielles de la fonction zeta de Dedekind.

En 2014, Ledoan et al., dans [10, Lemma 1, p. 120], démontrèrent que:

"Si K est un corps de nombres algébriques de degré $n_0 = [K : \mathbb{Q}]$ sur le corps des nombres rationnels. Soit $n \geq 2$ et soit $s = \sigma + it$ un nombre complexe alors existent deux réels α et β avec α dépendant de n_0 et n seulement et β dépendant uniquement de n tels que les zéros des sommes partielles de la zeta de Dedekind sont tous contenus dans des bandes verticales du plan complexe définies par $\alpha < \sigma < \beta$."

Nous considérons, ici, la fonction zeta de Dedekind définie sur un corps quadratique et nous prétendons démontrer, en nous basant sur l'équivalence au sens de Bohr voir [3] et sur l'article [7], que les zéros de ses sommes partielles vérifient une propriété de densité analogue à celle énoncée précédemment.

https://doi.org/10.4153/S0008439521000357 Published online by Cambridge University Press

2 Équivalence au sens de Bohr, sommes partielles de la zeta de Dedekind et densité

Afin de pouvoir démontrer le résultat principal de cette note, nous avons besoin de nous appuyer sur des résultats de [7] que nous présentons ici sous forme de Lemmes.

Les exponentielles-polynômes dont les polynômes de Dirichlet sont des cas particulier peuvent être écrites sous la forme

$$P(s) = 1 + \sum_{j=1}^{n} m_j e^{-w_j s}, \ n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

avec $w_1 < \cdots < w_n$ strictement positifs et $m_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $j = 1, \ldots, n$.

Considérons deux polynômes de Dirichlet de la forme (2.1) ayant le même ensemble d'exposants $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$:

$$f(s) = 1 + \sum_{m=1}^{n} a_m e^{-\lambda_m s} \text{ et } g(s) = 1 + \sum_{m=1}^{n} b_m e^{-\lambda_m s}.$$

Si $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{q_n}\}$, où q_n dépend de n, est une base pour Λ alors, pour chaque $m = 1, 2, \ldots, n$, on a

$$\lambda_m = \sum_{k=1}^{q_n} r_{m,k} \beta_k, \tag{2.2}$$

où $r_{m,k}$ sont des nombres rationnels.

Definition 2.1 Deux polynômes de Dirichlet $f(s) = 1 + \sum_{m=1}^{n} a_m e^{-\lambda_m s}$ et $g(s) = 1 + \sum_{m=1}^{n} b_m e^{-\lambda_m s}$ de type (2.1) avec le même ensemble d'exposants sont dits équivalents au sens de Bohr, relativement à la base $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{q_n}\}$, si pour un certain ensemble de nombres réels $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{q_n}\}$ on obtient

$$b_m = a_m \exp\left(i \sum_{k=1}^{q_n} r_{m,k} y_k \right), \text{ pour tout } m = 1, 2, \ldots, n,$$

où les $r_{m,k}$ vérifient (2.2).

La définition précédente constitue un cas particulier de l'équivalence au sens de Bohr pour les séries de Dirichlet (voir [2, p. 173]). Il s'agit bien d'une relation d'équivalence qui est indépendante de la base choisie. Pour plus d'informations à ce sujet voir [2, Theorems 8.10 et 8.11]).

Lemme 2.1 ([7, Proposition 2.2]) *Deux polynômes de Dirichlet ordinaires,*

$$P(s) = 1 + \sum_{m=2}^{n} a_m m^{-s} \textit{ et } Q(s) = 1 + \sum_{m=2}^{n} b_m m^{-s},$$

sont dits équivalents au sens de Bohr si et seulement si, il existe une fonction $\chi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{C}$ *telle que*

(i) $\chi(1) = 1$ *et* $\chi(ml) = \chi(m)\chi(l)$ *pour tous entiers naturels m et l tels que* $ml \leq n$*;*

(ii) $b_m = \chi(m) a_m$ *pour chaque* $m = 2, \ldots, n$*;*

(iii) $|\chi(p)| = 1$ *à condition que* $a_m \neq 0$ *et p soit un diviseur premier de m.*

https://doi.org/10.4153/S0008439521000357 Published online by Cambridge University Press

Étant donné un polynôme de Dirichlet ordinaire $P(s) = 1 + \sum_{m=2}^{n} a_m m^{-s}$, il est un fait connu que tous ses zéros sont situés dans une bande verticale du plan complexe appelée bande critique de $P(s)$, bornée par les réels α_P et β_P, où $\alpha_P := \inf\{\operatorname{Re} s : P(s) = 0\}$ et $\beta_P := \sup\{\operatorname{Re} s : P(s) = 0\}$. Ces bornes nous permettent de définir un intervalle $I_P := [\alpha_P, \beta_P]$, appelé intervalle critique de $P(s)$.

