Can. J. Math., Vol. XL, No. 2, 1988, pp. 360-391

SUR LES ISOMÉTRIES DE $L^p(X)$ ET LE THÉORÈME ERGODIQUE VECTORIEL

S. GUERRE ET Y. RAYNAUD

Introduction. Etant donné un opérateur T sur un espace L^p $(1 < p < \infty)$, la théorie ergodique s'intéresse à la convergence presque sûre des moyennes de Césaro

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T^i f\right)_{n \in \mathbf{N}}$$

des itérés d'un point f de L^p par T. On dit que T *vérifie le théorème ergodique* si cette convergence a lieu pour tout f de L^p.

Parmi les nombreux résultats sur cette question (cf. [**21**]) nous citerons d'abord ceux de A. Ionescu-Tulcea ([**19**]) et R. Chacon-S. A. McGrath ([**10**]) que l'on peut réunir dans l'assertion suivante :

"Si $1 < p < \infty$ et T une isométrie positive de L^p, ou si $1 < p \neq 2 < \infty$ et si T est une isométrie surjective de L^p, alors T vérifie le théorème ergodique".

Nous nous intéressons ici à une version vectorielle de ce théorème. Plus précisément, si X est un espace de Banach réel, un opérateur linéare T sur l'espace $L^p(X)$ est dit vérifier le *théorème ergodique vectoriel* si la suite des moyennes de Césaro

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T^i f\right)_{n \in \mathbf{N}}$$

converge presque sûrement en norme dans X, quel que soit $f \in L^p(X)$. Nous donnons ici des conditions assurant que le théorème ergodique vectoriel est vérifié par certaines isométries de $L^p(X)$.

Ces résultats sont obtenus par l'étude de la structure des isométries de $L^p(X)$. Le cas des isométries surjectives est déjà traité dans [**26**] et [**15**]. Le cas non surjectif constitue l'un des objets du présent travail, essentiellement lorsque X est un treillis convenable. Les conditions mises sur X permettent d'assurer que $L^p(X)$ a "assez peu" d'isométries positives en réduisant chacune d'entre elles à la résultante d'une isométrie positive de L^p et d'un champ mesurable d'isométries de X. Le cas des isométries quelconques est traité ici seulement lorsque $X = L^q$, généralisant ainsi à $L^p(L^q)$ les résultats de J. Lamperti [**22**].

Reçu le 6 août 1986 et sous forme revisée 13 mars 1987.

Rappelons d'autre part que ce type de généralisation vectorielle d'un théorème ergodique scalaire a déjà été obtenu par R. Chacon ([**9**]) à partir du théorème ergodique de N. Dunford et J. T. Schwartz ([**12**]) relatif au cas où T est une contraction à la fois de L^1 et L^∞ : Chacon obtient un théorème ergodique vectoriel pour T contraction à la fois de $L^1(X)$ et $L^\infty(X)$.

Par ailleurs dans [**1**] et [**2**] M. Akcoglu et L. Sucheston ont étendu le résultat de A. Ionescu-Tulcea aux contractions positives de L^p, par une "méthode de dilatation" dont nous montrons qu'elle ne peut pas s'étendre au cas vectoriel.

Pour démontrer un théorème ergodique vectoriel, dans le cas où X est réflexif, on sait (cf. [**21**]) qu'il suffit de démontrer une *inégalité maximale vectorielle*, c'est-à-dire :

$$\exists C = C(p, X) \text{ telle que } \forall f \in L^p(X)$$

$$\left|\sup_n \left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T^i f\right|_X\right|_p \leqq C\|f\|_{L^p(X)}.$$

Dans la première partie, après quelques définitions et remarques, on donne une condition suffisante pour qu'une contraction de $L^p(X)$ vérifie l'inégalité maximale vectorielle avec

$$C = \frac{p}{p - 1}.$$

Dans la deuxième partie, on montre que pour tout espace de Banach X, les isométries surjectives de $L^p(X)$ pour $1 < p \neq 2 < +\infty$, vérifient cette inégalité maximale vectorielle et que ceci reste vrai si $p = 2$ dans le cas où X est un treillis de Banach et T une isométrie de treillis sur $L^2(X)$.

La troisième partie est consacrée à l'étude des isométries positives T de $L^p(X)$ où $X = L^q(Y)$ et Y est un treillis 1-q-concave et 1-r-convexe sur vecteurs disjoints si $q \geqq r > p$ (resp. : 1-q-convexe et 1-r-concave sur vecteurs disjoints si $q \leqq r < p$). On montre que ces opérateurs vérifient la condition de la partie 1.

Dans la quatrième partie, on traite le cas des isométries positives de $L^p(X)$, où $X = L^q(L^r)$, pour des valeurs de q et r qui n'entrent pas dans le cadre général de la partie 3.

La cinquième partie réduit l'étude des isométries de $L^p(L^q)$ à celles des isométries positives sauf lorsque $p \leqq q \leqq 2$ ou $q = 2$.

Dans la sixième partie, on montre que le théorème de dilatation d'Akcoglu [**1**] ne s'étend pas d'une façon naturelle au cas des contractions positives de $L^p(L^q)$.

Nous tenons à remercier I. Assani pour les nombreuses discussions que nous avons eues avec lui et A. Brunel qui nous a encouragés dans cette étude.

1. Définitions, remarques pràliminaires et condition suffisante.

Définitions. 1) Soient $1 < p < \infty$ et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité. On pose

$$L^p = L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu).$$

2) Si X est un espace de Banach, $L^p(X)$ est l'espace vectoriel des fonctions Bochner-mesurables f de Ω dans X telles que la fonction $|f(\omega)|_X$ soit dans L^p; on appellera, comme dans [**18**] et [**23**], *norme aléatoire* de f cet élément de L^p et on le notera $N(f)$.

3) On note $|\ |_p$ la norme de L^p, $|\ |_X$ la norme de X et on réserve la notation $\|\ \|$ pour la norme de $L^p(X)$. Ainsi pour $f \in L^p(X)$, on a $\|f\| = |N(f)|_p$.

4) Si $f \in L^p(X)$, on appelle *p-support* de f le support de $N(f)$ dans Ω.

5) On dira qu'un opérateur T sur $L^p(X)$ est de *Lamperti-vectoriel* (par analogie avec la terminologie de [**20**]) si T envoie des fonctions à p-supports disjoints sur des fonctions à p-supports disjoints.

6) Si $f \in L^p$ et $x \in X$, on note $f \otimes x$ l'élément de $L^p(X)$ défini par :

$$(f \otimes x)(\omega) = f(\omega) \cdot x \text{ (p.s.)}.$$

Si T est un opérateur positif sur L^p, $T \otimes \mathrm{Id}$ est l'unique opérateur sur $L^p(X)$ tel que

$$(T \otimes \mathrm{Id})(f \otimes x) = Tf \otimes x \quad \text{pour } f \in L^p \text{ et } x \in X.$$

Si T est une isométrie positive de L^p, $T \otimes \mathrm{id}$ est une isométrie positive de $L^p(X)$.

7) Soit Z un treillis de Banach.

– deux éléments f et g sont *disjoints* dans Z si $|f| \wedge |g| = 0$

– en particulier, si Z est un espace de Köthe de fonctions sur un espace mesuré $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ (cf. [**24**], 1 b 17), le *support* d'un élément f de Z est le plus petit ensemble $\mathcal{A}'$-mesurable A tel que $\mathbf{1}_A f = f$. Les expressions "f et g disjointes" et "f et g à supports disjoints" sont alors équivalentes.

– on dira que Z est *strictement monotone* (cf. [**8**]) si :

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq y \\ |x|_z = |y|_z \end{array}\right\} \Rightarrow x = y.$$

Notons que si X est un treillis de Banach strictement monotone, il en est de même de $L^p(X)$ $(1 \leqq p < \infty)$.

8) On dira qu'un opérateur T sur un treillis de Banach Z est *de Lamperti* (cf. [**20**]) si T envoie des éléments disjoints sur des éléments disjoints.

En particulier, si Z est un espace de Köthe et T est un opérateur positif et de Lamperti sur Z, T est un homomorphisme de treillis.

L'espace Z qui intervient dans les définitions 7) et 8) sera en général dans la suite un espace $L^p(X)$ où X est un treillis de Banach.

Remarques. 1.1. Dans toute cette étude, on travaille sur un espace L^p de probabilité : ceci n'est pas une restriction car en théorie ergodique, il suffit de considérer des espaces L^p pour une mesure diffuse et σ-finie et ces espaces sont positivement isométriques à un espace L^p de probabilité.

1.2. Si T est une isométrie positive d'un treillis strictement monotone, T est de Lamperti (cf. **[8]** Lemme 3).

1.3. Dans toute cette étude, on cherche à montrer des *inégalités maximales vectorielles* pour une isométrie T et $L^p(X)$ c'est-à-dire :

$$\exists C > 0, \forall f \in L^p(X),$$

$$\left|\sup_n N\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i f\right)\right|_p \leqq C\|f\|.$$

Si X est réflexif, ceci implique d'après **[21]** que T vérifie le théorème ergodique vectoriel, la limite de

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i f\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

étant automatiquement un point fixe de T.

Si X est un treillis de Banach et T un opérateur positif de $L^p(X)$, il est clair qu'il suffit de montrer une inégalité maximale vectorielle pour les fonctions positives de $L^p(X)$. Pour un espace X fixé, il est intéressant de savoir quelle est la meilleure constante C vérifiant les inégalités maximales vectorielles. On verra dans la partie 2 que cette constante vaut $p/(p-1)$ pour les isométries surjectives et dans la partie 3 qu'elle vaut également $p/(p-1)$ pour les isométries positives si $X = L^q(Y)$ où Y est un treillis ayant de bonnes propriétés de concavité et convexité.

1.4. Lorsque X est un treillis de Banach et T un opérateur positif sur $L^p(X)$, on peut s'intéresser à une *inégalité maximale latticielle*, c'est-à-dire :

$$\exists C > 0 \text{ telle que } \forall f \in L^p(X), f \geqq 0,$$

$$\left\|\sup_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i f\right\| \leqq C\|f\|.$$

Comme nous l'a fait remarquer I. Assani, on connait grâce à la démonstration de de la Torre **[28]** du théorème de **[19]**, une condition suffisante pour que cette inégalité soit vérifiée :

LEMME 1.4.1. *Soient* $1 < p < \infty$, *X un treillis et T un opérateur sur* $L^p(X)$ *tel que :*

(i) *T est positif*
(ii) *T est de Lamperti*
(iii) $\exists a, b > 0$ *tels que* $\forall f \in L^p(X)$, $\forall n \in \mathbf{N}$

$$a\|f\| \leqq \|T^n f\| \leqq b\|f\|.$$

Soit s le shift à droite sur l^p. Si $S = s \otimes$ id vérifie l'inégalité maximale latticielle avec la constante C, T vérifie la même inégalité maximale avec la constante bC/a.

