

ANNEAUX MÉTAPRIMITIFS

G. THIERRIN

Un anneau R est dit primitif **(3)** s'il existe un R -module irréductible et fidèle M . L'objet de cet article est d'étudier une généralisation naturelle de la notion d'anneau primitif en remplaçant "irréductible" par "sous-directement irréductible" dans la définition ci-dessus. D'une façon plus précise, un anneau R sera dit métaprimatif s'il existe un R -module sous-directement irréductible et fidèle M , avec $SR \neq \{0\}$, S étant le sous-module minimal de M . Nous établissons pour les anneaux métaprimatifs un théorème de structure (théorème 2.3) faisant apparaître certaines analogies avec le théorème de structure correspondant pour les anneaux primitifs. L'intérêt des anneaux métaprimatifs réside dans le fait que tout anneau avec élément unité est somme sous-directe d'anneaux métaprimatifs (théorème 2.6). Dans la dernière partie de cet article, nous considérons une classe particulière d'anneaux métaprimatifs, celle des anneaux rationnels, dont l'étude est basée sur les résultats de **(2)**.

A moins d'indication contraire, les modules considérés sont des modules à droite et la nomenclature est celle de Jacobson **(3)**.

1. Un R -module M est dit *sous-directement irréductible* si l'intersection de ses sous-modules non nuls est un sous-module non nul S , appelé le *sous-module minimal* de M . Soit E une extension essentielle maximale de M . On sait **(1, 4)** qu'une telle extension existe toujours et que E est aussi une extension injective minimale de M . Il est évident que E est aussi sous-directement irréductible avec le même sous-module minimal S .

Un anneau R est dit *complètement primaire* **(3)** s'il possède un élément unité et si R/Q est un corps, Q étant le radical de R . Un anneau avec élément unité est complètement primaire si et seulement si l'ensemble de ses éléments non inversibles est un idéal.

PROPOSITION 1.1. *Le centraliseur Γ d'un R -module $M \neq \{0\}$ sous-directement irréductible et injectif est un anneau complètement primaire. Si S est le R -sous-module minimal de M , S est un Γ -sous-module du Γ -module à gauche M .*

Preuve. Le centraliseur Γ étant anti-isomorphe à l'anneau $\mathfrak{C}(M)$ des endomorphismes du R -module M , il suffit donc de montrer que $\mathfrak{C}(M)$ est complètement primaire.

Soit $\alpha \in \mathfrak{C}(M)$. Si $S\alpha \neq \{0\}$, alors α est bijectif. En effet, α est injectif, car sinon le noyau de α contiendrait S et l'on aurait $S\alpha = \{0\}$. Posons $T = M\alpha$; T est un sous-module $\neq \{0\}$ et donc $S \subseteq T$. Comme α est injectif, α^{-1} est un

Received November 26, 1963.

R -homomorphisme de T sur M . Le module M étant injectif, α^{-1} peut être étendu à un endomorphisme β de M sur M . Comme $S\beta \neq \{0\}$, β est injectif. D'où $\alpha^{-1} = \beta$ et $M = M\alpha$, c'est-à-dire α est surjectif.

De ce qui précède, il résulte que pour tout $\alpha \in \mathfrak{E}(M)$, on a soit $S\alpha = \{0\}$, soit $S\alpha = S$. Par conséquent, l'ensemble des éléments non inversibles de $\mathfrak{E}(M)$ est l'ensemble $\{\alpha | \alpha \in \mathfrak{E}(M), S\alpha = \{0\}\}$ qui est évidemment un idéal. Donc l'anneau $\mathfrak{E}(M)$ est complètement primaire.

La seconde partie de la proposition est immédiate.

Un R -module M sera dit méta-irréductible s'il est sous-directement irréductible, et si $SR \neq \{0\}$, S étant le sous-module minimal de M . On a alors $sR = S$ pour tout $s \in S, s \neq 0$.

