

EQUATIONS DE LIE INVARIANTES PAR UN PSEUDOGROUPE DE LIE

ODINETE RENÉE ABIB

§ 0. Introduction

Soit (\mathcal{L}, M) un pseudogroupe de Lie infinitésimal [4] transitif d'ordre h sur une variété M différentiable, $J^h\mathcal{L}$ son équation de définition et L son algèbre formelle au point a de M .

Dénotons par $I(L)$ l'ensemble des idéaux fermés de L et par $I(J^h\mathcal{L})$ l'ensemble des équations différentielles $R^m \subset J^m\mathcal{L}$, $m \geq h$, invariantes par Γ et formellement intégrables, Γ désignant le pseudogroupe de transformations associé à \mathcal{L} . L'un des buts de ce papier est de définir une application surjective de $I(J^h\mathcal{L})$ dans $I(L)$. La surjectivité implique en particulier que tout idéal fermé de L est l'espace des solutions formelles en a d'une équation de Lie appartenant à $I(J^h\mathcal{L})$, (§ 2, § 3). En plus, dans le cas analytique, cette équation est l'équation de définition d'un sous-pseudogroupe normal de \mathcal{L} (Corollaire 2.2).

D'autre part, $F(L)$ étant l'ensemble des idéaux fermés de L définis par un feuilletage (§ 2), $F(J^h\mathcal{L})$ l'ensemble des équations différentielles R^m de $I(J^h\mathcal{L})$ pour lesquelles $\Pi_0(R^m) = E$ soit un sous-fibré intégrable de $T(M)$ invariant par l'action de \mathcal{L} et $L \cap J_a^\infty E = \lim_\ell (R_a^m)^{+\ell}$, nous montrons (§ 3) que l'application précédente envoie $F(J^h\mathcal{L})$ sur $F(L)$.

Etant donné I un idéal fermé de L on lui associe toujours une algèbre de Lie normale tronquée d'ordre $h \geq 1$ (§ 4). Inversement, nous montrons (Théorème 4.1) que à toute algèbre de Lie W^h normale tronquée d'ordre $h \geq 1$, satisfaisant certaines conditions cohomologiques, correspond un idéal fermé I de L ayant W^h comme algèbre tronquée d'ordre h . En plus I est unique à un isomorphisme près. Ce résultat généralise ainsi le Théorème 6 de [1] pour le cas non-transitif.

Il est à signaler que certains de nos résultats semblent concorder avec ceux obtenus indépendamment par H. Goldschmidt dans un tout

Received September 3, 1977.

autre formalisme (cf. [2], § 10).

§ 1. Notations

Etant donné $T = T(M)$ le fibré tangent d'une variété différentiable M , $J^k T(M)$ désigne l'ensemble de tous les jets d'ordre k des sections du fibré vectoriel T et $\underline{J^k T(M)}$ le faisceau des sections de $J^k T(M)$ qui est un faisceau de \mathbf{R} -algèbre de Lie [4]:

$$\underline{J^k T} \times \underline{J^k T} \rightarrow \underline{J^k T},$$

$[f \cdot j^k X, g \cdot j^h Y] = f \cdot g j^h [X, Y] + f(X \cdot g) j^k Y - g(Y \cdot f) j^h X$, où $[X, Y]$ est le crochet de Lie des champs de vecteurs X et Y , f et g sont des fonctions différentiables numériques.

Ce crochet induit un morphisme de fibrés vectoriels sur M , à savoir:

$$\begin{aligned} [,]' : J^{h+1} T \times J^{h+1} T &\rightarrow J^h T \\ (j^{h+1} X, j^{h+1} Y) &\rightarrow j^h [X, Y]. \end{aligned}$$

Considérons $D: J^{h+1} T \rightarrow T^* \otimes J^h T$ l'opérateur de Spencer défini par $D(f \cdot j^{h+1} X) = df \otimes j^h X$.

LEMME 1.1. (a) $[f \cdot j^h X, g \cdot j^h Y] = [f \cdot j^{h+1} X, g \cdot j^{h+1} Y]' + D(g \cdot j^{h+1} Y) \cdot (f \cdot X) - D(f \cdot j^{h+1} X)(g \cdot Y)$.

(b) $D([f \cdot j^{h+1} X, g \cdot j^{h+1} Y]')(Z) = [D(f \cdot j^{h+1} X)(Z), g \cdot j^h Y]' + [f \cdot j^{h+1} X, D(g \cdot j^{h+1} Y)(Z)]'$.

La démonstration de ce résultat découle des définitions précédentes.

Désignons par Π la projection naturelle de $J^{h+1} T$ sur $J^h T$; soit $a \in M$ et $J_a^\infty T$ la limite projective relative à ce morphisme des $J_a^h T$. Le crochet $[,]'$ définit alors sur cet ensemble une structure d'algèbre de Lie de dimension infinie.