Et, finalement, associé à $P(s)$, nous considèrerons l'ensemble

$$R_P := \overline{\{\operatorname{Re} s : P(s) = 0\}}.$$

Lemme 2.2 ([7, Theorem 3.1]) *Soient* $P(s) = 1 + \sum_{m=2}^{n} a_m m^{-s}$ *et* $Q(s) = 1 + \sum_{m=2}^{n} b_m m^{-s}$ *deux polynômes de Dirichlet ordinaires équivalents au sens de Bohr, alors* $R_P = R_Q$.

Definition 2.2 (Propriété de densité) Soit $S_{(a,b)} \equiv \{s \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} s < b\}$ une bande ouverte verticale du plan complexe contenue dans la bande critique d'un polynôme de Dirichlet $P(s)$. Nous dirons que $P(s)$ possède la propriété de densité dans la bande $S_{(a,b)}$ à chaque fois qu'il possèdera des zéros situés arbitrairement proches de n'importe quelle droite verticale située dans la bande $S_{(a,b)}$. Autrement dit, étant donné σ_2 avec $a < \sigma_2 < b$ et $\varepsilon > 0$, un nombre complexe $s^* = \sigma^* + it^*$ peut être trouvé de façon à ce que $\sigma_2 - \varepsilon < \sigma^* < \sigma_2 + \varepsilon$ et $P(s^*) = 0$.

De manière équivalente, nous pouvons remarquer que si $P(s)$ est un polynôme de Dirichlet qui a la propriété de densité dans la bande $S_{(a,b)}$, alors cela signifie que l'ensemble $\{\operatorname{Re} s : P(s) = 0\}$ est dense dans l'intervalle $[a, b]$, c'est à dire, $R_P = [a, b]$. Nous avons donc le résultat suivant:

Lemme 2.3 ([7, Corollary 3.4]) *Soit* $S_{(a,b)}$ *une bande verticale ouverte dans le plan complexe dans laquelle les polynômes de Dirichlet ordinaires* $P(s)$ *possèdent la propriété de densité. Si* $Q(s)$ *est un autre polynôme de Dirichlet ordinaire de telle sorte que* $P(s)$ *et* $Q(s)$ *sont tous les deux équivalents au sens de Bohr, alors* $Q(s)$ *a, lui-aussi, la propriété de densité dans la bande* $S_{(a,b)}$.

Venons en, maintenant, à la fonction zeta de Dedekind.

On sait d'après la formule de factorisation de Kronecker appliquée à un corps quadratique $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ (voir [9, p. 513]) que la fonction zeta de Dedekind s'écrit comme produit de la fonction zeta de Riemann et d'une fonction L.

Autrement dit:

$$\zeta_K(s) = \zeta(s).L(s, \chi_D) \text{ avec } \operatorname{Re}(s) > 1$$

où χ_D est un caractère quadratique associé au discriminant, le symbole de Kronecker.

On obtient alors par le produit de convolution de Dirichlet [9, p. 12] que:

$$\zeta_K(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{j|n} \chi_D(j)\Big) \frac{1}{n^s}.$$

https://doi.org/10.4153/S0008439521000357 Published online by Cambridge University Press

On note alors les sommes partielles de la forme suivante:

$$\zeta_{K,n}(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k^s} \text{ avec } \operatorname{Re}(s) > 1,\ n \in \mathbb{N} \text{ et } f(k) = \sum_{j|k} \chi_D(j) \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Nous présentons maintenant le résultat principal de cette note.

