Can. J. Math., Vol. XXV, No. 4, 1973, pp. 733–747

GÉNÉRATRICES EXTRÉMALES D'UN CÔNE DE FONCTIONNELLES LINÉAIRES POSITIVES INVARIANTES

JACQUES DUBOIS

1. Introduction. Si S est un espace topologique compact séparé et si $\phi : S \to S$ est une fonction continue, l'opérateur: $A : C(S) \to C(S)$, défini par $Ag = g \circ \phi$ est linéaire positif tel que $Ae = e$ (sur $C(S)$ nous considérons le cône usuel et e désigne la fonction identiquement 1 sur S). Le cône K des mesures de Borel μ sur S qui sont positives, finies et telles que $A^*\mu = \mu$, est réticulé, non trivial, et comme on a $A^*\mu = \mu$ si et seulement si $\mu(\phi^{-1}(A)) = \mu(A)$ pour chaque borélien A de S, il est bien connu (voir par exemple [**2**, pa. 219 et sq.]) que μ appartient à une génératrice extrémale de K (dit le cône des mesures ϕ-invariantes) $\Leftrightarrow \mu$ est une mesure ergodique (c'est-à-dire que si A est un borélien de S tel que $\phi^{-1}(A) = A$ alors $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = \mu(S)$).

D'autre part, chaque $\mu \in K$ permet de définir une semi-norme sur $C(S)$ par la formule:

$$|g|_\mu = \int_S |g| d\mu$$

qui induit une norme sur $C(S)/W_\mu$ où $W_\mu = \{g \in C(S); |g|_\mu = 0\}$. Sur l'espace $L^1(\mu)$, le complété de $C(S)/W_\mu$, on peut définir l'opérateur $\hat{A}_\mu$ par: $\hat{A}_\mu h = h \circ \phi$ de sorte que, si μ est ergodique l'ensemble $\{h \in L^1(\mu); \hat{A}_\mu h = h\}$ est le sous-espace engendré par la fonction e (voir par exemple [**8**, pa. 25]). La réciproque est aussi vraie. Nous avons donc le théorème suivant qui est bien connu et qui sera un cas très particulier du Théorème 7.2 de ce travail.

THÉORÈME. *Soit S un espace topologique compact séparé. Si $\phi : S \to S$ est une fonction continue, alors une mesure μ appartient à une génératrice extrémale du cône* $K = \{\mu \in C(S)'; \mu \geqq 0$ *et pour chaque* $f \in C(S)$:

$$\left.\int f(\phi(s))d\mu(s) = \int f(s)d\mu(s)\right\} \Leftrightarrow \{h \in L^1(\mu); h \circ \phi = h\}$$

est un sous-espace unidimensionnel.

Notre but est de généraliser ce résultat dans la direction suivante: remplacer $C(S)$ par un espace vectoriel ordonné V possédant une unité e pour l'ordre, remplacer l'opérateur "changement de variables" sur $C(S)$ par un opérateur linéaire positif, $A : V \to V$, quelconque mais tel que $Ae = e$, considérer le

Reçu le 9 mars, 1972 et en revu forme, le 29 mai, 1972. L'auteur a reçu l'octroi No. A-8133 du Conseil National de recherches du Canada.

même cône $K = \{ f \in V^*;\ f \geqq 0,\ A^*f = f \}$ et chercher à déterminer les génératrices extrémales de K.

Nous allons procéder ainsi: à chaque $f \in K$ nous allons associer un espace de Banach $\hat{V}_f$, et un opérateur $\hat{A}_f : \hat{V}_f \to \hat{V}_f$ (tout ceci de telle sorte que dans le cas particulier où $V = C(S)$ et $f = \mu$ est une mesure positive sur S, alors $\hat{V}_\mu = L^1(\mu)$ et si $A : C(S) \to C(S)$ est défini par $Ag = g \circ \phi$ alors $\hat{A}_\mu h = h \circ \phi (h \in L^1(\mu))$ et essayer d'obtenir le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soit V un espace vectoriel réel ordonné avec une unité e. Soit $A : V \to V$ un opérateur linéaire positif tel que $Ae = e$. Alors la fonctionnelle linéaire $f \neq 0$ appartient à une génératrice extrémale du cône $K = \{ f \in V^*;\ f \geqq 0, A^*f = f \} \Leftrightarrow \{x \in \hat{V}_f; \hat{A}_f x = x\}$ est un sous-espace unidimensionnel de $\hat{V}_f$.*

Dans ce travail nous n'arrivons pas à prouver entièrement cette équivalence. Nous montrons cependant que l'implication $\Rightarrow$ est toujours valide (Théorème 7.1) tandis que l'implication $\Leftarrow$ est vraie dans au moins deux cas bien importants: celui où V est réticulé et celui où V n'est pas réticulé mais où par contre $\hat{V}_f$ est réflexif (Théorème 7.2), ce qui est le cas lorsque $V = \mathbf{R}^n$ et que le cône des éléments positifs de $\mathbf{R}^n$ possède une base qui n'est pas un simplexe.

Nous retrouvons dans Schaefer [**12**; **13**] une autre motivation pour ce résultat et nous verrons aussi que nous englobons certains résultats de ce dernier. Schaefer étudie les opérateurs linéaires positifs sur $V = C(S)$, S un compact Hausdorff. Soit donc A un tel opérateur tel que $Ae = e$ (on dit que A est markovien) et utilisons sa terminologie. On a:

(i) [**12**, Théorème 2, pa. 712] Supposons de plus que A est un opérateur ergodique. Si μ appartient à une génératrice extrémale du cône K, alors

$$W_\mu = \left\{ f \in C(S);\ \int |f| d\mu = 0 \right\}$$

est un A-idéal maximal de $C(S)$. Inversement si J est un A-idéal maximal de $C(S)$, il existe une mesure μ appartenant à une génératrice extrémale de K telle que $J = \{ f \in C(S);\ \langle \mu, |f| \rangle = 0\}$.

(ii) En utilisant (i), le corollaire à la Proposition 2 de [**12**, pa. 708] et [**13**, Proposition 14, pa. 529] on obtient: Si A est un opérateur positif sur $C(S)$ qui est markovien, ergodique, $||A|| \leqq 1$, et si μ est une mesure qui appartient à une génératrice extrémale du cône K on a que $\{g \in C(S)/W_\mu;\ A_{w_\mu} g = g\}$ est de dimension 1.