Etant donné un pseudogroupe de Lie infinitésimal transitif \mathcal{L} sur M , dénotons par $J^h \mathcal{L}$ le fibré vectoriel de tous les jets d'ordre h des sections locales de \mathcal{L} dont le faisceau des sections $\underline{J^h \mathcal{L}}$ est un sous-faisceau du faisceau d'algèbre de Lie $J^h T$. En particulier, le crochet $[,]'$ induit le crochet de $\underline{J^h \mathcal{L}}$ à valeurs dans $\underline{J^{h-1} \mathcal{L}}$:

$$[,]' : \underline{J^h \mathcal{L}} \times \underline{J^h \mathcal{L}} \rightarrow \underline{J^{h-1} \mathcal{L}}.$$

Désignons par $L \subset J_a^\infty T$ la limite projective des $J_a^h \mathcal{L}$ par rapport à la projection Π ; L est une sous-algèbre de Lie de $J_a^\infty T$ qui sera dite

l'algèbre formelle de \mathcal{L} en $a \in M$. De plus L est une algèbre de Lie filtrée :

$$L = L_{-1} \supset L_0 \supset L_1 \supset \dots \supset L_h \supset \dots$$

où L_n est le noyau de la projection Π_h de L sur $J_a^h \mathcal{L}$. Posons $g^h = L_{h-1}/L_h$, pour $h \geq 0$. On a naturellement les suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & g^h & \longrightarrow & J_a^h \mathcal{L} & \longrightarrow & J_a^{h-1} \mathcal{L} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S^h V^* \otimes V & \longrightarrow & J_a^h T & \longrightarrow & J_a^{h-1} T \longrightarrow 0 \end{array}$$

avec $V = T_a(M) = L/L_0$.

§ 2.

Soit I un idéal fermé de l'algèbre formelle L de \mathcal{L} en $a \in M$. Posons $I_h = I \cap L_h$ pour $h \geq -1$ de sorte que $p^h = I_{h-1}/I_h$ s'identifie à un sous-espace de g^h ; alors,

LEMME 2.1. (a) $[I^h, J_a^h \mathcal{L}]' \subset I^{h-1}$.

(b) $[p^h, J^h \mathcal{L}]' \subset p^{h-1}$.

(c) $[g^h, g^h]' = \{0\}$.

où $I^h = I/I_h$.

La deuxième inclusion et la transitivité de \mathcal{L} nous donnent une injection :

$$\delta: p^{h+1} \rightarrow V^* \otimes p^h,$$

$\delta(X)(v) = [X, y]'$ où y est un élément de $J_a^{h+1} \mathcal{L}$ qui se projette sur v ; d'où une application

$$\delta: \wedge^j V^* \otimes p^{h+1} \rightarrow \wedge^{j+1} V^* \otimes p^h,$$

défini par :

$$\delta(f)(v_1, v_2, \dots, v_{j+1}) = \sum_{s=1}^{j+1} (-1)^{j+1-s} f(v_1, v_2, \dots, \hat{v}_s, \dots, v_{j+1}) \cdot v_s$$

pour v_1, \dots, v_{j+1} dans V .

On obtient ainsi un complexe :

$$0 \longrightarrow p^h \xrightarrow{\delta} V^* \otimes p^{h-1} \xrightarrow{\delta} \wedge^2 V^* \otimes p^{h-2} \longrightarrow \dots$$

dont le groupe de cohomologie dans $\wedge^j V^* \otimes p^h$ sera dénoté par $H^{j,h}(I)$.

LEMME 2.2. Soit (\mathcal{L}, M) un pseudogroupe de Lie infinitésimal transitif sur M et I un idéal fermé de L ; alors il existe un entier h_0 tel que $H^{j,h}(I) = 0$ pour tous $j \geq 0$ et $h \geq h_0$.

Preuve. Ce résultat résulte du fait que $M = \prod_{h \geq 0} (p^h)^*$ est un $S(V)$ -module gradué de type fini.//

DÉFINITION 2.1. Un idéal fermé I de L est défini par un feuilletage dans (L, L_0) si le seul idéal J de L vérifiant $I \subset J \subset I + L_0$ est I lui-même.

EXEMPLE. Soit E un sous fibré vectoriel intégrable de $T(M)$ tel que $[E, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$ et dénotons par $J_a^\infty E$ l'algèbre formelle en a associée à E ; alors $I = L \cap J_a^\infty E$ est un idéal fermé de L défini par un feuilletage dans (L, L_0) ; (cf. démonstration du Théorème 2.1. (5.d)).

