

SUR LA LACUNARITÉ DES PUISSANCES DE η

par JEAN-PIERRE SERRE

To Robert Rankin for his 70th birthday

Introduction. La fonction η de Dedekind est définie par

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) = q^{1/24}(1 - q - q^2 + q^5 + \dots), \quad (1)$$

où $q = e^{2\pi iz}$, $\text{Im}(z) > 0$. C'est une forme modulaire parabolique de poids $1/2$. Si r est un entier, la puissance r -ième de η s'écrit:

$$\eta^r(z) = q^{r/24} \sum_{n=0}^{\infty} p_r(n)q^n, \quad (2)$$

où les coefficients $p_r(n)$ sont définis par l'identité

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)^r = \sum_{n=0}^{\infty} p_r(n)q^n. \quad (3)$$

De nombreux auteurs se sont intéressés aux $p_r(n)$, et en particulier à leur annulation ([1], [5], [6], [8], [10], [11], [13], [14], [16]). Il se trouve en effet que, pour certaines valeurs de l'exposant r , presque tous les $p_r(n)$ sont 0: l'ensemble des n tels que $p_r(n) \neq 0$ est de densité nulle; on dit alors que la série η^r est lacunaire. C'est le cas pour $r = 1, 3$ comme le montrent les identités d'Euler et Jacobi ([4], chap. XIX):

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(3n^2+n)/2} \\ &= 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - \dots \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)^3 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) q^{(n^2+n)/2} \\ &= 1 - 3q + 5q^3 - 7q^6 + 9q^{10} - 11q^{15} + 13q^{21} - \dots \end{aligned} \quad (5)$$

On ne connaît pas d'autres valeurs impaires de r pour lesquelles η^r soit lacunaire au sens ci-dessus; des calculs sur ordinateur rendent probable qu'il n'y en a pas (cf. n° 3.2 ci-après). Lorsque r est pair, par contre, il peut se faire que η^r soit lacunaire; c'est le cas pour $r = 2, 4, 6, 8$ d'après Ramanujan [13]; c'est aussi le cas pour $r = 10, 14$ et 26 ([5], [10], [14]). Je me propose de montrer que ces cas sont les seuls:

THÉORÈME 1. *Supposons r pair > 0 . La fonction η^r est lacunaire si et seulement si r est égal à 2, 4, 6, 8, 10, 14 ou 26.*

La démonstration fait l'objet du §1. Elle repose sur le th. 17 de [19], lui-même conséquence de l'existence, prouvée par Deligne, des représentations l -adiques attachées aux formes paraboliques de poids entier.

Glasgow Math. J. **27** (1985) 203–221.

Le §2 est consacré aux exposants exceptionnels $r = 2, 4, 6, 8, 10, 14$ et 26 : il donne une décomposition de η^r en termes de formes de type CM, associées à des caractères de Hecke de $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, et précise dans quels cas on a $p_r(n) = 0$.

Le §3 contient divers compléments, notamment sur la “lacunarité mod m ” des η^r .

J’ai beaucoup bénéficié d’une correspondance avec Oliver Atkin, Henri Cohen et Victor Kac sur les sujets abordés ici; je les en remercie vivement.

1. Démonstration du théorème 1. Dans ce §, on suppose que r est pair > 0 et n n’appartient pas à l’ensemble $\{2, 4, 6, 8, 10, 14, 26\}$. Il s’agit de montrer que η^r n’est pas lacunaire.

On pose $k = r/2$; c’est le poids de η^r .

1.1. *Les formes f^k .* Il est commode de changer de variable en remplaçant q par q^{12} , de sorte que les exposants de q dans $\eta^r = \eta^{2k}$ deviennent entiers. Cela amène à poser (cf. [19], n° 7.8):

$$f(z) = \eta^2(12z) = q \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{12m})^2 = q - 2q^{13} - q^{25} + 2q^{37} + q^{49} + 2q^{61} - 2q^{73} - 2q^{97} - 2q^{109} + q^{121} + \dots \tag{6}$$

La fonction f est une forme parabolique de type $(1, \varepsilon)$ sur $\Gamma_0(N)$, où $N = 12^2 = 2^4 3^2$, et où ε est le caractère de $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ défini par

$$\varepsilon(n) = (-1)^{(n-1)/2} \text{ si } (N, n) = 1. \tag{7}$$

Il en résulte que la forme

$$f^k(z) = \eta^r(12z) = q^k \sum_{n=0}^{\infty} p_r(n) q^{12n}, \tag{8}$$

est de type (k, ε^k) ; avec les notations de [19], n° 7.6, on a

$$f^k \in S(N, k, \varepsilon^k). \tag{9}$$

Notons $S_{cm}(N, k, \varepsilon^k)$ (cf. [19], p. 181) le sous-espace de $S(N, k, \varepsilon^k)$ engendré par les formes de type CM, au sens de Ribet [15]. Si $\varphi \in S(N, k, \varepsilon^k)$, on sait ([19], th. 17) que φ est lacunaire si et seulement si φ appartient à $S_{cm}(N, k, \varepsilon^k)$. Le th. 1 équivaut donc au suivant:

THÉORÈME 1’. On a $f^k \notin S_{cm}(N, k, \varepsilon^k)$ si $k \neq 1, 2, 3, 4, 5, 7, 13$.

Le th. 1’ résulte lui-même de la comparaison des deux lemmes suivants, qui seront démontrés aux nos 1.2 et 1.3:

LEMME 1. Si $\varphi \in S_{cm}(N, k, \varepsilon^k)$, $k \geq 2$, on a $\varphi | T_p = 0$ pour tout nombre premier p tel que $p \equiv -1 \pmod{12}$.

(On note $\varphi | T_p$ le transformé de φ par l’opérateur de Hecke T_p , cf. [19], n° 7.1.)

LEMME 2. On a $f^k | T_{11} \neq 0$ si $k \neq 1, 2, 3, 4, 5, 7, 13$.

1.2. *Démonstration du lemme 1.* Rappelons d’abord comment on construit une base de $S_{cm}(N, k, \varepsilon^k)$, pour $k \geq 2$, au moyen de corps quadratiques imaginaires et de caractères de Hecke (“Größencharakteren”):

Soit $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ un corps quadratique imaginaire de discriminant d ; on a $d < 0$; soit O_K l’anneau des entiers de K . On note ε_K le caractère quadratique associé à K ; le conducteur de ε_K est $|d|$; on a $\varepsilon_K(p) = \left(\frac{d}{p}\right)$ si p est premier et ne divise pas $2|d|$.

Soit c un caractère de Hecke de K d’exposant $k - 1$ et de conducteur \mathfrak{f}_c , où \mathfrak{f}_c est un idéal non nul de O_K . Par définition, c est un homomorphisme

$$c : I(\mathfrak{f}_c) \rightarrow \mathbf{C}^*,$$

où $I(\mathfrak{f}_c)$ désigne le groupe des idéaux fractionnaires de K premiers à \mathfrak{f}_c . On a de plus:

$$c(\alpha O_K) = \alpha^{k-1} \quad \text{si } \alpha \in K^* \quad \text{et } \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}_c}. \tag{10}$$

A c est attaché un caractère de Dirichlet ω_c , défini par:

$$\omega_c(n) = c(nO_K)/n^{k-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{Z} \text{ premier à } \mathfrak{f}_c. \tag{11}$$

Considérons la série

$$\varphi_{K,c}(z) = \sum_{\mathfrak{a}} c(\mathfrak{a})q^{N(\mathfrak{a})} \quad (q = e^{2\pi iz}, \text{Im}(z) > 0), \tag{12}$$

où \mathfrak{a} parcourt les idéaux de O_K premiers à \mathfrak{f}_c , et $N(\mathfrak{a})$ désigne la norme de \mathfrak{a} . On sait ([15], p. 35–36 et [20], p. 138) que $\varphi_{K,c}$ est une forme parabolique primitive (“newform”, au sens de [7]) de type $(k, \varepsilon_K \omega_c)$ sur le groupe $\Gamma_0(|d| \cdot N(\mathfrak{f}_c))$. De plus, des couples (K, c) distincts donnent des formes $\varphi_{K,c}$ distinctes (ceci ne subsiste plus pour $k = 1$, comme l’avait remarqué Hecke à propos de η^2 , cf. [18], §7.3).

