Bull. Austral. Math. Soc. 11J70, 11R06
Vol. 69 (2004) [241–254]

ETUDE DES INTERRUPTIONS DANS L'ALGORITHME DE JACOBI–PERRON

Eugène Dubois, Ahmed Farhane and Roger Paysant-Le Roux

It is well known that in general the Jacobi–Perron algorithm (a multi-dimensional analogue of the continued fraction algorithm) may or might not acknowledge the dependence over $\mathbb{Q}$ of its arguments $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ by truncating itself down to fewer arguments from some step onwards (if so, the algorithm is said to display an 'interruption'). We show here that if $n = 2$ then $1, \alpha_1, \alpha_2$ are linearly dependent over $\mathbb{Q}$ if and only if the Jacobi–Perron Algorithm displays an interruption. We give examples showing this is not so for any $n \geqslant 3$.

1. Introduction

Le développement en fraction continue d'un nombre réel, α, est une suite d'entiers $(a_k)_{k\geqslant 0}$ qui permet de construire les meilleures approximations rationnelles, p_k/q_k, de α. Cette suite est finie si et seulement si α est rationnel.

En 1869, Jacobi [6] a considéré le cas de deux nombres et en 1907, Perron [8] a généralisé l'algorithme des fractions continues à n nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Dans le cas le plus simple et en particulier lorsque $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont $\mathbb{Q}$ - linéairement indépendants, cet algorithme, dit de *Jacobi–Perron* donne une suite de n-uples d'entiers $\left(a_1^{(\nu)}, \ldots, a_n^{(\nu)}\right)_{\nu\geqslant 0}$ qui permet de construire des approximations rationnelles simultanées $\left((A_1^{(\nu)})/A_0^{(\nu)}, \ldots, (A_n^{(\nu)})/A_0^{(\nu)}\right)_{\nu\geqslant 0}$ de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Dans les cas un peu plus compliqués le tableau $\left(a_i^{(\nu)}\right)$ peut être tronqué au sens où la dimension n des n-uples est diminuèe à partir de certaines étapes ν. Le tableau $\left(a_i^{(\nu)}\right)$ se rétrécit et peut même être fini. Nous dirons dans ce cas que l'algorithme de Jacobi–Perron présente des interruptions. On sait depuis *Perron* [8] que si un développement par l'algorithme de Jacobi–Perron admet m interruptions alors il y a au moins m relations rationnelles, indépendantes entre $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. En situation extrême, si l'algorithme admet n interruptions, il s'arrête et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont tous rationnels. Réciproquement si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont tous rationnels, l'algorithme de Jacobi–Perron qui équivaut à la recherche du pgcd s'arrête. Mais dans les situations intermédiaires la réciproque est moins connue.

Received 31st July, 2003

L'objet de ce travail est d'étudier la réciproque. Précisément, nous montrons que pour $n = 2$, il y a au moins une interruption si et seulement si $1, \alpha_1, \alpha_2$ sont $\mathbb{Q}$ - linéairement dépendants. Mais nous montrons que ce résultat est faux pour $n \geqslant 3$ et nous donnons des contres exemples explicites.

Les travaux récents sur l'algorithme de Jacobi–Perron portent soit sur la théorie métrique pour lequel l'ouvrage de Schweiger [**9**] est une bonne référence, soit sur des familles de développements périodiques comme Adam et Rhin [**1**]. Les auteurs [**4**] ont aussi étudié les cas où un développement périodique par l'algorithme de Jacobi–Perron fournit ou non un nombre de Pisot unité.

I1. Rappel sur l'algorithme des fractions continues

Etant donné un nombre réel α, l'algorithme des fractions continues détermine une suite finie ou infinie de réels notée (α_k) et une suite finie ou infinie d'entiers notée (a_k). Ces deux suites sont définies par récurrence de la manière suivante: on pose $\alpha_0 = \alpha$, $a_0 = [\alpha_0]$ et soit un entier $\ell \geqslant 0$ tel que $\alpha_0, \dots, \alpha_\ell$ et $a_0, \dots, a_\ell$ soient définis et que de plus $\alpha_\ell \notin \mathbb{Z}$ alors on définit $\alpha_{\ell+1}$ et $a_{\ell+1}$ par:

$$\alpha_\ell = a_\ell + \frac{1}{\alpha_{\ell+1}}, a_{\ell+1} = [\alpha_{\ell+1}]$$

où $[x]$ désigne la partie entiére d'un réel x.

Si $\alpha_\ell \in \mathbb{Z}$ on ne définit pas $\alpha_{\ell+1}$ et on dit que l'algorithme s'arrête. Les suites (α_k) et (a_k) sont finies de longueur $\ell + 1$. On appelle développement en fraction continue de α la suite d'entiers (a_k). Cette suite est finie ou infinie.

On définit les suites d'entiers (p_k) et (q_k) à partir de la suite (a_k) par les égalités:

$$\begin{aligned} p_{-2} = 0, p_{-1} = 1, &\quad \text{et pour } \ k \geqslant 0 \text{ tel que } \ a_k \text{ soit défini}, p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_{-2} = 1, q_{-1} = 0, &\quad \text{et pour } \ k \geqslant 0 \text{ tel que } \ a_k \text{ soit défini }, q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}. \end{aligned}$$

Le rationnel, p_k/q_k appelé $k^{ième}$ réduite de α ou réduite de rang k de α, vérifie

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

et est noté $[a_0, a_1, \dots, a_k]$. On a aussi:

$$\forall k \geqslant -1, p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}.$$

On montre que le nombre réel α admet un développement en fraction continue de longueur finie si et seulement si celui-ci est rationnel. Un rationnel α admet exactement deux développements en fraction continue dont l'un vérifie $\alpha_\ell = 1$ et l'autre $\alpha_\ell = a_\ell > 1$ (qui permet $\alpha_\ell = a_\ell - 1 + 1/1$).

Si le nombre réel α est irrationnel, le développement en fraction continue de α est unique et infini et on a:

$$\lim_{k\to+\infty} p_k/q_k = \alpha.$$

De plus, si on considère l'application:

$$\varphi_c: \quad \begin{aligned} \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Z}\times(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}} \\ \alpha &\longmapsto (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \end{aligned}$$

qui au nombre α associe son développement en fraction continue, on montre que l'application φ_c est bijective. Dire que φ_c est surjective équivaut à dire que le nombre réel est rationnel si et seulement si son développement en fraction continue est de longueur finie.