L'approche de Schaefer dépend énormément du fait que dans $C(S)$ les idéaux (au sens de l'ordre) fermés et les idéaux (au sens algébrique) fermés coincident, ce qui rend ses techniques inutilisables dans un contexte plus général. Nous allons employer une méthode différente qui nous permettra en particulier de retrouver ce dernier résultat en laissant tomber les hypothèses $||A|| \leqq 1$ et A ergodique et nous allons même obtenir une réciproque.

2. Notations et résultats préliminaires. Soit $\langle V, \geqq \rangle$ un espace vectoriel ordonné sur le corps des nombres réels. Nous désignerons par $C = \{x \in V; x \geqq 0\}$ son cône des éléments positifs et par $C^* = \{f \in V^*; f(x) \geqq 0$ pour chaque $x \in V\}$ le cône des fonctionnelles linéaires et positives sur V. Plus loin, nous exigerons l'existence d'une unité pour l'ordre, mais pour le moment nous allons simplement supposer que V est engendré par ses éléments positifs.

A chaque $f \in C^*$ on peut associer une semi-norme définie sur V de la façon suivante:

$$|x|_f = \inf \{ f(v) - f(u); u \leqq x \leqq v, u \leqq 0 \leqq v\} \qquad (x \in V). \tag{1}$$

Les propriétés fondamentales de la fonctionnelle $|\cdot|_f$ sont résumées dans le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si $f \in C^*$, $|\cdot|_f$ est une semi-norme sur V telle que*
(a) $x \geqq 0 \Rightarrow |x|_f = f(x)$
(b) $|f(x)| \leqq |x|_f$; *pour tout* $x \in V$
(c) *Si de plus V est réticulé, $|x|_f = f(|x|)$, pour tout $x \in V$.*

Preuve. Le lecteur trouvera la preuve de ce théorème dans [**4**] sauf pour l'affirmation (c) que nous vérifions de ce pas. La positivité de f et les relations:

$$- x^- \leqq 0 \leqq x^+, \quad - x^- \leqq x \leqq x^+$$

donnent immédiatement: $|x|_f \leqq f(x^+) - f(- x^-) = f(|x|)$. D'autre part, pour chaque u et v éléments de V tels que $u \leqq 0 \leqq v$, $u \leqq x \leqq v$, on a: $v \geqq x \vee 0 = x^+$ et $- u \geqq 0 \vee (- x) = x^-$, d'où $f(v) \geqq f(x^+)$, $- f(u) \geqq f(x^-)$, ce qui entraîne $|x|_f \geqq f(|x|)$.

3. Construction de l'espace de Banach ordonné $\hat{V}_f$. Soit $f \in C^*$ une fonctionnelle donnée. Dénotons par W_f le sous-espace de V:

$$W_f = \{x \in V; |x|_f = 0\}. \tag{2}$$

Si $x \in W_f$, $y \in W_f$ et $z \in V$ est tel que $x \leqq z \leqq y$, on a

$$0 \leqq f(z - x) \leqq f(y - x) = |y - x|_f = 0$$
$$\Rightarrow z - x \in W_f \Rightarrow z \in W_f$$

et donc W_f est un *idéal* de V.

Posons:

$$V_f = \frac{V}{W_f} \tag{3}$$

et notons par $\bar{x}$ la classe d'équivalence d'un élément x de V.

Si $\phi : V \rightarrow V_f$ désigne la projection canonique, $\phi(C)$ est un cône de V_f (puisque W_f est un idéal de V) et on notera encore par $\geqq$ la relation d'ordre induite par ce cône sur V_f. Cette relation est donnée par:

$$\bar{x} \geqq \bar{0} \Leftrightarrow \textit{il existe } y \in C \textit{ tel que } x - y \in W_f. \tag{4}$$

Ainsi $\langle V_f, \geqq \rangle$ devient un espace vectoriel ordonné engendré par ses éléments positifs. D'autre part, si on pose:

$$(5) \qquad ||\bar{x}|| = |x|_f \qquad (\bar{x} \in V_f)$$

on définit une norme sur V_f telle que

$$(6) \qquad \bar{x} \geqq \bar{0} \Rightarrow ||\bar{x}|| = f(x).$$

En effet, $\bar{x} \geqq \bar{0} \Rightarrow$ il existe $y \in C$ tel que $x - y \in W_f \subseteq \operatorname{Ker} f = \{x \in V; f(x) = 0\}$ (cette inclusion est vraie en vertu de l'inégalité:

$$|f(x)| \leqq |x|_f) \Rightarrow f(x) = f(y) = |y|_f$$

mais

$$0 \leqq ||x|_f - |y|_f| \leqq |x - y|_f = 0 \Rightarrow ||\bar{x}|| = |x|_f = |y|_f = f(x).$$

On dénote par

(7) $\hat{V}_f$ = *l'espace de Banach obtenu par complétion de l'espace normé* V_f.

On notera encore par $|| \cdot ||$ la norme sur $\hat{V}_f$ et pour éviter un abus de notation, les éléments de $\hat{V}_f$ seront notés $x, y, z, \ldots$, comme ceux de V, mais ceci ne créera pas de confusion.

Le cône des éléments positifs de $\hat{V}_f$ est dénoté $\hat{C}$ et défini comme:

(8) $\hat{C}$ = *la fermeture dans* $\hat{V}_f$ *du cône* $\phi(C)$.

Cette définition munit $\hat{V}_f$ d'une relation d'ordre qui soit compatible avec sa structure algébrique et qui soit une extension de l'ordre sur V_f. En effet, tout ce que nous devons vérifier est l'affirmation: $x \in \hat{C}$ et $-x \in \hat{C} \Rightarrow x = 0$.

Mais si $\{\bar{x}_n\}$ et $\{\bar{y}_n\}$ sont deux suites de $\phi(C)$ telles que $\bar{x}_n \to x$ et $\bar{y}_n \to -x$, on a

$$\overline{x_n + y_n} \to 0 \quad \text{et} \quad \bar{0} \leqq \bar{x}_n \leqq \overline{x_n + y_n},$$

ce qui, en vertu de (6), entraîne

$$||\bar{x}_n|| \leqq ||\overline{x_n + y_n}|| \to 0$$

et donc que $\bar{x}_n \to 0 = x$.

D'autre part, comme $W_f \subseteq \operatorname{Ker} f$, la fonctionnelle $\bar{f}$ définie sur V_f par:

$$(9) \qquad \bar{f}(\bar{x}) = f(x) \qquad (\bar{x} \in V_f)$$

est une fonctionnelle linéaire positive et continue de norme inférieure ou égale à 1, et donc elle possède une unique extension continue:

$$(10) \qquad F : \hat{V}_f \to R$$

F fonctionnelle linéaire positive sur $\hat{V}_f$ de norme $||F|| \leqq 1$.