Remarque. Soient J et I deux idéaux de L définis par un feuilletage dans (L, L_0) tels $\Pi_0(I) = \Pi_0(J)$ où $\Pi_0: L \rightarrow T_a(M)$ est la projection canonique; alors $I = J$: en effet, $\Pi_0(I) = \Pi_0(J)$ entraîne $I \subset J + L_0$ et $J \subset I + L_0$. On a $I \subset I + J \subset I + L_0$ et $I + J$ est un idéal fermé de L ; d'où, $I \subset I + J$; ainsi $J \subset I$; de même, $I \subset J$; d'où, $I = J$.//

PROPOSITION 2.1. Soit I un idéal fermé de l'algèbre formelle L . Considérons $h_0 \geq 0$ un entier tel que $H^{1,h}(I) = 0$ pour $h \geq h_0$; alors I est un idéal défini par un feuilletage dans (L, L_{h_0}) .

Preuve. $H^{1,h}(I) = 0$ entraîne que p^{h+1} coïncide avec le premier prolongement $(p^h)^{+1}$ de p^h . Soit J un idéal fermé de L tel que $I \subset J \subset L + L_{h_0}$; alors $I/I_{h_0} = J/J_{h_0}$ et $p^{h_0} = q^{h_0} = J_{h_0-1}/J_{h_0}$; pour $h \geq h_0$, $q^{h+1} \subset (q^h)^{+1} = (p^h)^{+1} = p^{h+1}$; donc, $q^{h+1} = p^{h+1}$ pour $h \geq h_0$. Ainsi $I/I_h = J/J_h$, pour $h \geq h_0$; d'où, $J \subset I + I_h \subset I + L_h$, pour $h \geq h_0$; d'où, $J \subset \bigcap_{h \geq h_0} (I + L_h) = I$ car I est fermé; ainsi on obtient $I = J$. e.q.f.d.

THÉORÈME 2.1. Soit L l'algèbre formelle d'un pseudogroupe de Lie infinitésimal transitif (\mathcal{L}, M) et I un idéal fermé de L .

(1) Pour tout $h \geq 1$ il existe une équation de Lie $R^h \subset J^h \mathcal{L}$ telle que

$$R_a^h = I/I_h = \Pi_h(I).$$

(2) Si R^{h+1} est l'équation de Lie qui correspond à $\Pi_{h+1}(I)$, on a :

- (a) $[R^{h+1}, J^{h+1}\mathcal{L}]' \subset R^h$.
- (b) $R^{h+1} \subset (R^h)^{+1}$ le premier prolongement de R^h .
- (3) $[R^h, J^h\mathcal{L}] \subset R^h$.
- (4) Soit h_0 l'entier tel que $H^{1,h}(I) = 0$ pour $h \geq h_0$; alors R^{h_0} est formellement intégrable et $R^{h_0+\ell}$ est le ℓ -ième prolongement $(R^{h_0})^{+\ell}$ de R^{h_0} pour $\ell \geq 0$. De plus, I coïncide avec $\lim_h (R^h)$.
- (5) Il existe un sous-fibré vectoriel E de T tel que:
 - (a) $E_a = \Pi_0(I)$.
 - (b) $[\underline{E}, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$, Ceci entraîne $[\underline{E}, \underline{E}] \subset \underline{E}$.
 - (c) $R^h \subset J^h E$, pour $h \geq 1$.
 - (d) I est défini par un feuilletage dans (L, L_0) si, et seulement si, $I = L \cap J_a^\infty E$.

Preuve. Montrons d'abord l'existence de $E \subset T(M)$. L'inclusion, $[g^1, I/I_1]' \subset I/I_0$ entraîne I/I_0 sous-espace de $L/L_0 = V$ invariant par g^1 . Ceci entraîne I/I_0 invariant par le groupe d'isotropie G^1 du pseudogroupe de transformations Γ associée à \mathcal{L} ; donc, Γ déplace I/I_0 pour définir un sous-fibré vectoriel E de $T(M)$; par construction on a $[\underline{E}, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$; $[\underline{E}, \underline{E}] \subset \underline{E}$: en effet, soient X, Y deux sections locales de E au voisinage U d'un point x de M ; soient $j_x^1 X', j_x^1 Y'$ dans R^1 tels que $X'_x = X_x$ et $Y'_x = Y_x$; alors,

$[j_x^1 X', j_x^1 Y']' = [X', Y'](x)$ est dans E_x ; On a $[X, Y] = [X - X', Y - Y'] + [X, Y'] + [X', Y] - [X', Y']$; En x , le deuxième membre est dans E_x ; d'où, le resultat; En plus, $[J_a^{h+1}\mathcal{L} \cap J_a^{h+1}E, J_a^{h+1}\mathcal{L}] \subset J_a^h\mathcal{L} \cap J_a^hE$ pour $h \geq 0$; ainsi $L \cap J_a^\infty E$, est un idéal de L .

