

EQUIVALENCE LOCALE DES STRUCTURES DE CONTACT DE CODIMENSION UN

A. KUMPERA

Une structure de contact sur une variété M est un champ d'éléments de contact tangents Σ dont le système caractéristique Δ est régulier. Lorsque $\text{codim } \Sigma = 1$ une telle structure est définie localement par une forme de Pfaff ω ou encore par l'équation $\omega = 0$. Le théorème classique de Darboux nous donne un critère d'équivalence de deux Pfaffiens ω et ω' à l'aide de l'invariant classe ω . Cet invariant est cependant trop fort pour déterminer l'équivalence des structures de contact Σ et Σ' définies par $\omega = 0$ et $\omega' = 0$ respectivement. D'une façon précise, les structures Σ et Σ' peuvent être équivalentes sans que les Pfaffiens ω et ω' le soient. Dans cette note nous considérons un invariant plus faible, classe Σ , attaché à une structure de contact Σ et nous montrons qu'il détermine l'équivalence en codimension 1 (cf. corollaire 3). La démonstration utilise le rapport entre classe Σ et classe ω où $\omega = 0$ est une équation locale de Σ .

1. Structures de contact. Soit M une variété différentiable connexe, de dimension finie et de classe C^2 . TM indique le fibré tangent et T^*M le fibré cotangent. Soit Σ un champ d'éléments de contact tangents à M qu'on supposera désormais de dimension constante et de classe C^1 . La donnée de Σ est équivalente à la donnée d'un sous-fibré vectoriel localement trivial et de classe C^1 de TM . Indiquons par $\Gamma(\Sigma)$ le pré-faisceau des sections locales du fibré Σ et par Σ^\perp le sous-fibré de T^*M annulateur de Σ . Soit $\mathcal{L}(\Sigma)$ le pré-faisceau des automorphismes infinitésimaux de Σ et $\Phi(\Sigma) = \mathcal{L}(\Sigma) \cap \Gamma(\Sigma)$. $\Phi(\Sigma)$ est un pré-faisceau de modules sur le pré-faisceau des fonctions différentiables de M ainsi qu'un pré-faisceau de \mathbf{R} -algèbres de Lie. Ses éléments sont appelés champs caractéristiques de Σ . $\xi \in \Phi(\Sigma)$ si et seulement si $\xi \in \Gamma(\Sigma)$ et $\theta(\xi)\eta \in \Gamma(\Sigma)$ pour tout $\eta \in \Gamma(\Sigma)$ où $\theta(\xi)$ est la dérivée de Lie suivant le champ ξ . Puisque $\theta(\xi)$ commute avec la contraction de tenseurs, on a $\mathcal{L}(\Sigma) = \mathcal{L}(\Sigma^\perp)$. Ceci montre que $\Phi(\Sigma)$ est le pré-faisceau de champs locaux ξ de M tel que $\langle \xi, \omega \rangle = \langle \xi, i(\eta)d\omega \rangle = 0$ pour tout $\omega \in \Gamma(\Sigma^\perp)$ et $\eta \in \Gamma(\Sigma)$. Indiquons par Δ_x le sous-espace vectoriel de T_xM induit par $\Phi(\Sigma)$. $\Delta = \bigcup \Delta_x$ est en général, un sous-fibré vectoriel singulier de TM (c'est-à-dire la dimension des fibres n'est pas constante). Les équations précédentes montrent que $\Phi(\Sigma)$ est le pré-faisceau des champs locaux ξ de M qui sont des sections de Δ . Si $\dim \Delta_x$ est constante, c'est-à-dire Δ est un sous-fibré

Reçu le 22 décembre 1969.

vectoriel localement trivial de TM , alors le champ d'éléments de contact Δ est intégrable. Dans ce cas, Δ est appelé le système caractéristique de Σ et les feuilles intégrales de Δ les caractéristiques de Cauchy de Σ . Remarquons que Σ est intégrable si et seulement si $\Sigma = \Delta$.

THÉORÈME (Cartan). Soit Σ un champ d'éléments de contact sur M et Δ son système caractéristique. Soit U un ouvert de M simple par rapport à Δ (c'est-à-dire $\Delta|U$ s'intègre par un feuilletage simple) et $\rho: U \rightarrow U/\Delta$ la submersion quotient modulo les feuilles. Si $\rho(x) = \rho(y)$, alors $T\rho(\Sigma_x) = T\rho(\Sigma_y)$ et $\tilde{\Sigma} = T\rho(\Sigma|U)$ est un champ d'éléments de contact sur U/Δ dont le système caractéristique est nul. En outre, $\Sigma|U = (T\rho)^{-1}\tilde{\Sigma}$ et $\text{codim } \Sigma = \text{codim } \tilde{\Sigma}$.