I2. Rappel sur l'algorithme de Jacobi–Perron

Avant d'introduire les interruptions, nous rappelons la construction de l'algorithme de Jacobi–Perron dans le cas simple et ses principales propriétés. Pour la preuve des affirmations de ce paragraphe, on pourra se reporter à la thèse de Perron [**8**] ou à celle des auteurs [**3**] et [**7**]. Les principaux travaux menés depuis un demi siècle sur l'algorithme de Jacobi–Perron concernent la périodicité. Benstein [**2**], les premier et dernier auteurs ont donné pour tout $n \geqslant 2$ des familles paramétrées de n-uples $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dont le développement par l'algorithme de Jacobi–Perron est périodique. Mais la conjecture, qu'un développement est périodique si et seulement si $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ est une base d'un corps de nombre, n'est toujours pas démontrée. Seule l'existence, dans tout corps de nombres réels, d'une base dont le développement est périodique a pu être démontrée en 1984 par Dubois et Paysant-Le Roux [**5**].

A partir d'un n-uple ($n \geqslant 1$) de nombres réels $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, l'algorithme de Jacobi Perron détermine un tableau de nombres réels $(\alpha_i^{(\nu)})$ et un tableau de nombres entiers $(a_i^{(\nu)})$ par la récurrence, sur ν, suivante:

$$\alpha_i^{(0)} = \alpha_i \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$(1)\ \alpha_1^{(\nu)} = a_1^{(\nu)} + \frac{1}{\alpha_n^{(\nu+1)}}, \alpha_i^{(\nu)} = a_i^{(\nu)} + \frac{\alpha_{i-1}^{(\nu+1)}}{\alpha_n^{(\nu+1)}} \quad 2 \leqslant i \leqslant n, \quad \text{avec} \quad a_i^{(\nu)} = [\alpha_i^{(\nu)}] \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Cette construction n'est possible que si $\alpha_1^{(\nu)}$ n'est pas entier. Si tel est le cas pour tout $\nu \geqslant 0$, les tableaux $(a_i^{(\nu)})$ et $(\alpha_i^{(\nu)})$ sont des suites infinies de n-uples $(a_1^{(\nu)}, \ldots, a_n^{(\nu)})_{\nu\geqslant 0}$ et $\left(\alpha_1^{(\nu)}, \ldots, \alpha_n^{(\nu)}\right)_{\nu\geqslant 0}$. Nous dirons que nous sommes dans le cas simple. Les approximations rationnelles simultanées $\left(A_1^{(\nu)}/A_0^{(\nu)}, \ldots, A_n^{(\nu)}A_0^{(\nu)}\right)_{\nu\geqslant 0}$ de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ définies par les

https://doi.org/10.1017/S000497270003598X Published online by Cambridge University Press

récurrences suivantes:

$$(2)\qquad \begin{cases} A_i^{(j)} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad A_i^{(i)} = 1 & \text{pour} \quad 0 \leqslant i, j \leqslant n \\ A_i^{(\nu+n+1)} = A_i^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} A_i^{(\nu+1)} + \ldots + a_n^{(\nu)} A_i^{(\nu+n)} & \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant n \text{ et } \nu \geqslant 0 \end{cases}$$

vérifient

$$(3)\qquad \det\left(A_i^{(\nu+j)}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n} = (-1)^{n\nu} \text{ pour } \nu \geqslant 0.$$

Les relations entre le n-uple de départ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et le n-uple au rang ν s'expriment par

$$(4)\qquad \alpha_i = \frac{A_i^{(\nu)} + \alpha_1^{(\nu)} A_i^{(\nu+1)} + \ldots + \alpha_n^{(\nu)} A_i^{(\nu+n)}}{A_0^{(\nu)} + \alpha_1^{(\nu)} A_0^{(\nu+1)} + \ldots + \alpha_n^{(\nu)} A_0^{(\nu+n)}} \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \nu \geqslant 0$$

et on a $A_0^{(\nu)} + \alpha_1^{(\nu)} A_0^{(\nu+1)} + \cdots + \alpha_n^{(\nu)} A_0^{(\nu+n)} = \alpha_n^{(1)} \alpha_n^{(2)} \ldots \alpha_n^{(\nu)}$.

Notons qu'une suite de n-uples entiers $(a_1^{(\nu)}, \ldots, a_n^{(\nu)})_{\nu \geqslant 0}$ est un développement par l'algorithme de Jacobi–Perron si et seulement si les conditions, dites conditions de Perron, sont satisfaites. Ces conditions qui résultent de (1) s'expriment avec l'ordre lexicographique noté $\geqslant$:

$$(5)\qquad \left(a_n^{(\nu)}, a_{n-1}^{(\nu+1)}, \ldots, a_{n-i}^{(\nu+i)}\right) \geqslant \left(a_i^{(\nu)}, a_{i-1}^{(\nu+1)}, \ldots, a_1^{(\nu+i-1)}, 1\right) \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant n-1, \nu \geqslant 1.$$

A partir d'une suite infinie $\left(a_1^{(\nu)}, \ldots, a_n^{(\nu)}\right)_{\nu \geqslant 0}$ vérifiant (5) on détermine le n-uple $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Ce n-uple est défini par:

$$(6)\qquad \lim_{\nu \to \infty} \frac{A_i^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}} = \alpha_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Dans le cas d'une suite périodique, nous avons un moyen d'exprimer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ admettant ce développement périodique en introduisant l'équation caractéristique. Pour un développement périodique de longueur ℓ vérifiant

$$(7)\qquad a_i^{(\nu+\ell)} = a_i^{(\nu)} \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n \quad \textit{et } \nu \geqslant 0$$

nous introduisons la matrice M et son polynôme caractéristique f

$$M = \begin{pmatrix} A_0^{(\ell)}, A_0^{(\ell+1)}, \ldots, A_n^{(\ell+n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n^{(\ell)}, A_n^{(\ell+1)}, \ldots, A_n^{(\ell+n)} \end{pmatrix}$$

$$(8)\qquad f(X) = \det(M - XI).$$

La plus grande racine positive, ρ, de f est simple. ρ est une valeur propre de M et $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est vecteur propre associé à ρ. Ceci permet d'expliciter $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

https://doi.org/10.1017/S000497270003598X Published online by Cambridge University Press

admettant $(a_1^{(\nu)}, \dots, a_n^{(\nu)})$ vérifiant (7) pour développement par l'algorithme de Jacobi–Perron. Précisément si on note par $g_{\lambda,i}(\rho)$ le cofacteur de $M - \rho I$ (en enlevant la ligne λ et la colonne i), on a:

$$\alpha_i = \frac{g_{\lambda,i}(\rho)}{g_{\lambda,0}(\rho)} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{pour tout } \lambda \text{ avec } 0 \leqslant \lambda \leqslant n. \tag{9}$$

I3. Introduction des interruptions

Développant par l'algorithme de Jacobi–Perron un n-uple $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ de nombres réels, il se peut que l'un des $\alpha_1^{(\nu)}$ soit entier. Dans ce cas les formules (1) ne permettent pas de continuer. Soit ν_0 le premier indice pour lequel $\alpha_1^{(\nu_0)}$ soit entier et soit j_0 maximal tel que $\left(\alpha_1^{(\nu_0)}, \dots, \alpha_{j_0}^{(\nu_0)}\right) \in \mathbb{Z}^{j_0}$ (nécessairement $\mathbb{N}^{j_0}$ si $\nu_0 > 0$).