On obtient alors très facilement la proposition suivante:

PROPOSITION 3.1.
(a) $x \in \hat{V}_f, x \geqq 0 \Rightarrow ||x|| = F(x)$.
(b) *Le cône $\hat{C}$ est un cône normal, c'est-à-dire que* $0 \leqq x \leqq y \Rightarrow ||x|| \leqq ||y||$.
(c) $x \geqq 0, y \geqq 0 \Rightarrow ||x + y|| = ||x|| + ||y||$.
(d) $x \geqq 0, x \neq 0 \Rightarrow F(x) > 0$.

(nous gardons encore la notation $\geqq$ pour désigner l'ordre induit sur $\hat{V}_f$ par le cône $\hat{C}$.)

4. Etude du dual fort de $\hat{V}_f$: $\hat{V}_f'$. Les fonctionnelles linéaires continues sur $\hat{V}_f$ seront dénotées par $G, H, \ldots$, et nous réserverons la lettre F pour désigner la fonctionnelle sur $\hat{V}_f$ issue de la fonctionnelle f sur V donnée au départ. L'espace $\hat{V}_f'$ est ici considéré comme espace de Banach, muni de la norme issue de la norme que nous avons définie sur $\hat{V}_f$, et ordonné par le cône $\hat{C}^*$ (c'est un cône saillant puisque $\phi(C)$ engendre V_f et donc $\hat{C} - \hat{C}$ est dense dans $\hat{V}_f$).

PROPOSITION 4.1. *F est une unité (pour l'ordre) de $\hat{V}_f'$.*

Preuve. Si $G \in \hat{V}_f'$ et si $x \in \hat{C}$ on a:

$$G(x) \leqq |G(x)| \leqq ||G|| \, ||x|| = ||G|| \, F(x)$$

d'où:

$$G \leqq ||G|| \, F.$$

En particulier (4.1) nous dit que le cône $\hat{C}^*$ engendre $\hat{V}_f'$. Voyons tout de suite une conclusion analogue beaucoup plus forte:

THÉORÈME 4.2. *Si G est une fonctionnelle linéaire continue sur $\hat{V}_f$, alors il existe deux fonctionnelles linéaires positives et continues, G_1, G_2, sur $\hat{V}_f$ telles que:*

$$G = G_1 - G_2 \text{ et } ||G_i|| \leqq ||G|| \qquad (i = 1, 2).$$

Remarque. Si nous utilisons (3.1 (b)) et [**11**, Proposition 1.27, pa. 76] nous obtenons le Théorème 4.2 mais avec $||G_i|| \leqq M\,||G||$. Donc une partie importante du Théorème 4.2 est le fait que M peut être choisi $\leqq 1$, et alors la Proposition 3.1, le Théorème 4.2 et d'autres résultats que nous obtiendrons (4.3, 4.4, 4.5, 4.7) nous montrent que $\hat{V}_f$ se "comporte" du point de vue de la norme comme un espace L^1 et $\hat{V}_f'$ comme un espace L^∞, ce que nous ne pourrions conclure sans savoir que $M \leqq 1$. Pour obtenir ce résultat nous utilisons une preuve différente et indépendante de [**11**].

Preuve de 4.2. Soit: $K' = \{G \in \hat{V}_f'; G \in \hat{C}^* \text{ et } ||G|| \leqq 1\}$. Vérifions que $K' = [0, F] = \{G; 0 \leqq G \leqq F\}$. L'inclusion: $K' \subseteq [0, F]$ est facile et dépend du fait que si $x \in \hat{C}$ on a $||x|| = F(x)$. Pour montrer l'inclusion inverse remarquons tout d'abord que si $g \in V^*$ est telle que $0 \leqq g \leqq f$ on a

(*) $$|g(x)| \leqq |x|_f \text{ pour } x \in V$$

(En effet pour chaque $u, v \in V$ tels que $u \leqq 0 \leqq v$, $u \leqq x \leqq v$ on a alors $f(v) - f(u) \geqq f(v) \geqq g(v) \geqq g(x)$). L'inégalité (*) nous permet de définir pour chaque $g \in V^*$ telle que $0 \leqq g \leqq f$, une fonctionnelle linéaire $\bar{g}$ positive, $||\bar{g}|| \leqq 1$, sur V_f par $\bar{g}(\bar{x}) = g(x)$.

D'autre part si $G \in \hat{V}_f'$ est telle que $0 \leqq G \leqq F$ et si $\bar{g}$ désigne la restriction de G à $\hat{V}_f$ on a $0 \leqq \bar{g} \leqq \bar{f}$ et alors définissant $g \in V^*$ par $g(x) = \bar{g}(\bar{x})$ $(x \in V)$ on a $0 \leqq g \leqq f$ et donc $|g(x)| \leqq |x|_f$ $(x \in V)$ d'où $||G|| \leqq 1$, ce qui montre que $[0, F] \subseteq K'$.

De là le lecteur vérifiera facilement que $[-F, F] = K' - K'$. Mais alors si $G \in V_f'$ et $||G|| \leqq 1$ on a pour chaque $x \in \hat{C}$,

$$|G(x)| \leqq ||x|| = F(x) \Rightarrow -F \leqq G \leqq F \Rightarrow G \in K' - K',$$

c'est-à-dire que $G = G_1 - G_2$ avec $G_1, G_2 \in \hat{C}^*$ et $||G_i|| \leqq 1$. Le cas général d'une fonctionnelle $G \in \hat{V}_f'$, $G \neq 0$, suit directement en considérant $G/||G||$.

PROPOSITION 4.3. $B' = \{G \in \hat{V}_f';\ ||G|| \leqq 1\}$, *la boule unité de* $\hat{V}_f'$, *est précisément l'intervalle* $[-F, F] = \{G \in \hat{V}_f';\ -F \leqq G \leqq F\}$. *En particulier on a:*

$$||x|| = \sup \{|G(x)|; G \in \hat{V}_f' \text{ et } -F \leqq G \leqq F\} \qquad (x \in \hat{V}_f).$$

Preuve. Dans la preuve de (4.2) on a vérifié que $B' \subseteq [-F, F]$. D'autre part, si $g \in V^*$, si $-f \leqq g \leqq f$, si $u, v, x \in V$ sont tels que $u \leqq 0 \leqq v$, $u \leqq x \leqq v$ on a:

$$\begin{aligned} 2g(x) &= (g - f)(x) + (g + f)(x) \leqq (g - f)(u) + (g + f)(v) \\ &= f(v) - f(u) + g(v) + g(u) \leqq f(v) - f(u) + f(v) - f(u) \end{aligned}$$

d'où: $g \in V^*$ et $-f \leqq g \leqq f \Rightarrow |g(x)| \leqq |x|_f$ $(x \in V)$. On déduit alors que $[-F, F] \subseteq B'$.