Démonstration. $\Phi(\Sigma)$ est le pré-faisceau des champs de vecteurs locaux de M qui sont tangents aux feuilles de Δ . En intégrant tous ces champs on obtient une famille $(\psi_\alpha), \alpha \in A$, d'automorphismes locaux de Σ qui préservent les feuilles de Δ . Cette famille opère transitivement dans chaque feuille, c'est-à-dire pour tout couple x, y de points d'une même feuille il existe une sous-famille finie $(\psi_i), 1 \leq i \leq p$, tel que $y = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_p(x)$. Le théorème s'en déduit facilement.

Réciproque. Soit Σ un champ d'éléments de contact sur M et supposons que pour tout $x \in M$ il existe un voisinage ouvert U_x , une submersion $\rho_x: U_x \rightarrow \mathcal{U}_x$ et un champ d'éléments de contact $\tilde{\Sigma}$ sur \mathcal{U}_x à système caractéristique nul tel que $\Sigma|U_x = (T\rho_x)^{-1}\tilde{\Sigma}$. Alors $\dim \Delta_x$ est constante, chaque U_x est simple par rapport à Δ et (ρ_x) est une famille de cartes feuilletantes pour le feuilletage caractéristique de Σ .

Démonstration. Soit $\rho_x: U_x \rightarrow \mathcal{U}_x$ une des submersions et ξ un champ de vecteurs de M défini sur un ouvert contenu dans U_x . On vérifie aisément que ξ est un champ caractéristique de Σ si et seulement si $(T\rho_x) \circ \xi = 0$. Ceci montre que pour tout $y \in U_x$ on a $\Delta_y = \ker T_y\rho_x$ et par conséquent $\dim \Delta_x$ est localement constante sur M donc constante puisque M est connexe. Les autres assertions en résultent immédiatement.

Considérons maintenant, pour tout $x \in M$, le sous-espace de T_xM :

$$\tilde{\Delta}_x = \{v \in \Sigma_x \mid i(v)d\omega \in \Sigma_x^\perp, \forall \omega \in \Gamma(\Sigma^\perp)\}.$$

$\tilde{\Delta} = \cup \tilde{\Delta}_x$ est en général un sous-fibré vectoriel singulier de TM même si Δ est de dimension constante. Il est clair que $\Delta \subset \tilde{\Delta}$ et $\Phi(\Sigma)$ est le pré-faisceau des champs locaux ξ de M qui sont des sections de $\tilde{\Delta}$.

PROPOSITION 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (a) $\dim \tilde{\Delta}_x$ est constante;
- (b) $\Delta = \tilde{\Delta}$.

Définition. Une structure de contact sur une variété M est la donnée d'un champ d'éléments de contact Σ tel que $\tilde{\Delta} = \Delta$. On pose classe $\Sigma = \text{codim } \Delta$.

Pour les structures de contact le théorème de Cartan et sa réciproque admettent les précisions suivantes. Si, dans le théorème, Σ est une structure de contact il en est de même pour les $\tilde{\Sigma}$. Si, dans la réciproque, chaque $\tilde{\Sigma}$ est une structure de contact il en est de même pour Σ . Le théorème montre que toute structure de contact est localement (sur les ouverts Δ -simples) l'image réciproque d'une structure de contact de classe maximum.

2. Structures de contact de codimension 1. Soit Σ un champ d'éléments de contact de codimension 1 sur la variété M . Σ^\perp est un sous-fibré de T^*M de dimension 1. Indiquons par $\Sigma^\perp - 0$ le complémentaire de la section nulle et soit $\omega \in \Gamma(\Sigma^\perp - 0)$ une forme définie au voisinage de x . Comme ω est une base locale de Σ^\perp , alors $\tilde{\Delta}_x$ est défini par les équations $\langle v, \omega_x \rangle = 0$ et $i(v)d\omega_x \equiv 0 \pmod{\omega_x}$. Ceci montre que $\tilde{\Delta}_x$ est le noyau de $j^*d\omega_x$ où $j: \Sigma_x \rightarrow T_x M$ est l'inclusion, c'est-à-dire $\tilde{\Delta}_x = \{v \in \Sigma_x \mid i(v)j^*d\omega_x = 0\}$. Par conséquent la codimension de $\tilde{\Delta}_x$ dans Σ_x est paire d'où la

PROPOSITION 2 (Cartan). *codim $\tilde{\Delta}_x$ est impaire pour tout $x \in M$.*

En particulier, toute structure de contact de codimension 1 est de classe impaire. Si $\tilde{\Delta}_x = 0$, alors $\dim M$ est impaire. Si $\dim \tilde{\Delta}_x = 1$, alors $\dim M$ est paire. Les deux propositions qui suivent établissent le lien avec les structures de contact classiques.

