Can. J. Math., Vol. XXXVI, No. 6, 1984, pp. 986-999

LOCALISATION RELATIVE ASSOCIEE A UNE THEORIE DE TORSION

CLAUDE LEMAIRE

Introduction. Dans [**3**], Peter Hilton a introduit la notion de "localisation relative" d'une extension de groupes à noyau nilpotent. Etant donné une extension de groupes

$$N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$$

où N est nilpotent, il s'agit de l'introduire dans un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail] \arrow[d] & G \arrow[r, two heads] & Q \arrow[d, equal] \\ N_P \arrow[r, tail] & G_{(P)} \arrow[r, two heads] & Q \end{tikzcd}$$

où N_P est la P-localisation de N.

L'idée (issue de la Topologie algébrique) est de tourner autant que possible l'absence de localisation maniable dans la catégorie des groupes. J'ai moi-même exploité cette idée dans [**6**], dans le cas où une action de groupe est exercée sur G.

Naturellement, l'exploitation de cette méthode est un peu restreinte par le peu de variété des localisations connues dans les groupes nilpotents. C'est pourquoi, dans ce travail, nous nous interessons au cas des extensions de groupes à noyaux abéliens, munis d'une structure de module. L'éventail des possibilités de localiser le noyau s'élargit beaucoup, puisqu'il s'étend à toutes les théories de torsion. D'une façon générale, l'idée de localisation retenue ici est la suivante: une localisation d'une catégorie $\mathscr{E}$ est un foncteur L de $\mathscr{E}$ dans une sous-catégorie pleine $\mathscr{L}$ de $\mathscr{E}$, associé à une transformation naturelle e de Id dans L.

L doit être adjoint à gauche de l'inclusion de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{E}$ (l'équivalence se faisant par restriction suivante e) et possède donc la propriété universelle suivante: si

$$C \xrightarrow{\phi} X \; (C \in \text{Obj}\, \mathscr{E},\ X \in \text{Obj}\, \mathscr{L})$$

Reçu le 22 février 1982 et sous forme revisée le 13 février 1984. Ce travail a été rédigé partiellement pendant le séjour de l'auteur au Forschungsinstitut für Mathematik de l'E.T.H. (Zürich) que nous remercions ici pour son bon accueil.
Soutenu par le CRSNG du Canada et le FCAC du Québec.

alors il existe un et un seul $\psi:LC \to X$ tel que $\phi = \psi e$.

Les objets de $\mathscr{L}$ sont appelés *locaux.*

Etroitement associée à une localisation, est la classe $\mathscr{F}(L)$ des morphismes ϕ tels que $L\phi$ est un isomorphisme. L'intérêt d'une localisation vient souvent de $\mathscr{F}(L)$, dont les éléments sont considérés comme des isomorphismes approximatifs. Par ailleurs, comme nous le verrons plus loin $\mathscr{F}(L)$ sert souvent à identifier e puisque $C \to LC \in \mathscr{F}(L)$.

Dans la suite, R désigne un anneau commutatif unitaire; son rôle est formel et nous ne le mentionnons pas dans la notation.

Notre cadre de travail est la catégorie $\mathscr{E}(K; Q)$ où K et Q sont des groupes. Les objets de $\mathscr{E}(K; Q)$ sont les extensions de groupes E de la forme

$$E:A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$$

où G est un K-groupe et A un RK-module à droite et un RQ-module à gauche. Nous supposons que l'action de K sur G est compatible avec l'action de K sur A, que l'action induite de K sur Q est triviale et que la structure de RQ-module de A correspond à une conjugaison par G. Puisque l'action de K sur Q est triviale, nous aurons toujours

$$\lambda(a\mu) = (\lambda a)\mu \quad (\lambda \in RQ, \mu \in RK, a \in A)$$

donc A est un (RQ, RK)-bimodule.

Les morphismes de $\mathscr{E}(K; Q)$ sont les couples (ϕ, ψ) où ψ est un homomorphisme de K-groupes et ϕ un homomorphisme de bimodules qui rendent commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d, "\phi"'] & G \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\psi"'] & Q \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, tail] & H \arrow[r, two heads] & Q \end{tikzcd}$$

Description. Nous commençons par quelques remarques préliminaires sur les modules (Section 1). Les résultats fondamentaux sont rassemblés dans la Section 2. Si L est une localisation des Q-modules ou des K-modules, nous construisons une localisation relative associée L^* dans $\mathscr{E}(K; Q)$.