Soit M un Γ -module unitaire à gauche. L'ensemble fini u_1, \dots, u_n d'éléments de M sera dit *quasi-libre sur Γ* si les éléments u_i sont $\neq 0$ et si la somme $\sum \Gamma u_i$ des sous-modules Γu_i est directe, c'est-à-dire si la relation $\gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_n u_n = 0$, avec $\gamma_i \in \Gamma$, entraîne $\gamma_1 u_1 = \dots = \gamma_n u_n = 0$.

PROPOSITION 1.2. *Soient M un R -module méta-irréductible, injectif et fidèle, S la sous-module minimal de M et Γ le centraliseur de M . Si l'ensemble fini x_1, \dots, x_n d'éléments de M est quasi-libre sur Γ et si y_1, \dots, y_n sont des éléments arbitraires de S , il existe alors $a \in R$ tel que*

$$x_i a = y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Preuve. La démonstration de cette proposition est analogue à celle du théorème de densité pour les modules irréductibles (3).

Montrons d'abord que tout homomorphisme h d'un R -sous-module N de M dans le R -module M peut être réalisé par un élément de Γ . En effet, M étant injectif, h peut être étendu à un endomorphisme de M . Par conséquent, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma x = xh$ pour tout $x \in N$.

Soit $\mathfrak{X}(M)$ l'anneau des Γ -endomorphismes de M . Posons

$$A^\perp = \{r | r \in \mathfrak{X}(M), Ar = \{0\}\}$$

si A est un sous-ensemble de M ;

$$A^\perp = \{x | x \in M, xA = \{0\}\}$$

si A est un sous-ensemble de $\mathfrak{X}(M)$.

Les hypothèses du lemme de (3, p. 27) sont vérifiées. Comme $R^\perp = \{0\}$, on a donc

$$\sum_1^n \Gamma u_i = \left(\bigcap_1^n u_i^\perp \cap R \right)^\perp$$

pour tout ensemble fini u_1, \dots, u_n de M .

Posons $T_j = \sum_{i \neq j} \Gamma x_i$. L'ensemble x_1, \dots, x_n étant quasi-libre sur Γ , on a $x_j \notin T_j$. D'où

$$x_j \notin \left(\bigcap_{i \neq j} x_i^\perp \cap R \right)^\perp.$$

Il existe donc $e_j \in R$ tel que

$$x_i e_j = 0, \quad i \neq j, \quad x_j e_j = u_j \neq 0.$$

Posons $M_j = u_j R$; M_j est un R -sous-module de M . Si $M_j = \{0\}$, l'ensemble $N = \{u|u \in M, uR = \{0\}\}$ est un R -sous-module $\neq \{0\}$ et donc $S \subseteq N$, c'est-à-dire $SR = \{0\}$, contre l'hypothèse. Par conséquent $M_j \neq \{0\}$ et $S \subseteq M_j$. Si $y_j \in S$, il existe $a_j \in R$ tel que $u_j a_j = y_j$. Soit

$$a = \sum_1^n e_j a_j \in R.$$

On a alors:

$$x_i a = y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

2. Un anneau R sera dit métaprimitif (à droite) s'il existe un R -module M fidèle et méta-irréductible.

Tout anneau primitif est évidemment métaprimitif. Si Z est l'anneau des entiers, p un nombre premier et n un entier > 1 , l'anneau $Z/(p^n)$ est métaprimitif, mais non primitif.

Tout anneau métaprimitif R possède au moins un idéal primitif P . En effet, soit M un R -module fidèle et méta-irréductible, avec S comme sous-module minimal. L'ensemble $P = \{x|x \in R, Sx = \{0\}\}$ est un idéal propre de R et S est un R/P -module fidèle et irréductible.

PROPOSITION 2.1. *Un anneau R est métaprimitif si et seulement s'il existe un R -module méta-irréductible, fidèle et injectif.*

Preuve. La condition est évidemment suffisante. Elle est nécessaire, puisque tout module sous-directement irréductible peut être étendu à un module sous-directement irréductible injectif avec le même sous-module minimal.