Si $j_0 = n$, l'algorithme s'arrête et le développement est fini. Dans ce cas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont tous rationnels. Précisément on a:

$$\alpha_i = \frac{A_i^{(\nu_0+n+1)}}{A_0^{(\nu_0+n+1)}} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

Si $j_0 < n$, $\alpha_{j_0+1}^{(\nu_0)}$ n'est pas entier et l'on peut appliquer l'algorithme (les formules (1)) au $(n - j_0)$-uple $\left(\alpha_{j_0+1}^{(\nu_0)}, \dots, \alpha_n^{(\nu_0)}\right)$.

Les relations entre les n-uples $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ du départ et $\left(\alpha_1^{(\nu_0)}, \dots, \alpha_n^{(\nu_0)}\right)$ au rang ν_0 sont données par (4) et s'expriment sous forme matricielle par:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha_n^{(1)}\, \alpha_n^{(2)} \dots \alpha_n^{(\nu_0)}} \begin{pmatrix} A_0^{(\nu_0)}, \dots, A_0^{(\nu_0+n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_n^{(\nu_0)}, \dots, A_n^{(\nu_0+n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1^{(\nu_0)} \\ \dots\dots \\ \alpha_n^{(\nu_0)} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

A partir du rang $\nu_0 + 1$, le développement de

$$\left(\beta_1^{(\nu_0)}, \dots, \beta_{n-j_0}^{(\nu_0)}\right) = \left(\alpha_{j_0+1}^{(\nu_0)}, \dots, \alpha_n^{(\nu_0)}\right)$$

continue tant que $\beta_1^{(\nu)}$ n'est pas entier.

Si ν_1 est le premier indice pour lequel $\beta_1^{(\nu_1)}$ est entier et si j_1 est maximal tel que $\left(\beta_1^{(\nu_1)}, \dots, \beta_{j_1}^{(\nu_1)}\right) \in \mathbb{N}^{j_1}$, le développement présente une seconde interruption d'ordre j_1. On continue alors avec le $(n - j_0 - j_1)$-uple $\left(\beta_{j_1+1}^{(\nu_1)}, \dots, \beta_{n-j_0}^{(\nu_1)}\right)$.

Le tableau des $(a_i^{(\nu)})$ se rétrécit à chaque interruption. Avec les notations précédentes, il se compose de n-uples pour $0 \leqslant \nu \leqslant \nu_0$, de $(n - j_0)$-uples pour $\nu_{0+1} \leqslant \nu \leqslant \nu_1$ et de $(n - j_0 - j_1)$-uples pour $\nu_1 + 1 \leqslant \nu$ et ainsi de suite.

Si l'on a k niveaux d'interruptions d'ordre $j_0, j_1, \dots, j_{k-1}$ nous dirons que ce développement par l'algorithme de Jacobi–Perron présente $m = j_0 + j_1 + \dots + j_{k-1}$

https://doi.org/10.1017/S000497270003598X Published online by Cambridge University Press

interruptions. Ce développement est fini si et seulement si $m = n$. Perron [8] a démontré le résultat suivant:

Théorème 1. *Si le développement par l'algorithme de Jacobi–Perron de $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ admet m interruptions alors il existe m relations indépendantes à coefficients entiers entre $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.*

L'idée de la démonstration repose sur les formules (1) puisque $\alpha_1^{(\nu_0)} = a_1^{(\nu_0)}$ remonte de proche en proche en une relation entre $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Corollaire 1. *Si $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont $\mathbb{Q}$ linéairement indépendants alors le développement par l'algorithme de Jacobi–Perron de $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ n'a pas d'interruptions.*

Corollaire 2. *L'ensemble des n-uples de nombres réels pour lesquels l'algorithme de Jacobi–Perron admet des interruptions est de mesure nulle au sens de la mesure de Lebesgue.*

Notons par $\mathcal{R}_{s,n}$ l'ensemble des n-uples pour lesquels l'algorithme de Jacobi–Perron est sans interruptions, soit

$$\mathcal{R}_{s,n} = \left\{(\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{tels que} \quad \alpha_1^{(\nu)} \notin \mathbb{Z} \text{ pour tout } \ \nu \geqslant 0\right\},$$

par

$$\mathcal{R}_{i,n} = \left\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \ \text{ tels que } \ 1, \alpha_1, \dots, \alpha_n \quad \mathbb{Q} \ \text{ linéairement indépendants } \right\},$$

et par

$\mathcal{T}_n$ l'ensemble des développements sans interruptions, soit

$$\mathcal{T}_n = \left\{ \left(a_1^{(\nu)}, \dots, a_n^{(\nu)}\right)_{\nu \geqslant 0}, \left(a_i^{(0)} \in \mathbb{Z}, a_i^{(\nu)} \in \mathbb{N} \ \text{ pour } \ \nu \geqslant 1\right), 1 \leqslant i \leqslant n, \ \text{vérifiant} \ (5)\right\}.$$

Considérons l'application

$$\varphi_{JP} : \mathcal{R}_{s,n} \longrightarrow \mathcal{T}_n$$

définie par $\varphi_{JP}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \left(a_1^{(\nu)}, \dots, a_n^{(\nu)}\right)_{\nu \geqslant 0}$.

Cette application qui est bien définie, est surjective puisqu'à partir d'un tableau on connait $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ admettant ce tableau pour développement par l'algorithme de Jacobi Perron. Elle est aussi injective puisque d'après (6), $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont uniques. Ceci montre:

Proposition 1. *Pour tout $n \geqslant 1$ l'application φ_{JP} est une bijection de $\mathcal{R}_{s,n}$ sur $\mathcal{T}_n$.*

Avec ces notations le corollaire 1 s'exprime par:

Corollaire 3. *Pour tout $n \geqslant 1$ on a l'inclusion $\mathcal{R}_{i,n} \subset \mathcal{R}_{s,n}$.*

L'inclusion contraire est l'objet de notre étude.