COROLLAIRE 4.4. *Soit* $G \in \hat{V}_f'$. *Alors:* $||G|| \leqq 1 \Leftrightarrow$ *il existe deux fonctionnelles linéaires sur* $\hat{V}_f$, G_1 *et* G_2, *telles que:*

$$G = G_1 - G_2, \quad G_i \geqq 0, \quad ||G_i|| \leqq 1 \qquad (i = 1, 2).$$

COROLLAIRE 4.5. *Si pour* $G \in \hat{V}_f'$ *on pose:*

$p(G) = \inf \{\lambda > 0;\ -\lambda F \leqq G \leqq \lambda F\}$ = *la jauge de l'intervalle* $[-F, F]$ *on a*

$$||G|| = p(G).$$

En particulier le cône $\hat{C}^*$ *de* $\hat{V}_f'$ *est un cône normal (pour la topologie forte de* $\hat{V}_f'$).

COROLLAIRE 4.6. *F est un point intérieur du cône* $\hat{C}^*$.

Preuve. Si $G \in \hat{V}_f'$, $||G|| \leqq 1$, on a $G \in [-F, F]$ et donc $F \pm G \in \hat{C}^*$.

THÉORÈME 4.7. (a) *Pour chaque* $x \in \hat{V}_f$ *et chaque* $\epsilon > 0$, *il existe deux éléments* $y, z \in \hat{C}$ *tels que* $x = y - z$ *et* $||y|| + ||z|| \leqq (1 + \epsilon)||x||$.

(b) *Si V est réticulé, pour chaque $x \in \hat{V}_f$ il existe deux éléments y, $z \in \hat{C}$ tels que $x = y - z$ et $||x|| = ||y|| + ||z||$.*

Preuve. Si $G_1 \leqq G_2 \leqq G_3$ sont trois éléments de $\hat{V}_f'$ et si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_3 > 0$ sont tels que $-\lambda_1 F \leqq G_1 \leqq \lambda_1 F$; $-\lambda_3 F \leqq G_3 \leqq \lambda_3 F$, on a:

$-(\max\{\lambda_1, \lambda_3\})F \leqq G_2 \leqq (\max\{\lambda_1, \lambda_3\})F$ et donc $||G_2|| \leqq \max(||G_1||, ||G_3||)$.

Il est maintenant immédiat de vérifier que les hypothèses de [**6**, Théorème 8] sont satisfaites et ainsi on obtient (a).

D'autre part, si V est réticulé, on montrera (Théorème 6.1) que $\hat{V}_f$ est aussi réticulé. Pour $n = 1, 2, \ldots$ soient y_n, z_n des éléments de $\hat{C}$ tels que $x = y_n - z_n$ et $||y_n|| + ||z_n|| \leqq (1 + 1/n)||x||$. Mais alors $y_n \geqq x^+$, $z_n \geqq x^-$, et donc:

$$||y_n|| = ||x^+|| + ||y_n - x^+||,\ ||z_n|| = ||x^-|| + ||z_n - x^-||$$

ce qui entraîne:

$$\begin{aligned}(1 + 1/n)||x|| &\geqq ||x^+|| + ||x^-|| + ||y_n - x^+|| + ||z_n - x^-|| \\ &\geqq ||x|| + ||y_n - x^+|| + ||z_n - x^-||\end{aligned}$$

D'où $y_n \to x^+$, $z_n \to x^- \Rightarrow x = x^+ - x^-$ avec $||x|| = ||x^+|| + ||x^-||$.

5. Définition de l'opérateur $\hat{A}_f$. Supposons que $A : V \to V$ est un opérateur linéaire positif tel que

$$(11) \qquad f(Ax) = f(x) \qquad (x \in V)$$

où $f \in C^*$ est la fonctionnelle linéaire donnée.

Alors si $u \in V$, $v \in V$ sont tels que

$$u \leqq x \leqq v, \quad u \leqq 0 \leqq v,$$

on a:

$$Au \leqq Ax \leqq Av, \quad Au \leqq 0 \leqq Av$$

et donc:

$$|Ax|_f \leqq f(Av) - f(Au) = f(v) - f(u).$$

D'où

$$(12) \qquad |Ax|_f \leqq |x|_f \qquad (x \in V).$$

De (12) il suit que (11) entraîne que $A(W_f) \subseteq W_f$ et donc on peut définir un opérateur linéaire:

$$A_f : V_f \to V_f$$

par

$$(13) \qquad A_f(\bar{x}) = \overline{Ax} \qquad (\bar{x} \in V_f).$$

Il est immédiat de vérifier que A_f est un opérateur linéaire positif sur V_f tel que $||A_f|| \leqq 1$ et $\bar{f}(A_f\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x})$ pour $\bar{x} \in V_f$.

On dénote par:

$$(14) \qquad \hat{A}_f : \hat{V}_f \to \hat{V}_f$$

l'extension linéaire continue de A_f. $\hat{A}_f$ est un opérateur linéaire continu de norme. $||\hat{A}_f|| \leqq 1$, positif, tel que $\hat{A}_f{}^*F = F$.

Remarque. Il est clair que $\hat{A}_f$ restreint à $\hat{C}$ est une isométrie, mais il faut se garder de penser que $\hat{A}_f$ est une isométrie. L'exemple suivant est convaincant. Soit $V = \mathbf{R}^n$ avec cône $C = \{x = (x_i); x_i \geqq 0\}$, soit $x_0 = (x_i{}^0) \in \mathbf{R}^n$ un point dont toutes les composantes sont strictement positives. Alors x_0 est une unité de V et en même temps x_0 définit une fonctionnelle linéaire positive f sur V, et on a pour $x = (x_i)$, $|x|_f = f(|x|) = \sum_{i=1}^n x_i{}^0|x_i| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Donc $\hat{V}_f = \mathbf{R}^n$ et $\hat{C} = C$. Si on prend $f = (1, 1, \ldots, 1) \in C^*$ et

$$A = \begin{bmatrix} 0 & . & . & . & 0 \\ & . & . & . & \\ 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 1 & . & . & 1 \end{bmatrix},$$

A est un opérateur linéaire positif tel que $A^*f = f$, et pour chaque $x \neq 0$ tel que $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ on a:

$$0 = ||Ax|| < \sum_{i=1}^{n} |x_i| = ||x||.$$

6. Etude de la convergence de la suite $\{(\hat{A}_f)_n x\}$**.** Pour $n = 1, 2, 3, \ldots,$ on définit l'opérateur sur $\hat{V}_f$:

$$(\hat{A}_f)_n = (1/n)(\hat{A}_f + \hat{A}_f{}^2 + \ldots + \hat{A}_f{}^n). \tag{15}$$

Pour simplifier l'écriture on posera désormais $(\hat{A}_f)_n = \hat{A}_n$ et $\hat{V}_f = \hat{V}$, laissant tomber l'indice f quand ceci ne portera pas à confusion.

