ÜBER DIE BEZIEHUNG DER KLASSENZAHLEN DER UNTERKÖRPER DES BIZYKLISCHEN BIQUADRATISCHEN ZAHLKÖRPERS

TOMIO KUBOTA

Mit Hilfe der Dedekindschen ζ-Funktion erhält man bekanntlich Klassenzahlrelationen gewisser algebraischen Zahlkörper. Als ein Spezialfall gilt der

Satz 1.[1] *Es sei K ein bizyklischer biquadratischer Zahlkörper und seien k_0, k_1 und k_2 die drei quadratischen Teilkörper von K. Ferner seien h, h_0, h_1 und h_2 die Klassenzahlen von K, k_0, k_1 bzw. k_2. Dann besteht die Relation*

$$(1)\qquad h = \frac{1}{4} Q h_0 h_1 h_2, \qquad \text{wenn } K \text{ reell ist},$$

$$(2)\qquad h = \frac{1}{2} Q h_0 h_1 h_2, \qquad \text{wenn } K \text{ imaginär ist}.$$

Hier ist Q der Index der Gruppe der Einheiten $\bar{\varepsilon}$, welche von der Einheiten von k_i $(i = 0, 1, 2)$ erzeugt wird, in der vollen Gruppe der Einheiten E von K: d.h. $Q = (E : \bar{\varepsilon})$.[2]

Wir werden den Satz 1 mit Hilfe der Klassenkörpertheorie, aber ohne Gebrauch der ζ-Funktion beweisen (§3).

§ 1. Die Zahl $\Delta(k)$.

Es sei Δ eine quadratfreie ganze rationale Zahl und sei $k = P(\sqrt{\Delta})$ ein quadratischer Zahlkörper. Es gibt ein und nur ein ganzes, ambiges, primitives, von 1 verschiedenes Hauptideal (α) von k. Dabei soll man die Zahl α total-positiv nehmen, falls k reell ist. Wenn man die Norm der Zahl α mit $\Delta(k)$ bezeichnet, welche eine für k eindeutig bestimmte, ganze rationale Zahl ist, so ist $\Delta(k) = |\Delta|$, falls k entweder ein reeller quadratischer Zahlkörper, wofür $N\varepsilon = -1$[3] gilt, oder ein von $P(\sqrt{-1})$ verschiedener, imaginärer quadratischer Zahlkörper ist. Dagegen ist $\Delta(k)$ der quadratfreie Kern von $N(1+\varepsilon)$, falls k

Received August 2, 1953.

1) Vgl. Hasse [2], S. 74. Dieser Satz ist ein Spezialfall der durch die analytische Methode erhaltenen Resultate: Brauer [1], Herglotz [3] und Kuroda [5]. Wir verabreden uns, dass die im Satz 1 gebrauchten Zeichen durchaus im folgenden dieselbe Bedeutung haben.

2) Dieser Index ist von Hasses Q in [2] gewissermassen verschieden.

3) ε ist die Grundeinheit von k.

ein reeller quadratischer Zahlkörper ist, wofür $N\varepsilon = +1$ gilt, und $\Delta(k) = 2$ für $k = P(\sqrt{-1})$. Für einen reellen quadratischen Zahlkörper k mit $N\varepsilon = +1$ ist

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{\sqrt{N(1+\varepsilon)} + \sqrt{-N(1-\varepsilon)}}{2}.$$

Bezeichnet man also den quadratfreien Kern von $-N(1-\varepsilon)$ mit $\Delta'(k)$, so stimmt $\Delta(k)\Delta'(k)$ mit Δ bis auf einen quadratischen Faktor überein. Setzt man der Einheitlichkeit halber für sonstigen k $\Delta'(k) = 1$ für $\Delta > 0$, $\Delta'(k) = -1$ für $\Delta < -1$, und $\Delta'(k) = -2$ für $\Delta = -1$, so gilt immer

$$\Delta(k)\Delta'(k) \underset{2}{=} \Delta,^{4)} \tag{3}$$

$$-\Delta'(k) = N\alpha' \tag{4}$$

für passend gewählte ganze Zahl α' von k. $\Delta(k)$ und $\Delta'(k)$ als Teiler der Diskriminante von k haben keinen gemeinsamen Teiler ausser 2. Nun gilt der

Satz 2. Es sei K ein bizyklischer biquadratischer Zahlkörper. Wenn die Relation

$$\Delta(k_1) = \Delta(k_2) = c \tag{5}$$

besteht, so sind in k_0 alle Primteiler von c entweder zerlegt oder verzweigt.