Démonstration. Supposons en effet que $S = s \otimes$ id vérifie

$$\forall F \in l^p(X), \quad F \geqq 0,$$

$$\left\|\sup_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S^i F\right\|_{l^p(X)} \leqq C\|F\|_{l^p(X)}.$$

Soit $f \in L^p(X)$, $f \geqq 0$. D'après (ii), comme dans [**28**], on montre que : $\forall n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall k \in \mathbf{N}$,

$$T^k\left(\sup_{n \leqq n_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^i f\right) \leqq \sup_{n \leqq n_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^i(T^k f).$$

On en déduit : $\forall n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall k \in \mathbf{N}$,

$$a^p\left\|\sup_{n \leqq n_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^i f\right\|_{L^p(X)}^p \leqq \left\|\sup_{n \leqq n_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^i(T^k f)\right\|_{L^p(X)}^p$$

et donc aussi : $\forall n_0 \in \mathbf{N}$, $\forall k_0 \in \mathbf{N}$

$$a^p\left\|\sup_{n \leqq n_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^i f\right\|_{L^p(X)}^p \leqq \frac{1}{k_0} \int \sum_{k=1}^{k_0} N\left(\sup_{n \leqq n_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^{i+k}(f)\right)^p d\mu.$$

Pour $\omega \in \Omega$ fixé, soit F l'élément de $l^p(X)$ défini par :

$$\begin{cases} \forall j \in [1, n_0 + k_0], \ F(j) = T^j f(\omega) \\ \forall j \notin [1, n_0 + k_0], \ F(j) = 0. \end{cases}$$

En appliquant l'hypothèse, on peut alors écrire :

$$\sum_{k=1}^{k_0} N\left(\sup_{n \leqq n_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^{i+k}(f)\right)^p = \sum_{k=1}^{k_0} \left|\sup_{n \leqq n_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S^i F(k)\right|_X^p$$

$$\leqq C^p\|F\|_{l^p(X)}^p = C \sum_{j=1}^{k_0+n_0} |T^j f(\omega)|_X^p.$$

En intégrant membre à membre, on obtient :

https://doi.org/10.4153/CJM-1988-015-0 Published online by Cambridge University Press

$$\left\| \sup_{n \leqq n_0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T^i f \right\|_{L^p(X)}^p \leqq \frac{C^p}{a^p} \frac{1}{k_0} \sum_{j=1}^{k_0+n_0} \int |T^j f(\omega)|_X^p$$

$$\leqq \left(\frac{bC}{a}\right)^p \frac{k_0 + n_0}{k_0} \|f\|_{L^p(X)}^p.$$

En faisant tendre k_0 vers $+\infty$, n_0 étant quelconque, ceci donne bien l'inégalité maximale latticielle pour T avec la constante bC/a. Les conditions du Lemme 1.4.1 sur T sont vérifiées en particulier si T est une isométrie positive de $L^p(X)$. La condition suffisante du Lemme 1.4.1 sur S est vérifiée pour certains espaces X :

Les espaces l^∞, L^∞, $C(K)$, c_0. En effet dans ce cas les inégalités maximales latticielles coïncident avec les inégalités maximales vectorielles et S est une isométrie de $l^1(X)$ et $l^\infty(X)$. Donc on peut appliquer [**9**] et on trouve $C = p/(p - 1)$.

Les espaces l^q, $1 < q < \infty$. Ceci résulte des travaux de [**27**] qui s'appuient sur les inégalités de [**13**] pour la fonction maximale.

Les treillis de fonctions UMD. C'est une conséquence des inégalités pour la fonction maximale dues à J. Bourgain ([**6**]).

Dans les deux derniers cas, la constante trouvée n'est pas $p/(p - 1)$. Les hypothèses de nature isométrique que nous envisageons dans la partie 3 (qui n'entrainent pas la propriété UMD cf. [**7**]) nous permettent d'obtenir l'inégalité maximale vectorielle avec la constante optimale $C = p/(p - 1)$, de manière relativement plus élémentaire.

La méthode utilisée dans cet article pour démontrer des inégalités maximales vectorielles utilise la généralisation suivante de la notion d'opérateur régulier (cf. [**21**]).

Définition. Soit T une contraction de $L^p(X)$. On dira que $\tilde{T}$ est une *L_p-contraction majorante de T* si c'est une contraction de L^p et :

$$\forall f \in L^p(X), \quad N(Tf) \leqq \tilde{T}(N(f)).$$

Il est clair que nécessairement $\tilde{T}$ est positive; et que si T est de la forme $T = Q \otimes \mathrm{id}$, où Q est une contraction positive de L^p, alors Q est une L_p-contraction majorante de T.

La proposition suivante est fondamentale : elle donne une condition suffisante pour qu'une contraction de $L^p(X)$ vérifie une inégalité maximale et sera la clef de notre étude.

PROPOSITION 1.5. *Soit $1 < p < \infty$, X un espace de Banach et T une contraction de $L^p(X)$. S'il existe une L_p-contraction majorante $\tilde{T}$ de L^p, alors T vérifie l'inégalité maximale vectorielle* :

$$\forall f \in L^p(X), \quad \left|\sup_n N\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i f\right)\right|_p \leqq \frac{p}{p-1}\|f\|.$$

Démonstration. En appliquant le théorème d'Akcoglu à $\tilde{T}$, on obtient immédiatement pour $f \in L^p(X)$:

$$\left|\sup_n N\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i f\right)\right|_p \leqq \left|\sup_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \tilde{T}^i(N(f))\right|_p \leqq \frac{p}{p-1}\|f\|.$$

Pour une isométrie T de $L^p(X)$, cette notion de L_p-contraction majorante est essentiellement équivalente à la réduction de T par une isométrie positive de L^p au sens de [**15**] :

PROPOSITION 1.6. *Soit* $1 \leqq p < +\infty$, *X un espace de Banach et T une isométrie de $L^p(X)$. Les propositions suivantes sont équivalentes* :

(i) *T admet un L_p-contraction majorante.*

(ii) *Il existe une isométrie positive $\tilde{T}$ de L^p telle que* :

$$\forall f \in L^p(X), \quad N(Tf) = \tilde{T}[N(f)].$$

De plus si X est séparable, (i) *et* (ii) *sont encore équivalentes à* :

(iii) *Il existe une isométrie positive $\tilde{T}$ de L^p et une famille fortement mesurable $(T_\omega)_{\omega\in\Omega}$ d'isométries de X telles que* :

$$\forall f \in L^p(X), \quad Tf(\omega) = T_\omega(\tilde{T} \otimes \mathrm{id}_X)(f)(\omega) \text{ p.s.}$$

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que l'on ait :

$$\forall f \in L^p(X), \quad N(Tf) \leqq \tilde{T}(Nf).$$

En intégrant membre à membre cette inégalité, on obtient :

$$\|f\| = |N(Tf)|_p \leqq |\tilde{T}(Nf)|_p \leqq |N(f)|_p = \|f\|.$$

On a donc des égalités partout et on en déduit (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) est évident.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Pour une famille $\mathscr{H}$ dénombrable dense dans X, on définit S_ω sur l'espace vectoriel $[\mathscr{H}]$, engendré par $\mathscr{H}$, par : $\forall x \in \mathscr{H}$,

$$S_\omega(x) = T(\mathbf{1} \otimes x)(\omega);$$

puis on pose

$$T_\omega = \frac{S_\omega}{\|S_\omega\|}.$$

On étend T_ω à X tout entier et on conclut comme dans [**15**].

Le résultat suivant donne une méthode pratique pour montrer l'existence d'une L_p-contraction majorante dans le cas où T est une isométrie.

https://doi.org/10.4153/CJM-1988-015-0 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 1.7. *Soit $1 < p < \infty$, X un espace de Banach et T une isométrie de $L^p(X)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *T admet une L_p-contraction majorante $\widetilde{T}$.*

(ii) (a) *T est de Lamperti vectoriel.*

(b) *Il existe une fonction mesurable $\alpha:\Omega \to \mathbf{R}_+$ telle que :*

$$\forall x \in X, \quad N[T(\mathbf{1} \otimes x)] = \alpha \cdot |x|_X.$$

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) est une conséquence immédiate de la remarque 1.2 et de la proposition 1.6 en posant $\alpha = \widetilde{T}(\mathbf{1})$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sous l'hypothèse (ii) (a), on peut définir une application Φ de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$ telle que $\Phi(A)$ soit la borne supérieure des supports de $N(Tf)$ lorsque $N(f)$ est à support dans A.

On vérifie aisément que Φ est homomorphisme booléen (en particulier σ-additif) et vérifie de plus : $T(\mathbf{1}_A f) = \mathbf{1}_{\Phi(A)} T(f)$ pour tout $A \in \mathscr{A}$. On en déduit que si

$$f = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} \otimes x_i \in L^p(X),$$

$$Tf = T\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} \otimes x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\Phi(A_i)} T(\mathbf{1} \otimes x_i).$$

Avec l'hypothèse (ii) (b), on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} N\left(T\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} \otimes x_i\right)\right) &= N\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\Phi(A_i)} T(\mathbf{1} \otimes x_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\Phi(A_i)} N(T(\mathbf{1} \otimes x_i)) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\Phi(A_i)} |x_i|_X. \end{aligned}$$

Soit $\widetilde{T}$ l'opérateur sur L^p tel que :

$$\widetilde{T}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}\right) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{\Phi(A_i)}.$$

L'extension naturelle de $\widetilde{T}$ à L^p est une isométrie positive : en effet, on a $N(Tf) = \widetilde{T}(Nf)$ pour toute $f \in L^p(X)$, fonction vectorielle étagée. T étant une isométrie, ceci entraine que $\widetilde{T}$ est une isométrie sur les fonctions étagées positives de L^p. Par densité, on voit que $\widetilde{T}$ est une isométrie positive de L^p et que la relation $N(Tf) = \widetilde{T}(Nf)$ reste vraie pour toute $f \in L^p(X)$.

2. Isométries surjectives de $L^p(X)$.

Définition. On dit qu'une projection P sur un espace de Banach X est une *p-projection* si pour tout $x \in X$, on a :

$$|x|_X^p = |Px|_X^p + |(I - P)(x)|_X^p.$$

(cf. [**4**] ou [**15**]).

PROPOSITION 2.1. *Soit $1 \leqq p < \infty$, $p \neq 2$, X un espace de Banach séparable sans p-projection et T une isométrie surjective de $L^p(X)$. Alors T admet une L_p-contraction majorante.*

Démonstration. Ceci est une conséquence de la forme explicite des isométries surjectives de $L^p(X)$ dans ce cas, qui figure dans [**15**], et qui permet d'appliquer le critère (iii) de la Proposition 1.7.

Les outils définis dans [**4**] et utilisés par [**15**] permettent en fait d'obtenir le résultat suivant :

THÉORÈME 2.2. *Soit $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, X un espace de Banach et T une isométrie surjective de $L^p(X)$. Alors, T vérifie l'inégalité maximale vectorielle* : $\forall f \in L^p(X)$,

$$\left|\sup_n N\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n T^i f\right)\right|_p \leqq \frac{p}{p-1}\|f\|.$$

Démonstration. Elle se fait en deux étapes :

A) Soit Z un espace de Banach. Dans [**4**], on montre que l'ensemble $\mathscr{P}_p(Z)$ des p-projections de Z est une algèbre de Boole (car les p-projections commutent si $p \neq 2$); on définit une mesure μ_Z sur $\mathscr{P}_p(Z)$ et une application surjective N_Z de Z sur $L_+^p(\mathscr{P}_p(Z))$ qui est une norme aléatoire à valeurs dans $L_+^p(\mathscr{P}_p(Z))$ au sens de [**18**] ("norm resolution" dans la terminologie de [**4**]) i.e., elle vérifie :

(i) $\forall z \in Z, \quad \|z\|_Z = |N_Z(z)|_{L^p(\mathscr{P}_p(Z))}$

(ii) $\forall (z_1, z_2) \in Z^2, \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{R}^2$

$$N_Z(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) \leqq |\alpha_1| N_Z(z_1) + |\alpha_2| N_Z(z_2)$$

(iii) $\forall P \in \mathscr{P}_p(Z), \forall z \in Z, N_Z(Pz) = \mathbf{1}_P N_Z(z)$.