Si δ est un entier ≥ 1 , notons $\varphi_{K,c,\delta}$ la forme définie par:

$$\varphi_{K,c,\delta}(z) = \varphi_{K,c}(\delta z) = \sum_{\mathfrak{a}} c(\mathfrak{a})q^{\delta \cdot N(\mathfrak{a})}. \tag{13}$$

Pour que $\varphi_{K,c,\delta}$ appartienne à l’espace $S(N, k, \varepsilon^k)$ qui nous intéresse, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites:

$$\delta \cdot |d| \cdot N(\mathfrak{f}_c) \quad \text{divise } N; \tag{14.1}$$

$$\varepsilon_K \omega_c = \varepsilon^k. \tag{14.2}$$

(Il y a un abus de notation dans (14.2): l’égalité doit avoir lieu entre les caractères primitifs correspondants, i.e. on doit avoir $\varepsilon_K(p)\omega_c(p) = \varepsilon(p)^k$ pour tout p premier $\neq 2, 3$.)

Par définition (cf. [15], *loc. cit.*, ainsi que [19], p. 181), $S_{cm}(N, k, \varepsilon^k)$ est le sous-espace de $S(N, k, \varepsilon^k)$ engendré par les $\varphi_{K,c,\delta}$ pour les triplets (K, c, δ) satisfaisant aux conditions (14.1) et (14.2).

Or ces conditions sont très restrictives. Tout d’abord (14.1) entraîne que $|d|$ divise $N = 2^4 3^2$. Cela ne laisse que les possibilités:

$$d = -3, -4, -8, -24,$$

qui correspondent aux corps $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{-6})$. En fait:

a) *Le cas $d = -8$ (i.e. $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-2})$) est impossible*

Supposons $d = -8$. Vu (14.2), on a $\omega_c = \varepsilon_K$ ou $\varepsilon_K \cdot \varepsilon$, suivant la parité de k ; cela entraîne que le conducteur m_c de ω_c est égal à 8. Soit d'autre part q_c le générateur positif de $f_c \cap \mathbf{Z}$. Il résulte de (10) et (11) que $\omega_c(n) = 1$ si $n \equiv 1 \pmod{q_c}$, d'où le fait que 8 divise q_c . Si \mathfrak{p} désigne l'idéal premier $\sqrt{-2}$. \mathcal{O}_K , il en résulte que la valuation \mathfrak{p} -adique de f_c est ≥ 5 , et $N(f_c)$ est divisible par 2^5 , ce qui contredit (14.1) puisque $N = 2^4 3^2$.

b) *Le cas $d = -24$ (i.e. $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-6})$) est impossible*

Le raisonnement est le même: l'hypothèse $d = -24$ entraîne que le conducteur m_c de ω_c est égal à 24, et l'on en déduit comme ci-dessus que $N(f_c)$ est divisible par 2^5 , ce qui contredit la condition (14.1).

Les seules possibilités sont donc $d = -3$ et $d = -4$, qui correspondent aux corps $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$. Mais, si p est un nombre premier tel que $p \equiv -1 \pmod{12}$, p est *inerte* dans chacun de ces corps, et cela entraîne (cf. [15], p. 35):

$$\varphi_{K,c,\delta} \mid T_p = 0.$$

D'où le lemme 1, puisque les $\varphi_{K,c,\delta}$ engendrent $S_{cm}(N, k, \varepsilon^k)$.

REMARQUE. Le lemme 1 admet une réciproque: si $\varphi \in S(N, k, \varepsilon^k)$ est tel que $\varphi \mid T_p = 0$ pour tout $p \equiv -1 \pmod{12}$, alors φ appartient à $S_{cm}(N, k, \varepsilon^k)$; en fait, il suffit même que l'on ait $\varphi \mid T_p = 0$ pour un ensemble de p de densité > 0 (cela résulte de [19], cor. 2 au th. 15).

1.3. *Démonstration du lemme 2.* Il s'agit de montrer que $f^k \mid T_{11} \neq 0$ si k est un entier > 0 n'appartenant pas à l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 13\}$. Aux notations près, ce fait est démontré dans [10]. Je rappelle la démonstration:

D'après (8), on a

$$f^k = \sum_n p_r(n) q^{k+12n}, \quad \text{avec } r = 2k. \tag{15}$$

Comme $\varepsilon^k(11) = (-1)^k$, on en déduit:

$$f^k \mid T_{11} = \sum_n p_r(n) q^{(k+12n)/11} + (-1)^k 11^{k-1} \sum_n p_r(n) q^{11(k+12n)}, \tag{16}$$

où la première sommation porte sur les entiers $n \geq 0$ tels que $k + 12n$ soit divisible par 11, i.e. $n \equiv -k \pmod{11}$. Notons m le plus petit de ces entiers; on a

$$0 \leq m \leq 10 \quad \text{et} \quad m \equiv -k \pmod{11}. \tag{17}$$

La formule (16) entraîne:

$$f^k \mid T_{11} = p_r(m) q^{(k+12m)/11} + \dots \tag{18}$$

où les termes non écrits ont des exposants $> (k + 12m)/11$; en effet les exposants des termes de la seconde somme sont $\geq 11k$ et l'on a $11k > (k + 12m)/11$ pour $k > 1$, comme on le voit facilement.

Pour démontrer que $f^k \mid T_{11}$ est $\neq 0$, il suffit donc de prouver que $p_r(m) \neq 0$. C'est l'objet du lemme suivant:

LEMME 3. Si $0 \leq m \leq 10$, et si $k \equiv -m \pmod{11}$, on a

$$p_{2k}(m) \neq 0 \text{ pour } k \neq 2, 3, 4, 5, 7, 13. \tag{19}$$

La méthode suivie par Newman [10] pour prouver ce lemme consiste à expliciter les onze polynômes $r \mapsto p_r(m)$, pour $m = 0, \dots, 10$:

$$\begin{aligned} p_r(0) &= 1 \\ p_r(1) &= -r \\ p_r(2) &= r(r-3)/2 \\ p_r(3) &= -r(r-1)(r-8)/3! \\ p_r(4) &= r(r-1)(r-3)(r-14)/4! \\ p_r(5) &= -r(r-3)(r-6)(r^2-21r+8)/5! \\ p_r(6) &= r(r-1)(r-10)(r^3-34r^2+181r-144)/6! \\ p_r(7) &= -r(r-2)(r-3)(r-8)(r^3-50r^2+529r-120)/71! \\ p_r(8) &= r(r-1)(r-3)(r-6)(r^4-74r^3+1571r^2-9994r+4200)/8! \\ p_r(9) &= -r(r-1)(r-3)(r-4)(r-14)(r-26)(r^3-60r^2+491r-120)/9! \\ p_r(10) &= r(r-1)(r^8-134r^7+6496r^6-147854r^5+1709659r^4-10035116r^3 \\ &\quad +28014804r^2-29758896r+6531840)/10!. \end{aligned}$$

Or un calcul numérique standard montre que les facteurs:

$$\begin{aligned} &r^2-21r+8, \\ &r^3-34r^2+181r-144, \\ &r^3-50r^2+529r-120, \\ &r^4-74r^3+1571r^2-9994r+4200, \\ &r^3-60r^2+491r-120, \\ &r^8-134r^7+6496r^6-\dots+6531840, \end{aligned}$$

n'ont aucune racine dans \mathbf{Z} . D'où le lemme 3, et du coup le th. 1.