II. Relation de dépendance et algorithem de Jacobi–Perron sans interruption de plus de 3 nombres

Pour tout $n \geqslant 3$, nous allons expliciter des contres exemples qui montreront que la réciproque est fausse. Pour $n = 1$, il est bien connu que cette réciproque est vraie. Pour $n = 2$ nous montrerons qu'elle est également vraie.

Théorème 2. *Pour tout* $n \geqslant 3$, $\quad \mathcal{R}_{i,n} \subsetneq \mathcal{R}_{s,n}$.

Il suffit d'expliciter des n-uples $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dont l'algorithme de Jacobi–Perron n'a pas d'interruptions et pour lesquels il existe une relation linéaire entre $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

En considérant des suites $\left(a_1^{(\nu)}, \ldots, a_n^{(\nu)}\right)_{\nu \geqslant 0}$ périodiques on obtient un n-uples $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ pour lequel l'algorithme de Jacobi–Perron est sans interruption. Du fait de la période on sait, par (9), exprimer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. L'existence d'une relation de dépendance entre $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ va s'obtenir pour une propriété de l'équation caractéristique.

En effet, par (9) on a $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subseteq \mathbb{Q}(\rho)$. En imposant la réductibilité du polynôme caractéristique f, nous aurons $[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}] \leqslant n$ et donc $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \mathbb{Q}] < (n+1)$. Ce qui montre l'existence d'une relation de dépendance linéaire à coefficients rationnels entre $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Soient $n \geqslant 3$ et des entiers $a_1, \ldots, a_n$ vérifiant

(11)
$$\begin{cases} a_i \geqslant 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n), 1 - a_1 + a_2 + \ldots + (-1)^n a_n = (-1)^{n+1} \\ (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-i}) \geqslant (a_i, \ldots, a_1, 1) \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1) \text{ pour l'ordre lexicographique.} \end{cases}$$

Lemme 1. *Soient $n \geqslant 3$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ le n-uples de réels dont le développement par l'algorithme de Jacobi–Perron est $\left(a_1^{(\nu)}, \ldots, a_n^{(\nu)}\right) = (a_1 \ldots a_n)$ pour tout $\nu \geqslant 0$ avec $a_1, \ldots, a_n$ vérifiant* (11).

Alors on a $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{R}_{s,n}$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \notin \mathcal{R}_{i,n}$. C'est-à-dire qu'il existe une relation de dépendance linéaire entre $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ avec un développement par l'algorithme de Jacobi–Perron sans interruptions.

Avant de démontrer ce lemme, constatons que les conditions (11) ne sont pas possibles pour $n = 1$ ni pour $n = 2$. En effet pour $n = 1$, $a_1 \geqslant 1$ est contradictoire avec $1 - a_1 = 1$ et pour $n = 2$, $1 - a_1 + a_2 = -1$ est incompatible avec $a_2 \geqslant a_1$.

Par contre pour $n \geqslant 3$ il existe $a_1, \ldots, a_n$ vérifiant (11).

En effet, pour $n = 2k+1$, il suffit de considérer $a_1 = 0$, $a_i = b$ avec $b \geqslant 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant 2k-1$ et $a_{2k-1} = a_{2k} = c$ avec $c > b$. L'égalité de (11) $1 - 0 + b - b + \ldots + c - c = 1$ est évidente et les inégalités lexicographiques le sont aussi puisque pour $i \leqslant 2k-1$, $(c, c, \ldots) \geqslant (b, \ldots, 1)$ et que pour $i = 2k$ on a $(c, c, \ldots, 0) \geqslant (c, b, \ldots, 0, 1)$.

Lorsque $n = 2k$ il suffit de considérer $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_i = b$ avec $b \geqslant 0$ pour $3 \leqslant i \leqslant 2k-2$ (si $k \geqslant 3$); $a_{2k-1} = a_{2k} = c$ avec $c > b$. L'égalité de (11) $1 - 2 + 0 - b + b \ldots - c + c = -1$ est évidente et les inégalités lexicographiques le sont aussi puisque pour $i \leqslant 2k-2$

https://doi.org/10.1017/S000497270003598X Published online by Cambridge University Press

on a:

$$(c, c, \ldots) \geqslant (b, \ldots)$$

et que pour $i = 2k-1$ on a:

$$(c, c, b, \ldots, b, 0, 2) \geqslant (c, b, \ldots, 0, 2, 1).$$

Il est facile d'expliciter de nombreux autres exemples $(a_1, \ldots, a_n)$ vérifiant les conditions (11).

Pour ce développement périodique de longueur 1 du lemme 1, qui a déjà été étudié (voir [7] ou [8]), on a:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

et
$$f(X) = X^{n+1} - a_n X^n - \ldots - a_1 X - 1.$$

En notant, ρ, la plus grande racine positive de f on a, en utilisant (9):

$$\alpha_n = \rho, \alpha_{n-1} = \rho^2 - a_n\rho, \ldots, \alpha_1 = \rho^n - a_n\rho^{n-1} - \ldots - a_2\rho.$$

La relation $1 - a_1 + \ldots + (-1)^n a_n = (-1)^{n+1}$, qui est satisfaite par hypothèse, montre que $f(-1) = 0$ et donc que $\left[\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \mathbb{Q}\right] \leqslant \left[\mathbb{Q}[\rho] : \mathbb{Q}\right] < n+1$. Ceci prouve l'existence d'une relation $L_0 + L_1\alpha_1 + \ldots + L_n\alpha_n = 0$ avec $L_i \in \mathbb{Z}$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$. Le lemme 1 et par suite le théorème 2 sont démontrés pour tout $n \geqslant 3$.

Il est possible pour n fixé de donner d'autres exemples. Pour illustrer ce fait nous donnons ci-dessous deux développements périodiques de longueur 2 lorsque $n = 3$.