Comme dans [**15**], à une isométrie surjective T de Z, on associe l'isomorphisme booléen (surjectif) Φ de $\mathscr{P}_p(Z)$ dans lui-même tel que :

$$\forall P \in \mathscr{P}_p(Z), \quad \Phi(P) = TPT^{-1}.$$

On a donc : $\forall z \in Z$,

$$TP(z) = \Phi(P)T(z).$$

D'où l'on déduit : $\forall z \in Z$,

$$\begin{aligned}|N_Z(TP(z))|^p_{L^p(\mathscr{P}_p(Z))} &= |\mathbf{1}_{\Phi(P)}N_Z(Tz)|^p_{L^p(\mathscr{P}_p(Z))}\\ &= \|TP(z)\|^p_Z = \|Pz\|^p_Z = |N_Z(Pz)|^p_{L^p(\mathscr{P}_p(Z))}\\ &= |\mathbf{1}_P N_Z(z)|^p_{L^p(\mathscr{P}_p(Z))}.\end{aligned}$$

En posant $\nu = \mu_Z \circ \Phi^{-1}$, on obtient alors : $\forall z \in Z$,

$$\int_{\Phi(P)} N_Z(Tz)^p d\mu_Z = \int_P N_Z(z)^p d\mu_Z = \int_{\Phi(P)} \tilde{\Phi} N_Z(z)^p d\nu$$

où $\tilde{\Phi}$ est l'isomorphisme de L^0 naturellement induit par Φ. Il est clair que ν est absolument continue par rapport à μ_Z, donc si l'on pose $\nu = \rho\mu_Z$, l'égalité précédente implique : $\forall z \in Z$,

$$N_Z(Tz)^p = \rho\tilde{\Phi}N_Z(z)^p.$$

Soit $\tilde{T}$ l'opérateur sur $L^p(\mathscr{P}_p(Z))$ défini par :

$$\tilde{T}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{1}_{P_i}\right) = \rho^{1/p} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{1}_{\Phi(P_i)}.$$

Il est clair que pour $z \in Z$,

$$N_Z(Tz) = \tilde{T}N_Z(z)$$

et que $\tilde{T}$ est une isométrie positive surjective de $L^p(\mathscr{P}_p(Z))$. Comme dans la Proposition 1.5, on voit que : $\forall z \in Z$,

$$\left|\sup_n N_Z\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T^i z\right)\right|_{L^p(\mathscr{P}_p(Z))} \leqq \frac{p}{p-1}\|z\|_Z.$$

Ceci est une forme abstraite d'inégalité maximale vectorielle.

B) Appliquons ceci à $Z = L^p(X)$. Dans [**15**], il est montré que si X est séparable (ce qui suffit dans notre problème), alors

$$\mathscr{P}_p(Z) = \mathscr{A} \otimes \mathscr{P}_p(X)$$

et on peut prendre

$$\mu_Z = \mu \otimes \mu_X.$$

Avec les notations précédentes, si $f \in L^p(X)$, on a :

$$\begin{cases} N_Z(f) \in L^p(\mathscr{A} \otimes \mathscr{P}_p(X)) = L^p_{\mathscr{A}}(L^p_{\mathscr{P}_p(X)}) \\ N_Z(f)(\omega) = N_X(f(\omega)) & \mu\text{-p.p. sur } \Omega \\ N(f)(\omega) = |f(\omega)|_X = |N_X(f)(\omega)|_{L^p(\mathscr{P}_p(X))}. \end{cases}$$

On peut donc écrire, pour $f \in L^p(X)$:

https://doi.org/10.4153/CJM-1988-015-0 Published online by Cambridge University Press

$$\left|\sup_n N\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n T^i f\right)\right|_{L^p} \leqq \left\|\sup_n N_X\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n T^i f\right)\right|_{L^p(\mathscr{P}_p(X))}\right|_{L^p}$$
$$= \left|\sup_n N_Z\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n T^i f\right)\right|_{L^p(\mathscr{A}\otimes\mathscr{P}_p(X))}.$$

On applique A) pour obtenir l'inégalité cherchée et ceci conclut le théorème 2.2.

La Proposition 2.1 et le Théorème 2.2 ont des analogies dans le cas $p = 2$, mais des hypothèses plus fortes sont nécessaires comme dans le cas scalaire (cf. **[21]**).

THÉORÈME 2.3. *Soit X un treillis de Banach séparable et T une isométrie surjective de Lamperti sur $L^2(X)$. Si X n'a pas de 2-projections, T admet une L_2-contraction majorante et dans tous les cas T vérifie l'inégalité maximale* : $\forall f \in L^2(X)$,

$$\left|\sup_n N\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n T^i f\right)\right|_2 \leqq 2\|f\|.$$

Démonstration. La clef des démonstrations de **[4]** et **[15]** est que si $p \neq 2$, les p-projections sur un espace de Banach Z commutent.

Dans le cas où $p = 2$ et Z est un treillis, on va remplacer $\mathscr{P}_p(Z)$ par $\mathscr{P}_2(Z) \cap \mathscr{P}_b(Z)$ où $\mathscr{P}_b(Z)$ est l'ensemble des projections de bande de Z. Vérifions que les propriétés nécessaires pour appliquer **[4]** et **[15]** sont vérifiées dans ce cas :

– Les éléments de $\mathscr{P}_2(Z) \cap \mathscr{P}_b(Z)$ commutent.

– Si T est une isométrie surjective de Lamperti de Z et P appartient à $\mathscr{P}_2(Z) \cap \mathscr{P}_b(Z)$, alors TPT^{-1} appartient à $\mathscr{P}_2(Z) \cap \mathscr{P}_b(Z)$.

– Si $Z = L^2(X)$, on montre aisément comme dans **[15]** que :

$$\mathscr{P}_2(L^2(X)) \cap \mathscr{P}_b(L^2(X)) = \mathscr{A} \otimes [\mathscr{P}_2(X) \cap \mathscr{P}_b(X)].$$

Il suffit alors d'appliquer la méthode de 2.1 et 2.2 à l'algèbre de Boole $\mathscr{P}_2(Z) \cap \mathscr{P}_b(Z)$ pour conclure.

Remarque 2.4. Le théorème 2.3 s'applique en particulier au cas où X est un treillis strictement monotone et T une isométrie surjective positive de $L^2(X)$. (cf. 1.2).

Remarque 2.5. Dans **[26]**, A. Sourour donne une caractérisation analogue à celle de **[15]** pour les isométries surjectives de $L^p(X)$ où X est un espace de Banach complexe sans p-projections.

3. Isométries positives de $L^p(X)$. On va démontrer que sous certaines hypothèses sur X les isométries positives de $L^p(X)$ vérifient les conditions (ii) (a) et (ii) (b) de la Proposition 1.7.

Définition. On dit qu'un treillis X est *1-r-concave sur vecteurs disjoints* (resp. *1-r-convexe sur vecteurs disjoints*) si pour tous x et y positifs dans X tels que $x \wedge y = 0$, on a :

$$|x + y|_X \geqq (|x|_X^r + |y|_X^r)^{1/r}$$

$$(\text{resp. : } |x + y|_X \leqq (|x|_X^r + |y|_X^r)^{1/r}).$$

Notons que ceci correspond à la terminologie anglaise de "lower r-estimates" (resp. : upper r-estimates) qui figure dans [**24**] et que ceci implique des propriétés de concavité ou convexité du treillis X.

THÉORÈME 3.1. *Soit $1 \leqq p < \infty$, X un treillis strictement monotone et T une isométrie positive de $L^p(X)$. Si X est 1-r-concave sur vecteurs disjoints pour un $r < p$ (resp. : 1-r-convexe sur vecteurs disjoints pour un $r > p$), alors T est un opérateur de Lamperti vectoriel.*

Démonstration. Soient f et g appartenant à $L^p(X)$ telles que

$$N(f) \wedge N(g) = 0.$$

D'après la remarque 1.2, Tf et Tg sont disjoints dans $L^p(X)$ et on peut écrire :

$$||Tf + Tg||^p = ||f + g||^p = ||f||^p + ||g||^p = ||Tf||^p + ||Tg||^p.$$

Supposons par exemple $r < p$ et X 1-r-concave sur vecteurs disjoints, alors :

$$\begin{aligned} ||Tf||^p + ||Tg||^p &\geqq \int (N(Tf)^r + N(Tg)^r)^{p/r} \\ &\geqq \int (N(Tf)^p + N(Tg)^p) = ||Tf||^p + ||Tg||^p. \end{aligned}$$

On est donc dans le cas d'égalité des inégalités entre normes d'espaces l^p et l^r et ceci implique donc :

$$N(Tf) \wedge N(Tg) = 0.$$

Notons qu'il est possible d'obtenir la même conclusion sous l'hypothèse que X est uniformément convexe avec un module d'uniforme convexité $\delta(\epsilon)$ tel que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\delta(\epsilon)}{\epsilon^p} = +\infty$$

mais nous ne nous servirons pas de ce résultat dans la suite.

Remarquons aussi que ce théorème n'est pas vérifié pour tous les treillis X. Par exemple si $X = L^p$ il existe une isométrie positive T sur $L^p(L^p)$ vérifiant

$$T(f \otimes g) = g \otimes f \quad \text{pour } (f, g) \in L^p \times L^p.$$

Cet opérateur n'est pas un opérateur de Lamperti vectoriel.