REMARQUE. Le cas du polynôme $r^8-134r^7+\dots$, qui intervient pour $m = 10$, nécessite l'emploi d'une calculatrice de poche (ou d'un ordinateur), ce qui est un peu désagréable. En fait, ce cas peut se traiter sans calcul:

Vu l'énoncé du lemme 3, il suffit de prouver que $p_r(10) \neq 0$ lorsque $r = 2k$ avec $k \equiv -10 \pmod{11}$, d'où $r \equiv 2 \pmod{11}$. Or le polynôme $r \mapsto p_r(10)$ est à coefficients 11-entiers; il est donc constant (mod 11) sur toute classe modulo 11, et l'on a

$$p_r(10) \equiv p_2(10) \pmod{11}.$$

Mais il est immédiat que $p_2(10) = 1$ (cela résulte, par exemple, de la détermination

explicite de $p_2(n)$, cf. n° 2.1). On a donc

$$p_r(10) \equiv 1 \pmod{11},$$

ce qui montre bien que $p_r(10)$ est non nul pour les valeurs de r considérées.

La même méthode s'applique aux autres valeurs de m , à condition de diviser le polynôme $r \mapsto p_r(m)$ par des facteurs linéaires convenables. Je laisse au lecteur le détail des calculs, et je me borne à énoncer les congruences obtenues pour $m = 5, 6, 7, 8, 9$:

$$\begin{array}{ll} p_r(5) \equiv 1 \pmod{11} & \text{si } r \equiv 1 \pmod{11} \\ p_r(6)/(r-10) \equiv 10 \pmod{11} & \text{si } r \equiv 10 \pmod{11} \\ p_r(7)/(r-8) \equiv 5 \pmod{11} & \text{si } r \equiv 8 \pmod{11} \\ p_r(8)/(r-6) \equiv 1 \pmod{11} & \text{si } r \equiv 6 \pmod{11} \\ p_r(9)/(r-4)(r-26) \equiv 9 \pmod{11} & \text{si } r \equiv 4 \pmod{11}. \end{array}$$

2. Les fonctions η^r , pour $r = 2, 4, 6, 8, 10, 14, 26$. Pour chacune de ces valeurs de r , on sait ([5], [14]) que η^r est lacunaire, donc décomposable en combinaison linéaire de formes de type CM, associées à des caractères de Hecke de $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ ou $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, cf. n° 1.2.

Le but de ce § est d'explicitier ces décompositions, et d'en déduire dans quels cas on a $p_r(n) = 0$.

Les n°s 2.1, 2.2, ..., 2.7 contiennent les formules relatives à $\eta^2, \eta^4, \dots, \eta^{26}$. Les démonstrations ont été concentrées au n° 2.8; comme elles ne présentent pas de difficultés, je me suis borné à les esquisser. Les résultats obtenus ne sont d'ailleurs pas essentiellement nouveaux:

les cas $r = 2, 4, 6, 8$ se trouvent déjà dans Ramanujan [13] (voir aussi [8], [16]);

les cas $r = 10, 14, 26$ ont été traités par Atkin il y a près de vingt ans (non publié—mais voir Dyson [3], p. 637 et p. 651);

les cas $r = 6, 8, 10, 14$ peuvent se déduire de la formule de Macdonald [9], appliquée à une algèbre de Lie semi-simple de dimension r et de rang 2, de type $A_1 \times A_1, A_2, B_2, G_2$.

2.1. *Le cas $r = 2$.* La fonction

$$\eta^2(12z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_2(n)q^{1+12n} = q - 2q^{13} - q^{25} + 2q^{37} + q^{49} + 2q^{61} + \dots$$

déjà considérée au n° 1.1, est une forme parabolique primitive de type $(1, \varepsilon)$ sur le groupe $\Gamma_0(2^4 3^2)$. Elle correspond (par la correspondance établie dans [2]) à une représentation galoisienne diédrale

$$\text{Gal}(E/\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbf{C}), \quad \text{où } E = \mathbf{Q}(i, \sqrt[4]{12}),$$

décrite dans [18], p. 242–244. Avec les notations du n° 1.2, on a

$$\eta^2(12z) = \varphi_{K,c}(z), \tag{20}$$

où $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ et où c est l'un des deux caractères de Hecke de K , d'ordre 4, qui correspondent à l'extension cyclique E/K (pour une description explicite de ces caractères, voir n° 2.5, où ils sont notés s_+ et s_-). Il y a d'ailleurs des expressions analogues de $\eta^2(12z)$ au moyen de caractères de $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ ou de $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$, cf. [18], *loc. cit.*

De cette description de $\eta^2(12z)$ résulte (cf. [19], p. 186):

$$p_2(n) = 0 \iff \text{il existe un nombre premier } p \not\equiv 1 \pmod{12} \text{ dont l'exposant dans } 1 + 12n \text{ est impair.}$$

EXEMPLE. Les valeurs de $n \leq 40$ pour lesquelles $p_2(n) = 0$ sont:

n	7	11	12	17	18	21	22	25	32	37	39
$1 + 12n$	5.17	7.19	5.29	5.41	7.31	11.23	5.53	7.43	5.7.11	5.89	7.67

2.2. *Le cas $r = 4$.* Il est commode de considérer, non pas $\eta^4(12z)$ (qui est une "oldform"), mais plutôt:

$$\eta^4(6z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_4(n)q^{1+6n} = q - 4q^7 + 2q^{13} + 8q^{19} - 5q^{25} - 4q^{31} + \dots,$$

qui est une forme parabolique primitive de poids 2 sur $\Gamma_0(2^23^2)$, de type *CM*. Avec les notations du n° 1.2, on a

$$\eta^4(6z) = \varphi_{K,c}(z), \tag{21}$$

où $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ et où c est le caractère de Hecke de K , d'exposant 1 et de conducteur $f_c = 2\sqrt{-3}$. O_K , défini de la manière suivante:

si \mathfrak{a} est un idéal de O_K premier à f_c , on a $c(\mathfrak{a}) = \alpha$, où α est l'unique générateur de \mathfrak{a} tel que $\alpha \equiv 1 \pmod{f_c}$.

Soit $L(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_4(n)(1+6n)^{-s}$ la série de Dirichlet associée à $\eta^4(6z)$. D'après (21), $L(s)$ se décompose en produit eulérien

$$L(s) = \prod_{p \neq 2,3} L_p(s), \tag{22}$$

avec:

$$L_p(s) = 1/(1+p^{1-2s}) \text{ si } p \equiv -1 \pmod{3}, \quad p \neq 2, \tag{23}$$

$$L_p(s) = 1/(1-c(p)p^{-s})(1-c(\bar{p})p^{-s}) \text{ si } p \equiv 1 \pmod{3}, \tag{24}$$

où p et \bar{p} désignent les idéaux premiers de O_K qui divisent p .