Beweis. Es sei $k_i = P(\sqrt{\Delta_i})$ $(i = 0, 1, 2)$ und sei $\left(\frac{m}{p}\right)$ das Kroneckersche Symbol, $\left(\frac{m, n}{p}\right)$ das Hilbertsche Normenrestsymbol. Ist $p \mid c$, $p \neq 2$, so ist p nicht verzweigt in k_0 wegen $(\Delta'(k_1), p) = (\Delta'(k_2), p) = 1$. Daraus folgt wegen (3), (4) und (5)

$$\left(\frac{\Delta_0}{p}\right) = \left(\frac{\Delta_1\Delta_2}{p}\right) = \left(\frac{\Delta'(k_1)\Delta'(k_2)}{p}\right) = \left(\frac{-\Delta'(k_1)}{p}\right)\left(\frac{-\Delta'(k_2)}{p}\right)$$
$$= \left(\frac{-\Delta'(k_1),\ \Delta_1}{p}\right)\left(\frac{-\Delta'(k_2),\ \Delta_2}{p}\right) = 1.$$

Ist ferner $2 \mid c$ und ist 2 nicht verzweigt in k_0, so ist $\Delta_0 \equiv 1 \pmod 4$. Also ist

$$\left(\frac{\Delta_0}{2}\right) = \left(\frac{2,\ \Delta_0}{2}\right) = \left(\frac{2,\ \Delta_0}{2}\right)\left(\frac{c/2,\ \Delta_0}{2}\right) = \left(\frac{c,\ \Delta_0}{2}\right) = \left(\frac{\Delta(k_1),\ \Delta_1}{2}\right)\left(\frac{\Delta(k_2),\ \Delta_2}{2}\right) = 1,$$

w.z.b.w.

Satz 3. Es sei H^* die Einheit von K mit der Eigenschaft $N_0H^* = 1$,[5] und überdies totalpositiv, falls K reell ist. Dann gilt

$$(H^* : H^*_{\frown}\bar{\varepsilon}) = \begin{cases} 2, \text{ wenn } k_0 \neq P(\sqrt{-1}),\ \Delta(k_1) = \Delta(k_2) \text{ ist,} \\ 1, \text{ sonst.} \end{cases}$$

[4] $\underset{2}{=}$ bedeutet "die Gleichheit bis auf einen quadratischen Faktor."

[5] N_i bedeutet N_{K/k_i} $(i = 0, 1, 2)$.

Beweis. Ist σ_i $(i=0, 1, 2)$ die von 1 verschiedene Substitution der galoisschen Gruppe von K/P, welche die Zahl von k_i fest lässt, so ist H^{*2} wegen $H^{*2} = H^{*2}H^{*(1+\sigma_0)\sigma_1} = H^{*1+\sigma_1}H^{*1+\sigma_2}$ als Produkt der (für reellen k_i totalpositiven) Einheiten von k_i $(i=1, 2)$ darstellbar. Für reellen k_i sei $\varepsilon_i^* = \varepsilon_i$,[6] falls $N\varepsilon_i = +1$ ist, und $= \varepsilon_i^2$, falls $N\varepsilon_i = -1$ ist. Und für imaginären k_i bedeute ε_i^* die Einheitswurzel, welche die volle Gruppe der Einheitswurzeln von k_i erzeugt. Dann erhält man $H^{*2} = \varepsilon_1^{*\nu_1}\varepsilon_2^{*\nu_2}$ (ν_1, ν_2 ganz rational). Hiermit gilt stets $H^* \subset \sqrt{\varepsilon_1^*}^{\nu_1}\sqrt{\varepsilon_2^*}^{\nu_2}$ (ν_1, ν_2 ganz rational). Wenn k_1 und k_2 beide imaginär sind, so ist der Satz 3 trivial. Im sonstigen Falle gehört $\sqrt{\varepsilon_i^*}$ zu $\bar{\varepsilon}$, falls $\sqrt{\varepsilon_i^*}$ eine Einheitswurzel von K ist. Anderfalls gehört $\sqrt{\varepsilon_i^*}$ nicht zu H^*, weil $\sqrt{\varepsilon_i^*}$ nicht totalpositiv ist. Daher nimmt $(H^* : H^* \cap \bar{\varepsilon})$ den Wert 2, wenn $\eta = \sqrt{\varepsilon_1^*}\sqrt{\varepsilon_2^*}$ zu H^*, aber nicht zu $\bar{\varepsilon}$ gehört. Sonst nimmt $(H^* : H^* \cap \bar{\varepsilon})$ den Wert 1.