La construction de R^h est presque analogue; l'inclusion, $[J_a^{h+1}\mathcal{L}, \Pi_{h+1}(I)]' \subset \Pi_h(I)$ implique que $\Pi_h(I)$ est invariant par le groupe d'isotropie d'ordre h de Γ ; ainsi Γ déplace $\Pi_h(I)$ pour définir un sous-fibré vectoriel R^h de $J^h T(M)$. Par construction, $R^h \subset J^h \mathcal{L}$ pour $h \geq 1$, R^{h+1} se projette sur R^h , $[R^{h+1}, J^{h+1}\mathcal{L}]' \subset R^h$ et $[R^h, J^h\mathcal{L}] \subset R^h$ pour $h \geq 1$; d'où, R^h est une équation de Lie d'ordre h sur $T(M)$. De plus, la projection $\Pi: J^1\mathcal{L} \rightarrow T(M)$ envoie R^1 sur E et $R_a^1 \subset J_a^1 E$. Par invariance on obtient $R^1 \subset J^1 E$. Supposons $R^{h+1} \subset (R^h)^{+1}$; alors si $R^h \subset J^h E$ on a $R^{h+1} \subset (R^h)^{+1} \subset (J^h E)^{+1} = J^{h+1} E$; d'où, $R^h \subset J^h E$ pour tout $h \geq 1$.

Montrons que $R^{h+1} \subset (R^h)^{+1}$. Soit $\xi^{h+1} = f \cdot j^{h+1} X$ une section de R^{h+1} et Y dans \mathcal{L} ; alors,

$$[f \cdot j^h X, j^h Y] = [f \cdot j^{h+1} X, j^{h+1} Y]' - D(f \cdot j^{h+1} X)(Y);$$

ainsi ; $D(\xi^{h+1})(Y)$ est une section de R^h . On obtient que D envoie $\underline{R^{h+1}}$ dans $\underline{T^*} \otimes \underline{R^h}$ et R^{h+1} se projette sur R^h ; d'où, $R^{h+1} \subset (R^h)^{+1}$ par la caractérisation de prolongement d'équation différentielle.

Montrons (4). Soit h_0 l'entier tel que $p^{h+1} = (p^h)^{+1}$ pour $h \geq h_0$ (d'après le Lemme 2.2., h_0 existe toujours). Si t^h est le fibré vectoriel noyau de $\Pi : R^h \rightarrow R^{h-1}$ alors $t_a^h = p^h$ pour $h \geq 1$. On a $t_a^{h_0+1} = p^{h_0+1} = (p^{h_0})^{+1} = (t_a^{h_0})^{+1}$. De même, pour $\ell \geq 0$ on obtient, $t_a^{h_0+\ell} = (t_a^{h_0})^{+\ell}$; $(t^{h_0})^{+\ell}$ est un fibré vectoriel sur M et $t^{h_0+\ell} \subset (t^{h_0})^{+\ell}$ car $R^{h_0+\ell}$ est contenu dans $(R^{h_0})^{+\ell}$ d'après (2.b); ainsi, $t^{h_0+\ell} = (t^{h_0})^{+\ell}$ pour tout $\ell \geq 0$; d'où, $(R^{h_0})^{+1} = R^{h_0+1}$. Si $R^{h_0+\ell-1} = (R^{h_0})^{+\ell-1}$ on obtient $(R^{h_0})^{+\ell} = (R^{h_0})^{+\ell}$ pour $\ell \geq 0$. Nous avons donc démontré (4).

Démonstration de (5.d). $L \cap J_a^\infty E$ est un idéal fermé de L qui contient I car $R^h \subset J^h E$ pour $h \geq 1$; en plus, $\Pi_0(L \cap J_a^\infty E) = I/I_0 = E_a$; donc,

$$I \subset L \cap J_a^\infty E \subset I + L_0.$$

Si I est défini par un feuilletage dans (L, L_0) on a $I = L \cap J_a^\infty E$. Réciproquement, supposons $L \cap J_a^\infty E = I$ et soit J un idéal fermé de L tel que,

$$L \cap J_a^\infty E \subset J \subset L \cap J_a^\infty E + L_0;$$

alors $\Pi_0(L \cap J_a^\infty E) = \Pi_0(J)$. Soit $\{S^h\}_{h \geq 1}$ la suite d'équations de Lie qui correspond à J et F le sous-fibré intégrable de $T(M)$. On a $F_a = E_a$, $S^h \subset (J^h F \cap J^h \mathcal{L})$ pour $h \geq 1$, et $E \subset F$. Ainsi $E = F$ et $J = \lim_h S_a^h \subset J_a^\infty F \cap L = J_a^\infty E \cap L = I$; d'où, $I = J$; ce qui implique que I est défini par un feuilletage dans (L, L_0) . c.q.f.d.