Si l'on pose $T = p^{-s}$, les formules (23) et (24) se récrivent:

$$L_p(s) = 1 - pT^2 + p^2T^4 - p^3T^6 + \dots \tag{23'}$$

$$L_p(s) = 1 + x_1T + x_2T^2 + \dots, \tag{24'}$$

avec

$$x_n = c(\mathfrak{p})^n + c(\mathfrak{p})^{n-1}c(\bar{\mathfrak{p}}) + \dots + c(\bar{\mathfrak{p}})^n.$$

Comme $c(\mathfrak{p}) \in \mathfrak{p}$ et $c(\bar{\mathfrak{p}}) \notin \mathfrak{p}$, on a $x_n \notin \mathfrak{p}$, et en particulier $x_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$. On déduit de là que le m -ième coefficient de $L(s)$ est $\neq 0$ si et seulement si m est premier à 6, et si pour tout $p \equiv -1 \pmod{3}$, l'exposant de p dans m est pair. En d'autres termes:

$$p_4(n) = 0 \iff \begin{array}{l} \text{il existe un nombre premier } p \equiv -1 \pmod{3} \\ \text{dont l'exposant dans } 1+6n \text{ est impair.} \end{array}$$

EXEMPLE. Valeurs de $n \leq 50$ pour lesquelles $p_4(n) = 0$:

n	9	14	19	24	31	34	39	42	44	49
$1+6n$	5.11	5.17	5.23	5.29	11.17	5.41	5.47	11.23	5.53	5.59

2.3. *Le cas $r = 6$.* Ce cas est analogue au cas $r = 4$.

La fonction

$$\eta^6(4z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_6(n)q^{1+4n} = q - 6q^5 + 9q^9 + 10q^{13} - 30q^{17} + \dots$$

est une forme parabolique primitive de poids 3 et de caractère ε sur $\Gamma_0(2^4)$. C'est une forme de type CM. On a:

$$\eta^6(4z) = \varphi_{K,c}(z), \tag{25}$$

où $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ et où c est le caractère de Hecke de K , d'exposant 2 et de conducteur $f_c = 2 \cdot \mathcal{O}_K$, défini de la manière suivante:

si \mathfrak{a} est un idéal de \mathcal{O}_K premier à f_c , on a $c(\mathfrak{a}) = \alpha^2$, où α est l'un quelconque des deux générateurs de \mathfrak{a} tels que $\alpha \equiv 1 \pmod{f_c}$.

On déduit de (25), par le même argument que pour $r = 4$:

$$p_6(n) = 0 \iff \begin{array}{l} \text{il existe un nombre premier } p \equiv -1 \pmod{4} \\ \text{dont l'exposant dans } 1+4n \text{ est impair.} \end{array}$$

EXEMPLE. Valeurs de $n \leq 40$ pour lesquelles $p_6(n) = 0$:

n	5	8	14	17	19	23	26	32	33	35	40
$1+4n$	3.7	3.11	3.19	3.23	7.11	3.31	3.5.7	3.43	7.19	3.47	7.23

2.4. *Le cas $r = 8$.* Ce cas est analogue aux cas $r = 4$ et $r = 6$.

La fonction

$$\eta^8(3z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_8(n)q^{1+3n} = q - 8q^4 + 20q^7 - 70q^{13} + 64q^{16} + \dots$$

est une forme parabolique primitive de poids 4 sur $\Gamma_0(3^2)$, de type CM. On a

$$\eta^8(3z) = \varphi_{K,c}(z), \tag{26}$$

où $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ et où c est le caractère de Hecke de K , d'exposant 3 et de conducteur $\mathfrak{f}_c = \sqrt{-3} \cdot \mathcal{O}_K$, défini de la manière suivante:

si \mathfrak{a} est un idéal de \mathcal{O}_K premier à \mathfrak{f}_c , on a $c(\mathfrak{a}) = \alpha^3$, où α est l'un quelconque des trois générateurs de \mathfrak{a} tels que $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}_c}$.

On en déduit:

$$p_8(n) = 0 \iff \text{il existe un nombre premier } p \equiv -1 \pmod{3} \text{ dont l'exposant dans } 1 + 3n \text{ est impair.}$$

EXEMPLE. Valeurs de $n \leq 30$ pour lesquelles $p_8(n) = 0$:

n	3	7	11	13	15	18	19	23	27	28	29
$1 + 3n$	2.5	2.11	2.17	$2^3.5$	2.23	5.11	2.29	2.5.7	2.41	5.17	$2^3.11$

2.5. Le cas $r = 10$. La fonction

$$\eta^{10}(12z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{10}(n)q^{5+12n} = q^5 - 10q^{17} + 35q^{29} - 30q^{41} + \dots$$

est une forme parabolique de poids 5 et de caractère ε sur $\Gamma_0(2^4 3^2)$. Ce n'est pas une forme primitive (elle ne commence pas par "q"), mais c'est une combinaison linéaire de deux formes primitives de type CM:

$$\eta^{10}(12z) = \frac{1}{96}(\varphi_{K,c_+}(z) - \varphi_{K,c_-}(z)), \tag{27}$$

où $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$, et où c_+ et c_- sont deux caractères de Hecke de K , d'exposant 4 et de conducteur $\mathfrak{f} = 6 \cdot \mathcal{O}_K$, qui seront explicités ci-dessous.

On a

$$\varphi_{K,c_{\pm}} = q \pm 48q^5 + 238q^{13} \mp 480q^{17} + 1679q^{25} + \dots \tag{28}$$

et

$$\varphi_{K,c_{\pm}}(z/12) = E_4 \eta^2 \pm 48 \eta^{10}, \tag{29}$$

où $E_4 = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n$ est la série d'Eisenstein normalisée de poids 4 et de niveau 1.

Explicitons les caractères c_+ et c_- :

$$\text{Notons } s_{\pm}: (\mathcal{O}_K/6 \cdot \mathcal{O}_K)^* \rightarrow \{1, i, -1, -i\}$$

les homomorphismes caractérisés par

$$s_{\pm}(\alpha) = (-1)^a (\pm i)^b \quad \text{si} \quad \begin{cases} \alpha \equiv i^a \pmod{2 \cdot \mathcal{O}_K}, a \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \\ \alpha \equiv (1-i)^b \pmod{3 \cdot \mathcal{O}_K}, b \in \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Pour tout idéal \mathfrak{a} de \mathcal{O}_K premier à $\mathfrak{f} = 6 \cdot \mathcal{O}_K$, on pose alors

$$c_{\pm}(\mathfrak{a}) = s_{\pm}(\alpha) \alpha^4,$$

où α est l'un quelconque des quatre générateurs de \mathfrak{a} .

Si m est un entier tel que $m \equiv 5 \pmod{12}$, le m -ième coefficient de $\eta^{10}(12z)$ est égal à celui de φ_{K,c_+} , divisé par 48. On en déduit, par le même raisonnement qu'au n° 2.2:

$$p_{10}(n) = 0 \iff \begin{array}{l} \text{il existe un nombre premier } p \equiv -1 \pmod{4} \\ \text{dont l'exposant dans } 5 + 12n \text{ est impair.} \end{array}$$

EXEMPLE. Valeurs de $n \leq 50$ pour lesquelles $p_{10}(n) = 0$:

n	6	13	17	27	28	34	36	39	41	48
$5 + 12n$	7.11	7.23	11.19	7.47	11.31	7.59	19.23	11.43	7.71	7.83

2.6. *Le cas $r = 14$.* Ce cas est analogue au cas $r = 10$.
La fonction

$$\eta^{14}(12z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{14}(n)q^{7+12n} = q^7 - 14q^{19} + 77q^{31} - 182q^{43} + \dots$$

est une forme parabolique de poids 7 et de caractère ε sur $\Gamma_0(2^4 3^2)$. C'est une combinaison linéaire de deux formes primitives de type CM:

$$\eta^{14}(12z) = \frac{1}{720\sqrt{-3}} (\varphi_{K,c_+}(z) - \varphi_{K,c_-}(z)), \tag{30}$$

où $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, et où c_+ et c_- sont deux caractères de Hecke de K , d'exposant 6 et de conducteur $\mathfrak{f} = 4\sqrt{-3}$. O_K , qui seront explicités ci-dessous.