PROPOSITION 3. *Soit Σ un champ d'éléments de contact de codimension 1. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (a) Σ est une structure de contact de classe maximum ($\Delta = 0$).
- (b) $\dim M = 2n + 1$ et tout $\omega \in \Gamma(\Sigma^\perp - 0)$ vérifie $\omega \wedge (d\omega)^n \neq 0$ partout;
- (c) $\dim M = 2n + 1$ et pour tout $x \in M$ il existe $\omega \in \Gamma(\Sigma^\perp - 0)$ au voisinage de x tel que $\omega_x \wedge (d\omega_x)^n \neq 0$.

Démonstration. (a) \Rightarrow (b) Soit $\omega \in \Gamma(\Sigma^\perp - 0)$, $V_x = \{v \in T_x M \mid i(v)d\omega_x = 0\}$ le noyau de $d\omega_x$ et posons $\text{rang } j^*d\omega_x = 2n$. Comme $\tilde{\Delta}_x = 0$ alors $\dim \Sigma_x = 2n$ et $\dim M = 2n + 1$. Le rang de $d\omega_x$ est à fortiori $2n$ ce qui entraîne $\dim V_x = 1$. Comme $V_x^\perp = \{\mu \in T_x^* M \mid \mu \wedge (d\omega_x)^n = 0\}$ alors $\omega_x \wedge (d\omega_x)^n \neq 0$ puisque $V_x \not\subset \Sigma_x$.

(c) \Rightarrow (a) $(d\omega_x)^n \neq 0$ entraîne $\dim V_x = 1$ et $\omega_x \wedge (d\omega_x)^n \neq 0$ entraîne $\omega_x \notin V_x^\perp$. Par conséquent, $T_x M = \Sigma_x \oplus V_x$ et le noyau de $j^*d\omega_x$ est nul.

Les structures de contact de codimension 1 et classe maximum sont les structures de contact classiques définies sur les variétés de dimension impaire. On les appellera les structures classiques impaires.

PROPOSITION 4. *Soit Σ un champ d'éléments de contact de codimension 1. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (a) Σ est une structure de contact et classe $\Sigma = \dim M - 1$ ($\dim \Delta_x = 1$);
- (b) $\dim M = 2n + 2$ et tout $\omega \in \Gamma(\Sigma^\perp - 0)$ vérifie $\omega \wedge (d\omega)^n \neq 0$ partout;
- (c) $\dim M = 2n + 2$ et pour tout $x \in M$ il existe $\omega \in \Gamma(\Sigma^\perp - 0)$ au voisinage de x tel que $\omega_x \wedge (d\omega_x)^n \neq 0$;
- (d) $\dim M = 2n + 2$ et pour tout $x \in M$ il existe $\omega \in \Gamma(\Sigma^\perp - 0)$ au voisinage de x tel que $(d\omega_x)^{n+1} \neq 0$;
- (e) $\dim M = 2n + 2$ et pour tout $x \in M$ il existe $\omega \in \Gamma(\Sigma^\perp - 0)$ au voisinage de x tel que $\omega_x \wedge (d\omega_x)^n \neq 0$ et $(d\omega)^{n+1} = 0$.

Démonstration. (a) \Rightarrow (b) $\dim \Delta_x = 1$ entraîne $\dim \Sigma_x = \text{rang } j^*d\omega_x + 1 = 2n + 1$ donc $\dim M = 2n + 2$. Soit $v \in T_xM$ tel que $\langle v, \omega_x \rangle = 1$.

$$j^*(i(v)[\omega_x \wedge (d\omega_x)^n]) = (j^*d\omega_x)^n \neq 0$$

donc $\omega_x \wedge (d\omega_x)^n \neq 0$.

(c) \Rightarrow (d) Si $(d\omega_x)^{n+1} = 0$, posons $\pi = f\omega$.

$$(d\pi_x)^{n+1} = (n + 1)f^n(x)df \wedge \omega_x \wedge (d\omega_x)^n$$

et $\text{deg } \omega_x \wedge (d\omega_x)^n < \dim M$ donc il existe f tel que $(d\pi_x)^{n+1} \neq 0$.

(d) \Rightarrow (a) $(d\omega_x)^{n+1} \neq 0$ entraîne $V_x = 0$. L'application $v \in \tilde{\Delta}_x \rightarrow i(v)d\omega_x \in \Sigma^\perp$ est injective donc $\dim \tilde{\Delta}_x \leq 1$. Comme $\dim M$ est paire, on trouve $\dim \tilde{\Delta}_x = 1$.