Théorème 2.4 *Soit K un corps quadratique de discriminant D. Soit, pour tout n entier naturel, $\zeta_{K,n}$ les sommes partielles de la fonction zeta de Dedekind définies sur K. Si $f(k)$ est une fonction complètement multiplicative vérifiant les conditions du lemme 2.1 alors les sommes partielles $\zeta_{K,n}$ ont leurs zéros dans des bandes verticales du plan complexe et les parties réelles de ceux-ci y sont denses.*

Démonstration Si D est un discriminant tel que $f(k)$ est une fonction complètement multiplicative vérifiant le lemme 2.1 alors nous pouvons dire que $\zeta_{K,n}(s)$ est équivalente au sens de Bohr à $\zeta_n(s)$ somme partielle de la fonction zeta de Riemman. Or nous savons d'après [15, Theorem 12] qu'il existe un entier N tel que pour tout n strictement plus grand que N, les sommes partielles de la zeta de Riemann possèdent tous leurs zéros dans une bande verticale du plan complexe appelée bande critique $S_{(a_n,b_n)}$ où

$$a_n = -\frac{\log 2}{\log(\frac{n-1}{n-2})} + \Delta_n \text{ pour } n > 2 \text{ avec } \limsup_{n\to\infty} |\Delta_n| \le \log 2 \text{ (voir pour cela [16]) et}$$

$$b_n = 1 + (\frac{4}{\pi} - 1 + o(1))\frac{\log\log n}{\log n},\quad n \to \infty \text{ estimation trouvée par Montgomery et}$$

Vaughan dans [14]. De plus, nous savons, voir [6, 15] que $\zeta_n(s)$ y possède la propriété de densité. En utilisant alors les lemmes 2.2 et 2.3, on obtient le résultat voulu.

Remarque 2.5 Dans un article récent [19], Roy et Vatwani considèrent le cas de séries de Dirichlet $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ où $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est une fonction arithmétique appartenant à une sous-famille $\mathcal{C}_k$ (introduite dans [18]) de fonctions multiplicatives pour lesquelles les séries de Dirichlet précédentes sont absolument convergentes pour $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Ils y démontrent, dans le cas des sommes partielles des $F(s)$, un résultat généralisant l'expression de la borne supérieure b_n trouvée par Montgomery et Vaughan pour les sommes partielles de la zeta de Riemann.

Corollaire 2.6 *Soit K un corps quadratique de discriminant noté D. Si pour tout nombre premier p impair ne divisant pas le discriminant nous avons ce dernier qui n'est pas congru à un carré modulo p et si pour p pair, D n'est pas congru à* 1 *modulo* 8*.*

Alors les sommes partielles de la fonction zeta de Dedekind ont leurs zéros situés dans une bande verticale du plan complexe et elles y possèdent la propriété de densité.

Démonstration Nous avons vu que

$$\zeta_{K,n}(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k^s} \text{ avec } \operatorname{Re}(s) > 1, n \in \mathbb{N}.$$

https://doi.org/10.4153/S0008439521000357 Published online by Cambridge University Press

où $f(k) = \sum_{j|k} \chi_D(j)$ est obtenu grâce au produit de convolution de Dirichlet. Si l'on souhaite connaître les valeurs prises par $f(k)$ pour tout $k = 1, \ldots, n$, il suffit alors de s'intéresser uniquement aux puissances de nombres premiers.

Le fait que D ne soit pas congru à un carré modulo p implique que si p est un nombre premier impair ne divisant pas D alors l'idéal engendré par p noté (p) est soit inerte soit ramifié. De plus, le fait que $D \not\equiv 1(8)$ implique que si p est pair alors (p) est aussi inerte (pour D ≡ $5(8)$) ou ramifié. Ce qui se traduit par le fait que pour tout nombre premier p nous avons $\chi_D(p) \neq 1$. Nous pouvons alors écrire (voir [4]):

$$f(p^l) = \sum_{i=1}^{l} \chi_D(p)^i = \begin{cases} 1 & \text{si } p|D \\ 1 & \text{si } p \nmid D, \text{ et si } \chi_D(p) = -1 \text{ pour } l \text{ pair} \\ 0 & \text{si } p \nmid D, \text{ et si } \chi_D(p) = -1 \text{ pour } l \text{ impair} \end{cases}$$

Dans ces conditions, on a, pour tout entier l, $f(p^l) = f(p)^l$ ce qui permet de conclure (voir [2, p. 266]) que, dans ce cas, f est une fonction complètement multiplicative vérifiant les conditions du lemme 2.1 et nous obtenons le résultat grâce au théorème 2.4.

Remarque 2.7 Le fait que la fonction f considérée dans le corollaire 2.6 soit complètement multiplicative repose sur les propriétés du caractère quadratique et le fait que lui-même, dans les conditions imposées du corollaire, est une fonction complètement multiplicative en tant que caractère de Dirichlet.