Considérons le développement suivant:

$$(12) \qquad \left(a_1^{(2\nu)}, a_2^{(2\nu)}, a_3^{(2\nu)}\right) = (0, b, b), \quad \left(a_1^{(2\nu+1)}, a_2^{(2\nu+1)}, a_3^{(2\nu+1)}\right) = (0, c, c) \qquad (\nu \geqslant 0)$$

avec b, c distincts vérifiant les conditions lexicographiques suivantes:

$$(13) \qquad (b, c) \geqslant (0, 1),\ (b, c, 0) \geqslant (b, 0, 1);\ (c, b) \geqslant (0, 1);\ (c, b, 0) \geqslant (c, 0, 1).$$

Remarquons que la seconde et quatrième inégalité nécessitent $c \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$.

Proposition 2. *Le triplet $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ admettant (12) pour développement par l'algorithme de Jacobi-Perron vérifie $1 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 = 0$ et appartient donc à $\mathcal{R}_{s,3}$ sans appartenir à $\mathcal{R}_{i,3}$.*

La matrice M permettant de calculer le polynôme caractéristique est:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b & bc \\ 0 & 1 & b & c + bc \end{pmatrix}$$

et $f(X) = \det\,(M - \lambda I) = (X-1)\left[X^3 - (b+c+bc-1)X^2 - (b+c-1)X - 1\right]$ est réductible.

Nous avons alors une relation de dépendance entre $1, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ à coefficients rationnels. Cette relation est explicitée en calculant les quatre cofacteurs de $M - \rho I$ qui donnent $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ en fonction de la plus grande racine, ρ, de f. Par (9) on a $\beta_i = g_{3,i}(\rho)/g_{3,0}(\rho)$. Le calcul donne:

$$\begin{aligned} g_{3,0}(\rho) &= -c\rho^2, & g_{3,1}(\rho) &= -\rho^2 + b\rho + 1 \\ g_{3,2}(\rho) &= -bc\rho^2 - c\rho, & g_{3,3}(\rho) &= -\rho^3 + b\rho^2 + \rho \end{aligned}$$

et il est facile de vérifier que

$$g_{3,0}(\rho) - g_{3,1}(\rho) + g_{3,2}(\rho) - g_{3,3}(\rho) = \frac{f(\rho)}{\rho - 1} = 0$$

ce qui termine la preuve de la Proposition 2.

Considérons maintenant le développement

$$(14) \qquad \left(a_i^{(2\nu)}\right)_{1\leqslant i\leqslant 3} = (b,0,b),\ \left(a_i^{(2\nu+1)}\right)_{1\leqslant i\leqslant 3} = (c_1,c_2,c_3) \qquad (\nu \geqslant 0)$$

avec des entiers b, c_1, c_2, c_3 vérifiant les conditions lexicographiques

$$(15) \qquad (b,c_2) \geqslant (b,1), (b,c_2,b) \geqslant (0,c_1,1); (c_3,0) \geqslant (c_1,1), (c_3,0,c_1) \geqslant (c_2,b,1).$$

Proposition 3. *Le triplet $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ admettant (14) pour développement par l'algorithme de Jacobi–Perron vérifie:*

$$c_2 + (c_3 - c_1)\gamma_1 - c_2\gamma_2 - (c_3 - c_1)\gamma_3 = 0$$

et appartient donc à $\mathcal{R}_{s,3}$ sans appartenir à $\mathcal{R}_{i,3}$.

On procède comme précédemment à partir de

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & b & 1 + bc_3 \\ 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & b & c_2 + bc_3. \end{pmatrix}$$

On obtient $f(X) = (X+1)h(X)$ avec $h(X) = X^3 - (c_2 + bc_3 - 1)X^2 - (bc_1 - c_2 + 1)X + 1$,

$$\begin{aligned} g_{3,0}(X) &= -c_3X^2 - c_1X, & g_{3,1}(X) &= -(1 + bc_3)X^2 - bc_1X + 1 \\ g_{3,2}(X) &= -c_1X^2 - c_3X, & g_{3,3}(X) &= -X^3 + X \end{aligned}$$

et $c_2g_{3,0}(X) + (c_3 - c_1)g_{3,1}(X) - c_2g_{3,2}(X) - (c_3 - c_1)g_{3,3}(X) = (c_3 - c_1)h(X)$.

Ce qui montre que $c_2 + (c_3 - c_1)\gamma_1 - c_2\gamma_2 - (c_3 - c_1)\gamma_3 = 0$ et prouve la Proposition 3.

II. Relation de dépendance et algorithme de Jacobi–Perron de deux nombres réels

Lorsque $n = 1$, la fraction continue d'un nombre réel, α, s'arrête si et seulement si α est rationnel. On a $\mathcal{R}_{s,1} = \mathcal{R}_{i,1}$. Pour $n \geqslant 3$ on vient de montrer que $\mathcal{R}_{i,n} \subsetneqq \mathcal{R}_{s,n}$. Pour $n = 2$ on a:

Théorème 3. *Le développement par l'algorithme de Jacobi–Perron de deux nombres réels α_1, α_2, admet au moins une interruption si et seulement si $1, \alpha_1, \alpha_2$ sont liés par une relation linéaire à coefficients rationnels, c'est-à-dire que $\mathcal{R}_{i,2} = \mathcal{R}_{s,2}$.*

Puisque $\mathcal{R}_{i,2} \subset \mathcal{R}_{s,2}$, il nous suffit de montrer l'inclusion contraire, c'est-à-dire que si $(\alpha_1, \alpha_2) \notin \mathcal{R}_{i,2}$ alors $(\alpha_1, \alpha_2) \notin \mathcal{R}_{s,2}$. Soient donc α_1, α_2 vérifiant $L_0 + L_1\alpha_1 + L_2\alpha_2 = 0$ avec L_i entiers non tous nuls et montrons qu'il existe ν_0 tel que $\alpha_1^{(\nu_0)}$ soit entier.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\alpha_1^0 \notin \mathbb{Z}$ et que pour tout $\nu \geqslant 1$, $\alpha_1^{(\nu)} \notin \mathbb{N}$. Construisons les $A_i^{(\nu)}$ par (2). Posons:

$$\left\{\begin{aligned} P_\nu &= \left(A_0^{(\nu+3)}, A_1^{(\nu+3)}, A_2^{(\nu+3)}\right) \\ D_\nu &= P_{\nu-3} + \alpha_1^{(\nu)} P_{\nu-2} + \alpha_1^{(\nu)} P_{\nu-1} \\ S_\nu &= P_{\nu-3} + (\alpha_1^\nu - 1) P_{\nu-2} + \alpha_2^{(\nu)} P_{\nu-1} \\ T_\nu &= P_{\nu-3} + \alpha_1^{(\nu)} P_{\nu-2} + (\alpha_2^\nu - 1) P_{\nu-1}. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

D'après (2) nous avons aussi $P_\nu = P_{\nu-3} + a_1^{(\nu)} P_{\nu-2} + a_2^{(\nu)} P_{\nu-1}$.