Die folgende Tabelle zeigt die Zahl η in allen möglichen sieben Fällen. Aber darin wird im Falle $k_1 = P(\sqrt{-3})$ -1 an Stelle von ε_1^* angenommen. Dies ist zulässig, weil hier es nur auf die Zugehörigkeit von η zu H^* und $\bar{\varepsilon}$ ankommt.

Fall	k_1	$N\varepsilon_1$	k_2	$N\varepsilon_2$	η
I	reell	$+1$	reell	$+1$	$\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_2} = \frac{\sqrt{N(1+\varepsilon_1)}+\sqrt{-N(1-\varepsilon_1)}}{2} \times \frac{\sqrt{N(1+\varepsilon_2)}+\sqrt{-N(1-\varepsilon_2)}}{2}$
II	reell	-1	reell	$+1$	$\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_2} = \varepsilon_1\frac{\sqrt{N(1+\varepsilon_2)}+\sqrt{-N(1-\varepsilon_2)}}{2}$
III	reell	-1	reell	-1	$\varepsilon_1\varepsilon_2$
IV	imaginär $\neq P(\sqrt{-1})$		reell	$+1$	$\sqrt{-1}\sqrt{\varepsilon_2} = \frac{\sqrt{-N(1+\varepsilon_2)}+\sqrt{N(1-\varepsilon_2)}}{2}$
V	imaginär $\neq P(\sqrt{-1})$		reell	-1	$\sqrt{-1}\,\varepsilon_2$
VI	$P(\sqrt{-1})$		reell	$+1$	$\sqrt[4]{-1}\sqrt{\varepsilon_2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{-2}}{2} \times \frac{\sqrt{N(1+\varepsilon_2)}+\sqrt{-N(1-\varepsilon_2)}}{2}$
VII	$P(\sqrt{-1})$		reell	-1	$\sqrt[4]{-1}\,\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{-2}}{2}\varepsilon_2$

Zum Beweis von Satz 3 genügt es die folgenden drei Behauptungen zu beweisen.

A. *Wenn $k_0 \neq P(\sqrt{-1})$, $\Delta(k_1) = \Delta(k_2)$ ist, so gehört η zu H^*, aber nicht zu $\bar{\varepsilon}$.*

B. *Wenn $k_0 \neq P(\sqrt{-1})$, $\Delta(k_1) \neq \Delta(k_2)$ ist, so gehört η nicht zu H^*.*

C. *Wenn $k_0 = P(\sqrt{-1})$ ist und η zu K gehört, so gehört η zu $\bar{\varepsilon}$.*

[6] ε_i ist die Grundeinheit von k_i $(i=0, 1, 2)$.

Beweis von A. Hier können die Fälle III und V nicht auftreten. Also gehört η nicht zu $\bar{\varepsilon}$. Daher genügt es nur zu beweisen, dass η zu H^* gehört.

Fall I. Indem man die rechte Seite von $\eta=\sqrt{\varepsilon_1^*}\sqrt{\varepsilon_2^*}$ ausmultipliziert, erkennt man, dass η zu K gehört, mit Berücksichtigung von $N(1+\varepsilon_1)N(1+\varepsilon_2) \underset{2}{\mp} 1$, $N(1+\varepsilon_1)(-N(1-\varepsilon_2)) \underset{2}{\mp} \varDelta(k_2)\varDelta'(k_2) \underset{2}{\mp} \varDelta_2$, $-N(1-\varepsilon_1)N(1+\varepsilon_2) \underset{2}{\mp} \varDelta'(k_1)\varDelta(k_1) \underset{2}{\mp} \varDelta_1$, $N(1-\varepsilon_1)N(1-\varepsilon_2) \underset{2}{\mp} \varDelta'(k_1)\varDelta'(k_2) \underset{2}{\mp} \varDelta_0$. Weil die Konjugierte von η

$$\frac{\sqrt{N(1+\varepsilon_1)}\pm\sqrt{-N(1-\varepsilon_1)}}{2}\,\frac{\sqrt{N(1+\varepsilon_2)}\pm\sqrt{-N(1-\varepsilon_2)}}{2}$$

ist, ist η totalpositiv wegen $N(1+\varepsilon_i)>-N(1-\varepsilon_i)$ $(i=1,2)$. Also ist $\eta\in H^*$.