On a

$$\varphi_{K,c_{\pm}} = q \pm 360\sqrt{-3}q^7 - 560q^{13} \mp 5040\sqrt{-3}q^{19} + \dots \tag{31}$$

et

$$\varphi_{K,c_+}(z/12) = E_6\eta^2 \pm 360\sqrt{-3}\eta^{14}, \tag{32}$$

où $E_6 = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)q^n$ est la série d'Eisenstein normalisée de poids 6 et de niveau 1.

Explicitons c_+ et c_- :

Si \mathfrak{a} est un idéal de O_K premier à \mathfrak{f} , soit α l'unique générateur de \mathfrak{a} qui s'écrit $\alpha = x + y\sqrt{-3}$, avec $x, y \in \mathbf{Z}$, $x + y \equiv 1 \pmod{2}$ et $x \equiv 1 \pmod{3}$; on a alors

$$c_+(\mathfrak{a}) = (-1)^{(x-y-1)/2} \alpha^6 \quad \text{et} \quad c_-(\mathfrak{a}) = (-1)^{(x+y-1)/2} \alpha^6. \tag{33}$$

On en déduit, comme au n° 2.5:

$$p_{14}(n) = 0 \iff \begin{array}{l} \text{il existe un nombre premier } p \equiv -1 \pmod{3} \\ \text{dont l'exposant dans } 7 + 12n \text{ est impair.} \end{array}$$

EXEMPLE. Valeurs de $n \leq 40$ pour lesquelles $p_{14}(n) = 0$:

n	4	9	15	19	24	26	29	32	34	37
$7 + 12n$	5.11	5.23	11.17	5.47	5.59	11.29	5.71	17.23	5.83	11.41

2.7. Le cas $r = 26$

La fonction

$$\eta^{26}(12z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{26}(n)q^{13+12n} = q^{13} - 26q^{25} + 299q^{37} - 1950q^{49} + \dots$$

est une forme parabolique de poids 13 et de caractère ε sur $\Gamma_0(2^4 3^2)$. C'est une combinaison linéaire de quatre formes primitives de type CM:

$$\eta^{26}(12z) = \frac{1}{32617728} (\varphi_{K',c'_+} + \varphi_{K',c'_-} - \varphi_{K'',c''_+} - \varphi_{K'',c''_-}), \tag{34}$$

où $K' = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, $K'' = \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$, et où c'_+ et c'_- (resp. c''_+ et c''_-) sont deux caractères de Hecke de K' (resp. de K''), d'exposant 12 et de conducteur $\mathfrak{f}' = 4\sqrt{-3} \cdot \mathcal{O}_{K'}$ (resp. $\mathfrak{f}'' = 6 \cdot \mathcal{O}_{K''}$) qui seront explicités ci-dessous.

On a

$$\varphi_{K',c'_\pm} = q \mp 102960\sqrt{-3}q^7 + 9397582q^{13} \pm 53333280\sqrt{-3}q^{19} + \dots \tag{35}$$

$$\varphi_{K'',c''_\pm} = q \pm 20592q^5 - 6911282q^{13} \pm 9678240q^{17} + \dots \tag{36}$$

et

$$\varphi_{K',c'_\pm}(z/12) = E_6^2 \eta^2 + 9398592 \eta^{26} \mp 102960\sqrt{-3} E_6 \eta^{14} \tag{37}$$

$$\varphi_{K'',c''_\pm}(z/12) = E_6^2 \eta^2 - 6910272 \eta^{26} \pm 20592 E_8 \eta^{10}, \tag{38}$$

où E_6 (resp. E_8) est la série d'Eisenstein normalisée de poids 6 (resp. de poids 8) et de niveau 1.

Explicitons les caractères c'_\pm et c''_\pm :

Si \mathfrak{a} est un idéal de $\mathcal{O}_{K'}$ premier à \mathfrak{f}' , et si α est un générateur quelconque de \mathfrak{a} , on a $c'_\pm(\mathfrak{a}) = \alpha^6 c_\pm(\mathfrak{a})$, où c_\pm est le caractère de Hecke de K' défini au n° 2.6.

Si \mathfrak{a} est un idéal de $\mathcal{O}_{K''}$ premier à \mathfrak{f}'' , on a $c''_\pm(\mathfrak{a}) = c_\pm(\mathfrak{a})^3$, où c_\pm est le caractère de Hecke de K'' défini au n° 2.5.

Il résulte de (34) que $p_{26}(n)$ est égal à 0 dans chacun des deux cas suivants:

Il existe un nombre premier $p \equiv -1 \pmod{4}$ dont l'exposant dans $13 + 12n$ est impair, et il existe un nombre premier $p' \equiv -1 \pmod{3}$ dont l'exposant dans $13 + 12n$ est impair.

(39₁)

(Noter que p' peut être égal à p .)

En effet, dans ce cas, les coefficients de q^{13+12n} dans les quatre séries φ_{K',c'_+} et φ_{K'',c''_+} sont nuls.

$13 + 12n$ est un carré, et tous ses facteurs premiers p sont tels que $p \equiv -1 \pmod{12}$.

(39₂)

En effet, dans ce cas, les coefficients de q^{13+12n} dans les quatre séries φ_{K',c'_+} et φ_{K'',c''_+} sont égaux à $(13 + 12n)^6$.

J'ignore s'il existe d'autres cas que (39₁) et (39₂) où $p_{26}(n)$ est égal à 0; d'après une table que j'ai consultée, il n'y en a pas pour $n \leq 1500$.

EXEMPLE. Valeurs de $n \leq 80$ pour lesquelles $p_{26}(n) = 0$:

n	9	20	31	42	43	53	64	66	75
$13 + 12n$	11^2	11.23	5.7.11	11.47	23^2	11.59	11.71	5.7.23	11.83

Noter les cas $n = 9$ et $n = 43$ qui sont du type (39₂).

QUESTION. Est-il possible d'obtenir la décomposition (34) de η^{26} par une variante de la formule de Macdonald (cf. [3], [9])? On pense naturellement à F_4 , qui est de dimension $52 = 2 \times 26$, et possède des formes "tordues" de rang 2 (groupes de Ree).

2.8. *Indications sur les démonstrations.* Je me borne aux cas de η^{10} , η^{14} et η^{26} , les autres étant bien connus, cf. [8], [13], [16], [18].

On commence par écrire η^r comme combinaison linéaire de fonctions propres pour les T_p (p premier $\neq 2, 3$), suivant une méthode exposée par Rankin ([14], §8):

Si k est un entier ≥ 1 , premier à 6, notons V_k l'espace vectoriel de base les produits $E_a \eta^{2b}$, où E_a est la série d'Eisenstein normalisée de poids a et de niveau 1, et où les entiers a et b sont assujettis aux conditions suivantes:

$$\begin{cases} a \text{ est pair, } \geq 0, \text{ et différent de } 2, \\ b \geq 1, (b, 6) = 1, \\ 2a + b = k. \end{cases}$$

Le couple $a = 0, b = k$ donne η^{2k} .