COROLLAIRE 2.1. Soit (\mathcal{L}, M) un pseudogroupe de Lie infinitésimal transitif sur M et $I \subset L$ un idéal fermé de son algèbre formelle en a ; alors il existe un entier $h_0 \geq 0$ et une équation de Lie formellement intégrable $R^{h_0} \subset J^{h_0} \mathcal{L}$ telle que

$$[\underline{R^{h_0}}, \underline{J^{h_0} \mathcal{L}}] \subset \underline{R^{h_0}}$$

et

$$I = \lim_{\ell} (R_a^{h_0})^{+\ell} .$$

COROLLAIRE 2.2 [4]. *Etant donnés un pseudogroupe de Lie infinitésimal analytique transitif \mathcal{L} défini sur une variété analytique réelle M et I un idéal fermé de L , il existe un sous-pseudo-groupe infinitésimal $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$ défini sur M tel que*

$$[\mathcal{L}_0, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L}_0 \text{ et } \lim_h J_a^h \mathcal{L}_0 = I .$$

Preuve. Considérons l'équation de Lie R^{h_0} formellement intégrable donnée par le Corollaire 2.1. Soit \mathcal{L}_0 l'ensemble des solutions de R^{h_0} ; alors $J^{h_0} \mathcal{L}_0 = R^{h_0}$ et $R^{h_0+\ell} = (R^{h_0})^{+\ell} = J^{h_0+\ell} \mathcal{L}_0, \forall \ell \geq 0$. Soit X dans \mathcal{L}_0 et Y dans \mathcal{L} ; de $j^{h_0}[X, Y] = [j^{h_0}X, j^{h_0}Y] \in [\underline{R}^{h_0}, J^{h_0} \mathcal{L}] \subset \underline{R}^{h_0}$ on obtient $[X, Y] \in \mathcal{L}_0$; d'où $[\mathcal{L}_0, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L}_0$. Ainsi \mathcal{L}_0 est un pseudo-groupe infinitésimal vérifiant le corollaire. c.q.f.d.

§ 3.

Les notations étant celles des paragraphes précédents, soit h un entier tel que $J^{m+1} \mathcal{L} = (J^m \mathcal{L})^{+1}$ pour $m \geq h$. Donc, $J^h \mathcal{L}$ est une équation de Lie transitive et formellement intégrable. Dénotons par $I(L)$ l'ensemble des idéaux fermés de L et par $I(J^h \mathcal{L})$ l'ensemble des équations différentielles $R^m \subset J^m \mathcal{L}$ formellement intégrable d'ordre $m, m \geq h$ telle que $[\underline{R}^m, \underline{J}^m \mathcal{L}] \subset \underline{R}^m$. Nous allons définir une application convenable de $I(J^h \mathcal{L})$ sur $I(L)$ avec certaines propriétés.

LEMME 3.1. *Soit $R^m \in I(J^h \mathcal{L})$; alors, on a :*

- (a) $[(\underline{R}^m)^{+1}, \underline{J}^{m+1} \mathcal{L}]' \subset \underline{R}^m$.
- (b) $[(\underline{R}^m)^{+\ell+1}, \underline{J}^{m+\ell+1} \mathcal{L}]' \subset (\underline{R}^m)^{+\ell},$ pour $\ell \geq 0$.

Preuve. La partie (a) découle de $[\underline{R}^m, \underline{J}^m \mathcal{L}] \subset \underline{R}^m$. Supposons :

$$[(\underline{R}^m)^{+\ell+1}, \underline{J}^{m+\ell+1} \mathcal{L}]' \subset (\underline{R}^m)^{+\ell} ,$$

et soient $\xi^{m+\ell+2}, \eta^{m+\ell+2}$ et Z des sections de $(\underline{R}^m)^{+\ell+2}, J^{m+\ell+2} \mathcal{L}$ et de \mathcal{L} . Le Lemme 1.1 entraîne :

$$D([\xi^{m+\ell+2}, \eta^{m+\ell+2}]'(Z)) = [D(\xi^{m+\ell+2})(Z), \eta^{m+\ell+1}]' + [\xi^{m+\ell+1}, D(\eta^{m+\ell+2})(Z)]' ,$$

où $\eta^{m+\ell+1} = \Pi(\eta^{m+\ell+2})$ et $\xi^{m+\ell+1} = \Pi(\xi^{m+\ell+2}) \in (\underline{R}^m)^{+\ell+1}$. Ainsi, D envoie $[(\underline{R}^m)^{+\ell+2}, \underline{J}^{m+\ell+2} \mathcal{L}]'$ dans $T^* \otimes (\underline{R}^m)^{+\ell}$. D'autre part, ce crochet se projette dans $(\underline{R}^m)^{+\ell}$; d'où,

$$[(R^m)^{+\ell+2}, J^{m+\ell+2}\mathcal{L}]' \subset (R^m)^{+\ell+1}.$$

c.q.f.d.