Fall II. Wegen $N(1+\varepsilon_2) \underset{2}{\mp} \varDelta_1$, $-N(1-\varepsilon_2) \underset{2}{\mp} N(1+\varepsilon_2)N(1+\varepsilon_2)(-N(1-\varepsilon_2)) \underset{2}{\mp} \varDelta_1\varDelta_2 \underset{2}{\mp} \varDelta_0$ ist $\eta\in K$. Da $\eta=\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_2}$ ersichtlich totalpositiv ist, ist $\eta\in H^*$.

Fall IV. Ebenso wie im Fall II, erhalten wir $-N(1+\varepsilon_2) \underset{2}{\mp} \varDelta_1$ und $N(1-\varepsilon_2) \underset{2}{\mp} \varDelta_0$. Folglich ist $\eta\in K$. Ferner ergibt sich

$$N_0\eta=\frac{\sqrt{-N(1+\varepsilon_2)}+\sqrt{N(1-\varepsilon_2)}}{2}\,\frac{-\sqrt{-N(1+\varepsilon_2)}+\sqrt{N(1-\varepsilon_2)}}{2}=1.$$

Also ist $\eta\in H^*$.

Fall VI. Wir erhalten zuerst $2N(1+\varepsilon_2) \underset{2}{\mp} 1$, $-2N(1+\varepsilon_2) \underset{2}{\mp} -1=\varDelta_1$, $2(-N(1-\varepsilon_2)) \underset{2}{\mp} \varDelta_2$, $(-2)(-N(1-\varepsilon_2)) \underset{2}{\mp} -\varDelta_2=\varDelta_0$. Also ist $\eta\in K$. Ferner gilt

$$N_0\eta=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{-2}}{2}\,\frac{\sqrt{N(1+\varepsilon_2)}+\sqrt{-N(1-\varepsilon_2)}}{2}\times$$
$$\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{-2}}{2}\,\frac{\sqrt{N(1+\varepsilon_2)}-\sqrt{-N(1-\varepsilon_2)}}{2}=1.$$

Daher ist $\eta\in H^*$.

Fall VII. In diesem Falle ist notwending $\varDelta_2=2$, $\varDelta_0=-2$, also ist natürlich $\eta\in K$ und

$$N_0\eta=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{-2}}{2}\varepsilon_2\,\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{-2}}{2}\varepsilon_2^{\sigma_0}=1.$$

Daher ist $\eta\in H^*$.

Beweis von B. *Fall I.* Da $N(1+\varepsilon_1)N(1+\varepsilon_2) \underset{2}{\not\mp} 1$ ist, ist η nicht totalpositiv, wenn es auch zu K gehört.[7]

Fall II. Ebenso wie im Fall I wegen $N(1+\varepsilon_2) \underset{2}{\not\mp} \varDelta_1$.

Fall III. η ist nicht totalpositiv.

Fall IV. Wenn $\eta\in K$ ist, so muss notwending $-N(1+\varepsilon_2) \underset{2}{\mp} \varDelta_0$, $N(1-\varepsilon_2) \underset{2}{\mp} \varDelta_1$ sein. Dann ist

[7] Vgl. den Beweis von Fall I und II von A.

$$N_0\eta = \frac{\sqrt{-N(1+\varepsilon_2)}+\sqrt{N(1-\varepsilon_2)}}{2}\,\frac{\sqrt{-N(1+\varepsilon_2)}-\sqrt{N(1-\varepsilon_2)}}{2} = -1.$$

Fall V. Es ist $\eta \notin K$.

Fall VI. Wenn $\eta \in K$ ist, so muss notwendig $2N(1+\varepsilon_2) \underset{2}{\equiv} \Delta_2$, $-2N(1+\varepsilon_2) \underset{2}{\equiv} \Delta_0$, $2(-N(1-\varepsilon_2)) \underset{2}{\equiv} 1$, $-2(-N(1-\varepsilon_2)) \underset{2}{\equiv} -1$ sein. Dann ist

$$N_0\eta = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{-2}}{2}\,\frac{\sqrt{N(1+\varepsilon_2)}+\sqrt{-N(1-\varepsilon_2)}}{2} \times$$
$$\times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{-2}}{2}\,\frac{-\sqrt{N(1+\varepsilon_2)}+\sqrt{-N(1-\varepsilon_2)}}{2} = -1.$$

Fall VII. Es ist $\eta \notin K$.