Nous introduisons ensuite notre principal instrument, une équivalence de catégories M. Nous montrons que M permet, dans une certaine mesure, de ramener l'étude de L^*, localisation d'une catégorie d'extensions de groupes, à celle d'une localisation dans une catégorie d'extensions de modules. Cette méthode nous permet même de sortir de $\mathscr{E}(K; Q)$ (Théorèmes 2.8 et 2.9) ce qui est indispensable pour les applications.

Trois d'entre elles sont rassemblées dans la Section 3: intersection de sous-groupes, points fixes pour l'action de K, centre.

Dans la Section 4, nous examinons les rapports avec les variétés, la nilpotence (d'un groupe ou d'un action), les "commutator extensions".

Notations. ${}_Q\mathrm{Mod}$, Mod_K, ${}_Q\mathrm{Mod}_K$ désignent respectivement la catégorie des RQ-modules à gauche, des RK-modules à droite, des $(RQ\text{-}RK)$-bimodules.

Si E_i est un objet de $\mathscr{E}(K;\, Q)$, E_i est

$$A_i \overset{\mu_i}{\rightarrowtail} G_i \overset{\pi_i}{\twoheadrightarrow} Q$$

où μ_i change la notion additive de A_i en la notation multiplicative de G_i. IX est l'idéal d'augmentation de RX.

1. Préliminaires sur les théories de torsion.

1.1 Nous nous plaçons dans ${}_Q\mathrm{Mod}_K$ et nous nous donnons une théorie de torsion héréditaire τ de ${}_Q\mathrm{Mod}$ ou de Mod_K. Une telle théorie est définie par un *filtre idempotent* $\mathscr{F}$ d'idéaux de RQ ou RK (à gauche dans RQ, à droite dans RK), c'est-à-dire une ensemble non vide d'idéaux à gauche (cas de RQ) avec les conditions

– si $I \in \mathscr{F}$ et $\lambda \in RQ$ alors

$$\{\mu \in RQ | \mu\lambda \in I\} \in \mathscr{F}$$

– si I est un idéal à gauche de RQ tel qu'il existe un $H \in \mathscr{F}$ avec

$$\{\mu \in RQ | \mu a \in I\} \in \mathscr{F} \text{ pour tout } a \in H,$$

alors $I \in \mathscr{F}$ (cf. [**2**], p. 25).

Dans le cas d'une théorie sur Mod_K, nous nous dirons dans la situation $L(K)$; $L(Q)$ sera l'autre situation.

Un cas particulier important est celui où

$$F = \{\text{idéaux } I | I \cap S \neq \emptyset\}$$

pour un système multiplicatif S tel que (cas de RK):

si $s \in S$ et $\lambda \in RK$, alors il existe un $t \in S$ et un $\mu \in RK$ avec $s\mu = \lambda t$ ([**8**], p. 148).

Nous parlerons alors des situations $L(K,\, S)$ ou $L(Q,\, S)$. Lorsque les différences entre les situations sont mineures, nous nous plaçons dans la situation $L(K)$.

Comme nous n'utilisons qu'une théorie τ à la fois, nous n'utiliserons pas τ dans la terminologie: nous dirons que A est de torsion si pour tout $x \in A$, il existe $T \in \mathscr{F}$ avec $xT = 0$, et sans torsion si le seul x dans ce cas est 0.

Le sous-module de torsion d'un module A sera noté tA.

https://doi.org/10.4153/CJM-1984-056-1 Published online by Cambridge University Press

1.2 A τ correspond une localisation (au sens de l'introduction), notée L (cf. par exemple [**2**], p. 54).

LA est évidemment un RK-module à droite, mais aussi un RQ-module à gauche, par universalité.

1.3 Théorème. *Soit I un idéal à droite de RQ. Dans la situation $L(Q)$, nous supposons que*:

$$\forall \lambda \in I, \forall J \in \mathcal{F}, \exists T \in \mathcal{F} \text{ avec } T\lambda \subset I.J.$$

Alors $N = \{x \in LA | I.x = 0\}$ *est local et* $I.A = 0$ *entraîne* $I.LA = 0$.

Preuve. N est un sous-bimodule de LA car I est un idéal à droite.

Montrons d'abord que LA/N est sans torsion

– dans la situation $L(K)$: soit $x \in LA$ et $xJ \subset N$ pour un $J \in \mathcal{F}$. Pour tout $\lambda \in I$, $\lambda x J = 0$ donc $\lambda x = 0$ car LA est sans torsion. Il en résulte que $x \in N$.

– dans la situation $L(Q)$: si $I.Jx = 0$, pour chaque λ dans I, on peut trouver par hypothèse un $T \in \mathcal{F}$ avec $T\lambda \subset I.J$ donc $T(\lambda x) = 0$; λx est donc nul et $x \in N$ comme ci-dessus.