Soit $R^m \in I(J^h\mathcal{L})$, $a \in M$ et $I = \lim_\ell (R^m_a)^{+\ell}$. Le lemme 3.1 implique que I est un idéal fermé de l'algèbre formelle L en a . Ainsi, nous considérons l'application :

$$(1) \quad \begin{aligned} I(J^h\mathcal{L}) &\rightarrow I(L) \\ R^m &\rightarrow I \end{aligned}$$

qui est surjective d'après le Corollaire 2.1. Soient R^m et S^p deux équations de Lie dans $I(J^h\mathcal{L})$ ayant la même image dans $I(L)$. Supposons $m \geq p \geq h$, $m = p + \ell$; $\lim_s (R^m_a)^{+s} = \lim_s (S^p_a)^{+s}$ implique $R^m_a = R^{p+\ell}_a = (S^p_a)^{+\ell}$; $R^{p+\ell}$ et $(S^p)^{+\ell}$ étant deux équations de Lie invariantes par Γ on obtient $R^{p+\ell}_X = (S^p_X)^{+\ell}$ pour $X \in M$; d'où, $R^m = R^{p+\ell} = (S^p)^{+\ell}$. Nous avons ainsi le résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. *Soit (\mathcal{L}, M) un pseudogroupe transitif infinitésimal sur M , L son algèbre formelle en a et h l'entier tel que $J^{m+1}\mathcal{L} = (J^m\mathcal{L})^{+1}$ pour $m \geq h$; alors il existe une application surjective de $I(J^h\mathcal{L})$ sur $I(L)$ et si deux équations différentielles de $I(J^h\mathcal{L})$ ont la même image l'une de ces équations est le prolongement de l'autre.*

Soit $F(L)$ l'ensemble des idéaux fermés de L définis par un feuilletage dans (L, L_0) et $F(J^h\mathcal{L})$ l'ensemble des équations de Lie R^m de $I(J^h\mathcal{L})$ pour lesquelles il existe un sous-fibré vectoriel E de $T(M)$ tel que :

$$\begin{aligned} [E, \mathcal{L}] &\subset \underline{E}; \text{ Ceci implique } [\underline{E}, \underline{E}] \subset \underline{E}. \\ \Pi_0(R^m) &= E \\ R^\infty_a &= \lim_\ell (R^m_a)^{+\ell} = L \cap J^\infty_a E. \end{aligned}$$

Le Théorème 2.1 (5) et le Corollaire 2.1 impliquent :

PROPOSITION 3.1. *Soit (\mathcal{L}, M) un pseudogroupe de Lie infinitésimal transitif sur M et $a \in M$. L étant l'algèbre formelle de \mathcal{L} en a l'application $I(J^h\mathcal{L}) \rightarrow I(L)$ induit une application surjective de $F(J^h\mathcal{L})$ sur $F(L)$.*

§ 4.

Soit (\mathcal{L}, M) un pseudogroupe de Lie infinitésimal transitif sur M ,

$a \in M$ et $L = \lim_h J_a^h \mathcal{L}$ son algèbre formelle en a .

Considérons I un idéal fermé de L et posons $W^h = I/I^h$ pour $h \geq 0$. On a évidemment les propriétés :

$$W^0 \subset V = T_a(M), \quad \Pi : W^h \rightarrow W^{h-1} \quad \text{est surjective,}$$

$$[W^{h+1}, J_a^{h+1} \mathcal{L}]' \subset W^h \quad \text{pour } h \geq 0.$$

Dénotons par p^h le noyau de $W^h \rightarrow W^{h-1}$. On a $p^{h+1} \subset (p^h)^+$ pour $h \geq 1$.

LEMME 4.1. Soient I et J deux idéaux fermés de L et $h \geq 1$ tel que :

- (1) $q^{m+1} = p^{m+1} = (p^m)^+$ pour $m \geq h$.
- (2) $W^m = U^m$ pour $0 \leq m \leq h$.

Alors il existe un isomorphisme de L sur L transportant I sur J .

Preuve. Pour $m \geq 0$, $f \in \Gamma$, $f(a) = a$ induit un isomorphisme linéaire :

$$f^m : J_a^m \mathcal{L} \rightarrow J_a^m \mathcal{L}$$

$$j_a^m X \rightarrow j_a^m f^*(X)$$

tel que, $[f^{m+1}(X), f^{m+1}(y)]' = f^m[X, y]'$; d'autre part, l'inclusion $[W^{m+1}, J_a^{m+1} \mathcal{L}]' \subset W^m$ implique $f^m(W^m) = W^m$ pour $m \geq 0$.