Beweis von C. Hier sind nur die Fälle IV und V möglich.

Fall IV. Es ist $N(1+\varepsilon_2) \underset{2}{\not\equiv} \Delta_2$, $N(1+\varepsilon_2) \underset{2}{\not\equiv} 1$, also ist $\eta \notin K$.

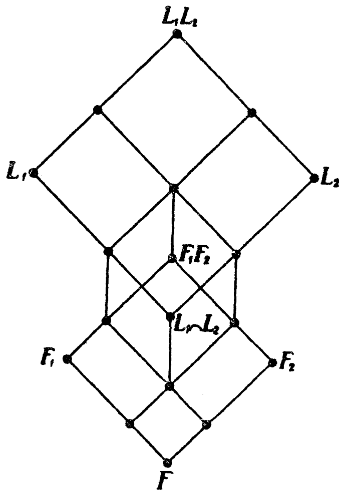
Fall V. Es ist $\eta \in \bar{\varepsilon}$.

Somit ist der Satz 3 vollständig bewiesen.

§ 2. Einige Bemerkungen über den absoluten Klassenkörper des quadratischen Zahlkörpers.

Es sei F ein abstrakter Körper. L_1 und L_2 seien seine separablen, galoisschen Erweiterungskörper. Ferner seien F_1 und F_2 Zwischenkörper von L_1/F bzw. L_2/F, welche galoissch über F sind, und sei $F_1 \cap F_2 = F$. Dann gilt

(6) $(L_1L_2 : F_1F_2)$
$$= (L_1 : F_1)(L_2 : F_2)/(L_1 \cap L_2 : F)$$



Diese Formel ist ohne weiteres klar nach dem nebenstehenden Hasseschen Schema.

Nun beweisen wir den

Satz 4. Es sei K ein bizyklischer biquadratischer Zahlkörper und sei Z_i $(i=1, 2)$ der absolute Klassenkörper im engeren Sinne[8] *von k_i. Ferner sei S_i der grösste abelsche Teilkörper über P von Z_i, d.h. der Geschlechterkörper im engeren Sinne von k_i. Dann sind*

8) Wir heissen das von einer totalpositiven Zahl erzeugte Hauptideal "Hauptideal im engeren Sinne".

1) $(Z_1Z_2 : K) = (Z_1 : k_1)(Z_2 : k_2)/(Z_1 \cap Z_2 : P)$,
2) $Z_1 \cap Z_2 = S_1 \cap S_2$, *d.h.* $Z_1 \cap Z_2/P$ *abelsch*,
3) $(Z_1 \cap Z_2 : P) = 2^{t+t'}$.

Dabei ist t die Anzahl der Primteiler von (f_1, f_2),[9] die in k_0 träge sind. t' ist die Anzahl der Primteiler von (f_1, f_2), die in k_0 zerlegt sind.

Beweis. 1) ist klar aus (6). Also beweisen wir nun 2). Es ist unmöglich, dass K/k_1 und K/k_2 beide unverzweigt sind. Es sei etwa K/k_2 verzweigt. Dann ist $k_1 \cap Z_2 = k_1 \cap (K \cap Z_2) = k_1 \cap k_2 = P$. Also folgt aus dem obenstehenden Schema, dass $Z_1 \cap Z_2/P$ abelsch ist. Dann beweisen wir 3). Es ist ersichtlich, dass S_i der Klassenkörper über die Kongruenzgruppe, welche aus den zu f_i $(i=1, 2)$ primen Normenresten von k_i mod f_i besteht. Daher ist $Z_1 \cap Z_2 = S_1 \cap S_2$ der Klassenkörper über die Vereinigungsgruppe der Normenreste von k_1 und k_2 mod (f_1, f_2). Also ist der Körpergrad $(Z_1 \cap Z_2 : P)$ gleich dem Index dieser Vereinigungsgruppe. Ist nun $p \mid (f_1, f_2), p \neq 2$, so ist der Index der Vereinigungsgruppe der Normenreste von k_1 und k_2 mod p gleich 2. Ist ferner $2 \mid (f_1, f_2)$, so muss notwendig $\Delta_1, \Delta_2 \equiv 2, 3, 6$ oder 7 (mod 8) sein. Und es ist $2 \mid f_0$, wenn