Dans cette section, nous développons un outil essentiel pour arriver au théorème de caractérisation 7.2: nous tentons d'obtenir, pour l'espace $\hat{V}$ et l'opérateur $\hat{A}$, l'analogue du théorème ergodique moyen de Von Neumann, généralisé par Yosida, Kakutani et beaucoup d'autres. C'est-à-dire que nous tentons de répondre à la question suivante: étant donné $x \in \hat{V}$, peut-on trouver un élément y de $\hat{V}$ tel que $\hat{A}_n x \rightarrow y$ (au sens de la norme sur $\hat{V}$).

Sous l'hypothèse supplémentaire où l'espace vectoriel V est réticulé pour l'ordre induit par le cône C, nous obtenons une réponse affirmative à notre question.

THÉORÈME 6.1. *Soit V un espace vectoriel sur le corps des réels ordonné par un cône C, et supposons que V possède une unité, notée e, pour son ordre.*

Soit $f \in C^*$ et soit $A : V \rightarrow V$ un opérateur linéaire positif tel que $A^*f = f$ et $Ae \leqq e$.

Alors, si V est réticulé, pour chaque $x \in \hat{V}_f$ il existe un $y \in \hat{V}_f$ tel que

$$(\hat{A}_f)_n x \rightarrow y.$$

Preuve. Commençons par vérifier que si V est réticulé, alors $\hat{V}_f$ est aussi réticulé (pour l'ordre induit par le cône $\hat{C}$).

Si $x \in W_f$ et si $y \in V$ est tel que $|y| \leqq |x|$ on a $|y|_f = f(|y|) \leqq f(|x|) = |x|_f = 0$, donc $y \in W_f$, et il suit que V_f, ordonné par le cône $\phi(C)$, est réticulé, le sup (resp. inf) entre deux éléments étant donnés par la formule

$$\bar{x} \vee \bar{y} = \overline{x \vee y}, \qquad \bar{x} \wedge \bar{y} = \overline{x \wedge y} \qquad (\bar{x}, \bar{y} \in V_f).$$

On remarque de plus la relation suivante:

$$(16) \qquad \bar{x}, \bar{y} \in V_f, \quad |\bar{x}| \leqq |\bar{y}| \Rightarrow \|\bar{x}\| \leqq \|\bar{y}\|.$$

Sachant que si x, y, z sont trois éléments d'un espace vectoriel réticulé on a la relation:

$$|x \vee z - z \vee y| \leqq |x - y|$$

on déduit immédiatement de (16) que l'application:

$$\vee : V_f \times V_f \to V_f; \; (\bar{x}, \bar{y}) \to \bar{x} \vee \bar{y},$$

est uniformément continue par rapport à la norme $\|\cdot\|$ Donc si ξ, $\eta \in \hat{V}_f$, si $\{\bar{x}_n\}$ et $\{\bar{y}_n\}$ sont des suites de V_f telles que $\bar{x}_n \to \xi$, $\bar{y}_n \to \eta$, il suit que la suite $\{\bar{x}_n \vee \bar{y}_n\}$ est une suite de Cauchy et tend vers une limite dans $\hat{V}_f$ indépendante des suites $\{\bar{x}_n\}$ et $\{\bar{y}_n\}$. Dénotons cette limite par $\xi \vee \eta$:

$$(17) \qquad \xi \vee \eta = \lim_{n \to \infty} \bar{x}_n \vee \bar{y}_n.$$

Enfin, utilisant le fait que $\hat{C}$ est un cône fermé et à nouveau la continuité de $\vee$ on vérifie sans peine que $\xi \vee \eta$ est effectivement le supremum entre ξ et η; ce qui complète la preuve du fait que $\hat{V}_f = \hat{V}$ est réticulé.

Soit maintenant $\bar{x} \in V_f$, $\bar{x} \geqq \bar{0}$, et soit $M > 0$ tel que $\bar{x} \leqq M\bar{e}$. L'hypothèse $Ae \leqq e$, et la positivité de A entraînent $\hat{A}_n\bar{x} \leqq M\bar{e}$ pour $n = 1, 2, \ldots$. Puisque $\|\hat{A}\| \leqq 1$, on peut appliquer le "mean ergodic theorem in abstract (L)-spaces" de Kakutani [**9**], et on obtient que pour chaque $\bar{x} \in V_f$, $\bar{x} \geqq \bar{0}$, il existe $y \in \hat{V}$ tel que $\hat{A}_n\bar{x} \to y$. Comme $\phi(C)$ engendre V_f nous pouvons enlever la restriction $\bar{x} \geqq \bar{0}$. Si $x \in \hat{V}_f$, si $\{\bar{x}_m\}$ est une suite de V_f telle que $\bar{x}_m \to x (m \to \infty)$, si, pour chaque m, $y_m \in \hat{V}_f$ est tel que $\hat{A}_n\bar{x}_m \to y_m (n \to \infty)$, et si $y \in \hat{V}_f$ est égal à $\lim_{m\to\infty} y_n$

$$(\|y_k - y_l\| = \lim_{n\to\infty}\|\hat{A}_n(\bar{x}_k - \bar{x}_l)\| \leqq \|\bar{x}_k - \bar{x}_l\|)$$

on a

$$(18) \qquad \hat{A}_n x \to y \quad (n \to \infty).$$

En effet, pour chaque m,

$$\begin{aligned} \|\hat{A}_n x - y\| &\leqq \|\hat{A}_n x - \hat{A}_n\bar{x}_m\| + \|\hat{A}_n\bar{x}_m - y_m\| + \|y_m - y\| \\ \Rightarrow 0 &\leqq \lim\inf_n\|\hat{A}_n x - y\| \leqq \lim\sup_n\|\hat{A}_n x - y\| \\ &\leqq \|x_m - x\| + \|y_m - y\| \end{aligned}$$

et en laissant tendre m vers l'infini dans cette dernière inégalité, on obtient (18).