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & q^{h+1} & \longrightarrow & U^{h+1} & \xrightarrow{\Pi} & W^h & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow f^h & & \\ 0 & \longrightarrow & p^{h+1} & \longrightarrow & W^{h+1} & \xrightarrow{\Pi} & W^h & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Montrons que $f^{h+1}(U^{h+1}) = W^{h+1}$. Soient α et β des sections de $W^{h+1} \rightarrow W^h$ et $W^h \rightarrow U^{h+1}$ et définissons $\varphi : W^h \rightarrow J_a^{h+1} \mathcal{L}$ par $\varphi(X) = (f^{h+1} \circ \beta)(X) - (\alpha \circ f^h)(X)$ alors,

$\Pi(\varphi(X)) = f^h((\Pi \circ \beta)(X)) - f^h(X) = f^h(X) - f^h(X) = 0$; donc $\varphi(X) \in g^{h+1}$ pour $X \in W^h$. En plus, $\delta(\varphi(X)) \in V^* \otimes g^h$ est tel que :

$$\begin{aligned} \delta(\varphi(X))(v) &= [\varphi(X), f^{h+1}(y)]' = [f^{h+1}(\beta(X)), f^{h+1}(y)]' - [\alpha(f^h(X)), f^{h+1}(y)]' \\ &= f^h[\beta(X), y]' - [\alpha(f^h(X)), f^{h+1}(y)]' \end{aligned}$$

appartient à W^h , où $v \in V$ est la projection de $f^{h+1}(y)$ pour y dans $J_a^{h+1} \mathcal{L}$.

Ainsi, $\delta(\varphi(X)) \in V^* \otimes p^h$. Par hypothèse, $\varphi(X)$ est dans $p^{h+1} = (p^h)^+$. On a donc une application $\varphi : W^h \rightarrow p^{h+1}$ telle que $f^{h+1}(\beta(X)) = \varphi(X)$

+ $\alpha(f^h(X))$ pour $X \in W^h$; alors $f^{h+1}(U^{h+1}) \subset W^{h+1}$, car $q^{h+1} = p^{h+1}$. De

$$\begin{aligned} \dim W^{h+1} &= \dim W^h + \dim p^{h+1} = \dim W^h + \dim q^{h+1} \\ &= \dim U^{h+1} = \dim f^{h+1}(W^{h+1}), \end{aligned}$$

on obtient,

$f^{h+1}(U^{h+1}) = W^{h+1}$. De $f^{h+1}(U^{h+1}) = U^{h+1}$ on obtient, $W^{h+1} = U^{h+1}$. Un raisonnement analogue prouve que $f^m(W^m) = U^m$ pour $m \geq h + 1$; ainsi $\varphi = \lim_m f^m$ est un isomorphisme de L sur L qui envoie I sur J .
c.q.f.d.

DÉFINITION 4.1. Un ensemble $W^h = \{W^0, W^1, W^2, \dots, W^h\}$ d'espaces vectoriels tel que :

- (1) $W^0 \subset V = T_a(M)$.
- (2) $W^m \subset J_a^m \mathcal{L}$ pour $m \geq 1$ et $m \leq h$.
- (3) $[W^{m+1}, J_a^{m+1} \mathcal{L}]' \subset W^m$, pour $0 \leq m < h - 1$.
- (4) La projection $\Pi : W^{m+1} \rightarrow W^m$ est surjective pour $0 \leq m < h - 1$.

sera dite une algèbre de Lie normale tronquée d'ordre $h \geq 1$.

Pour $m \leq h$ dénotons par p^m le noyau de la projection $\Pi : W^m \rightarrow W^{m-1}$; pour $m \geq h + 1$ posons $p^{m+1} = (p^m)^+$. Dénotons par $H^{j,m}(W^h)$ la cohomologie de Spencer du complexe :

$$\wedge^{j-1} V^* \otimes p^{m+1} \xrightarrow{\delta} \wedge^j V^* \otimes p^m \xrightarrow{\delta} \wedge^{j+1} V^* \otimes p^{m-1}$$

associé à $\{p^m\}_{m \geq 1}$.

LEMME 4.2. Pour $h \geq 1$ soit $W^h = \{W^0, W^1, \dots, W^h\}$ une algèbre de Lie normale tronquée d'ordre h telle que, $H^{1,h-1}(W^h) = H^{2,h-1}(W^h) = 0$. Supposons $g^{h+1} = (g^h)^{h+1}$; alors il existe un sous-espace vectoriel $W^{h+1} \subset J_a^{h+1} \mathcal{L}$ tel que $W^{h+1} = \{W^0, W^1, \dots, W^{h+1}\}$ est une algèbre de Lie normale tronquée d'ordre $h + 1$ et p^{h+1} est $\text{Ker} \{W^{h+1} \rightarrow W^h\}$.

Preuve. Considérons les complexes :

$$(1) \quad \begin{aligned} 0 &\longrightarrow p^{h+1} \xrightarrow{\delta} (J_a^h \mathcal{L})^* \otimes p^h \xrightarrow{\delta} \wedge^2 (J_a^h \mathcal{L})^* \otimes p^{h-1} \\ &\xrightarrow{\delta} \wedge^3 (J_a^h \mathcal{L})^* \otimes p^{h-2}. \end{aligned}$$

et

$$(2) \quad 0 \longrightarrow g^{h+1} \xrightarrow{\delta} (J_a^h \mathcal{L})^* \otimes g^h \xrightarrow{\delta} \wedge^2 (J_a^h \mathcal{L})^* \otimes g^{h-1}.$$

Les hypothèses impliquent (1) et (2) exactes. Pour définir W^{h+1} nous allons construire une section $\gamma: W^h \rightarrow J_a^{h+1} \mathcal{L}$ telle que $[\gamma(W^h), J_a^{h+1} \mathcal{L}]' \subset W^h$. Ainsi $W^{h+1} = \text{im } \gamma + p^{h+1}$ vérifie le lemme.