$$\text{a)} \qquad \begin{cases} \Delta_1 \equiv 2, 6 \\ \Delta_2 \equiv 3, 7 \end{cases} \text{oder} \quad \begin{cases} \Delta_1 \equiv 2 \\ \Delta_2 \equiv 6 \end{cases} \pmod 8$$

ist. Dagegen ist $2 \nmid f_0$, wenn

$$\text{b)} \qquad \begin{cases} \Delta_1 \equiv 3, 7 \\ \Delta_2 \equiv 3, 7, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta_1 \equiv 2 \\ \Delta_2 \equiv 2 \end{cases} \text{oder} \quad \begin{cases} \Delta_1 \equiv 6 \\ \Delta_2 \equiv 6 \end{cases} \pmod 8$$

ist. Anderseits nimmt der Index der Vereinigungsgruppe der Normenreste von k_1 und k_2 mod 8 den Wert 1 oder 2, je nachdem a) oder b) ist. Damit ist der Beweis erbracht.

§ 3. Beweis von Satz 1.

Wir bestätigen vorerst den folgenden

Satz 5. Es sei K ein bizyklischer biquadratischer Zahlkörper. Ist dann $\mathfrak{C}_0$ ein solches Ideal von K, dass $N_1\mathfrak{C}_0$ bzw. $N_2\mathfrak{C}_0$ zugleich ein Hauptideal im engeren Sinne von k_1 bzw. k_2 ist, so gehört $\mathfrak{C}_0$ zu einer Idealklasse im engeren Sinne von K, die mindestens ein ambiges Ideal $\mathfrak{A}_0$ von K/k_0 enthält. Nämlich ist $(A^*)\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{C}_0$. Und der Index $(\mathfrak{C}_0 : (A^*))$[10] ist durch folgende Formel gegeben:

$$(\mathfrak{C}_0 : (A^*)) = 2^{t+t'+\delta-2}(N_0E^* : \varepsilon_0^{*2})h_0^* = 2^{t+t'+\kappa-2}(E^* : \bar{\varepsilon}^*)h_0^*. \tag{7}$$

Dabei ist

[9] f_i ist der Führer von k_i $(i=0, 1, 2)$.

[10] Die mit Stern versehenen Buchstaben sollen wie oben die totalpositive Zahl oder die Klassenzahl im engeren Sinne darstellen. Z. B. ist $\bar{\varepsilon}^*$ die Gruppe der totalpositiven Zahlen aus $\bar{\varepsilon}$, falls K reell ist. Dagegen ist $\bar{\varepsilon}^* = \bar{\varepsilon}$, falls K imaginär ist.

$$\kappa = \begin{cases} 1, & \textit{wenn die Norm der Grundeinheit jedes reellen} \\ & \quad \textit{quadratischen Teilkörpers von } K \ -1 \textit{ ist,} \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & \\ 0, & \end{cases} \textit{wenn} \begin{matrix} \Delta(k_1) = \Delta(k_2) \\ \Delta(k_1) \neq \Delta(k_2) \end{matrix} \ \textit{ist.}$$