Soit Γ un anneau avec élément unité et soit M un Γ -module à gauche unitaire. Un anneau \mathfrak{C} d'endomorphismes du Γ -module M sera dit *localement dense* s'il existe un Γ -sous-module $S \neq \{0\}$ de M tel que:

1. $S\mathfrak{C} \subseteq S$.

2. Pour tout ensemble fini x_1, \dots, x_n d'éléments de M quasi-libre sur Γ et tout ensemble y_1, \dots, y_n d'éléments de S , il existe $a \in \mathfrak{C}$ tel que

$$x_i a = y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Si Γ est un corps, alors M est un espace vectoriel à gauche et les éléments x_1, \dots, x_n sont linéairement indépendants. Dans ce cas, \mathfrak{C} sera dit un anneau *localement dense de transformations linéaires* d'un espace vectoriel.

PROPOSITION 2.2. *Tout anneau localement dense \mathfrak{C} d'endomorphismes d'un Γ -module à gauche unitaire M est métaprimitif.*

Preuve. L'ensemble M est un \mathfrak{C} -module fidèle et S est un \mathfrak{C} -sous-module

de M . On a $S\mathfrak{E} \neq \{0\}$, car si $s \in S$, $s \neq 0$, s est quasi-libre sur Γ . Il existe donc $a \in \mathfrak{E}$ tel que $sa = s$.

D'autre part, tout \mathfrak{E} -sous-module $N \neq \{0\}$ de M contient S . En effet, soit $u \in N$, $u \neq 0$. L'élément u étant quasi-libre sur Γ , il existe pour tout $s \in S$ un élément $a \in \mathfrak{E}$ tel que $ua = s$. D'où $S \subseteq u\mathfrak{E} \subseteq N$.

Le \mathfrak{E} -module M étant fidèle et méta-irréductible, l'anneau \mathfrak{E} est donc métaprimitif.

THÉORÈME 2.3. *Un anneau R est métaprimitif si et seulement s'il est isomorphe à un anneau localement dense \mathfrak{E} d'endomorphismes d'un Γ -module à gauche unitaire M , où Γ est un anneau complètement primaire.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate des propositions précédentes.

Un idéal à droite D d'un anneau R sera dit *localement maximal* si $D \neq R$ et si le R -module $R - D$ est sous-directement irréductible, c'est-à-dire si l'intersection des idéaux à droite de R contenant D et $\neq D$ est un idéal à droite $\neq D$. Du lemme de Zorn, il découle immédiatement que pour tout $a \in R$, $a \neq 0$, il existe au moins un idéal à droite localement maximal ne contenant pas a .

Rappelons que si D est un idéal à droite de R , l'ensemble

$$(D:R) = \{x \mid x \in R, Rx \subseteq D\}$$

est un idéal de R . Si D est modulaire (en particulier, si R possède un élément unité), $(D:R)$ est le plus grand idéal de R contenu dans D .

Un idéal P de R sera dit *métaprimitif* si l'anneau-quotient R/P est métaprimitif.

PROPOSITION 2.4. *Si R est un anneau avec élément unité et si D est un idéal à droite localement maximal de R tel que $(D:R) = \{0\}$, alors R est métaprimitif.*

Preuve. Posons $M = R - D$. Alors M est un R -module sous-directement irréductible et fidèle. Si S est le sous-module minimal de M , on a $SR \neq \{0\}$ puisque R possède un élément unité. L'anneau R est donc métaprimitif.

COROLLAIRE. *Pour tout idéal à droite localement maximal D d'un anneau R avec élément unité, l'idéal $(D:R)$ est métaprimitif.*

THÉORÈME 2.5. *Tout anneau R sous-directement irréductible avec élément unité est métaprimitif.*

Preuve. Soit A l'idéal minimal de R et soit $a \in A$, $a \neq 0$. Il existe un idéal à droite D localement maximal ne contenant pas a . Comme R possède un élément unité, $(D:R) \subseteq D$ et donc $a \notin (D:R)$. Par conséquent, puisque R est sous-directement irréductible, $(D:R) = \{0\}$ et l'anneau R est métaprimitif d'après la proposition 2.4.