Puisque L est exact à gauche ([**2**], I.6.1) et que LA/N est injecté dans $L(LA/N)$ puisque LA/N est sans torsion ([**2**], p. 54), on peut conclure que N est local du diagramme:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & LA \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & LA/N \arrow[d, tail] \\ LN \arrow[r, tail] & LA \arrow[r] & L(LA/N) \end{tikzcd} .$$

Si $I.A = 0$, alors $N \supset eA$; on sait que $LA = L(eA)$ ([**2**], p. 54).

Puisque N/eA est de torsion, $L(eA) = N$ par [**2**], I.6.2, donc finalement

$$N = LA \quad \text{et} \quad I.LA = 0.$$

1.4 Un idéal bilatère I, satisfaisant l'hypothèse du théorème (ou de son symétrique si $I \subset RK$) est appelé *régulier* (pour $\mathcal{F}$).

Exemples. Dans [**3**] et [**6**], $\mathcal{F}$ est engendré par un système multiplicatif inclus dans R, donc central et tout idéal bilatère est régulier.

Dans le cas $L(K, S)$, si S est inclus dans $1 + IK$, alors tous les $(IK)^t$ sont réguliers.

En effet, S doit remplir la condition:

$$\forall\ 1 + \gamma \in S\ (\gamma \in IK), \forall \lambda \in (IK)^t, \exists \delta \in S, \mu \in RK \text{ avec}$$
$$(1 + \gamma)\mu = \lambda\delta.$$

Si $\mu \notin (IK)^t$ et si j est le plus grand exposant avec $\mu \in (IK)^j$, alors $j < t$, $(1 + \gamma)\mu \in (IK)^t$ puisque $\lambda \in (IK)^t$ donc

$$\mu + \gamma\mu \in (IK)^t \text{ et } \gamma\mu \in (IK)^{j+1}$$

avec $t \geqq j + 1$ et $\mu \in (IK)^{j+1}$, ce qui est une contradiction.

Dès lors, pour $J \supset (1 + \gamma).RK$, on peut prendre $T = \delta.RK$ et λT sera inclus dans $J.(IK)^t$. C'est le symétrique de l'hypothèse de Théorème 1.3.

Remarque. Une généralisation routinière de [**8**], *XV*, 6.2 montre que si N est un sous-groupe normal abélien d'indice fini de K, $S = 1 + IN$ est un exemple de la situation précédente.

2. Localisation relative de groupes et de modules.

2.1 Soit $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ un objet de $\mathscr{E}(K; Q)$. LA est un bimodule (par définition d'un côté et universalité de l'autre) et $e:A \rightarrow LA$ est un morphisme de bimodules. Nous pouvons construire l'extension induite; explicitement :

G agit sur LA, via Q. Cette action étend l'action (triviale) de A sur LA et pour tout $a \in A$, $x \in G$,

$$e(xax^{-1}) = (ea)^x.$$

Ce sont précisément les conditions de [3], 1.1 On construit

$$L^*G = (LA]G)/\widetilde{A} \quad \text{où } \widetilde{A} = \{(-ea, a), a \in A\}.$$

Nous obtenons une extension

$$L^*E\text{:LA} \rightarrowtail \text{L*G} \twoheadrightarrow \text{Q}$$

qui entre dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{rccccc} e\colon & A & \rightarrowtail & G & \twoheadrightarrow & Q \\ & \downarrow{\scriptstyle e.} & & \downarrow{\scriptstyle e} & & \| \\ & LA & \rightarrowtail & L^*G & \twoheadrightarrow & Q \end{array}$$

On définit, pour $x = (b, g).\widetilde{A}$,

$$x^k = (bk, g^k).\widetilde{A}$$

et on vérifie qu'on détient ainsi une action de K sur L^*E induisant sur Q l'action triviale et compatible avec le diagramme.

Avec une définition évidente pour les morphismes, L^* devient un foncteur idempotent de $\mathscr{E}(K; Q)$ dans $\mathscr{L}^*$ où $\mathscr{L}^*$ est naturellement la sous-catégorie pleine de $\mathscr{E}(K; Q)$ des objets à noyau local.

Par une réplique formelle de l'argument de [3] (Théorème 1.2 et fin de la Section 1), il est facile de vérifier que L^* est l'adjoint de l'inclusion.