THÉORÈME 3.2. *Soit* $1 \leqq p < \infty$, *X un treillis de Banach strictement monotone et T une isométrie positive de* $L^p(X)$. *Soit*

$$L^q = L^q(\Omega', \mathscr{A}', \mu')$$

où μ' *est une mesure positive non triviale quelconque. Si* $X = L^q(Y)$ *où Y est* 1-*q*-*concave sur vecteurs disjoints avec* $q > p$ (*resp.* 1-*q*-*convexe avec* $q < p$), *alors il existe une fonction mesurable* α *de* Ω *dans* **R** *telle que* :

$$\forall x \in X, \quad N(T(\mathbf{1} \otimes x)) = \alpha N(\mathbf{1} \otimes x) = \alpha |x|_X.$$

Avant d'aborder la démonstration de ce résultat, on peut faire un commentaire sur ce théorème :

Remarque 3.3. Dans le cas où $X \neq \mathbf{R}$, ce résultat n'est pas toujours vérifié si l'on ne met pas des hypothèses convenables sur X. En effet, soit $1 < p < q < r < \infty$ et $X = l^q(l^r)$. On va montrer qu'il existe une isométrie positive T sur $L^p(l^q(l^r))$ qui vérifie le Théorème 3.1 mais pas le Théorème 3.2 :

Soit $(\gamma_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite de v.a. indépendantes q/r stables positives (cf. [**14**]). L'opérateur de l^q dans $L^p(l^r)$ qui à l'élément e_i de la base canonique de l^q associe $\gamma_i^{1/r} \otimes e'_i$ (où e'_i est le i-ième vecteur de la base canonique de l^r) est une isométrie positive. Soit de plus φ une bijection de $\mathbf{N}^2$ sur $\mathbf{N}$ et S une isométrie positive de $L^p(L^p)$ sur L^p. Pour

$$F = f \otimes e_i \otimes e'_j \in L^p(l^q(l^r))$$

on définit TF par :

$$TF = S(f \otimes \gamma_i^{1/r}) \otimes e_1 \otimes e'_{\varphi(i,j)}.$$

Il est immédiat que T s'étend en une isométrie positive de $L^p(l^q(l^r))$ et que son extension, encore notée T, est un opérateur de Lamperti vectoriel. T ne vérifie pas le Théorème 3.2 car :

$$N(T(\mathbf{1} \otimes e_i \otimes e'_j)) = S(\mathbf{1} \otimes \gamma_i^{1/r}) \quad \text{et}$$

$$\mu\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \gamma_i^{1/r} < a\right) = \prod_{i=1}^{\infty} \mu(\gamma_i^{1/r} < a) = 0, \quad \forall a > 0.$$

Donc

$$\bigvee_{i=1}^{\infty} \gamma_i^{1/r} = +\infty \text{ p.s.}$$

et il n'existe donc pas de fonction α de Ω dans **R** telle que

$$N(T(\mathbf{1} \otimes x)) \leqq \alpha |x|_X.$$

On peut noter cependant que cette isométrie T vérifie l'inégalité maximale vectorielle avec $C = p/(p - 1)$ car T se factorise de la manière suivante :

$$
\begin{tikzcd}
L^p(l^q(l^r)) \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "u"'] & & L^p(l^q(l^r)) \\
& L^p(l^r) \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}
$$

où

$$
\begin{cases} u(f \otimes e_i \otimes e'_j) = S(f \otimes \gamma_i^{1/r}) \otimes e'_{\varphi(i,j)} \\ v(f \otimes e'_i) = f \otimes e_1 \otimes e'_i. \end{cases}
$$

Par densité, il est clair que v vérifie :

$$N[v(F)] = N(F) \quad \text{pour tout } F \in L^p(l^q(l^r)).$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
\left| \sup_n N\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (v \circ u)^i(F)\right) \right|_p &= \left| \sup_n N\left(v \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (u \circ v)^{i-1}(uF)\right) \right|_p \\
&= \left| \sup_n N\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (u \circ v)^{i-1}(uF)\right) \right|_p .
\end{aligned}
$$

On verra (Corollaire 3.5) que toute isométrie positive de $L^p(l^r)$ vérifie une inégalité maximale. On peut donc appliquer ceci à $u \circ v$ et on obtient

$$
\begin{aligned}
\left| \sup_n N\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (v \circ u)^i(F)\right) \right|_p &\leqq \frac{p}{p-1} \|uF\|_{L^p(l^r)} \\
&= \frac{p}{p-1} \|F\|_{L^p(l^q(l^r))}.
\end{aligned}
$$

Démonstration du Théorème 3.2. Soit S l'opérateur de X dans $L^p(X)$ défini par :

$$S(x) = T(\mathbf{1} \otimes x).$$

S est une isométrie positive et le Théorème 3.2 est une conséquence immédiate du lemme suivant :

LEMME 3.4. *Si $X = L^q(Y)$ où Y est un treillis strictement monotone 1-q-concave sur vecteurs disjoints si $q > p$ (resp. 1-q-convexe sur vecteurs disjoints si $q < p$), alors toute isométrie positive S de X dans $L^p(X)$ vérifie :*

$$\exists \alpha \textit{ mesurable} : \Omega \to \mathbf{R} \textit{ telle que} : \forall x \in X,\ N(Sx) = \alpha |x|_X.$$

Des idées analogues à celles de ce lemme figurent déjà dans [**18**], dans un cadre plus général.

Démonstration du Lemme 3.4. Supposons par exemple $q < p$ et Y 1-q-convexe sur vecteurs disjoints. Comme par hypothèse L^q n'est pas de dimension 1, on peut décomposer $X = L^q(Y)$ en $X = X_1 \oplus_q X_2$, $X_1 \neq \{0\}$, $X_2 \neq \{0\}$.

Si x est dans X, on écrit $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ et on a :

$$(**) \quad \begin{cases} \int (N(Sx_1)^q + N(Sx_2)^q)^{p/q} \geqq \int N(Sx_1 + Sx_2)^p = |x_1 + x_2|_X^p \\ = (|x_1|_X^q + |x_2|_X^q)^{p/q} = \left[\left(\int N(Sx_1)^p\right)^{q/p} + \left(\int N(Sx_2)^p\right)^{q/p}\right]^{p/q}. \end{cases}$$

On est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire dans $L^{p/q}$. Il existe donc un réel λ tel que

$$N(Sx_1) = \lambda N(Sx_2).$$

En intégrant cette égalité, on trouve

$$\lambda = \frac{|x_1|_X}{|x_2|_X}.$$

Posons

$$\alpha = \frac{N(Sx_1)}{|x_1|_X} = \frac{N(Sx_2)}{|x_2|_X}.$$

Il est immédiat que α ne dépend que de X_1 et X_2 et en notant que

$$N(Sx_1 + Sx_2) = (N(Sx_1)^q + N(Sx_2)^q)^{1/q}$$

(puisque dans (**) l'inégalité est en fait une égalité), on obtient :

$$\frac{N(sx)}{|x|_X} = \frac{(N(Sx_1)^q + N(Sx_2)^q)^{1/q}}{(|x_1|_X^q + |x_2|_X^q)^{1/q}} = \alpha.$$

Ceci prouve donc bien le Lemme 3.4 et donc le Théorème 3.3.

En appliquant la Proposition 1.7 et les Théorèmes 3.1 et 3.2, on obtient :

COROLLAIRE 3.5. *Soit* $1 \leqq p < +\infty$, *X un treillis de Banach strictement monotone et*

$$L^p = L^q(\Omega', \mathscr{A}', \mu')$$

où μ' est une mesure positive non triviale quelconque. Si $X = L^q(Y)$ où Y est 1-q-concave et 1-r-convexe sur vecteurs disjoints avec $q \geqq r > p$ (resp. : 1-q-convexe et 1-r-concave avec $q \leqq r < p$), alors toute isométrie positive de $L^p(X)$ admet une L_p-contraction majorante.

https://doi.org/10.4153/CJM-1988-015-0 Published online by Cambridge University Press

Remarque 3.6. Ce dernier corollaire s'applique en particulier au cas où $X = L^q$ ou $X = L^q(L^r)$ lorsque $p < r \leqq q$ ou $p > r \geqq q$. Si $p < q < r$, la remarque 3.2 montre que les isométries positives de $L^p(L^q(L^r))$ ne vont pas en général admettre de L_p-contraction majorante. Par contre, on va montrer que si $X = L^q(L^r)$ dans les cas restants c'est-à-dire $q < p < r$, $r < p < q$ et $r < q < p$, la méthode de l'isométrie majorante (1.7) s'applique avec des démonstrations différentes.

4. Isométries positives de $L^p(X)$ pour $X = L^q(L^r)$. Soit

$$L^q = L^q(\Omega', \mathscr{A}', \mu') \text{ et } L^r = L^r(\Omega'', \mathscr{A}'', \mu'')$$

où μ' et μ'' sont des mesures positives quelconques, μ' n'étant pas triviale. On s'intéresse ici aux isométries positives de $L^p(X)$ pour $X = L^q(L^r)$ dans les cas n'entrant pas dans le cadre du Corollaire 3.5 ou pour des espaces X analogues (Remarque 4.3 ci-dessous). Notons tout d'abord que si $p = q$, $q = r$ ou $p = q = r$, on est ramené soit à des cas triviaux ($L^p(L^p)$), soit à des cas déjà traités dans la partie 3 ($L^p(L^q)$).

PROPOSITION 4.1. *Si $1 \leqq r < p < q < \infty$ ou $1 \leqq r < q < p < \infty$ et si T est une isométrie positive de $L^p(L^q(L^r))$, alors T admet une L_p-contraction majorante.*

Démonstration. Elle se fait en deux étapes en suivant la Proposition 1.7. Posons $X = L^q(L^r)$.

Etape 1. T est un opérateur de Lamperti vectoriel. En effet si f et g sont à p-supports disjoints dans $L^p(X)$, Tf et Tg sont à supports disjoints et on peut écrire : $\forall \lambda \geqq 0$.

$$\begin{aligned}\|f + \lambda g\|^p &= \|f\|^p + \lambda^p\|g\|^p = \|Tf\|^p + \lambda^p\|Tg\|^p \\ &= \|Tf + \lambda Tg\|^p = \int \left(\int (\,|Tf|_r^r + \lambda^r\,|Tg|_r^r)^{q/r}\right)^{p/q}.\end{aligned}$$

Dérivons cette dernière expression par rapport à $\nu = \lambda^r$. On trouve pour la dérivée en $\nu = 0$:

$$\int \left(\int |Tf|_r^q\right)^{(p-q)/q} \int |Tf|_r^{q-r}|Tg|_r^r.$$

Puisque $p > r$, la dérivée de

$$\nu \rightarrow \|Tf\|^p + \nu^{p/r}\|Tg\|^p$$

en $\nu = 0$ vaut 0 et ceci implique :

$$\int \left(\int |Tf|_r^q\right)^{(p-q)/q} \int |Tf|_r^{q-r}|Tg|_r^r = 0.$$

Ceci entraine $|Tf|_r \wedge |Tg|_r = 0$ et donc aussi :

$$\begin{aligned}\|\,|Tf|_r + \lambda|Tg|_r\|_{L^p(L^q)} &= \|Tf + \lambda Tg\|_{L^p(L^q(L^r))} \\ &= (\,\|Tf\|^p + \lambda^p\|Tg\|^p)^{1/p}.\end{aligned}$$

Les fonctions $|Tf|_r$ et $|Tg|_r$ forment donc un l_2^p isométrique dans $L^p(L^q)$ et le raisonnement du Théorème 3.1 montre que ces fonctions sont à p-supports disjoints c'est-à-dire que Tf et Tg sont à p-supports disjoints dans $L^p(X)$.