Notes. 1. Au cours de la preuve du théorème précédent, nous avons démontré en particulier le résultat intéressant suivant: soit X un espace normé et K un cône de X. Si X est réticulé pour l'ordre induit par K et si la norme de X vérifie la condition: $|x| \leqq |y| \Rightarrow ||x|| \leqq ||y||$, alors $\hat{X}$, la complétion de X, est un espace de Banach ordonné si on le munit de l'ordre induit par $\hat{K}$, la fermeture de K dans $\hat{X}$, et $\hat{X}$ est réticulé pour cet ordre.

2. Dans le Théorème 6.1, la condition $Ae \leqq e$ est essentielle. C'est ce que fait voir l'exemple suivant. Prendre $V = \{f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R};\ f$ bornée et $f(x) = 0$ si $x < 0\}$ muni du cône usuel et avec l'unité $e[e(x) = 1$ si $x \geqq 0$ et $e(x) = 0$ si $x < 0]$, prendre comme fonctionnelle positive sur V la fonctionnelle ϕ définie par:

$$\phi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{2^n} \qquad (f \in V)$$

et comme opérateur positif $A : V \rightarrow V$

$$Af(x) = 2f(x-1) \qquad (f \in V, x \in \mathbf{R})$$

Si μ désigne la mesure sur $\mathbf{R}$ dont le support est $\mathbf{Z}$ et qui assigne à chaque $n \in \mathbf{Z}$ une masse de $1/2^{|n|}$, on a que $\hat{V}_\phi$ est un sous-espace fermé de $L^1(\mathbf{R}, \mu)$. La fonction $f(x) = 1$ si $x = 0$ et $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ appartient à $\hat{V}_\phi$ et est telle que

$$(\hat{A}_\phi)_n f(x) = \begin{cases} 2^x/n, & \text{si } x = 1, 2, \ldots, n \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Si on suppose l'existence d'un élément g de $\hat{V}_\phi$ qui est limite de la suite $(\hat{A}_\phi)_n f$, cette convergence en moyenne d'ordre 1 par rapport à la mesure μ sur $\mathbf{Z}$ entraîne l'existence d'une sous-suite $\{n_k\}$ de $\{n\}$ telle que

$$(\hat{A}_\phi)_{n_k} f(x) \rightarrow g(x) \qquad (x \in \mathbf{Z})$$

et donc g est l'élément 0 de $\hat{V}_\phi$. C'est une contradiction puisque on a que $||(\hat{A}_\phi)_n f|| = 1$ $(n \in \mathbf{N})$.

Nous allons terminer cette section en donnant un autre théorème ergodique, très bien connu celui-là, mais pour lequel nous fournissons quand même une preuve car à notre avis cette preuve a son intérêt particulier puisqu'elle ne rejoint pas les idées utilisées dans la littérature pour prouver ce résultat. Nous allons faire apparaître ce théorème ergodique comme une conséquence d'un théorème du point fixe dû à Markov-Kakutani.

THÉORÈME 6.2. *Soit X un espace de Banach et $T : X \rightarrow X$ un opérateur linéaire continu. Supposons que pour chaque $x \in X$, l'orbite de x, $\mathcal{O}(x) = \{x, Tx, T^2x, \ldots\}$ est un ensemble faiblement séquentiellement compact de X.*

Alors, pour chaque $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} T_n x$ existe, où

$$T_n = \frac{1}{n}(T + T^2 + \ldots + T^n).$$

Preuve. Soit $x \in X$. L'ensemble $\mathcal{O}(x)$ étant faiblement séquentiellement compact, il est aussi conditionnellement faiblement compact (théorème de Eberlein) et donc en particulier $\mathcal{O}(x)$ est une partie bornée de X. En vertu du principe de la borne uniforme, nous sommes assurés qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $||T^n|| \leqq C$, $n = 1, 2, \ldots$ et donc aussi $||T_n|| \leqq C$, $n = 1, 2, \ldots$.

Posons $M = \{x \in X; \{T_n x\} \text{ converge}\}$. C'est un sous-espace fermé de X (voir [**5**, pa. 69]). Supposons au contraire qu'il existe un point $x_0 \in X$ tel que $x_0 \notin M$ et $||x_0|| = 1$.

Posons $K = \overline{Co}\,\mathcal{O}(x_0)$, l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{O}(x_0)$. C'est un ensemble faiblement compact (théorème de Krein-Smulian) tel que $T(K) \subseteq K$. Soit $\xi \in K$ tel que $T\,\xi = \xi$ (théorème de Markov-Kakutani). Mais alors $\xi \in M \cap K$.

D'autre part, le théorème de Hahn-Banach assure l'existence d'une fonctionnelle linéaire continue $x_0' \in X'$ telle que $x_0'(M) = 0$, $x_0'(x_0) = 1$. Puisque

$$||T_n(I - T)x_0|| = \left\|\frac{1}{n}(T - T^{n+1})x_0\right\| \leqq \frac{2C}{n}||x_0||$$

on a $(I - T)x_0 \in M$ et alors $x_0'(x_0) = x_0'(Tx_0) = 1$, d'où $x_0'(K) = 1$.

Puisque $\xi \in M \cap K$ on obtient la contradiction désirée.

Les principaux cas d'intérêt pour nous où les hypothèses du Théorème 6.2 seront automatiquement remplies, sont ceux où X est un espace de Banach réflexif et T est tel que $\sup_n||T^n|| < \infty$, ou encore le cas où X est un espace de Banach, $\sup_n||T^n|| < \infty$ et T est faiblement compact ou même seulement faiblement quasi-compact.

7. Le théorème de caractérisation. Rappelons le contexte dans lequel se situe notre étude: V est un espace vectoriel sur le corps des nombres réels ordonné par un cône saillant C qui engendre V. Nous supposons aussi que V possède une unité pour son ordre notée e.

Soit $A : V \to V$ un opérateur linéaire positif tel que $Ae = e$. Nous nous proposons de caractériser les génératrices extrémales du cône:

$$K = \{f \in C^*; A^*f = f\}.$$

Il est nécessaire de remarquer que sous les hypothèses: e est une unité de V et $Ae = e$, on est assuré que $K \neq \{0\}$ (pour vérifier ce fait, il suffit d'utiliser un argument du même type que celui employé par Krein-Rutman [**10**] et que l'on retrouve dans Bonsall [**1**, pa. 412].