Nous disons que *L^* est la localisation relative associée à L.*

2.2 Considérons maintenant les extensions $\widetilde{E}$ de la forme

$$A \rightarrowtail B \overset{\widetilde{\pi}}{\twoheadrightarrow} C$$

dans ${}_Q\mathrm{Mod}_K$. Comme dans 2.1, on peut définir

$$\widetilde{L}^*\widetilde{E}:LA \rightarrowtail \widetilde{L}^*B \twoheadrightarrow C.$$

C'est la localisation relative des groupes qui nous intéresse; mais la localisation relative des modules est plus simple, parce qu'elle est plus proche de L (2.5) et parce qu'elle est plus facile à identifier par ses termes centraux (2.6 et suivants).

Nous allons donc examiner la correspondance entre les deux localisations relatives.

2.3 La correspondance entre extensions de groupes et extensions de modules est bien connue et nous n'avons besoin que de modifications mineures. Nous renvoyons à [**1**] pour les détails.

Considérons $\widetilde{E}:A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ une extension de R-modules et supposons que $C \subset D$, D un RQ-module et qu'il existe une dérivation injective de Q dans D.

Définition. $Gr(\widetilde{E})$ (ou $Gr(B)$) $= \{b \in B | \widetilde{\pi}b = \partial q$ pour un $q \in Q\}$.

LEMME. *Si A, B, C sont dans ${}_Q\mathrm{Mod}_K$, et que l'action de K sur C est triviale, $Gr(B)$ est un K-groupe pour la loi*

$$b \circ b' = b + (\overline{\partial}^1\widetilde{\pi}b).b'$$

$\pi:x \to \overline{\partial}^1\widetilde{\pi}x$ est un homomorphisme de $Gr(B)$ dans Q, de noyau A et si $C = D$, π est surjectif.

Preuve.

$$\pi(b \circ b') = \widetilde{\pi}b + (\overline{\partial}^1\widetilde{\pi}b).\,\widetilde{\pi}b' = \partial q + q\partial q' = \partial(qq')$$

(pour certains q, $q' \in Q$) puisque ∂ est une dérivation. $\circ$ est donc bien une loi. Le neutre est évidemment le 0 de A, l'inverse de b est $-(\overline{\partial}^1\pi b)^{-1}.b$. L'associativité se démontre par un simple calcul, ainsi que le fait que $Gr(B)$ est une K-groupe et l'homomorphisme. Le reste est immédiat, puisque ∂ est injectif et que nous savons déjà que $\partial(1) = 0$.

2.3 Soit $E:A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ un objet de $\mathscr{E}(K; Q)$.

A E on peut associer l'extension de Q-modules:

$$ME:A \rightarrowtail MG \twoheadrightarrow IQ \quad \text{où}$$

$$MG = IG/IA.IG.$$

A est identifié à $IA.RG/IA.IG$ (voir [**1**] pour la preuve) ME devient une extension de K-modules, avec IQ trivial si, lorsque m est la classe de

https://doi.org/10.4153/CJM-1984-056-1 Published online by Cambridge University Press

$\sum r_x(x - 1)$ on pose mk = la classe de $\sum r_x(x^k - 1)$. Inversement, si $\widetilde{E}:A \rightarrowtail M \twoheadrightarrow IQ$ est une extension dans ${}_Q\mathrm{Mod}_K$, où IQ est une K-module trivial, $Gr(M)$ devient un K-groupe (∂ est évidemment $q \mapsto q - 1$) et

$$Gr(\widetilde{E}):A \rightarrowtail Gr(M) \twoheadrightarrow \mathrm{Q}$$

est un objet de $\mathscr{E}(K; Q)$ par le Lemme 2.3.

2.4 Notons $\mathscr{ME}(K; Q)$ la catégorie dont les objets sont les extensions dans ${}_Q\mathrm{Mod}_K$ où le troisième terme est IQ, trivial comme K-module; le choix des morphismes est clair.

THÉORÈME. (i) *M est une équivalence de $\mathscr{E}(K; Q)$ sur $\mathscr{ME}(K; Q)$, Gr une équivalence de $\mathscr{ME}(K; Q)$ sur $\mathscr{E}(K; Q)$*

(ii) *$G \to IG:g \to g - 1$ induit une transformation naturelle η de* Id $\to M$ *telle que ηG est $Gr(MG)$.*

(iii) *$\widetilde{L}^*M$ et ML^* sont des foncteurs naturellement équivalents de $\mathscr{E}(K; Q)$ dans $\mathscr{ME}(K; Q)$, donc*

$$Gr(\widetilde{L}^*MG) \simeq L^*G.$$

Preuve. (i) et (ii) ont été démontrés dans les plus grands détails par Crowell [**1**] dans le cas où $R = \mathbf{Z}$ et $K = \{1\}$. Le remplacement de $\mathbf{Z}$ par R est purement formel et le remplacement de $\{1\}$ par K ne demande qu'un supplément insignifiant, contenu pour l'essentiel dans 2.3.