Beweis. Nach der Voraussetzung ist $N_1 \mathfrak{C}_0 = (\alpha_1^*)$, $N_2 \mathfrak{C}_0 = (\alpha_2^*)$, wo $\alpha_1^* \in k_1$, $\alpha_2^* \in k_2$ ist. Aus $1 - \sigma_0 = (1 + \sigma_1) - \sigma_0(1 + \sigma_2)$ folgt $\mathfrak{C}_0^{1-\sigma_0} = \left(\frac{\alpha_1^*}{\alpha_2^{*\sigma_0}}\right)$ und $N_0 \frac{\alpha_1^*}{\alpha_2^{*\sigma_0}} = 1$, also gibt es nach dem Hilbertschen Lemma eine Zahl A^* von K derart, dass $\frac{\alpha_1^*}{\alpha_2^{*\sigma_0}} = A^{*1-\sigma_0}$, wo A^* für reellen K totalpositiv angenommen werden kann. Daher ist $(A^*)\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{C}_0$. Nun seien $p_1, \ldots, p_{t'+t''}$ die sämtlichen, von einander verschiedenen Primteiler von (f_1, f_2), welche in k_0 entweder zerlegt oder verzweigt sind. Dabei ist $t'' = 1$ oder 0, je nachdem 2 in K voll verzweigt oder nicht. Sind $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{t'+t''}$ die Primideale von K und ist $\mathfrak{P}_j$ $(j = 1, \ldots, t' + t'')$ ein Teiler von p_j, so enthält jede Nebenklasse von $(A^*)\mathfrak{A}_0/\mathfrak{C}_0$ ein Produkt $\mathfrak{C} = \mathfrak{P}_1^{m_1} \ldots \mathfrak{P}_s^{m_s}$ $(s = t' + t'')$, wo $m_j = 0$ oder 1 ist. $N_i\mathfrak{C}$ $(i = 1, 2)$ ist ein ambiges, primitives Ideal von k_i. Also folgt aus Satz 2, dass, falls $\delta = 0$ ist, kein $\mathfrak{C}$ $(\neq 1)$ zu $\mathfrak{C}_0$ gehört und, dass, falls $\delta = 1$ ist, ein und nur ein $\mathfrak{C}$ $(\neq 1)$ zu $\mathfrak{C}_0$ gehört. Daraus ergibt sich

$$((A^*)\mathfrak{A}_0 : \mathfrak{C}_0) = 2^{t'+t''-\delta}. \tag{8}$$

Nun ist bekanntlich

$$((A^*)\mathfrak{A}_0 : (A^*)) = \begin{cases} 2^{t+2t'+t''} h_0 / (H^* : E^{*1-\sigma_0}), \text{ wenn } K \\ \text{imaginär und } k_0 \text{ reell ist,} \\ 2^{t+2t'+t''} h_0^* / (H^* : E^{*1-\sigma_0}), \text{ sonst.} \end{cases} \tag{9}$$

Einerseits ergibt sich aus dem Herbrandschen Lemma

$$\frac{(H^* : E^{*1-\sigma_0})}{(\varepsilon_0 \cap E^* : N_0 E^*)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{wenn } K \text{ imaginär und } k_0 \text{ reell ist,} \\ 2, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{10}$$

Wir setzen für den reellen k_i $(i = 0, 1, 2)$ $g_i = 1$, oder 0, je nachdem $N\varepsilon_i = +1$ bzw. -1 ist. Dann folgt aus (10)

$$(H^* : E^{*1-\sigma_0}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\varepsilon_0 : N_0 E^*) = (\varepsilon_0 : \pm \varepsilon_0^*)(\varepsilon_0^* : N_0 E^*) \\ \quad = 2^{2-g_0}/(N_0 E^* : \varepsilon_0^{*2}), \text{ wenn } K \text{ imaginär} \\ \quad \text{und } k_0 \text{ reell ist,} \\ 2^2/(N_0 E^* : \varepsilon_0^{*2}), \text{ sonst.} \end{cases} \tag{11}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000017050 Published online by Cambridge University Press

Ferner ist wegen (9) und (11)

$$((A^*)\mathfrak{A}_0 : (A^*)) = 2^{t+2t'+t''-2}(N_0E^* : \varepsilon_0^{*2})h_0^*. \tag{12}$$

Man erhält dann nach (8) und (12) die erste Gleichung von (7). Wir bezeichnen mit E_0 diejenige Zahl aus E^*, deren Norm zu k_0 zu $N_0\bar{\varepsilon}^*$ gehört. Dann ist $E_0 = \bar{\varepsilon}^* H^*$. Daher ist

$$\begin{aligned}(N_0E^* : \varepsilon_0^{*2}) &= (N_0E^* : N_0\bar{\varepsilon}^*)(N_0\bar{\varepsilon}^* : \varepsilon_0^{*2}) \\ &= \frac{(N_0\bar{\varepsilon}^* : \varepsilon_0^{*2})}{(E_0 : \bar{\varepsilon}^*)}(E^* : \bar{\varepsilon}^*) = \frac{(N_0\bar{\varepsilon}^* : \varepsilon_0^{*2})}{(H^* : H^* \cap \bar{\varepsilon})}(E^* : \bar{\varepsilon}^*).\end{aligned} \tag{13}$$