L'espace V_k peut être caractérisé en termes de formes paraboliques "à multiplicateur" sur $SL_2(\mathbf{Z})$, cf. Rankin, *loc. cit.* Cette caractérisation montre que V_k est stable par les T_p . On peut donc exprimer η^{2k} comme combinaison linéaire de fonctions propres appartenant à V_k . Cela donne:

(i) *Le cas de η^{10} .*

On a $k = 5$; l'espace V_k a pour base les deux formes:

$$\begin{aligned} \eta^{10} &= q^{5/12} + \dots \\ E_4 \eta^2 &= q^{1/12} + 238q^{13/12} + 1679q^{25/12} + \dots \end{aligned}$$

De ces développements, on déduit l'action de l'opérateur T_5 :

$$T_5 \begin{cases} \eta^{10} \mapsto E_4 \eta^2 \\ E_4 \eta^2 \mapsto (1679 + 5^4) \eta^{10} = 48^2 \eta^{10}. \end{cases}$$

On en conclut que les formes

$$h_{\pm} = E_4 \eta^2 \pm 48 \eta^{10} = q^{1/12} \pm 48q^{5/12} + 238q^{13/12} + \dots$$

sont fonctions propres des T_p (cf. [8], p. 27), et cela fournit la décomposition cherchée:

$$\eta^{10} = \frac{1}{96}(h_+ - h_-).$$

Il reste à voir que $h_+(12z)$ est égale à la forme φ_{K,c_+} du n° 2.5 (et de même pour h_-). Pour cela, on remarque que $h_+(12z)$ est annulée par les T_p si $p \equiv -1 \pmod{4}$, donc est une forme de type CM relativement au corps $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$. Avec les notations du n° 1.2, cela signifie que l'on a

$$h_+(12z) = \sum_{\delta} \lambda_{\delta} \varphi_{K,c,\delta} \quad (\lambda_{\delta} \in \mathbf{C}),$$

où c est un caractère de Hecke de $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$, d'exposant 4 et de conducteur \mathfrak{f} tel que $4N(\mathfrak{f})$ divise 144, i.e. $N(\mathfrak{f})$ divise 36, et où δ parcourt les diviseurs positifs de $36/N(\mathfrak{f})$. De plus c satisfait à la condition (14.2), qui s'écrit ici $\omega_c = 1$. Il est facile de dresser la liste des caractères c satisfaisant à ces conditions. On trouve qu'il y en a quatre: c_0, c_1, c_2, c_3 qui peuvent s'écrire (avec les notations du n° 2.5):

$$c_j(a) = s_+(\alpha)^j \alpha^4 \quad (j = 0, 1, 2, 3),$$

pour tout idéal a de O_K premier à 6. O_K, α désignant un générateur quelconque de a . Leurs conducteurs sont respectivement $O_K, 6 \cdot O_K, 3 \cdot O_K, 6 \cdot O_K$. La forme $\varphi_{K,c_i,\delta}$ est fonction propre de T_5 , avec pour valeur propre:

$$\lambda_j = c(\mathfrak{p}) + c(\bar{\mathfrak{p}}), \quad \text{où } \mathfrak{p} = (2+i) \cdot O_K, \quad \bar{\mathfrak{p}} = (2-i) \cdot O_K.$$

D'où:

$$\lambda_j = (-i)^j (2+i)^4 + i^j (2-i)^4,$$

i.e.

$$\lambda_0 = -14, \quad \lambda_1 = 48, \quad \lambda_2 = 14, \quad \lambda_3 = -48.$$

Comme $h_+ | T_5 = 48h_+$ par construction, on voit que la seule possibilité pour c est $c = c_1$ (i.e. $c = c_+$, avec les notations du n° 2.5). Or le conducteur de c_1 est $6 \cdot O_K$, qui a pour norme 36. Comme δ divise $36/N(\mathfrak{f})$, la seule valeur possible de δ est $\delta = 1$, d'où $\lambda_{\delta} = 1$ et $h_+ = \varphi_{K,c_+}$; de même, h_- est égal à φ_{K,c_-} ; cela achève la vérification des formules du n° 2.5.

(ii) *Le cas de η^{14} .*

On a $k = 7$; l'espace V_k a pour base les deux formes η^{14} et $E_6\eta^2$; l'action de T_7 est donnée par:

$$T_7 \begin{cases} \eta^{14} \mapsto E_6\eta^2 \\ E_6\eta^2 \mapsto -3 \times 360^2 \eta^{14}. \end{cases}$$

On en conclut que les formes $h_{\pm} = E_6\eta^2 \pm 360\sqrt{-3}\eta^{14}$ sont fonctions propres des T_p , cf. [8], p. 28. De plus, ces formes sont annulées par les T_p pour $p \equiv -1 \pmod{3}$. Le même argument que ci-dessus montre alors que les $h_{\pm}(12z)$ coïncident avec les $\varphi_{K,c_{\pm}}$ du n° 2.6.

(iii) *Le cas de η^{26} .*

On a $k = 13$; l'espace V_k a pour base les quatre formes:

$$\eta^{26}, \quad E_6^2\eta^2, \quad E_8\eta^{10} \quad \text{et} \quad E_6\eta^{14}.$$

Les opérateurs T_5 et T_7 dont donnés par:

$$T_5 \begin{cases} \eta^{26} \mapsto -26E_8\eta^{10} \\ E_6^2\eta^2 \mapsto 244363392E_8\eta^{10} \\ E_8\eta^{10} \mapsto E_6^2\eta^2 - 6910272\eta^{26} \\ E_6\eta^{14} \mapsto 0 \end{cases} \quad T_7 \begin{cases} \eta^{26} \mapsto -1950E_6\eta^{14} \\ E_6^2\eta^2 \mapsto -13475030400E_6\eta^{14} \\ E_8\eta^{10} \mapsto 0 \\ E_6\eta^{14} \mapsto E_6^2\eta^2 + 9398592\eta^{26}. \end{cases}$$

On déduit de là les quatre fonctions propres:

$$E_6^2\eta^2 + 9398592\eta^{26} \mp 102960\sqrt{-3}E_6\eta^{14}$$

et

$$E_6^2\eta^2 - 6910272\eta^{26} \pm 20592E_8\eta^{10}.$$

Les deux premières (resp. les deux dernières) sont annulées par les T_p si $p \equiv -1 \pmod{3}$ (resp. si $p \equiv -1 \pmod{4}$). On en conclut qu'elles sont de type *CM* relativement au corps $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ (resp. $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$). On détermine les caractères correspondants par la méthode utilisée pour η^{14} (resp. pour η^{10}), et l'on obtient ainsi les formules du n° 2.7.

3. Compléments

3.1. *Evaluations asymptotiques.* Soit $r \in \mathbf{Z}$. Si x est un entier ≥ 1 , posons:

$$M_r(x) = \text{nombre des entiers } n < x \text{ tels que } p_r(n) \neq 0. \tag{40}$$

Dire que η^r est lacunaire signifie que $M_r(x) = o(x)$ pour $x \rightarrow \infty$. Lorsque r est pair > 0 , le th. 1 affirme que cela se produit si et seulement si $r = 2, 4, 6, 8, 10, 14$ ou 26 . Ce résultat peut être précisé de la manière suivante:

THÉORÈME 2. (i) *Il existe une constante $c_2 > 0$ telle que:*

$$M_2(x) \sim c_2 x / (\log x)^{3/4} \text{ pour } x \rightarrow \infty.$$

(ii) *Pour $r = 4, 6, 8, 10, 14$, il existe une constante $c_r > 0$ telle que:*

$$M_r(x) \sim c_r x / (\log x)^{1/2} \text{ pour } x \rightarrow \infty.$$

(iii) *Il existe deux constantes c'_{26} et c''_{26} , avec $0 < c'_{26} < c''_{26}$, telles que:*

$$c'_{26} x / (\log x)^{1/2} \leq M_{26}(x) \leq c''_{26} x / (\log x)^{1/2} \text{ pour } x \geq 2.$$

(iv) *Si r est pair > 0 , et distinct de $2, 4, 6, 8, 10, 14, 26$, il existe une constante $c_r > 0$ telle que:*

$$M_r(x) \geq c_r x \text{ pour } x \geq 1.$$

L'assertion (i) est démontrée dans [19], n° 7.8, qui donne également la valeur de la constante c_2 :

$$c_2 = 2^{7/4} 3^{-3/4} \pi^{3/2} \Gamma(1/4)^{-1} (\log(2 + \sqrt{3}))^{1/4} \prod_{p \equiv 1 \pmod{12}} (1 - p^{-2})^{1/2} \\ = 2,4185 \dots$$

(On a $c_2 = 12\alpha$, avec les notations de [19], loc. cit., prop. 19.)