Etape 2. Si S est une isométrie positive de X dans $L^p(X)$ et si x et y sont à q-supports disjoints dans $X = L^q(L^r)$, $|Sx|_r$ et $|Sy|_r$ sont à supports disjoints dans $L^p(L^q)$ et de plus, il existe une fonction mesurable $\alpha:\Omega \rightarrow \mathbf{R}$ telle que : $\forall x \in X$,

$$N(Sx) = \alpha|x|_X.$$

Si x et y sont à q-supports disjoints dans $L^q(L^r)$, Sx et Sy sont à supports disjoints dans $L^p(L^q(L^r))$ et on peut écrire : $\forall\lambda \geqq 0$,

$$\begin{aligned}||Sx + \lambda Sy||^p &= |x + \lambda y|_X^p = (\,|x|_X^q + \lambda^q|y|_X^q)^{p/q}\\ &= (\,||Sx||^q + \lambda^q||Sy||^q)^{p/q}\\ &= \int\left(\int (\,|Sx|_r^r + \lambda^r|Sy|_r^r)^{q/r}\right)^{p/q}.\end{aligned}$$

En dérivant par rapport à $\nu = \lambda^r$, on trouve comme précédemment en $\nu = 0$, puisque $q > r$:

$$0 = \int\left(\int |Sx|_r^q\right)^{(p-q)/q}\int |Sx|_r^{q-r}|Sy|_r^r.$$

Ce qui implique de même

$$|Sx|_r \wedge |Sy|_r = 0.$$

Comme dans l'étape 1, on applique le raisonnement du Lemme 3.4 à $|Sx|_r$ et $|Sy|_r$ et on obtient ainsi l'existence d'une fonction mesurable α telle que : $\forall x \in X$,

$$N(Sx) = \alpha|x|_X.$$

En vertu de la Proposition 1.7, ces deux étapes permettent de conclure la Proposition 4.1.

Proposition 4.2. *Si* $1 \leqq q < p < r$ *et si* T *est une isométrie positive de* $L^p(L^q(L^r))$, *alors* T *admet une* L_p*-contraction majorante.*

Démonstration. Elle se fait en trois étapes en suivant encore la méthode de la Proposition 1.7 mais dans un ordre différent. Posons encore $X = L^q(L^r)$.

Etape 1. Si S est une isométrie positive de X dans $L^p(X)$ et si x et y sont à q-supports disjoints dans X, $|Sx|_r$ et $|Sy|_r$ sont à supports disjoints dans $L^p(L^q)$ et il existe une fonction mesurable α de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que : $\forall x \in X$,

$$N(Sx) = \alpha|x|_X.$$

En effet, si x et y sont à q-supports disjoints on a :

$$\|Sx + Sy\| = |x + y|_X = (|x|_X^q + |y|_X^q)^{1/q}$$
$$= (\|Sx\|^q + \|Sy\|^q)^{1/q} = \left[\int \left(\int (|Sx|_r^r + |Sy|_r^r)^{q/r}\right)^{p/q}\right]^{1/p}$$
$$\leqq \left(\int \left(\int |Sx|_r^q + |Sy|_r^q\right)^{p/q}\right)^{1/p}$$
$$\leqq \left\{\left[\int \left(\int |Sx|_r^q\right)^{p/q}\right]^{q/p} + \left[\int \left(\int |Sx|_r^q\right)^{p/q}\right]^{q/p}\right\}^{1/q}$$
$$= (\|Sx\|^q + \|Sy\|^q)^{1/q}.$$

On est dans le cas d'égalité d'une inégalité entre normes l^q et l^r et d'une inégalité triangulaire dans $L^{p/q}$. Ceci implique donc :

$$\begin{cases} |Sx|_r \wedge |Sy|_r = 0 \\ N(Sx) \text{ et } N(Sy) \text{ sont proportionnels.} \end{cases}$$

On conclut cette étape comme précédemment (3.4).

Etape 2. Si T est une isométrie positive de $L^p(X)$ et si f et g sont à p-supports disjoints, alors $|Tf|_r$ et $|Tg|_r$ ont même support sur le support de $N(Tf) \cdot N(Tg)$.

Supposons pour simplifier que le support de $N(Tf) \cdot N(Tg)$ est Ω tout entier et que f et g sont positives. Si les supports de $|Tf|_r$ et $|Tg|_r$ ne coïncident pas, on peut écrire par exemple $Tg = \psi_1 + \psi_2$ où $\psi_1, \psi_2 \geqq 0$ et $|\psi_1|_r$ et $|Tf|_r$ sont à supports disjoints. On a alors : $\forall \lambda > 0$,

$$\int N(Tf + \lambda\psi_1)^p = \int \left(\int |Tf|_r^q + \lambda^q|\psi_1|_r^q\right)^{p/q}$$
$$\leqq \int N(Tf + \lambda Tg)^p = \|f + \lambda g\|^p$$
$$= \|Tf\|^p + \lambda^p\|Tg\|^p.$$

En dérivant par rapport à $\nu = \lambda^q$, on trouve en $\nu = 0$, comme précédemment, puisque $p > q$:

$$\int \left[\left(\int |Tf|_r^q\right)^{(p-q)/q} \int |\psi_1|_r^q\right] \leqq 0.$$

Ceci implique $N(Tf) \wedge N(\psi_1) = 0$ donc $\psi_1 = 0$ puisque le support de $N(Tf)$ est Ω tout entier. Donc les supports de $|Tf|_r$ et $|Tg|_r$ coïncident.

Etape 3. Sous les hypothèses de l'étape 2, $N(Tf) \wedge N(Tg) = 0$. Par linéarité de T et densité des fonction étagées, on peut supposer par exemple que $g = \mathbf{1}_A \otimes x$ où $x \in L^q(L^r)$. Décomposons x en $x_1 + x_2$ où $|x_1|_r \wedge |x_2|_r = 0$ et posons

$$g_1 = \mathbf{1}_A \otimes x_1, \quad g_2 = \mathbf{1}_A \otimes x_2.$$

On peut écrire pour λ_1 et $\lambda_2 \geqq 0$:

$$\begin{aligned}||Tf + \lambda_1 Tg_1 + \lambda_2 Tg_2||^p &= ||f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2||^p \\ &= ||Tf||^p + (\lambda_1^q ||Tg_1||^q + \lambda_2^q ||Tg_2||^q)^{p/q}.\end{aligned}$$

D'après l'étape 1, les supports de $|Tg_1|_r$ et $|Tg_2|_r$ sont disjoints et les supports de $N(Tg_1)$ et $N(Tg_2)$ coïncident. D'après l'étape 2, sur le support de $N(Tf) \cdot N(Tg_1)$, les supports de $|Tf|_r$ et $|Tg_1|_q$ coïncident. De la même façon, les supports de $|Tf|_r$ et $|Tg_2|_r$ coïncident sur le support de $N(Tf) \cdot N(Tg_1)$. Donc les supports de $|Tg_1|_r$ et $|Tg_2|_r$ coïncident sur le support de $N(Tf) \cdot N(Tg_1)$. Ce dernier est donc de mesure nulle puisque

$$|Tg_1|_r \wedge |Tg_2|_r = 0;$$

de même bien sûr, pour le support de $N(Tf) \cdot N(Tg_2)$. On en déduit bien que $N(Tf) \wedge N(Tg) = 0$ et ces 3 étapes concluent cette proposition comme précédemment.

Remarque 4.3. Il est facile de voir que les Propositions 4.1 et 4.2 s'étendent aux isométries positives de $L^p(X)$ où $X = L^q(Y)$ et Y est 1-r-concave sur vecteurs disjoints si $r < p < q$ ou $r < q < p$ et 1-r-convexe sur vecteurs disjoints si $q < p < r$.

5. Isométries de $L^p(L^q)$: cas non positif. Comme dans la partie 4 on pose

$$L^p = L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \text{ et } L^q = L^q(\Omega', \mathscr{A}', \mu').$$

L^q peut être de dimension finie, au moins 2 quand $p \neq 1$ et au moins 3 quand $p = 1$. On s'intéresse aux isométries générales de $L^p(L^q)$, pour $p \neq q$, obtenant ainsi des extensions vectorielles des résultats de [**22**].

THÉORÈME 5.1. *Soit $1 \leqq p \neq q < \infty$. Si l'on exclut les cas $p \leqq q \leqq 2$ ou $q = 2$ (où L^q se plonge dans L^p) alors toute isométrie de $L^p(L^q)$ admet une L_p-isométrie majorante.*

La Proposition 1.6 (iii) donne alors une représentation des isométries de $L^p(L^q)$ dans le cas où L^q est séparable. Comme les isométries de L^q, $q \neq 2$ sont de Lamperti, cf. [**21**], de même que les isométries positives de L^p, on en déduit immédiatement que toute isométrie de $L^p(L^q)$ est de Lamperti.

COROLLAIRE 5.2. *Sous les hypothèses du Théorème* 5.1 *toute isométrie T de $L^p(L^q)$ s'écrit $T = US$, où S est une isométrie positive et U la multiplication par une fonction* (*mesurable sur $\Omega \times \Omega'$*) *de module* 1.

C'est en effet une propriété facile pour une isométrie de Lamperti d'un treillis L complet pour l'ordre. S est définie par $Sf = |Tf|\ \forall f \in L_+$ (cf. [**20**] Théorème 3.1 dans le cas $L = L^p$).

Dans le cas où $p, q > 2$ on peut montrer directement que toute isométrie de $L^p(L^q)$ est de Lamperti, en utilisant l'inégalité

$$\forall f, g \in L^p(L^q) \quad \frac{\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2}{2} \geqq \|(f^2 + g^2)^{1/2}\|^2.$$

Le Théorème 5.1 se déduit alors du Corollaire 3.5.

Mais le cas général se prouve ci-dessous par le biais de la Proposition 1.7.

Définition 5.3. Deux éléments x, y d'un espace normé *forment un l_2^q isométrique* quand

$$\|x + \lambda y\| = (1 + |\lambda|^q)^{1/q} \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Pour démontrer le Théorème 5.1 on applique le critère (ii) de la Proposition 1.7, qui sera vérifié si l'on montre que :

a) Lorsque $f, g \in L^p(L^q)$ sont à p-supports disjoints il en est de même de Tf et Tg.

b) Lorsque $f, g \in L^p(L^q)$ forment un l_2^q isométrique alors Tf et Tg sont à supports disjoints et $N(Tf)$, $N(Tg)$ sont des éléments colinéaires de L^p.

Toutefois dans le cas $p = 1$ on doit remplacer b) par :

b′) Lorsque $f, g, h \in L^1(L^q)$ forment un l_3^q isométrique, alors Tf, Tg, Th sont à supports disjoints et $N(Tf)$, $N(Tg)$, $N(Th)$ sont colinéaires.

Ces propriétés (b) et (a) sont facilement déduites respectivement des propositions 5.4, 5.6 ci-dessous dans le cas $q \neq 1, p \neq 2, p \notin [q, 2]$; de 5.4, 5.7 dans le cas $q = 1$ ou $p = 2$ ou $q < p \leqq 2$; (b′) et (a) sont conséquence de 5.8 et 5.6 dans le cas $p = 1$.