Wir untersuchen hier den Index $(N_0\bar{\varepsilon}^* : \varepsilon_0^{*2})$. Erstens sei K reell. Wenn dann $\kappa = 1$ ist, so ist $\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2$ totalpositiv. Wenn dagegen $\kappa = 0$ ist, so sind nur die Zahlen $\varepsilon_0^{*\nu_0}\varepsilon_1^{*\nu_1}\varepsilon_2^{*\nu_2}$ (ν_0, ν_1, ν_2 ganz rational) die totalpositiven Einheiten von K. Zweitens sei k_0 imaginär und von $P(\sqrt{-1})$ verschieden. Dann und nur dann ist -1 in $N_0\bar{\varepsilon}^*$ enthalten, wenn $\kappa = 1$ ist. Letztens sei K imaginär und k_0 reell, so ist stets $N_0\bar{\varepsilon}^* = \varepsilon_0^2$. Aus dem oben erwähnten folgt, dass

$$(N_0\bar{\varepsilon}^* : \varepsilon_0^{*2}) = 2^\kappa, \quad \text{wenn} \quad k_0 \neq P(\sqrt{-1}) \quad \text{ist.} \tag{14}$$

Also erhalten wir aus (13), (14) und Satz 3

$$(N_0E^* : \varepsilon_0^{*2}) = 2^{\kappa-\delta}(E^* : \bar{\varepsilon}^*), \tag{15}$$

wenn nur $k_0 \neq P(\sqrt{-1})$ ist. Wenn aber $k_0 = P(\sqrt{-1})$[11] ist, so gilt immer $(N_0\bar{\varepsilon}^* : \varepsilon_0^{*2}) = (E_0 : \bar{\varepsilon}^*) = 1$ und ist sicher $\delta = \kappa$. Daher ist (15) auch in diesem Falle richtig. Nach (15) und der ersten Gleichung von (7) ergibt sich die zweite Gleichung von (7). Damit ist der Satz 5 bewiesen.

Der Satz 1 gilt nun fast ohne weiteres. Man erhält nach Satz 4 und 5, dass

$$\frac{h^*}{2^{t+t'+\kappa-2}(E^* : \bar{\varepsilon}^*)h_0^*} = \frac{h_1^*h_2^*}{2^{t+t'}}$$

oder

$$h^* = 2^{\kappa-2}(E^* : \bar{\varepsilon}^*)h_0^*h_1^*h_2^* \tag{16}$$

ist. Falls K imaginär ist, so ergibt sich (2) sogleich wegen (16). Falls dagegen K reell ist, so erhalten wir zuerst aus (16) und

$$(E : \bar{\varepsilon}) = (E : \pm E^*)(E^* : \bar{\varepsilon}^*)/(\bar{\varepsilon} : \pm\bar{\varepsilon}^*),$$

dass

$$\frac{8}{(E : \pm E^*)}h = \frac{1}{4}\,\frac{2^{g_0+g_1+g_2+\kappa}(\bar{\varepsilon} : \pm\bar{\varepsilon}^*)(E : \bar{\varepsilon})}{(E : \pm E^*)}h_0h_1h_2$$

---

11) Ist in diesem Falle etwa k_1 reell, so ist die Grundeinheit von K entweder ε_1 oder $\sqrt[4]{-1}\sqrt{\varepsilon_1}$. Vgl. Kuroda [4], S. 398, Satz 12.

ist. Daraus ergibt sich (1) wegen $2^{g_0+g_1+g_2+\kappa}(\bar{\varepsilon} : \pm\bar{\varepsilon}^*) = 8,$[12] w.z.b.w.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Brauer, R.: Beziehungen zwischen Klassenzahlen von Teilkörpern eines galoisschen Körpers. Math. Nachr., **4** (1951), S. 158.
[2] Hasse, H.: Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. Akademie-Verlag, Berlin (1952).
[3] Herglotz, G.: Über einen Dirichletschen Satz. Math. Zeitschr., **12** (1922), S. 255.
[4] Kuroda, S.: Über den Dirichletschen Körper. J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, Sec. I, Vol. IV, Part **5** (1943), S. 383.
[5] Kuroda, S.: Über die Klassenzahlen algebraischer Zahlkörper. Nagoya Math. J., **1** (1950), S. 1.

Mathematisches Institut,
Universität zu Nagoya

12) Vgl. den Beweis von (14) für reellen K.