L'assertion (ii), pour $r = 4, 6, 8$, résulte de la prop. 18 de [19], n° 7.5, puisque η^r est alors (à un changement de variable près) une forme primitive de type CM, cf. §2. Les cas $r = 10$ et $r = 14$ se traitent de manière analogue, mais un peu plus compliquée, en utilisant la "méthode de Landau", cf. [17]; je laisse au lecteur les détails de la démonstration.

Les assertions (iii) et (iv) résultent du th. 17 de [19], combiné au th. 1' du §2.

REMARQUES. 1) J'ignore si (ii) s'étend au cas $r = 26$; cela me paraît probable.

2) Les constantes c_r de (ii) peuvent être calculées explicitement, tout comme c_2 .

3) Pour $r = 4, 6, 8, 10, 14, 26$, la lacunarité de η^r provient du facteur $1/(\log x)^{1/2}$ qui tend lentement vers 0 quand $x \rightarrow \infty$. Cette lenteur est très frappante quand on examine les tables donnant $p_r(n)$. Ainsi, pour $r = 26$, et pour n voisin de 10^3 , il y a encore environ 80% des valeurs de n pour lesquelles $p_{26}(n) \neq 0$; pour que cette proportion s'abaisse à 50%, il faudrait sans doute que n soit de l'ordre de 10^7 ou 10^8 , et pour qu'elle tombe en-dessous de 1%, que n soit de l'ordre de 10^{10000} . Il s'agit donc d'une lacunarité très peu marquée, bien moindre que dans les cas $r = 1$ et $r = 3$, où $M_r(x)$ est de l'ordre de grandeur de \sqrt{x} .

3.2. *Données numériques.* On trouve dans [11] des tables donnant $p_r(n)$ pour $1 \leq r \leq 16$ et $n \leq 400$. Des calculs beaucoup plus étendus ont été faits ensuite par O. Atkin, et, plus récemment, par H. Cohen (non publiés). D'après ce qu'ils m'ont communiqué, la situation est la suivante:

a) r pair > 0 .

Lorsque r est pair > 0 , et distinct de 2, 4, 6, 8, 10, 14, 26, on ne connaît aucune valeur de $n \geq 0$ pour laquelle $p_r(n)$ soit 0. Il semble raisonnable de conjecturer qu'il n'en existe pas. Cette conjecture (faite pour la première fois par Atkin, semble-t-il) généralise la conjecture de Lehmer [6], relative au cas $r = 24$, suivant laquelle la fonction de Ramanujan $\tau(n) = p_{24}(n - 1)$ est $\neq 0$ pour $n \geq 1$ (cf. n° 3.3 ci-dessous).

b) r impair ≥ 5 .

Lorsque $r = 5, 7, 15$, on connaît des valeurs de n pour lesquelles $p_r(n) = 0$:

$$r = 5, \quad n = 1560, 1802, 1838, 2318, 2690, \dots \quad (\text{Atkin, Cohen});$$

$$r = 7, \quad n = 28017 \quad (\text{Atkin});$$

$$r = 15, \quad n = 53 \quad (\text{Newman [11]}).$$

Dans chacun de ces cas, η^r est fonction propre des opérateurs de Hecke $T(p^2)$ ([8], [10]), de sorte que toute valeur de n pour laquelle $p_r(n) = 0$ en fournit une infinité d'autres.

Il serait intéressant d'étudier ces zéros du point de vue de la théorie de Shimura [21], complétée par Waldspurger [23]. Leur nombre paraît suffisamment faible pour que l'on puisse conjecturer que η^r n'est pas lacunaire pour r impair ≥ 5 , et même que $M_r(x) \sim x$ pour $x \rightarrow \infty$.

3.3. *Le cas $r=24$ (conjecture de Lehmer).* La conjecture en question dit que $\tau(n) \neq 0$ pour tout $n \geq 1$. Dans [6], Lehmer démontre que c'est vrai pour $n \leq 3 \cdot 10^6$. On peut pousser sa méthode un peu plus loin:

$$\text{On a } \tau(n) \neq 0 \text{ pour } 1 \leq n \leq 10^{15}. \quad (41)$$

Ce résultat est énoncé dans [19], §7.4, mais la démonstration donnée à cet endroit est incorrecte (à cause d'une congruence mod 7^2 , cf. (iii) ci-dessous). Je la reprends, en la corrigeant:

Soit p le plus petit entier strictement positif $\leq 10^{15}$ pour lequel $\tau(p) = 0$, s'il en existe. C'est un nombre premier ([6], th. 2). Les congruences connues sur $\tau(p)$ (cf. [6], complété par [22]) entraînent:

$$(i) \quad p \equiv -1 \pmod{2^{14}3^75^3691},$$

$$(ii) \quad \left(\frac{p}{23}\right) = -1,$$

$$(iii) \quad p \equiv -1, 19 \text{ ou } 31 \pmod{7^2}, \text{ i.e. } p^3 \equiv -1 \pmod{7^2}.$$

(Dans [19], *loc. cit.*, les cas $p \equiv 19, 31 \pmod{7^2}$ avaient été oubliés.)

D'après (i), on peut écrire p sous la forme

$$p = hM - 1, \text{ avec } h \geq 1, \quad (42)$$

où

$$M = 2^{14}3^75^3691 = 3094972416000.$$

Comme $M \equiv -1 \pmod{23}$, la condition (ii) se traduit par (ii') $h + 1$ est résidu quadratique $\not\equiv 0 \pmod{23}$, i.e.

$$h \equiv 0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 12, 15, 17 \pmod{23}. \quad (43)$$

Comme $M \equiv 17 \pmod{7^2}$, la condition (iii) se traduit par

$$h \equiv 0, 30, 48 \pmod{7^2}. \quad (44)$$

Enfin la condition $p \leq 10^{15}$ donne:

$$h < 324. \quad (45)$$

Les valeurs de h satisfaisant à (43), (44) et (45) sont

$$h = 30, 48, 49, 97, 146, 195, 196, 245, 293.$$

Pour chacune de ces valeurs, on constate que $p = hM - 1$ n'est pas premier: il est divisible respectivement par

$$13, 11, 1249, 73, 227, 29, 4789, 131, 19.$$

D'où (41).

REMARQUE. Dans une conférence à Bonn (juin 1984), N. Kuznetsov a annoncé un théorème général sur la non annulation des séries de Poincaré qui entraînerait la conjecture de Lehmer, et rendrait donc inutile les calculs ci-dessus.