Les quatre points $P_{\nu-3}, S_\nu, D_\nu, T_\nu$ sont dans un même plan Π passant par $P_{\nu-3}$ et parallèle à $\overrightarrow{OP}_{\nu-2}$ et $\overrightarrow{OP}_{\nu-1}$. Puisque $\det(P_{\nu-3}, P_{\nu-2}, P_{\nu-1}) = \pm 1$, le plan Π est bien défini. Dans ce plan prenons pour origine D_ν et pour vecteurs de base $\vec{\imath} = -\overrightarrow{OP}_{\nu-2}$ et $\vec{\jmath} = -\overrightarrow{OP}_{\nu-1}$. Nous avons alors les coordonnées suivantes:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D_\nu S_\nu} &= \vec{\imath} = (1,0) \\ \overrightarrow{D_\nu T_\nu} &= \vec{\jmath} = (0,1) \\ \overrightarrow{D_\nu P_{\nu-3}} &= \alpha_1^{(\nu)}\vec{\imath} + \alpha_2^{(\nu)}\vec{\jmath} = (\alpha_1^{(\nu)}, \alpha_2^{(\nu)}) \\ \overrightarrow{D_\nu P_\nu} &= \left(\alpha_1^{(\nu)} - a_1^{(\nu)}, \alpha_2^{(\nu)} - a_2^{(\nu)}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

De ces coordonnées il résulte clairement que $D_\nu, S_\nu, P_{\nu-3}, T_\nu$ est un quadrilatère convexe.

La deuxième étape consiste à montrer que P_ν est intérieur à ce quadrilatère.

Si $\alpha_1^{(\nu)} - a_1^{(\nu)} + \alpha_2^{(\nu)} - a_2^{(\nu)} \leqslant 1$, P_ν est intérieur au triangle $D_\nu S_\nu T_\nu$ et donc intérieur au quadrilatère $D_\nu S_\nu P_{\nu-3} T_\nu$.

Dans le cas contraire, $\alpha_1^{(\nu)} - a_1^{(\nu)} + \alpha_2^{(\nu)} - a_2^{(\nu)} > 1$, on va montrer que P_ν est barycentre des sommets du quadrilatère affectés de coefficients positifs. Précisément on va définir trois réels positifs ou nuls, x, y, z, de somme 1 tels que:

$$\overrightarrow{D_\nu P_\nu} = x\,\overrightarrow{D_\nu P_{\nu-3}} + y\,\overrightarrow{D_\nu S_\nu} + z\,\overrightarrow{D_\nu T_\nu}.$$

Dans le repère $(D_\nu, \vec{i}, \vec{j})$ cela équivaut à

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{(\nu)} - a_1^{(\nu)} \\ \alpha_2^{(\nu)} - a_2^{(\nu)} \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \alpha_1^{(\nu)} \\ \alpha_2^{(\nu)} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } x + y + z = 1.$$

Soit après résolution de ce système

$$x = \frac{\alpha_1^{(\nu)} - a_1^{(\nu)} + \alpha_2^{(\nu)} - a_2^{(\nu)} - 1}{\alpha_1^{(\nu)} + \alpha_2^{(\nu)} - 1},$$
$$y = \frac{a_2^{(\nu)}\alpha_1^{(\nu)} - a_1^{(\nu)}\alpha_2^{(\nu)} + a_1^{(\nu)}}{\alpha_1^{(\nu)} + \alpha_2^{(\nu)} - 1},$$
$$z = \frac{a_1^{(\nu)}\alpha_2^{(\nu)} - a_2^{(\nu)}\alpha_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)}}{\alpha_1^{(\nu)} + \alpha_2^{(\nu)} - 1}.$$

L'hypothèse $\alpha_1^{(\nu)} - a_1^{(\nu)} + \alpha_2^{(\nu)} - a_2^{(\nu)} > 1$ avec $\alpha_1^{(\nu)} > 0$, $\alpha_2^{(\nu)} \geqslant 1$ donne $x > 0$ et les relations

$$\begin{aligned} a_2^{(\nu)}\alpha_1^{(\nu)} - a_1^{(\nu)}\alpha_2^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} &= a_2^{(\nu)}\left(a_1^{(\nu)} + \frac{1}{\alpha_2^{(\nu+1)}}\right) - a_1^{(\nu)}\left(a_2^{(\nu)} + \frac{\alpha_1^{(\nu+1)}}{\alpha_2^{(\nu+1)}}\right) + a_1^{(\nu)} \\ &= \frac{1}{\alpha_2^{(\nu+1)}}\left[a_2^{(\nu)} + a_1^{(\nu)}\left(\alpha_2^{(\nu+1)} - \alpha_1^{(\nu+1)}\right)\right] \end{aligned}$$

montrent que $y > 0$.

De même

$$\begin{aligned} a_1^{(\nu)}\alpha_2^{(\nu)} - a_2^{(\nu)}\alpha_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} &= a_1^{(\nu)}\left(a_2^{(\nu)} + \frac{\alpha_1^{(\nu+1)}}{\alpha_2^{(\nu+1)}}\right) - a_2^{(\nu)}\left(a_1^{(\nu)} + \frac{1}{\alpha_2^{(\nu+1)}}\right) + a_2^{(\nu)} \\ &= \frac{1}{\alpha_2^{(\nu+1)}}\left[a_2^{(\nu)}\left(\alpha_2^{(\nu+1)} - 1\right) + a_1^{(\nu)}\alpha_1^{(\nu+1)}\right] \end{aligned}$$

montre que $z \geqslant 0$ puisque $\alpha_2^{(\nu+1)} \geqslant 1$ et $a_1^{(\nu)}\alpha_1^{(\nu+1)} \geqslant 0$ ($a_1^{(\nu)}$ peut être nul).

Ceci termine la preuve que P_ν est intérieur au quadrilatère $D_\nu S_\nu P_{\nu-3} T_\nu$.

Nous allons maintenant étudier une fonction distance du plan Π ayant pour origine D_ν.