PROPOSITION 5.4. *Sous les hypothèses du Théorème* 5.1, *avec de plus* $p \neq 1$, *si f, g forment un l_2^q isométrique dans $L^p(L^q)$ alors f et g sont à supports disjoints et $N(f)$, $N(g)$ sont colinéaires dans L^p.*

Démonstration. a) Le cas $q > 2 \vee p, p \neq 1$. On a par inégalité triangulaire dans $L^{q/p}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{N(f + \lambda g)^p + N(f - \lambda g)^p}{2} \\
&= \frac{1}{2}[\,\|\,|f + \lambda g|^p|_{L^{q/p}} + \|\,|f - \lambda g|^p|_{L^{q/p}}] \\
&\geqq \left|\frac{|f + \lambda g|^p + |f - \lambda g|^p}{2}\right|_{L^{q/p}} \\
&= N\left(\left[\frac{|f + \lambda g|^p + |f - \lambda g|^p}{2}\right]^{1/p}\right)^p.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Beckner ([**24**], p. 75) ceci est plus grand que :

$$N\left(\left(\frac{(f+\sqrt{p-1}\lambda g)^2+(f-\sqrt{p-1}\lambda g)^2}{2}\right)^{1/2}\right)^p$$
$$= N((f^2+(p-1)\lambda^2 g^2)^{1/2})^p$$

en appliquant les inégalités (entre réels) :

$$(a+b)^\alpha \geqq \begin{cases} a^\alpha + \alpha a^{\alpha-1}b & \text{si } \alpha \geqq 1 \\ a^\alpha + \alpha(a+b)^{\alpha-1}b & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

On obtient on aisément :

$$(1+\lambda^q)^{p/q} = \int \frac{N(f+\lambda g)^p + N(f-\lambda g)^p}{2}$$
$$\geqq 1 + \frac{p}{2}(p-1)\lambda^2 \int N(f)^{p-q} \int |f|^{q-2}g^2 + O(\lambda^2)$$

ce qui n'est possible que si $|f| \wedge |g| = 0$ (car $q > 2$). On conclut en appliquant le Lemme 3.4.

b) Le cas $2 < q < p$. Alors $L^{p/2}(L^{q/2})$ est un treillis de Banach. On a donc :

$$(1+\lambda^q)^{2/q} = \|f+\lambda g\|^2 = \|f-\lambda g\|^2$$
$$= \frac{1}{2}(\|f+\lambda g\|^2 + \|f-\lambda g\|^2)$$
$$= \frac{1}{2}(\|(f+\lambda g)^2\|_{L^{p/2}(L^{q/2})} + \|(f-\lambda g)^2\|_{L^{p/2}(L^{q/2})})$$
$$\geqq \frac{1}{2}\|(f+\lambda g)^2 + (f-\lambda g)^2\|_{L^{p/2}(L^{q/2})}$$
$$= \|(f^2+\lambda^2 g^2)^{1/2}\|^2_{L^p(L^q)}$$

on conclut alors comme dans le cas a) ci-dessus.

c) Le cas $q < 2 \wedge p$. On vérifie aisément le lemme élémentaire suivant :

LEMME 5.5. *Pour toute fonction réelle φ de variable réelle, dérivable en* 0, *non nulle en* 0, *on a* (*pour tous* p, $q \geqq 0$) :

$$\frac{\varphi(\lambda)^p + \varphi(-\lambda)^p}{2} - \varphi(0)^p = \frac{p}{q}\left[\frac{\varphi(\lambda)^q + \varphi(-\lambda)^q}{2} - \varphi(0)^q\right]\varphi(0)^{p-q}$$
$$+ \frac{1}{2}p(p-q)\varphi'(0)^2\varphi(0)^{p-2}\cdot\lambda^2 + o(\lambda^2).$$

Appliquons ce lemme à la fonction $\varphi(\lambda) = N(f + \lambda g)$. Admettant provisoirement la légitimité des dérivations sous signe $\int$, on obtient :

$$\frac{d}{d\lambda^q}\frac{\|f + \lambda g\|^q + \|f - \lambda g\|^q}{2}\Big|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{p}{q}\int N(f)^{p-q}\cdot\left(\int \frac{d}{d\lambda^q}\left(\frac{|f + \lambda g|^q + |f - \lambda g|^q}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{p}{q}\int N^{p-q}(f)\cdot\left(\int_{\{f=0\}}|g|^q\right)$$

$$\leqq \frac{p}{q}\int N^{p-q}(f)N^q(g) \leqq \frac{p}{q}\|f\|^{p-q}\|g\|^q.$$

Si $\|f + \lambda g\| = (1 + |\lambda|^q)^{1/q}$ on voit que les inégalités précédentes sont des égalités, ce qui permet de conclure.

Les deux dérivations sous signe $\int$ sont justifiées par le théorème de convergence dominée au moyen des deux inégalités suivantes (1) et (2) :

$$(1)\qquad \frac{1}{\lambda^q}\left(\frac{|f + \lambda g|^q + |f - \lambda g|^q}{2} - |f|^q\right) \leqq |g|^q$$

(inégalité de Clarkson, cf. [**16**]) et

$$(2)\qquad \forall 0 < \lambda < 1 : \quad \frac{1}{\lambda^q}\left[\frac{N(f + \lambda q)^p + N(f - \lambda q)^p}{2} - N(f)^p\right]$$

$$\leqq C[N(f)^{p-q}N(g)^q + N(g)^p].$$

Pour montrer (2) on remarque que, d'après l'inégalité de Beckner ([**24**], p. 76) et celle de Clarkson on a si $q \neq 1$:

$$(3)\qquad \left(\frac{N(f + \lambda g)^p + N(f - \lambda g)^p}{2}\right)^{1/p}$$

$$\leqq \left(N(f)^q + \lambda^q\left(\frac{p-1}{q-1}\right)^{q/2}N(g)^q\right)^{1/q}$$

et on obtient (2) en utilisant l'inégalité entre réels

$$(a + b)^\alpha \leqq a^\alpha + C_\alpha(a^{\alpha-1}b + b^\alpha).$$

Dans le cas $q = 1$, (3) est remplacée par l'inégalité triangulaire :

$$\forall \lambda > 0, \quad \left(\frac{N(f + \lambda g)^p + N(f - \lambda g)^p}{2}\right)^{1/p} \leqq N(f) + \lambda N(g).$$

Remarque. La Proposition 5.4 ne s'étend pas au cas $p = 1$ car L^1 contient isométriquement tout espace normé de dimension 2 (cf. [**3**] Proposition 2.3).

PROPOSITION 5.6. *Supposons que l_2^p ne se plonge pas isométriquement dans L^q; (c'est-à-dire sauf dans les cas $p = 2$, ou $q = 1$, ou $q < p < 2$). Alors si f, g forment un l_2^p isométrique dans $L^p(L^q)$, ils sont à p-supports disjoints.*

Démonstration. a) Le cas $p > 2 > q > 1$. On a pour tout $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}(1 + \lambda^p)^{q/p} &= \|f + \lambda g\|^q = \|f - \lambda g\|^q \\ &= \frac{1}{2}(\|f + \lambda g\|^q + \|f - \lambda g\|^q) \\ &= \frac{1}{2}[\,|N(f + \lambda g)^q|_{L^{p/q}} + |N(f - \lambda g)^q|_{L^{p/q}}] \\ &\geqq \left|\frac{N(f + \lambda g)^q + N(f - \lambda g)^q}{2}\right|_{L^{p/q}} \\ &= \left|\left(\frac{N(f + \lambda g)^q + N(f - \lambda g)^q}{2}\right)^{1/q}\right|^q_{L^p}.\end{aligned}$$

Comme $q \leqq 2$ on a d'après l'inégalité de Beurling (cf. [**16**])

$$\begin{aligned}&N(f + \lambda g)^q + N(f - \lambda g)^q \\ &\geqq (N(f) + \lambda N(g))^q + |N(f) - \lambda N(g)|^q\end{aligned}$$

puis en utilisant l'inégalité de Beckner ([**24**] p. 75)

$$\left(\frac{N(f + \lambda g)^q + N(f - \lambda g)^q}{2}\right)^{1/q} \geqq (N(f)^2 + (q - 1)\lambda^2 N(g)^2)^{1/2}.$$

D'où

$$\begin{aligned}1 + \lambda^p &\geqq \int (N(f)^2 + (q - 1)\lambda^2 N(g)^2)^{p/2} \\ &\geqq 1 + \frac{p}{2}(q - 1)\lambda^2 \int N(f)^{p-2} N(g)^2\end{aligned}$$

ceci n'est possible pour tout $\lambda > 0$ que si $N(f) \wedge N(g) = 0$.

b) Le cas $2 < p \wedge q$. En utilisant le fait que $L^{p/2}(L^{q/2})$ est normé, il vient comme dans le cas (b) de la preuve de la Proposition 5.4 :

$$\begin{aligned}\|(1 + \lambda^p)\| &\geqq \|(f^2 + \lambda^2 g^2)^{1/2}\|_{L^p(L^q)} \\ &\geqq 1 + \frac{p}{2}(p - 1)\lambda^2 \int N(f)^{p-q} \int |f|^{q-2} g^2 + \\ O(\lambda^2)\end{aligned}$$

d'où $|f| \wedge |g| = 0$. Alors :

$$\int N(f)^p + \int N(g)^p = \|f + g\|^p$$
$$= \int N(f + g)^p = \int (N(f)^q + N(g)^q)^{p/q}$$

comme $p \neq q$ ceci entraine que $N(f)$ et $N(g)$ sont à supports disjoints.

c) Le cas $p < q \wedge 2$. En utilisant le Lemme 5.5, et admettant provisoirement la légitimité des dérivations sous signe $\int$, on obtient (en $\lambda = 0$) :

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{d}{d\lambda^p} \frac{\|f + \lambda g\|^p + \|f - \lambda g\|^p}{2} \\
&= \int \frac{d}{d\lambda^p} \frac{N^p(f + \lambda g) + N^p(f - \lambda g)}{2} \\
&= \int_{N(f)=0} N(g)^p \\
&\quad + \int_{N(f)\neq 0} N^{p-q}(f) \int \frac{d}{d\lambda^p} \frac{|f + \lambda g|^q + |f - \lambda g|^q}{2} \\
&= \int_{N(f)=0} N(g)^p
\end{aligned}$$

Donc :

$$\int N(g)^p = \int_{N(f)=0} N(g)^p$$

ce qui entraine $N(f) \wedge N(g) = 0$.

Pour justifier les deux dérivations sous signe $\int$ on remarque que :

$$\frac{|f + \lambda g|^q + |f - \lambda g|^q}{2} - |f|^q$$
$$\leqq \begin{cases} \lambda^q |g|^q & \text{si } q \leqq 2 \\ \dfrac{q(q-1)}{2}(\,|f| + |g|\,)^{q-2}|g|^2 \cdot \lambda^2 & \text{si } q \geqq 2. \end{cases}$$

D'autre part on remarque que :

$$\frac{N(f + \lambda g)^p + N(f - \lambda g)^p}{2} \leqq \left(\frac{N(f + \lambda g)^q + N(f - \lambda g)^q}{2}\right)^{p/q}.$$

Si $q \leqq 2$, ceci d'après l'inégalité de Clarkson, se majore par :

$$(N(f)^q + \lambda^q N(g)^q)^{p/q} \leqq N(f)^p + \lambda^p N(g)^p.$$

Si $q \geqq 2$, ceci se majore d'après l'inégalité de Beurling (cf. **[16]**) et celle de Beckner par :

$$\left(\frac{N(f) + \lambda N(g))^q + |N(f) - \lambda N(g)|^q}{2}\right)^{p/q}$$

$$\leqq (N(f)^2 + \frac{1}{q-1}\lambda^2 N(g)^2)^{p/2}$$

$$\leqq N(f)^p + \frac{1}{(q-1)^{p/2}}\lambda^p N(g)^p.$$

PROPOSITION 5.7. *Supposons que $q < p < 2$, ou que $p = 2$ ou $q = 1$. Si un sous-espace G de $L^p(L^q)$ est isométrique à l_2^q et s'ajoute en l^p à un vecteur $f \neq 0$ (c.à.d. $\|g + f\|^p = \|g\|^p + \|f\|^p$, $\forall g \in G$) alors f et G sont à p-supports disjoints.*

Démonstration. a) Le cas $q < p \leqq 2$ ou $q = 1$. Le raisonnement qui suit est analogue à celui de 4.2, (étape 3). Il suffit de montrer que :

Si $f, g \in L^p(L^q)$ forment un l_2^p isométrique, alors leurs supports coïncident sur l'intersection de leurs p-supports.