THÉORÈME 7.1. *Sous les seules hypothèses de cette section, si une fonctionnelle $f \neq 0$ appartient à une génératrice extrémale du cône $K = \{f \in C^*; A^*f = f\}$, alors $\{x \in \hat{V}_f; \hat{A}_f x = x\}$ est un sous-espace unidimensionnel de $\hat{V}_f$.*

Preuve. Soit $f \neq 0$, f appartenant à une génératrice extrémale de K, un élément donné du cône K. Nous utiliserons les notations introduites dans les

https://doi.org/10.4153/CJM-1973-075-7 Published online by Cambridge University Press

sections précédentes mais pour simplifier l'écriture on posera $\hat{V}_f = \hat{V}$ et $\hat{A}_f = \hat{A}$.

Soit $G \in \hat{V}'$ tel que $0 \leqq G \leqq F$. Puisque $||\hat{A}^*|| = ||\hat{A}|| \leqq 1$, la suite $\{(\hat{A}_n)^*G\}$ forme une suite bornée de $\hat{V}'$, et alors il existe une suite d'entiers $\{n_k\}$ et un $H \in \hat{V}'$ tels que

$$(\hat{A}_{n_k})^*G \rightarrow H; \quad \sigma(\hat{V}', \hat{V}).$$

La positivité de $\hat{A}$ et de G ainsi que le fait que $\hat{A}^*F = F$ entraînent que $0 \leqq H \leqq F$. D'autre part, puisque $\sup_n||(\hat{A}^*)^n|| \leqq 1$, on a pour chaque $x \in X$:

$$\begin{aligned}\langle \hat{A}^*H, x\rangle = \langle H, \hat{A}x\rangle &= \lim_{k\to\infty} \langle \hat{A}_{n_k}{}^*G, \hat{A}x\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \hat{A}^*\hat{A}_{n_k}{}^*G, x\rangle \\ &= \lim_{k\to\infty} \{\langle(\hat{A}^*\hat{A}_{n_k}{}^* - \hat{A}_{n_k}{}^*)G, x\rangle + \langle \hat{A}_{n_k}{}^*G, x\rangle\} \\ &= \lim_{k\to\infty} \langle \hat{A}_{n_k}{}^*G, x\rangle = \langle H, x\rangle\end{aligned}$$

et donc $\hat{A}^*H = H$.

De façon naturelle (voir dans la preuve de 4.2) H permet de définir une fonctionnelle linéaire h sur V qui sera telle que $0 \leqq h \leqq f$ et $A^*h = h$ et donc on doit avoir $h = \lambda f$ pour un certain $\lambda \in [0, 1]$ et par conséquent $H = \lambda F$. De façon à faire ressortir la dépendance de G on écrira $H = \lambda_G F$.

Nous venons de montrer que si $G \in \hat{V}'$ est tel que $0 \leqq G \leqq F$, il existe une suite $\{n_k\}$ d'entiers et un nombre λ_G telle que $\hat{A}_{n_k}{}^*G \rightarrow \lambda_G F$ faiblement. Mais comme $\hat{A}\bar{e} = \bar{e}$ et que $F(\bar{e}) > 0$ il suit que $\lambda_G = G(\bar{e})/F(\bar{e})$ et donc que toute sous-suite de $\{\hat{A}_n{}^*G\}$ qui est convergente doit converger vers $\lambda_G F$ et par conséquent que

$$\hat{A}_n{}^*G \rightarrow \frac{G(\bar{e})}{F(\bar{e})}F; \qquad \sigma(\hat{V}', \hat{V}).$$

Maintenant, le Théorème 4.2 et le fait que les éléments positifs de $\hat{V}'$ qui sont de norme $\leqq 1$ sont ceux de l'intervalle $[0, F]$ nous permettent de conclure que pour chaque $x \in \hat{V}$ et *chaque* $G \in \hat{V}'$ on a:

$$G(\hat{A}_n x) = \hat{A}_n{}^*G(x) \rightarrow \frac{G(\bar{e})}{F(\bar{e})}F(x) = G\left(\frac{F(x)}{F(\bar{e})}\bar{e}\right).$$

D'où, si $x \in \hat{V}$ est tel que $\hat{A}x = x$ on a $x = (F(x)/F(\bar{e}))\bar{e}$.

Remarque. Au cours de la preuve du théorème précédent nous avons démontré le fait intéressant suivant: si f appartient à une génératrice extrémale du cône K, alors le théorème ergodique moyen est vrai pour l'opérateur $\hat{A}_f$ sur l'espace de Banach $\hat{V}_f$. (En effet, nous avons établi que pour chaque $x \in \hat{V}_f$ on a:

$$(\hat{A}_f)_n x \rightarrow \frac{F(x)}{F(\bar{e})}\bar{e}; \sigma(\hat{V}_f, \hat{V}_f{}')$$

et il suit que cette convergence a aussi lieu en norme (voir Yosida [**14**, pa. 214]).)

Si nous ajoutons des hypothèses sur l'espace vectoriel V ou sur l'opérateur A, nous obtenons une réciproque au Théorème 7.1, ce qui nous permet de caractériser les génératrices extrémales du cône K.

THÉORÈME 7.2. *Soit V un espace vectoriel sur le corps* $\mathbf{R}$ *ordonné par un cône saillant C et possédant une unité e.*

Soit $A : V \to V$ un opérateur linéaire positif tel que $Ae = e$.

Soit $f \neq 0$, un élément du cône $K = \{ f \in C^*; A^* f = f \}$.

Si au moins une des conditions:

(a) *V est réticulé pour son ordre,*

(b) *$\hat{V}_f$ est réflexif,*

(c) *$\hat{A}_f$ est faiblement quasi-compact*

est remplie, alors: f appartient à une génératrice extrémale de $K \Leftrightarrow \{x \in \hat{V}_f; \hat{A}_f x = x\}$ est un sous-espace unidimensionnel de $\hat{V}_f$.

Preuve. Supposons que $\{x \in \hat{V}_f; \hat{A}_f x = x\}$ est de dimension 1 et que $g \in K$, $g \neq 0$ est tel que $f - g \in K$. Nous allons montrer que f et g sont linéairement dépendantes.