Pour tout point $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, posons:

$$f(P) = |L_0 x + L_1 y + L_2 z|.$$

D'après (4)

$$D_\nu = \left(A_i^{(\nu)} + \alpha_1^{(\nu)} A_i^{(\nu+1)} + \alpha_2^{(\nu)} A_i^{(\nu+2)}\right)_{1 \leqslant i \leqslant 3} = \left(A_0^{(\nu)} + \alpha_1^{(\nu)} A_0^{(\nu)} + \alpha_2^{(\nu)} A_0^{(\nu+1)}\right) \cdot (1, \alpha_1, \alpha_2)$$

et comme $f(1, \alpha_1, \alpha_2) = 0$, $f(D_\nu) = 0$. f est donc une fonction distance non identiquement nulle sur le plan Π muni de l'origine D_ν.

Par ailleurs $\overrightarrow{D_\nu S_\nu} = -P_{\nu-2}$, $\overrightarrow{D_\nu T_\nu} = -P_{\nu-1}$ montre que

$$f(S_\nu) = f(P_{\nu-2}), f(T_\nu) = f(P_{\nu-1}).$$

Le maximum de f sur le convexe $D_\nu S_\nu P_{\nu-3} T_\nu$ étant atteint en l'un des sommets, nous avons:

$$f(P_\nu) \leqslant \operatorname{Max}\big(f(P_{\nu-3}), f(P_{\nu-2}), f(P_{\nu-1})\big).$$

En écrivant $f_\nu = f(P_\nu)$ et en posant $\overline{f}_\nu = \operatorname{Max}\big(f_{\nu-3}, f_{\nu-2}, f_{\nu-1}\big)$, nous avons $\overline{f}_{\nu+1} \leqslant \overline{f}_\nu$. La suite $\overline{f}_\nu$ étant décroissante à valeur entière positive est donc stationnaire.

Il existe ν_0 tel que $\overline{f}_\nu = \overline{f}_{\nu_0}$ pour $\nu \geqslant \nu_0$ avec $\overline{f}_{\nu_0} = f_{\nu_0-1}$. En effet, soit μ tel que $\overline{f}_\nu = \overline{f}_\mu$ pour tout $\nu \geqslant \mu$.

Si $\overline{f}_\mu = f_{\mu-1}$ on prend $\nu_0 = \mu$. Sinon $\overline{f}_\mu > f_{\mu-1}$.

Si $\overline{f}_\mu = f_{\mu-2} > \operatorname{Max}\ (f_{\mu-1}, f_\mu)$ alors $\overline{f}_\mu = \overline{f}_{\mu+2} = f_{\mu+1}$ et $\nu_0 = \mu + 2$ convient.

Si $\overline{f}_\mu = f_{\mu-2} = f_\mu$ alors $\nu_0 = \mu + 1$ convient.

Enfin si $\overline{f}_\mu = f_{\mu-3} > \operatorname{Max}\big(f_{\mu-2}, f_{\mu-1}\big)$, on a $\overline{f}_\mu = \overline{f}_{\mu+1} = f_\mu$ et $\nu_0 = \mu + 1$ convient.

Soit donc ν_0 tel que $\overline{f}_\nu = \overline{f}_{\nu_0} = f_{\nu_0-1}$ pour tout $\nu \geqslant \nu_0$. En discutant la position de P_{ν_0} nous allons obtenir une contradiction avec l'hypothèse qu'il n'y a pas d'interruption. Nous devons encore considérer deux cas suivant que $f_{\nu_0} = f_{\nu_0-1}$ ou que $f_{\nu_0} < f_{\nu_0-1}$.

Dans le premier cas on a $f_{\nu_0} = f_{\nu_0-1}$, $f(P_{\nu_0}) = \overline{f}_{\nu_0} = \operatorname{Max}\ \big(f(P_{\nu_0-3}), f(S_{\nu_0}), f(T_{\nu_0})\big)$ et donc P_{ν_0} est sur le bord du quadrilatère $D_{\nu_0}, S_{\nu_0}, P_{\nu_0-3}, T_{\nu_0}$. Rappelons que $f(S_{\nu_0}) = f_{\nu_0-2}$, $f(T_{\nu_0}) = f_{\nu_0-1}$.

Si $P_{\nu_0} \in D_{\nu_0}S_{\nu_0}$, $\overrightarrow{D_{\nu_0}P_{\nu_0}} = x\ \overrightarrow{D_{\nu_0}S_{\nu_0}}$ avec $0 \leqslant x \leqslant 1$. Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}) = \big(-\overrightarrow{OP_{\nu_0-2}}, -\overrightarrow{OP_{\nu_0-1}}\big)$, $\overrightarrow{D_{\nu_0}P_{\nu_0}} = \big(\alpha_1^{(\nu_0)} - a_1^{(\nu_0)}, \alpha_2^{(\nu_0)} - a_2^{(\nu)}\big)$ et $\overrightarrow{D_{\nu_0}S_{\nu_0}} = (1, 0)$. On a donc $\alpha_2^{(\nu_0)} = a_2^{(\nu_0)}$ et donc $\alpha_1^{(\nu_0+1)} = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\alpha_1^{(\nu)}$ non entier pour tout ν.

Si $P_{\nu_0} \in D_{\nu_0}T_{\nu_0}$, $\overrightarrow{D_{\nu_0}P_{\nu_0}} = y\ D_{\nu_0}T_{\nu_0}$ avec $0 < y \leqslant 1$ donne avec (16) ou (17) $\alpha_1^{(\nu_0)} = a_1^{(\nu_0)}$ et conduit à une contradiction.

Si $P_{\nu_0} \in P_{\nu_0-3}S_{\nu_0}$, l'égalité $\overrightarrow{P_{\nu_0-3}P_{\nu_0}} = z\ \overrightarrow{P_{\nu_0-3}S_{\nu_0}}$ avec $0 \leqslant z \leqslant 1$ donne, avec (16), $z(\alpha_1^{\nu_0} - 1) = a_1^{\nu_0}$ et $z\ \alpha_2^{(\nu_0)} = a_2^{(\nu_0)}$ puisque $\overrightarrow{P_{\nu_0-3}P_\nu} = (-a_1^{(\nu_0)}, -a_2^{(\nu_0)})$ et $\overrightarrow{P_{\nu_0-3}S_{\nu_0}} = \big(1 - \alpha_1^{(\nu_0)}, -\alpha_2^{(\nu_0)}\big)$. $z = 1$ est exclu par un cas précédent, $z = 0$ est impossible puisque $a_2^{(\nu_0)} \geqslant 1$ et $0 < z < 1$ conduit à $a_1^{(\nu_0)} < \alpha_1^{\nu_0} - 1$ qui est impossible ou à $\alpha_1^{(\nu_0)} = 1$ qui contredit l'hypothèse.