(a) \Rightarrow (e) Soit U un voisinage ouvert de x simple par rapport à Δ et appliquons le théorème de Cartan. $\tilde{\Sigma}$ est une structure classique impaire sur la variété U/Δ . Si $\dim U/\Delta = 2n + 1$ et $\pi \in \Gamma(\tilde{\Sigma}^\perp - 0)$, alors $\dim M = 2n + 2$ et $\omega = \rho^*\pi$ est de la forme cherchée.

Les structures de contact de codimension 1 et de classe $\dim M - 1$ sont, en vertu de (d), les structures de contact classiques sur les variétés de dimension paire. On les appellera les structures classiques paires. Toute structure classique paire est localement l'image réciproque d'une structure impaire.

Nous allons maintenant démontrer un théorème général pour les structures de contact de codimension 1. A l'aide du théorème de Cartan et de la proposition 3 on démontre tout d'abord le lemme suivant.

LEMME. *Soit Σ un champ d'éléments de contact sur M . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (a) Σ est une structure de contact de codimension 1;
- (b) Pour tout $x \in M$ il existe un voisinage ouvert U , une submersion $\rho: U \rightarrow \mathcal{U}$, et une structure classique impaire $\tilde{\Sigma}$ sur \mathcal{U} tel que $\Sigma|U = (T\rho)^{-1}\tilde{\Sigma}$.

Les conditions équivalentes étant vérifiées on a classe $\Sigma = \text{classe } \tilde{\Sigma}$, c'est-à-dire $\dim M - \dim \mathcal{U}$ est indépendante de x .

Les structures classiques paires sont, en particulier, celles qui s'obtiennent localement comme images réciproques par des submersions ρ dont la dimension des fibres est 1.

THÉORÈME. *Soit Σ un champ de codimension 1 sur M . Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (a) Σ est une structure de contact de classe $2n + 1$;
 (b) Tout $\omega \in \Gamma(\Sigma^\perp - 0)$ vérifie $\omega \wedge (d\omega)^n \neq 0$ partout et $\omega \wedge (d\omega)^{n+1} = 0$;
 (c) Pour tout $x \in M$ il existe $\omega \in \Gamma(\Sigma^\perp - 0)$ au voisinage de x tel que $\omega_x \wedge (d\omega_x)^n \neq 0$ et $\omega_x \wedge (d\omega_x)^{n+1} = 0$;
 (d) Pour tout $x \in M$ il existe $\omega \in \Gamma(\Sigma^\perp - 0)$ au voisinage de x tel que $\omega_x \wedge (d\omega_x)^n \neq 0$ et $(d\omega)^{n+1} = 0$;
 (e) Si $\dim M > 2n + 1$ alors pour tout $x \in M$ il existe $\omega \in \Gamma(\Sigma^\perp - 0)$ au voisinage de x tel que $(d\omega_x)^{n+1} \neq 0$ et $\omega_x \wedge (d\omega_x)^{n+1} = 0$.

Démonstration. (a) \Rightarrow (b) Soit $v \in T_x M$ tel que $\langle v, \omega_x \rangle = 1$.

$$j^*(i(v)[\omega_x \wedge (d\omega_x)^n]) = (j^*d\omega_x)^n \neq 0$$

car $j^*d\omega_x$ est de rang $2n$ donc $\omega_x \wedge (d\omega_x)^n \neq 0$. Si $\omega_x \wedge (d\omega_x)^{n+1} \neq 0$ alors $\mu = i(v)[\omega_x \wedge (d\omega_x)^{n+1}] \neq 0$ car $T_x M = [v] \oplus \Sigma_x$ et $\omega_x \wedge (d\omega_x)^{n+1}$ est nulle dans Σ_x . Mais alors $i(v)\mu = 0$ et par conséquent $j^*(d\omega_x)^{n+1} = j^*\mu \neq 0$ ce qui est impossible car $\text{rang } j^*d\omega_x = 2n$.

(c) \Rightarrow (b) Si $\pi = f\omega$ alors $\pi \wedge (d\omega)^k = f^{k+1}\omega \wedge (d\omega)^k$, $k \geq 0$.