THÉORÈME 2.6. *Tout anneau avec élément unité est somme sous-directe d'anneaux métaprimitifs.*

Preuve. C'est une conséquence du théorème précédent et du fait que tout anneau avec élément unité est somme sous-directe d'anneaux sous-directement irréductibles avec élément unité.

3. Nous allons étudier maintenant une classe spéciale d'anneaux métaprimitifs, en utilisant pour cela certaines notions et certains résultats de (2) que nous allons rappeler.

Soit un anneau R et soient A et B des R -modules. Si C est un sous-module de B , on écrit $C \leq B(A)$, si pour tout R -homomorphisme partiel de B dans A , $C \subseteq \ker \phi$ entraîne $\text{im } \phi = 0$. On a les propriétés:

1. Si $C \leq B(A)$ et $C \subseteq D \subseteq B$, alors $C \leq D(A)$ et $D \leq B(A)$.
2. Si $C \leq B(B)$ et $B \leq A(A)$, alors $C \leq A(A)$.

Le module B est dit *extension rationnelle* du sous-module C si $C \leq B(B)$. On a:

3. B est extension rationnelle de C si et seulement si B est extension essentielle de C et $C \leq B(C)$.

Un R -homomorphisme partiel ϕ de B dans A est dit *fractionnaire* si $\text{dom } \phi \leq B(A)$. Le module A est dit *rationnellement complet* si tout R -homomorphisme fractionnaire d'un module B quelconque dans A peut être étendu à un R -homomorphisme complet. On a:

4. Tout R -module C possède une extension rationnelle maximale \bar{C} et \bar{C} est rationnellement complet.

Un anneau R sera dit *rationnel* (à droite), s'il existe un R -module M méta-irréductible et fidèle tel que M soit extension rationnelle de son sous-module minimal S . Tout anneau rationnel est métaprimitif et tout anneau primitif est rationnel.

PROPOSITION 3.1. *Un anneau R est rationnel si et seulement s'il existe un R -module M méta-irréductible, fidèle et rationnellement complet tel que M soit extension rationnelle de son sous-module minimal S . Le centraliseur Γ du R -module M est alors un corps et S est un Γ -sous-module du Γ -module à gauche M .*

Preuve. La condition est évidemment suffisante. Elle est nécessaire. En effet, R étant rationnel, il existe un R -module N méta-irréductible et fidèle tel que N soit extension rationnelle de son sous-module minimal S . Le R -module N possède une extension rationnelle maximale M et M est rationnellement complet. Le module M est évidemment fidèle. D'après la propriété 2, M est extension rationnelle de S et d'après la propriété 3, M est extension essentielle de S . Il s'ensuit alors que tout sous-module non nul de M contient S et donc M est méta-irréductible.

Montrons ensuite que l'anneau \mathfrak{E} des endomorphismes du R -module M est un corps, ce qui entraîne que Γ est aussi un corps. Le module M est extension rationnelle de tout sous-module $N \neq \{0\}$; en effet, de $S \leq M(M)$ et $S \subseteq N \subseteq M$ suit, d'après la propriété 1, $N \leq M(M)$. Par conséquent, tout R -homo-

morphisme partiel $\phi \neq 0$ de M dans M est fractionnaire et, puisque M est rationnellement complet, ϕ peut être étendu à un endomorphisme de M .

Pour montrer que \mathfrak{C} est un corps, il suffit de montrer que tout $\alpha \in \mathfrak{C}$, $\alpha \neq 0$, est bijectif.

α est injectif. Sinon, le noyau N de α contient S et $S\alpha = \{0\}$, ce qui entraîne $\alpha = 0$, puisque M est extension rationnelle de S .

α est surjectif. Soit $T = M\alpha$; T est un sous-module de M et $S \subseteq T$. L'application inverse α^{-1} est un R -homomorphisme partiel de M dans M . D'après ce qui précède, α^{-1} est fractionnaire et peut être étendu à un endomorphisme β de M , $\beta \neq 0$. Mais β est injectif; par conséquent $\beta = \alpha^{-1}$ et α est surjectif.