3.4. *Lacunarité mod m des η^r .* Soit m un entier ≥ 1 . On peut s'intéresser (cf. [1], [17], par exemple) à la lacunarité de la fonction

$$n \mapsto p_r(n) \pmod{m},$$

à valeurs dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.

Cela amène à poser:

$$M_r(x; m) = \text{nombre des } n \leq x \text{ tels que } p_r(n) \not\equiv 0 \pmod{m}. \tag{46}$$

Nous dirons que η^r est *lacunaire mod m* si $M_r(x; m) = o(x)$ pour $x \rightarrow \infty$, i.e. si presque tous les $p_r(n)$ sont divisibles par m .

THÉORÈME 3. *Si r est pair ≥ 0 , η^r est lacunaire mod m quel que soit $m \geq 1$.*

Cela résulte du th. 4.7 de [17], qui est applicable du fait que η^r est une forme modulaire de poids entier sur un groupe de congruence. On a même un résultat plus précis: il existe un nombre réel $\alpha > 0$ (dépendant de r et de m) tel que

$$M_r(x; m) = O(x/(\log x)^\alpha) \text{ pour } x \rightarrow \infty. \tag{47}$$

Le cas r impair ≥ 5

Je ne sais pas si le th. 3 s'étend à ce cas. On peut donner divers cas où c'est vrai, par exemple $m = 2$ à cause de la congruence

$$p_r(n) \equiv p_{2r}(2n) \pmod{2},$$

qui permet de se ramener à un poids pair. De façon analogue, la congruence

$$p_5(n) \equiv p_1(n/5) \pmod{5}$$

montre que η^5 est lacunaire mod 5; de même, η^{15} est lacunaire mod 5, et η^7 est lacunaire mod 7). Mais j'ignore, par exemple, si η^5 est lacunaire mod 3, ou si η^7 est lacunaire mod 5; les tables existantes sont trop restreintes pour suggérer une conjecture quelconque. Je me borne à signaler le résultat suivant, qui montre en tout cas que "beaucoup" de $p_r(n)$ sont divisibles par m :

Pour tout r impair > 0 , et tout $m \geq 1$, il existe un ensemble $P_{r,m}$ de nombres premiers, de densité > 0 , tel que l'on ait

$$\eta^r \mid T(p^2) \equiv 0 \pmod{m} \text{ pour tout } p \in P_{r,m}. \tag{48}$$

C'est là une propriété générale des opérateurs de Hecke $T(p^2)$, agissant sur les formes de poids demi-entier. [On prouve d'abord l'énoncé analogue pour les T_p agissant sur les formes de poids entier: on utilise pour cela les représentations l -adiques de Deligne (cf. [2], lemme 9.6, pour le cas des formes de poids 1). On ramène ensuite les poids demi-entiers aux poids entiers par la théorie de Shimura [21].]

Le cas $r < 0$ (pair ou impair)

Ce cas est encore moins connu que le précédent. Autant que je sache, la lacunarité (ou non lacunarité) de $\eta^r \pmod{m}$ n'a été établie pour *aucun* couple (r, m) avec $r < 0$ et $m \geq 2$.

Le cas $r = -1, m = 2$ a été étudié numériquement par Parkin et Shanks [12]; il semble que $M_{-1}(x; 2)$ soit voisin de $x/2$, ce qui entraînerait que η^{-1} n'est pas lacunaire mod 2).

Je signale également que, lorsque r est pair < 0 , on peut parfois utiliser la méthode de [17], §5, pour prouver que, si l'on impose à n certaines congruences, presque tous les $p_r(n)$ correspondants sont $0 \pmod{m}$.

EXEMPLE. Prenons $r = -48$, i.e. $\eta^r = \Delta^{-2}$, et $m = 7^\alpha$, avec $\alpha \geq 1$; alors presque tous les $p_{-48}(n)$, pour $n \equiv 2, 3, 4, 6 \pmod{7}$, sont divisibles par 7^α : cela résulte de ce que la série

$$\sum_{n \equiv 2, 3, 4, 6 \pmod{7}} p_{-48}(n) q^{n-2}$$

est une forme modulaire 7-adique de poids -24 sur $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ d'après [17], th. 5.4. On notera que cette méthode ne fournit aucun renseignement sur les $p_{-48}(n)$ pour $n \equiv 0, 1, 5 \pmod{7}$, et l'on ne peut rien en conclure sur la lacunarité (ou non lacunarité) de $\eta^{-48} \pmod{7^\alpha}$.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. J. Costello, Density Problems involving $p_r(n)$, *Math. Comp.* **38** (1982), 633–637.
2. P. Deligne et J-P. Serre, Formes modulaires de poids 1, *Ann. Sci. E.N.S.* (4) **7** (1974), 507–530.
3. F. J. Dyson, Missed Opportunities, *Bull. A.M.S.* **78** (1972), 635–652.
4. G. H. Hardy et E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 3^e edit. (Oxford Univ. Press, 1954).
5. M. I. Knopp et J. Lehner, Gaps in the Fourier Series of Automorphic Forms, *Lect. Notes in Math.* **899** (1981), 360–381.
6. D. H. Lehmer, The Vanishing of Ramanujan's Function $\tau(n)$, *Duke Math. J.* **14** (1947), 429–433.
7. W. Li, Newforms and Functional Equations, *Math. Ann.* **212** (1975), 285–315.
8. J. H. van Lint, *Hecke Operators and Euler Products* (Thèse, Utrecht, 1957).
9. I. G. Macdonald, Affine Root Systems and Dedekind's η -Function, *Invent. Math.* **15** (1972), 91–143.
10. M. Newman, An Identity for the Coefficients of Certain Modular Forms, *J. London Math. Soc.* **30** (1955), 488–493.
11. M. Newman, A Table of the Coefficients of the Powers of $\eta(\tau)$, *Proc. Acad. Amsterdam* **59** (1956), 204–216.
12. T. R. Parkin et D. Shanks, On the Distribution of Parity in the Partition Function, *Math. Comp.* **21** (1967), 466–480.
13. S. Ramanujan, On Certain Arithmetical Functions, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **22** (1916), 159–184 (= *Collected Papers*, n° 18, 136–162).
14. R. Rankin, Hecke Operators on Congruence Subgroups of the Modular Group, *Math. Ann.* **168** (1967), 40–58.
15. K. Ribet, Galois Representations attached to Eigenforms with Nebentypus, *Lect. Notes in Math.* **601** (1977), 17–52.
16. B. Schoeneberg, Über den Zusammenhang der Eisensteinschen Reihen und Thetareihen mit der Diskriminante der elliptischen Funktionen, *Math. Ann.* **126** (1953), 177–184.
17. J-P. Serre, Divisibilité de certaines fonctions arithmétiques, *L'Ens. Math.* **22** (1976), 227–260.
18. J-P. Serre, Modular Forms of Weight One and Galois Representations, in *Alg. Number Fields* (A. Fröhlich édit.) (Acad. Press 1977), 193–268.
19. J-P. Serre, Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev, *Publ. Math. I.H.E.S.* **54** (1981), 123–201.

20. G. Shimura, Class Fields over Real Quadratic Fields and Hecke Operators, *Ann. of Math.* **95** (1972), 130–190.
21. G. Shimura, On Modular Forms of Half Integral Weight, *Ann. of Math.* **97** (1973), 440–481.
22. H. P. F. Swinnerton-Dyer, On l -adic Representations and Congruences for Coefficients of Modular Forms, *Lect. Notes in Math.* **350** (1973), 1–55.
23. J-L. Waldspurger, Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier, *J. Math. pures et appl.* **60** (1981), 375–484.

COLLÈGE DE FRANCE
F-75231 PARIS CEDEX 05