Si $u, v \in V$ sont tels que

$$u \leqq x \leqq v,\ u \leqq 0 \leqq v, \text{ on a } g(v) - g(u) \leqq f(v) - f(u),$$

ce qui entraîne l'inégalité:

$$|x|_g \leqq |x|_f \qquad (x \in V)$$

et donc que

$$W_f \subseteq W_g \subseteq \{x; g(x) = 0\}.$$

La formule:

$$\bar{g}(\bar{x}) = g(x)$$

définit donc une fonctionnelle $\bar{g}$ linéaire positive sur V_f, $\bar{g} \leqq \bar{f}$, continue, $||\bar{g}|| \leqq 1$. Si G est l'extension linéaire continue de $\bar{g}$ à $\hat{V}_f$ on aura $(\hat{A}_f)^*G = G$, $||G|| \leqq 1$, $0 \leqq G \leqq F$.

Maintenant, si une des conditions (a), (b) ou (c) est remplie les Théorèmes 6.1 et 6.2 montrent que pour chaque $x \in \hat{V}_f$ il existe un élément Px de $\hat{V}_f$ tel que

$$(\hat{A}_f)_n x \to Px \text{ (en norme), où } \hat{A}_f Px = Px.$$

D'où: pour chaque $x \in \hat{V}_f$, il existe un nombre réel λ_x tel que

$$(\hat{A}_f)_n x \to \lambda_x \bar{e} \text{ (en norme)}$$

et alors $F(x) = \lambda_x F(\bar{e})$.

De même, puisque G est continue et que $(\hat{A}_f)^*G = G$, on a: $G(x) = \lambda_x G(\bar{e}) = (G(\bar{e})/F(\bar{e}))F(x)$ pour chaque $x \in \hat{V}_f$

$$\Rightarrow \text{il existe un scalaire } \lambda \text{ tel que } G = \lambda F$$
$$\Rightarrow g = \lambda f.$$

8. Application. Dans l'introduction de ce travail, nous avons donné deux applications de nos résultats. La première montrait que l'on retrouve le théorème principal de la théorie ergodique et la deuxième montrait que l'on généralise des résultats de Schaefer sur les opérateurs positifs et markoviens sur $C(S)$.

Nous allons ici obtenir le résultat suivant:

THÉORÈME 8.1. *Soient G un groupe topologique abélien compact et σ une mesure de probabilité sur G. Soit Σ le sous-groupe fermé de G engendré par le support de la mesure σ.*

Une fonction f de $L^1(\Sigma, ds)$ satisfait l'équation de convolution $f*\sigma = f$ si et seulement si f est constante ds-presque partout sur Σ.
(*nous dénotons par ds la mesure de Haar sur G*).

Le groupe G étant compact, on peut vérifier qu'une fonction $f \in L^1(\Sigma, ds)$ donne lieu à une mesure bornée sur G au sens de [**3**] et donc ce résultat pourrait être obtenu à partir du fameux lemme de Choquet-Deny qui caractérise les mesures bornées μ sur G qui sont solutions de l'équation de convolution $\mu = \mu*\sigma$ [**3**]. Nous voulons éviter l'utilisation de ce résultat difficile pour prouver le théorème.

Considérons l'espace vectoriel $V = L^1(G, ds)$ muni de son ordre usuel et soit $A : V \to V$ l'opérateur linéaire positif défini sur V par $Af = f*\sigma$. Le cône $K = \{\phi \in L^\infty(G, ds); \phi \geqq 0, A^*\phi = \phi\}$ est précisément l'ensemble des fonctions de L^∞ qui sont non-négatives ds-presque partout et constantes sur les classes d'équivalence de G déterminées par Σ (voir [**7**, pa. 102]). La fonction ϕ sur G dont la restriction à Σ est 1 et la restriction à $G\backslash\Sigma$ est 0 appartient à une génératrice extrémale de K et est telle que pour tout $f \in V$,

$$|f|_\phi = \phi(|f|) = \int_\Sigma |f(s)|ds.$$

Il suit que $W_\phi = \{f \in V; f \text{ est nulle } ds\text{-presque partout sur } \Sigma\}$ et donc que l'espace de Banach $\hat{V}_\phi$ peut être identifié à l'espace $L^1(\Sigma, ds)$ tandis que l'opérateur $\hat{A}_\phi$ est défini par:

$$(\hat{A}_\phi f)(s) = \int_\Sigma f(s-t)d\sigma(t)$$

pour chaque $f \in L^1(\Sigma, ds)$ et chaque $s \in \Sigma$.

La fonction e qui est identiquement 1 sur G est un point fixe de A. Ce n'est pas une unité de V, mais on peut tout de même appliquer le Théorème 7.1 pour obtenir le résultat annoncé puisque, si on examine la preuve de ce théorème, tout ce qui importe, en autant que l'on sache que

$$K \neq \{0\},$$

c'est que A possède un point fixe $e > 0$.

Je tiens à remercier le Dr. S. Dubuc pour m'avoir suggéré le théorème de caractérisation 7.2.

BIBLIOGRAPHIE

1. F. F. Bonsall, *Sublinear functionals and ideals in partially ordered vector spaces*, Proc. London Math. Soc. *4* (1954), 402–418.
2. G. Choquet, *Lectures on analysis*. Vol. II (Benjamin Inc., New York, 1969).
3. G. Choquet et J. Deny, *Sur l'équation de convolution* $\mu = \mu * \sigma$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B *250* (1960), 799–801.
4. S. Dubuc, *Fonctionnelles linéaires positives extrémales*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 270 (1970), 1502–1504.
5. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators. Part* I (Wiley (Interscience), New York, 1958).
6. A. J. Ellis, *The duality of partially ordered normed linear spaces*, J. London Math. Soc. *39* (1964), 730–744.
7. I. Glicksberg, *On convex hulls of translates*, Pacific J. Math. *13* (1963), 97–113.
8. P. R. Halmos, *Lectures on ergodic theory* (Publications of the Mathematical Society of Japan, vol. *3*, Tokyo, 1956).
9. S. Kakutani, *Mean ergodic theorem in abstract* (*L*)-*spaces*, Proc. Japan Acad. *15* (1939), 121–123.
10. M. G. Krein, and M. A. Rutman, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, Uspehi Mat. Nauk. *23* (1948), 3–95; Amer. Math. Soc. Transl. *26* (1950).
11. A. L. Peressini, *Ordered topological vector spaces* (Harper and Row, New York, 1967).
12. H. H. Schaefer, *Invariant ideals of positive operators in* C(X). *I*, Illinois J. Math. *11* (1967), 703–715.
13. ——— *Invariant ideals of positive operators in* C(X). *II*, Illinois J. Math. *12* (1968), 525–538.
14. K. Yosida, *Functional analysis* (Springer-Verlag, Band 123, 1966).

Université de Sherbrooke,
Sherbrooke, Québec