(b) \Rightarrow (a) Comme $(d\omega_x)^{n+2} = 0$ deux cas se présentent:

- (1) $(d\omega_x)^{n+1} = 0$. $d\omega_x$ est de rang $2n = \text{codim } V_x$. Comme $\omega_x \wedge (d\omega_x)^n \neq 0$ alors $\omega_x \notin V_x^\perp$, $V_x \not\subset \Sigma_x$ et par conséquent $\text{codim } (V_x \cap \Sigma_x) = 2n + 1$. Si $v \in \tilde{\Delta}_x$, alors $i(v)d\omega_x$ est nulle sur Σ_x et pour $w \in V_x$ on a

$$\langle w, i(v)d\omega_x \rangle = -\langle v, i(w)d\omega_x \rangle = 0$$

donc $i(v)d\omega_x$ est nulle sur $V_x + \Sigma_x = T_x M$ d'où $v \in V_x$. Ceci montre que $\tilde{\Delta}_x \subset V_x \cap \Sigma_x$. L'inclusion contraire étant évidente on a $\tilde{\Delta}_x = V_x \cap \Sigma_x$ et $\text{codim } \tilde{\Delta}_x = 2n + 1$;

- (2) $(d\omega_x)^{n+1} \neq 0$. $d\omega_x$ est de rang $2n + 2 = \text{codim } V_x$ et $\omega_x \wedge (d\omega_x)^{n+1} = 0$ entraîne $V_x \subset \Sigma_x$. Il est clair que $V_x \subset \tilde{\Delta}_x$ et $V_x \neq \tilde{\Delta}_x$ car $\text{codim } \Delta_x$ est impaire tandis que $\text{codim } V_x$ est paire. Montrons que $\dim \tilde{\Delta}_x = \dim V_x + 1$. En effet l'application $v \in \tilde{\Delta}_x \rightarrow i(v)d\omega_x \in \Sigma_x^\perp$ est surjective car $V_x \neq \tilde{\Delta}_x$, son noyau est V_x et $\dim \Sigma_x^\perp = 1$. On trouve $\text{codim } \tilde{\Delta}_x = 2n + 1$.

(c) \Rightarrow (e) Si $(d\omega_x)^{n+1} = 0$ on prend $\pi = f\omega$ tel que

$$(d\pi)^{n+1} = (n + 1)f^n df \wedge \omega \wedge (d\omega)^n$$

est non nul au point x ce qui est possible car $\text{deg } \omega \wedge (d\omega)^n < \dim M$.

(a) \Rightarrow (d) résulte du lemme, (d) \Rightarrow (c) est évident et (e) \Rightarrow (a) se réduit au deuxième cas de (b) \Rightarrow (a).

Soit ω une forme de Pfaff définie sur M et partout non nulle. On dit que ω est de classe paire $2n$ si $(d\omega)^n \neq 0$ partout et $\omega \wedge (d\omega)^n = 0$. On dit que ω est de classe impaire $2n + 1$ si $\omega \wedge (d\omega)^n \neq 0$ partout et $(d\omega)^{n+1} = 0$. Soit Σ le champ de codimension 1 défini par $\omega = 0$ et V_x le noyau de $d\omega_x$.

COROLLAIRE 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) ω est de classe paire;

(b) Σ est une structure de contact et $V_x \subset \Sigma_x$ pour tout $x \in M$;

(c) Σ est une structure de contact et $\dim \Delta_x > \dim V_x$ pour tout $x \in M$.

Les conditions équivalentes étant vérifiées, on a $\Delta_x \supset V_x$, $\dim \Delta_x = \dim V_x + 1$ et classe $\omega =$ classe $\Sigma + 1$.

COROLLAIRE 2. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) ω est de classe impaire;

(b) Σ est une structure de contact et $V_x \not\subset \Sigma_x$ pour tout $x \in M$;

(c) Σ est une structure de contact et $\dim \Delta_x < \dim V_x$ pour tout $x \in M$.

Les conditions équivalentes étant vérifiées, on a $\Delta_x = V_x \cap \Sigma_x$, $\dim \Delta_x = \dim V_x - 1$ et classe $\omega =$ classe Σ .

Deux structures de contact (Σ, M) et (Σ', M') sont localement équivalentes si pour tout $(x, x') \in M \times M'$ il existe des voisinages ouverts U de x et U' de x' ainsi qu'un difféomorphisme $\phi: U \rightarrow U'$ tel que $T\phi(\Sigma|U) = \Sigma'|U'$. A l'aide du théorème de Darboux et de la partie (d) du théorème précédent on démontre le

COROLLAIRE 3. Les structures (Σ, M) et (Σ', M') de codimension 1 sont localement équivalentes si et seulement si $\dim M = \dim M'$ et classe $\Sigma =$ classe Σ' . En particulier, toute structure de contact de codimension 1 est transitive.

BIBLIOGRAPHIE

1. E. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques* (Hermann, Paris, 1946).

*Université de Montréal,
Montréal, Québec*