Puisque, d'après la Proposition 5.4 il y a dans G deux vecteurs à supports disjoints et de même p-support. Donc f et G sont alors bien à p-supports disjoints.

Or soient f, g comme ci-dessus, posons $g = \psi_1 + \psi_2$ où ψ_1 est étranger à f, et ψ_2 dans la bande définie par f.

On a :

$$\begin{aligned} 1 + \lambda^p &= \|f + \lambda g\|^p = \|f + \lambda\psi_1 + \lambda\psi_2\|^p \\ &= \|f - \lambda g\|^p = \|f - \lambda\psi_1 - \lambda\psi_2\|^p \\ &= \|f + \lambda\psi_1 - \lambda\psi_2\|^p \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} 1 + \lambda^p &\geqq \|f + \lambda\psi_1\|^p = \int (N(f)^q + \lambda^q N(\psi_1)^q)^{p/q} \\ &\geqq \int N(f)^p + \frac{p}{q}\lambda^q N(\psi_1)^q N(f)^{p-q} \\ &= 1 + \frac{p}{q}\lambda^q \int N(\psi_1)^q N(f)^{p-q} \end{aligned}$$

ceci pour tout $\lambda > 0$ d'où $N(\psi_1) \wedge N(f) = 0$ i.e., ψ_1 et f sont à p-supports disjoints.

b) Le cas $p = 2$. En utilisant le Lemme 5.5 on voit aisément que pour tous $f, g \in L^2(L^q)$:

$$\frac{d}{d\lambda^2} \frac{N(f + \lambda g)^2 + N(f - \lambda g)^2}{2}\bigg|_{\lambda=0}$$

$$= \begin{cases} N(g)^2 & \text{si } N(f) = 0 \\ (q-1)\displaystyle\int \frac{|f|^{q-2}g^2}{N(f)^{q-2}} - (q-2)\left(\int \frac{|f|^{q-1}g}{N(f)^{q-1}}\right)^2 & \\ \qquad \text{si } N(f) \neq 0. & \end{cases}$$

Donc si f et g forment un l_2^2 isométrique dans $L^2(L^q)$:

$$(4) \quad \int_{N(f)\neq 0} N(g)^2$$
$$= \int_{N(f)\neq 0} \left\{(q-1)\cdot \int \frac{|f|^{q-2}g^2}{N(f)^{q-2}} - (q-2)\left(\int \frac{|f|^{q-1}g}{N(f)^{q-1}}\right)^2\right\}.$$

Supposons que $g = g_1 + \lambda g_2$ décrit un sous-espace G isométrique à l_2^q et s'ajoutant en l^2 avec f. Comme g_1 et g_2 sont à supports disjoints et $N(g_2) = \rho N(g_1)$ (Proposition 5.4) le membre de gauche dans (4) s'écrit :

$$\int_{N(f)\neq 0} N(g_1 + \lambda g_2)^2 = (1 + \rho^q|\lambda|^q)^{2/q} \int_{N(f)\neq 0} N(g_1)^2$$

tandis que le membre de droite est un trinôme du 2° degré en λ.

D'où nécéssairement

$$N(f) \wedge N(g_1) = 0.$$

De même $N(f) \wedge N(g_2) = 0$ et ceci conclut la Proposition 5.7.

Dans le cas $p = 1$ la Proposition 5.4 a pour analogue la Proposition 5.8 ci-dessous.

PROPOSITION 5.8. *Soit $q > 2$. Si f, g_1, g_2 forment un l_3^q isométrique dans $L^1(L^q)$, alors ces éléments sont à supports disjoints et $N(f)$, $N(g_1)$, $N(g_2)$ sont proportionnelles.*

Montrons d'abord deux lemmes.

LEMME 5.9. *Si f, g forment l_2^q isométriquement dans $L_\Omega^1(L^q)$ il existe dans Ω un ensemble mesurable A et une fonction $\alpha \in L^0(\Omega)$ tels que :*
i) $\mathbf{1}_A \cdot f = \alpha \mathbf{1}_A \cdot g$
ii) *$\mathbf{1}_{A^c} f$ et $\mathbf{1}_{A^c} g$ sont étrangères.*

Démonstration. Notons que f et g ont même 1-support. En effet on a par exemple :

$$(1 + \lambda^2)^{1/2} = \int \frac{N(f+\lambda g) + N(f-\lambda g)}{2}$$
$$= \int_{N(f)\neq 0} \frac{N(f+\lambda g) + N(f-\lambda g)}{2} + |\lambda| \int_{N(f)=0} N(g)$$

$$\geqq \int_{N(f)\neq 0} N(f) + |\lambda| \int_{N(f)=0} N(g)$$
$$= 1 + |\lambda| \int_{N(f)=0} N(g)$$

d'où, avec $\lambda \to 0$,

$$\int_{N(f)=0} N(g) = 0.$$

Ceci étant, le Lemme 5.5 permet de voir que si $N(f) \neq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda^2} \frac{N(f + \lambda g) + N(f - \lambda g)}{2}\bigg|_{\lambda=0}$$
$$= \frac{q-1}{2}\left[N^{1-q}(f) \int |f|^{q-2}g^2 - N^{1-2q}(f)\left(\int f^{q-1}g\right)^2\right].$$

D'où, avec le lemme de Fatou :

$$0 = \frac{\partial}{\partial\lambda^2}(1 + \lambda^q)^{1/q}\bigg|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial\lambda^2} \int \frac{N(f + \lambda g) + N(f - \lambda g)}{2}$$
$$\geqq \int \frac{\partial}{\partial\lambda^2} \frac{N(f + \lambda q) + N(f - \lambda q)}{2}$$
$$= \frac{q-1}{2} \int \left\{N^{1-q}(f) \int |f|^{q-2}g^2 - N^{1-2q}(f)\left(\int f^{q-1}g\right)^2\right\}.$$

Mais le terme entre accolades est positif car :

$$\left(\int f^{q-1}g\right)^2 \leqq N^q(f) \int |f|^{q-2}g^2$$

ce qui résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwartz appliquée à

$$\varphi = f^{q/2-1}g \quad \text{et} \quad \psi = f^{q/2}.$$

On a donc égalité dans cette inégalité, c.à.d. que $f^{q/2-1}g(\omega)$ et $f^{q/2}(\omega)$ sont proportionnels (en tant que vecteurs de L^q) pour presque tout $\omega \in \Omega$. Donc $\mathbf{1}_{f\neq 0}g(\omega)$ et $\mathbf{1}_{f\neq 0}f(\omega)$ sont des vecteurs colinéaires de L^q. En échangeant les rôles de f et g on obtient la conclusion du Lemme 5.9.

LEMME 5.10. *Il existe pour tout $q > 1$ une unique probabilité π sur $\mathbf{R}_+$ vérifiant* : $\forall\lambda \geqq 0$

$$\int_0^\infty t \vee \lambda d\pi(t) = (1 + \lambda^q)^{1/q}.$$

De plus π intègre t^α pour tout $\alpha < q$.

Démonstration. Cette équation fonctionnelle équivaut à

$$\int_0^\infty (t \vee \lambda - t)d\pi(t) = (1 + \lambda^q)^{1/q} - 1$$

et par le théorème de Fubini et en dérivant on obtient :

$$\pi([0, \lambda]) = \frac{d}{d\lambda}(1 + \lambda^q)^{1/q}.$$

Démonstration de la Proposition 5.8. Le sous espace $G = [g_1, g_2]$ de $L^1(L^q)$ est isométrique à l_2^q et s'ajoute en l^q au vecteur f. Pour tout $g \in G$ les supports de $N(f)$ et $N(g)$ sont égaux; on peut donc supposer $N(f) \equiv 1$ (quitte à changer de densité). D'après le Lemme 5.9, on a :
sur A :

$$\frac{N(\lambda f + g) + N(\lambda f - g)}{2} = \frac{|\lambda + \alpha| + |\lambda - \alpha|}{2}$$
$$= |\lambda| \vee |\alpha| = |\lambda| \vee N(g)$$

sur A^c :

$$N(\lambda f + g) = N(\lambda f - g) = (N(\lambda f)^q + N(g)^q)^{1/q}$$
$$= (|\lambda|^q + N(g)^q)^{1/q}$$

donc : $\forall \lambda > 0$,

$$(1 + \lambda^q)^{1/q} = \frac{\|f + \lambda g\| + \|f - \lambda g\|}{2}$$
$$= \int_A \lambda \vee N(g) + \int_{A^c} (\lambda^q + N(g)^q)^{1/q}.$$

Soit Y une v.a. (définie sur un autre espace de probabilité Ω'') dont la loi π est donnée par le Lemme 5.10. On a :

$$\int_{A^c} (\lambda^q + N(g)^q)^{1/q} = \int_{A^c} \mathbf{E}(\lambda \vee N(g) \cdot Y).$$

Posons $Z = 1_A \otimes \mathbf{1} + 1_{A^c} \otimes Y$, v.a. définie sur $\Omega \times \Omega''$. On constate aisément que A ne dépend pas de $g \in G$, donc Z non plus. On a alors :

$$(1 + \lambda^q)^{1/q} = \mathbf{E} \int \lambda \vee (N(g) \cdot Z) \quad \forall \lambda > 0.$$

Donc d'après le Lemme 5.9 la loi de $N(g) \cdot Z = N(g \cdot Z)$ ne dépend pas de $g \in G$, $\|g\| = 1$ et $N(gZ) \in L^\alpha$, $\forall \alpha < q$. Fixons $1 < \alpha < q$. Alors $g \mapsto g \cdot Z$ est un plongement isométrique à un facteur près de G dans $L^\alpha(L^q)$, donc, d'après la Proposition 5.4, $g_1 Z$ et $g_2 Z$ sont à supports disjoints et $N(g_1 Z)$, $N(g_2 Z)$ sont proportionnelles; il en est alors de Même de g_1 et g_2.

Remarque 5.11. Pour $1 \leqq p < q < 2$, le résultat du Théorème 5.1 est faux. En effet, il existe une injection isométrique S de L^q dans L^p qui n'est pas un endomorphisme de treillis (cf. [**24**] p. 212). L'opérateur T de $L^p(L^q)$ tel que :

$$T = v \circ u \circ (\mathrm{id} \otimes S)$$

où u est une isométrie surjective de $L^p(L^p)$ dans L^p et v l'injection canonique de L^p dans $L^p(L^q)$, est une isométrie de $L^p(L^q)$ qui n'est pas un opérateur de Lamperti. T n'admet donc pas de L_p-contraction majorante en vertu de la Proposition 1.6.

6. Remarque sur les contractions positives de $L^p(L^q)$. Dans [**1**], Akcoglu montre que les inégalités maximales pour les contractions positives de L^p, $1 < p < \infty$, se déduisent des inégalités maximales pour les isométries positives par un théorème de dilatation.