Il est immédiat que S est un Γ -sous-module de M .

THÉORÈME 3.2. *Un anneau R est rationnel si et seulement s'il est isomorphe à un anneau localement dense \mathfrak{C} de transformations linéaires d'un espace vectoriel.*

Preuve. La condition est nécessaire. D'après la proposition 3.1, il existe un R -module M méta-irréductible, fidèle et rationnellement complet tel que M soit extension rationnelle de son sous-module minimal S . Le centralisateur Γ de M est un corps et M est un espace vectoriel sur Γ . D'autre part, tout R -homomorphisme partiel de M dans M peut être réalisé par un élément de Γ . Cela découle du fait que tout R -homomorphisme partiel $\neq 0$ de M dans M est fractionnaire (voir la preuve de la proposition 3.1) et peut par conséquent être étendu à un endomorphisme de M . La suite de la démonstration est analogue à celle qui a été faite pour les anneaux métaprimitifs (voir proposition 1.2 et théorème 2.3).

La condition est suffisante. En effet, soit \mathfrak{C} un anneau localement dense de transformations linéaires de l'espace vectoriel à gauche M sur le corps Γ , avec le Γ -sous-espace $S \neq \{0\}$ tel que $S\mathfrak{C} \subseteq S$. Il est immédiat que M est un \mathfrak{C} -module méta-irréductible et fidèle avec S comme sous-module minimal. Montrons que M est extension rationnelle de S . Pour cela, il suffit d'après (2, proposition 1.4) de montrer que pour tout $u, v \in M$, $u \neq 0$, il existe $\alpha \in \mathfrak{C}$ tel que $u\alpha \neq 0$ et $v\alpha \in S$. Soit $s \in S$, $s \neq 0$. On a les deux possibilités suivantes:

(1) v est combinaison linéaire de u , $v = \gamma u$, $\gamma \in \Gamma$. Il existe alors $\alpha \in \mathfrak{C}$ tel que $u\alpha = s \neq 0$ et $v\alpha = (\gamma u)\alpha = \gamma(u\alpha) = \gamma s \in S$.

(2) u et v sont linéairement indépendants. Comme \mathfrak{C} est localement dense, il existe $\alpha \in \mathfrak{C}$ tel que $u\alpha = s = v\alpha \in S$ et $u\alpha \neq 0$.

PROPOSITION 3.3. *Tout anneau rationnel commutatif est un corps.*

Preuve. Il suffit de montrer que tout anneau commutatif localement dense \mathfrak{C} de transformations linéaires d'un espace vectoriel M sur un corps Γ est un corps. Soit S le Γ -sous-espace $\neq \{0\}$ tel que $S\mathfrak{C} \subseteq S$ et soit $s \in S$, $s \neq 0$. Supposons que M soit de dimension > 1 . Il existe alors $u \in M$ tel que s et u soient linéairement indépendants. \mathfrak{C} étant localement dense, il existe α et $\beta \in \mathfrak{C}$ tels que $s\alpha = 0$, $u\alpha = s$ et $s\beta = s$, $u\beta = 0$. D'où $u\alpha\beta = s$ et $u\beta\alpha = 0$.

Mais $\alpha\beta = \beta\alpha$. Par conséquent $s = 0$, ce qui est impossible. L'espace M est donc de dimension un et \mathfrak{E} est un corps.

RÉFÉRENCES

1. B. Eckmann und A. Schopf, *Über injektive Moduln*, Arch. d. Math., 4 (1956), 75–78.
2. G. D. Findlay and J. Lambek, *A generalized ring of quotients I, II*, Can. Math. Bull., 1 (1958), 77–85, 155–167.
3. N. Jacobson, *Structure of rings* (Providence, 1956).
4. R. E. Johnson, *Structure theory of faithful rings II*, Trans. Amer. Math. Soc., 84 (1957), 523–542.

Université de Montréal et

The Summer Research Institute of the Canadian Mathematical Congress