Pour $X \in W^h$ posons $\varphi_X(y) = \mathcal{L}[X, y]' - [\beta(X), \beta(y)]'$ pour $y \in J_a^h \mathcal{L}$ où α et β sont des sections de $W^h \rightarrow W^{h-1}$ et $J_a^{h+1} \mathcal{L} \rightarrow J_a^h \mathcal{L}$; alors, $\Pi(\varphi_X(y)) = [X, y]' - [\Pi\beta(X), \Pi\beta(y)]' = 0$, d'où, φ_X est à valeurs dans g^h . En plus, pour y, z dans $J_a^h \mathcal{L}$ on a :

$$(\delta\varphi_X)(y, z) = [\varphi_X(z), y]' - [\varphi_X(y), z]' = [\alpha[y, z]', X]' - [[\beta(y), \beta(z)]', X]'$$

Ainsi, $\delta\varphi_X: \wedge^2 (J_a^h \mathcal{L}) \rightarrow p^{h-1}$; de $\delta\delta\varphi_X = 0$ on a l'existence d'une application $\psi_X: J_a^h \mathcal{L} \rightarrow p^h$, telle que $\delta\psi_X = \delta\varphi_X$. Ceci implique que $\varphi_X - \psi_X$ de $J_a^h \mathcal{L}$ dans g^h est un cocycle; de $g^{h+1} = (g^h)^{+1}$ on obtient un élément $\eta_X \in g^{h+1}$ tel que $\delta\eta_X = \varphi_X - \psi_X$; d'où, l'existence d'une application linéaire $\eta: W^h \rightarrow g^{h+1}$ telle que $\eta(X) = \eta_X = \varphi_X - \psi_X$. Posons $\gamma = \beta + \eta$; alors, pour $X \in W^h$ et $y \in J_a^{h+1} \mathcal{L}$ on obtient :

$$\begin{aligned} [\gamma(X), y]' &= [\eta(X) + \beta(X), y]' = (\varphi_X - \psi_X)(\Pi(y))' + [\beta(X), y]' \\ &= \alpha([X, \Pi(y)]') - [\beta(X), \beta(\Pi(y))]' - [\psi_X, \Pi(y)]' + [\beta(X), y]' \\ &= \mathcal{L}([X, \Pi(y)]') - [\psi_X, \Pi(y)]' + [\beta(X), y - \beta\Pi(y)]' \end{aligned}$$

qui est dans W^h ; d'où, $[\text{im } \gamma, J_a^{h+1} \mathcal{L}]' \subset W^h$; ceci entraîne notre résultat.
c.q.f.d.

THÉORÈME 4.1. *Soit (\mathcal{L}, M) un pseudogroupe de Lie infinitésimal transitif sur M , L son algèbre formelle en $a \in M$ et $W^h = \{W^0, W^1, \dots, W^h\}$ une algèbre de Lie normale tronquée d'ordre $h \geq 1$ telle que $H^{1,m} = H^{2,m}(W_h) = 0$, pour $m \geq h - 1$. Supposons $g^{m+1} = (g^m)^{+1}$ pour $m \geq h$; alors il existe un idéal fermé I de L ayant W^h comme algèbre tronquée d'ordre h . En plus, si J est un autre idéal de L d'algèbre tronquée W^h , alors il existe un isomorphisme de L transportant I sur J si $q^{m+1} = p^{m+1}$ pour $m \geq h$.*

Preuve. Ces résultats découlent du Lemme 4.2 et du Lemme 4.1.
c.q.f.d.

REFERENCES

- [1] Isao Hayashi, Embedding and Existence theorems of infinite Lie algebra, J. Math.

- Soc. Japan, Vol. 22, 1970.
- [2] H. Goldschmidt, Sur la structure des équations de Lie III, La cohomologie de Spencer, J. of Diff. Geometry, Vol. 11, No. 2, 1976.
- [3] Pierre Molino, Théorie des G -Structure: Le problème d'équivalence, Lectures Notes in Mathematics, Springer Verlag, No. 588, 1977.
- [4] Ngo Van Quê et A. A. M. Rodriguês, Troisième théorème fondamental de réalisation de Cartan, Annales de l'Institut Fourier (Grenoble), 1975.

*Universite des Sciences and Techniques
du Languedoc
Mathématiques-Montpellier*