On va montrer qu'un analogue vectoriel naturel de ce résultat n'est pas possible dans le cas où $X = L^q$.

On pose

$$L^p = L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \quad \text{et} \quad L^q = L^q(\Omega', \mathscr{A}', \mu')$$

où μ et μ' sont des mesures de probabilité non triviales.

Contre exemple 6.1. Une contraction positive T sur $L^p(L^q)$ $(1 < p \neq q < \infty)$ pour laquelle on ne peut trouver

(i) un surespace $\widetilde{L}^p(\widetilde{L}^q)$ de $L^p(L^q)$

(ii) une projection contractante positive P de $\widetilde{L}^p(\widetilde{L}^q)$ sur $L^p(L^q)$

(iii) une isométrie positive Q de $\widetilde{L}^p(\widetilde{L}^q)$

tels que $TP = PQ$.

La démonstration de ce résultat repose sur les deux propositions suivantes :

Proposition 6.2. *Soit $1 < p \neq q < +\infty$. Alors toute projection contractante positive de $\widetilde{L}^p(\widetilde{L}^q)$ sur $L^p(L^q)$ admet une L_p-contraction majorante.*

Démonstration. Soit P une projection contractante positive de $\widetilde{L}^p(\widetilde{L}^q)$ sur $L^p(L^q)$ et p^*, q^*, les exposants conjugués de p, q (i.e., : $1/p + 1/p^* = 1$, $1/q + 1/q^* = 1$). On vérifie aisément que l'adjoint P^* de P est une isométrie positive de $L^{p^*}(L^{q^*})$ dans $\widetilde{L}^{p^*}(\widetilde{L}^{q^*})$ et que le Corollaire 3.5 s'applique dans ce cadre. On en déduit que P^* admet une L_p-contraction majorante. Pour conclure, il suffit donc d'appliquer le lemme suivant :

Lemme 6.3. *Soit X un treillis réflexif et S un opérateur de $L^p(X)$ admettant une L_p-contraction majorante $\widetilde{S}$. Alors S^* est un opérateur sur $L^{p^*}(X^*)$ admettant $(\widetilde{S})^*$ comme L_p-contraction majorante.*

Démonstration. Soit $h \in L^p_+$, $f \in L^{p^*}_+(X^*)$ et $g \in L^p_+(X)$ tel que, si $\langle , \rangle$ représente la dualité X, X^* on ait :

$$N(S^*f) = \langle S^*f, g\rangle \quad \text{et} \quad N(g) = 1.$$

On peut alors écrire :

$$\int N(S^*f)\cdot h = \int \langle S^*f, gh\rangle = \int \langle f, S(gh)\rangle$$
$$\leqq \int N(f)N(Sgh) \leqq \int N(f)\widetilde{S}(hN(g))$$
$$= \int \widetilde{S}^*(N(f))\cdot h.$$

On en déduit bien : $\forall f \in L_+^{p^*}(X^*)$, $N(S^*f) \leqq \widetilde{S}^*(Nf)$ et ceci suffit pour conclure le lemme.

PROPOSITION 6.4. *Soit $1 < p \neq q < +\infty$. Alors il existe une contraction positive de $L^p(L^q)$ sans L_p-contraction majorante.*

Démonstration. On distingue deux cas :

Cas $p > q$. Soit i l'injection canonique de $L^p(L^q)$ dans $L^q(L^q)$, S une isométrie positive de $L^q(L^q)$ dans L^q et j l'isométrie de L^q dans $L^p(L^q)$ telle que $j(\varphi) = \mathbf{1}\otimes\varphi$ pour $\varphi \in L^q$.

La contraction positive $T = j\circ S\circ i$ vérifie la Proposition 6.4. En effet, soit $f \in L_+^p$. On a :

$$\begin{cases} T(f\otimes\mathbf{1}) = \mathbf{1}\otimes S(f\otimes\mathbf{1}) \\ N(T(f\otimes\mathbf{1})) = |f|_q \\ N(f\otimes\mathbf{1}) = f. \end{cases}$$

Donc s'il existait une L_p-contraction majorante $\widetilde{T}$ de T, on aurait :

$$\forall f \in L_+^p,\quad |f|_q \leqq \widetilde{T}(f).$$

Ceci n'est pas possible car prenons une partition mesurable $(A_i)_{i\in I}$ de Ω et appliquons ceci à $f_i = \mathbf{1}_{A_i}$; on obtient, en sommant sur $i \in I$:

$$\sum_{i\in I}\mu(A_i)^{1/q} \leqq \widetilde{T}(\mathbf{1}).$$

Ce qui entraine, en prenant la norme des deux membres :

$$\sum_{i\in I}\mu(A_i)^{1/q} \leqq 1.$$

Comme $q > 1$, ceci n'est pas possible dès que le cardinal de I est supérieur à 2.

Cas $p < q$. On procède d'une manière analogue : soit i l'injection canonique de $L^p(L^q)$ dans $L^p(L^p)$, S une isométrie positive surjective de $L^p(L^p)$ dans L^p et j l'isométrie de L^p dans $L^p(L^q)$ telle que :

$$j(\varphi) = \varphi\otimes\mathbf{1}\quad\text{pour } \varphi \in L^p.$$

La contraction positive $T = j\circ S\circ i$ vérifie encore la Proposition 6.4 car, pour $g \in L_+^q$ on a :

$$T(\mathbf{1} \otimes g) = S(\mathbf{1} \otimes g)$$
$$N[T(\mathbf{1} \otimes g)] = S(\mathbf{1} \otimes g)$$
$$N(\mathbf{1} \otimes g) = |g|_q.$$

Comme dans le premier cas, on ne peut pas trouver de contraction positive $\widetilde{T}$ de L^p telle que :

$$\forall g \in L^q_+, \quad S(\mathbf{1} \otimes g) \leqq \widetilde{T}|g|_q$$

c'est-à-dire :

$$\forall g \in L^q_+, \quad g \leqq |g|_q S^{-1}\widetilde{T}(\mathbf{1}).$$

Notons que dans ce cas T est un opérateur de Lamperti vectoriel.

Démonstration du résultat 6.1. Soit T une contraction positive définie par la Proposition 6.4 et supposons qu'il existe un surespace $\widetilde{L}^p(\widetilde{L}^q)$, une projection contractante P de $\widetilde{L}^p(\widetilde{L}^q)$ sur $L^p(L^q)$ et une isométrie positive Q de $\widetilde{L}^p(\widetilde{L}^q)$ telle que : $TP = PQ$.

D'après la Proposition 6.2, P admet une L_p-contraction majorante $\widetilde{P}$.

D'après la remarque 3.6, Q admet une L_p-contraction majorante $\widetilde{Q}$. Donc si $f \in L^p(L^q)$, on a :

$$N(Tf) = N(PQf) \leqq \widetilde{P}N(Qf) \leqq \widetilde{P}\widetilde{Q}(Nf).$$

Donc $\widetilde{P}\widetilde{Q}$ est une L_p-contraction majorante de T ce qui contredit la Proposition 6.4.

Remarque 6.5. Les contractions positives T de $L^p(L^q)$ qui apparaissent dans la Proposition 6.4 vérifient le théorème ergodique vectoriel car elles se factorisent par L^q si $q > p$ et par L^p si $p > q$ et on peut appliquer un raisonnement analogue à celui de 3.2 pour conclure.

Remarque 6.6. En vertu de la partie 5, dans les quatre cas suivants : $2 < p < q$, $q < p < 2$, $q < 2 < p$ et $p < 2 < q$, le contre exemple 6.1 reste valide même si l'on ne suppose pas que la projection P et l'isométrie Q sont positives.

Bibliographie

1. M. Akcoglu, *A pointwise ergodic theorem in L_p-spaces*, Can. J. Math. *27* (1975), 1075-1082.
2. M. Akcoglu and L. Sucheston, *Dilations of positive contractions on L_p-spaces*, Can. Math. Bull. *20* (1977), 285-292.
3. P. Assouad, *Caractérisation de sous espaces normés de L^1 de dimension finie*, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Ecole Polytechnique, (1979-1980), exposé 19.
4. E. Behrends et al., *L^p-structure in real Banach spaces*, Lecture Notes in Math. *613* (Springer-Verlag).
5. G. Birkhoff, *Proof of the ergodic theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. *17* (1931), 656-660.
6. J. Bourgain, *Extension of a result of Benedeck, Calderon and Panzone*, Arkiv. Mat. *22* (1984), 91-95.

7. ——— *Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional*, Arkiv. Math. *21* (1983), 163-168.
8. B. Bru et H. Heinich, *Isométries positives et propriétés ergodiques de quelques espaces de Banach*, Ann. Inst. H. Poincaré *27* (1981), 377-405.
9. R. Chacon, *An ergodic theorem for operators satisfying norm conditions*, J. Math. Mech. *11* (1962), 165-172.
10. R. Chacon and S. A. McGrath, *Estimates of positive contractions*, Pacific J. Math. *30* (1969), 609-620.
11. R. Chacon and U. Krengel, *Linear modulus of a linear operator*, Proc. AMS *15* (1964), 553-559.
12. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Convergence almost everywhere of operators averages*, J. Rat. Mech. Anal. *5* (1956), 129-178.
13. C. L. Fefferman and E. M. Stein, *Some maximal inequalities*, Amer. J. Math. *1* (1971), 107-115.
14. W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley, vol. II.
15. P. Greim, *Isometries and L^p-structures of separably valued Bochner L^p-spaces*, Conference on Measure Theory and Applications (Sherbrooke, 1982) Lecture Notes *1033* (Springer-Verlag).
16. O. Hanner, *On the uniform convexity of L^p and l^p*, Arkiv för Mat. *19*, Band 3 (1955), 239-244.
17. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *A maximal theorem with function theoretic applications*, Acta Math. *54* (1930), 81-116.
18. R. Haydon, M. Levy and Y. Raynaud, *Randomly normed spaces*, En préparation.
19. A. Ionescu-Tulcea, *Ergodic properties of isometries in L^p-spaces* $1 < p < +\infty$, Bull. AMS *70* (1964), 366-371.
20. C. H. Kan, *Ergodic properties of Lamperti operators*, Can. J. Math. *30* (1978), 1206-1214.
21. U. Krengel, *Ergodic theorems*, Studies in Mathematics, (1985).
22. J. Lamperti, *On the isometries of certain function spaces*, Pac. Math. J. *8* (1958).
23. M. Lévy et Y. Raynaud, *Ultrapuissances des espaces $L^p(L^q)$*, Note de CRAS, Paris, t. *299*, Série I (1984).
24. J. Lindenstrauss et L. Trafriri, *Classical Banach spaces II* (Springer-Verlag, 1979).
25. R. S. Phillips, *On weakly compact subsets of a Banach space*, Amer. J.M. *65* (1943), 108-136.
26. A. Sourour, *The isometries of $L^p(\Omega, X)$*, Journal of Functional Analysis *30* (1978), 276-285.
27. A. de la Torre, *An ergodic theorem for vector valued positive contractions*, Ann. Sci. Math. Québec *2* (1978), 281-288.
28. ——— *A simple proof of the maximal ergodic theorem*, Can. J. Math. *28* (1976), 1073-1075.

Université Paris VI,
Paris, France;
Université Paris VII,
Paris, France