Par contre, si D est congru à 3 modulo 4 alors le symbole de Kronecker n'est pas un caractère de Dirichlet. Cependant il conserve toutes les propriétés nécessaires à la véracité du théorème puisque si D est congru à 3 modulo 4 alors le symbole de Kronecker est un "mock" caractère [1, Theorem 3.6, p. 367] tel qu'il est défini dans [1, Definition 2.4, p. 360] et continue de vérifier les conditions du Lemme 2.1.

Remerciements Je remercie vivement le rapporteur de ce travail pour ses commentaires très utiles qui ont permis d'améliorer cet article.

References

[1] J. P. Allouche and L. Goldmakher, *Mock characters and the Kronecker symbol.* J. Number Theory **192**(2018), 356–372.
[2] T. M. Apostol, *Some properties of completely multiplicative arithmetical functions*. Amer. Math. Month. **78**(1971), 266–271.
[3] T. M. Apostol, *Modular functions and Dirichlet series in number theory*. Springer-Verlag, New York, 1990.
[4] V. Blomer and A. Granville, *Estimates for representation numbers of quadratic forms*. Duke Math. J. **135**(2006), no. 2, 261–302.
[5] H. Bohr, *Zur theorie der allgemeinen Dirichletschen Reihen*. Math. Ann. **79**(1919), 136–156.
[6] E. Dubon, G. Mora, J. M. Sepulcre, J. I. Ubeda, and T. Vidal, *On the real projection of the zeros of* $1 + 2^s + \cdots + n^s$. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM **108**(2014), 317–333.
[7] E. Dubon and J. M. Sepulcre, *On the existence of equivalent Dirichlet polynomials whose zeros preserve a topological property*. Int. J. Number Theory **14**(2018), no. 3, 713–725.
[8] S. M. Gonek and H. L. Montgomery, *Zeros of a family of approximations of the Riemann Zeta-Function*. Int. Math. Res. Not. **2013**(2013), no. 20, 4712–4733.
[9] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic number theory, colloquium publications. Vol. 53*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

https://doi.org/10.4153/S0008439521000357 Published online by Cambridge University Press

[10] A. Ledoan, A. Roy, and A. Zaharescu, *Zeros of partial sums of the Dedekind zeta function of a cyclotomic field*. J. Number Theory **136**(2014), 118–133.
[11] J. Li, A. Roy, and A. Zaharescu, *Zeros of a family of approximations of Hecke L-functions associated with cusp forms*. Ramanujan J. **41**(2016), nos. 1–3, 391–419.
[12] J. Li, M. Nastasescu, A. Roy, and A. Zaharescu, *Smooth L2 distances and zeros of approximations of Dedekind zeta functions*. Manuscripta Math. **154**(2017), nos. 1–2, 195–223.
[13] H. L. Montgomery, *Zeros of approximations to the zeta function*. Studies in pure mathematics: to the memory of Paul Túran, 497–506, Basel, Birkhäuser, 1983.
[14] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Mean values of multiplicative functions*. Period. Math. Hung. **43**(2001), 199–214.
[15] G. Mora, *On the asymptotically uniform distribution of the zeros of the partial sums of the Riemann zeta function*. J. Math. Anal. Appl. **403**(2013), no. 1, 120–128.
[16] G. Mora, *An estimate of the lower bound of the real parts of the zeros of the partial sums of the Riemann zeta function*. J. Math. Anal. Appl. **427**(2015), no. 1, 428–439.
[17] C. J. Moreno, *The zeros of exponential polynomials (I)*. Compos. Math. **26**(1973), no. 1, 69–78.
[18] A. Roy and A. Vatwani, *Zeros of partial sums of L-functions*. Adv. Math. **346**(2019), 467–509.
[19] A. Roy and A. Vatwani, *Zeros of Dirichlet polynomials*. Trans. Amer. Math. Soc. **374**(2021), no. 1, 643–661.
[20] R. Spira, *Zeros of sections of the zeta function I*. Math. Comp. **20**(1966), 542–550.
[21] R. Spira, *Zeros of sections of the zeta function II*. Math. Comp. **22**(1968), no. 101, 163–173.
[22] R. Spira, *Approximate functional approximations and the Riemann hypothesis*. Proc. Amer. Math. Soc. **17**(1966), no. 2, 314–317.
[23] P. Turán, *On some approximative Dirichlet-polynomials in the theory of the zeta-function of Riemann*. Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. **24**(1948), no. 17, 1–36.

Department of Mathematics, University of Alicante, Carr. de San Vicente del Raspeig, Alicante 03690, Spain
e-mail: eric.dubon@ua.es

https://doi.org/10.4153/S0008439521000357 Published online by Cambridge University Press