Enfin si $P_{\nu_0} \in P_{\nu_0-3}T_{\nu_0}$, l'égalité $\overrightarrow{P_{\nu_0-3}P_{\nu_0}} = t\overrightarrow{P_{\nu_0-3}T_{\nu_0}}$ avec $0 \leqslant t \leqslant 1$ donne $t\ \alpha_1^{(\nu_0)} = a_1^{(\nu_0)}$ et $t(\alpha_2^{(\nu_0)} - 1) = a_2^{(\nu_0)}$. $t = 0$ et $t = 1$ sont exclus par les cas précédents et $0 < t < 1$ conduit à $a_2^{(\nu_0)} < \alpha_2^{\nu_0} - 1$ qui est impossible ou à $a_2^{(\nu_0)} = 0$ qui l'est aussi.

Quelle que soit la position de P_{ν_0} sur le bord du quadrilatère, nous venons de montrer que $f_{\nu_0} = f_{\nu_0-1}$ conduit à une contradiction avec l'hypothèse qu'il n'y a pas d'interruption.

Dans le second cas, $f_{\nu_0} < f_{\nu_0-1}$, nous discutons suivant f_{ν_0+1}.

Si $f_{\nu_0+1} = f_{\nu_0-1}$, on a $f(P_{\nu_0+1}) = f_{\nu_0+1} = \overline{f}_{\nu_0} = \overline{f}_{\nu_0+1} = \text{Max}\ \left(f_{\nu_0-1}, f_{\nu_0-2}, f_{\nu_0}\right)$ et P_{ν_0+1} est sur le bord du convexe $D_{\nu_0+1}, S_{\nu_0+1}, P_{\nu_0-2}, T_{\nu_0+1}$ et l'on se retrouve dans le cas précédent où ν_0 est remplacé par $\nu_0 + 1$.

Si $f_{\nu_0+1} < f_{\nu_0-1}$, nous avons $\overline{f_{\nu_0+3}} = \text{Max}\ \left(f_{\nu_0}, f_{\nu_0+1}, f_{\nu_0+2}\right) = \overline{f_{\nu_0}} = f_{\nu_0-1}$ et donc $f_{\nu_0+2} = f_{\nu_0-1}$ puisque $\text{Max}(f_{\nu_0}, f_{\nu_0+1}) < f_{\nu_0-1}$. Nous en déduisons que P_{ν_0+2} est sur le bord du quadrilatère $D_{\nu_0+2}S_{\nu_0+2}P_{\nu_0-1}\ T_{\nu_0+2}$ puisque $f(P_{\nu_0+2}) = \text{Max}\ \left(f(S_{\nu_0+2}), f(T_{\nu_0+2}),\ f(P_{\nu_0-1})\right)$ et on se retrouve dans le cas précédent où ν_0 est remplacé par $\nu_0 + 2$.

Ceci termine la démonstration qu'une relation de dépendance $L_0 + L_1\alpha_1 + L_2\alpha_2 = 0$ entraîne nécessairement au moins une interruption dans le développement par l'algorithme de Jacobi–Perron de (α_1, α_2) et prouve le Théorème 3.

Si $1, \alpha_1, \alpha_2$ sont liés par deux relations de dépendance indépendantes, le développement par l'algorithme de Jacobi–Perron est fini. Il correspond en fait à la recherche du pgcd. Si $1, \alpha_1, \alpha_2$ ne sont liés que par une seule relation alors le développement par l'algorithme de Jacobi–Perron de (α_1, α_2) admet une seule interruption et le développement se continue par un développement en fraction continue infinie. *Si ce dernier développement est périodique, nous dirons que l'algorithme de Jacobi–Perron de* (α_1, α_2) *est périodique au sens large. Un développement périodique sans interruption sera dit strictement périodique.*

COROLLAIRE. *Le développement par l'algorithme de Jacobi–Perron de* (α_1, α_2) *est périodique au sens large si et seulement si* $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$ *est un corps quadratique.*

En effet la périodicité au sens large nécessite une seule interruption et une fraction continue périodique d'un certain β quadratique. $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbb{Q}(\beta)$ est donc un corps quadratique.

Réciproquement, si $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$ est quadratique, $1, \alpha_1, \alpha_2$ sont liés par une relation de dépendance linéaire. L'algorithme de Jacobi–Perron de (α_1, α_2) admet alors une interruption et se termine par la fraction continue d'un nombre β vérifiant $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$. Ce qui prouve la périodicité au sens large.

REFERENCES

[1] B. Adam and G. Rhin, 'Algorithme des fractions continues et de Jacobi–Perron', *Bull. Aust. Math. Soc.* **53** (1996), 341–350.

[2] L. Bernstein, *The Jacobi Perron. Its theory and application*, Lecture Notes in Mathematics **207** (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971).

[3] E. Dubois, 'Thèse de 3ème cycle', (Caen 1970), *C.R. Acad. Sci. Paris* (1971), 564–566.

[4] E. Dubois, A. Fahrane and R. Paysant-Le Roux, 'The Jacobi–Perron algorithm and Pisot numbers', *Acta Arith.* (to appear).

[5] E. Dubois and R. Paysant-Le Roux, 'Une application des nombres de Pisot à l'algorithme de Jacobi–Perron', *Monatsh. Math.* **98** (1984), 145–155.

[6] C.G. Jacobi, 'Allgemeine Theorie der kettenbruchaehnlichen Algorithmen, in welchen pede Zahl ans drei varhergehenden gebildlt wird', *J.f.d. reine Angew. Math.* **69** (1869), 29–64.

[7] R. Paysant-Le Roux, 'Thèse de $3^{ème}$ cycle', (Caen 1970), *C.R. Acad. Sci. Paris* (1971), 649–652.

[8] O. Perron, 'Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus', *Math. Ann.* **64** (1907), 1–76.

[9] F. Schweiger, *The metrical theory of Jacobi-Perron Algorithm*, Lecture Note in Mathematics **334** (Springer Verlag, Berlin, New York, 1973).

Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
UMR CNRS n° 6139
Université Caen
14032 Caen-Cedex
France
e-mail: eugene.dubois@math.unicaen.fr

Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences et Techniques de SETTAT
Maroc
e-mail: ahmed_farhane@yahoo.fr

Laboratoire Nicolas ORESME
UMR CNRS n° 6139
Université de Caen
14032 Caen-Cedex
France
e-mail: Roger.Paysant-Lerous@math.unicaen.fr

https://doi.org/10.1017/S000497270003598X Published online by Cambridge University Press