(iii) Le morphisme $Me:ME \to ML^*E$ se prolonge par universalité en un morphisme de $\widetilde{L}^*ME \to ML^*E$ (puisque $ML^*E \in \mathscr{L}^*$, la sous-catégorie de $\mathscr{ME}(K; Q)$ dont les objets ont le noyau local).

On a donc le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{L}^*ME: & LA \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & \widetilde{L}^*MG \arrow[r, two heads] \arrow[d] & IQ \arrow[d, equal] \\
ML^*E: & LA \arrow[r, tail] & ML^*G \arrow[r, two heads] & IQ
\end{tikzcd}$$

et la flèche centrale est donc un isomorphisme .$Gr(\widetilde{L}^*MG) \simeq L^*G$ en résulte.

2.5 *Remarque.* Dans certains cas, M permet d'établir un lien direct entre la localisation relative et la localisation L elle-même:

si L est exacte et IQ sans torsion, alors

$$L^*G \simeq Gr(LMG).$$

En effet, les hypothèses donnent le diagramme:

https://doi.org/10.4153/CJM-1984-056-1 Published online by Cambridge University Press

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d] & MG \arrow[r, two heads] \arrow[d] & IQ \arrow[d, tail] \\ LA \arrow[r, tail] & LMG \arrow[r, two heads] & L(IQ) \end{tikzcd}$$

L'injection de $IQ \to L(IQ)$ permet de construire $Gr(LMG)$ qui est manifestement isomorphe à $Gr(\tilde{L}^*MG)$ (puisqu'ils ont même image) et ce dernier est isomorphe à L^*G pour 2.4.iii.

2.6 Dans une situation de localisation, il est toujours important de disposer de ce que P. Hilton appelle un "detection principle": un moyen commode d'identifier la localisation.

En utilisant l'équivalence M, cette question a une réponse simple:

THÉORÈME. *Dans* $\mathcal{E}(K;\ Q)$:ϕ:$E_1 \to E_2$ *est la localisation si et seulement si* A_2 *est local et le noyau et le conoyau de* $MG_1 \to MG_2$ *de torsion.*

Preuve. Le noyau et le conoyau de $MG_1 \to MG_2$ sont de torsion si et seulement si le noyau et le conoyau de $A_1 \to A_2$ sont de torsion.

Si: le noyau de $A_1 \to A_2$ est de torsion par hypothèse: puisque A_2 est local, A_2 est sans torsion donc tout élément de tA_1 est envoyé sur 0 et le noyau est tA_1.

Par définition de la localisation ([**2**], p. 54),

$$LA_1 \simeq L(A_1/tA_1);$$

mais il est aussi isomorphe à LA_2 car le conoyau de $A_1 \to A_2$ est de torsion ([**2**], Proposition I.6.2), donc ϕ est la localisation.

Seulement si: c'est une partie de [**2**], I.6.3 en tenant compte du fait indiqué ci-dessus qui si le noyau et le conoyau de $A_1 \to A_2$ sont de torsion, il en est de même de noyau et du conoyau de $MG_1 \to MG_2$.

En vue des applications de la Section 3, nous devons comparer des extensions qui n'ont pas le même quotient. Les Théorèmes 2.8 et 2.9 qui suivent généralisent partiellement 2.6. Mais d'abord, nous avons besoin de définitions.

2.7 *Définitions.* Dans le cas $L(K)$, Q est *étranger* si IQ/X est sans torsion pour tout sous-K-module X. Dans les cas $L(K)$ ou $L(Q)$, Q est *semi-étranger* si IQ/X est sans torsion pour tout sous-Q-module X de IQ. (Puisque l'action de K sur Q est triviale, tout sous-Q-module de IQ est aussi un K-module, donc dans le cas $L(K)$, étranger entraîne semi-étranger.)

Exemples. Pour Q fixé, il existe toujours une localisation pour laquelle les IQ/X sont sans torsion (mais cette localisation peut être triviale).

D'autre part, dans le cas $L(K)$, si tout idéal de $\mathcal{F}$ contient un élément de

$1 + IK$ (par exemple, $\mathscr{F}$ peut être la topologie associée à un $S \subset 1 + IK$) alors tout Q est étranger.

En effet, si $y.J \subset X$ pour un J dans F, il existe un $i \in IK$ avec

$$y(1 + i) \in X.$$

Mais $y.i = 0$ car l'action de K sur IQ est triviale, donc $y \in X$ et IQ/X est sans torsion.

Plus généralement, supposons que tout idéal J de F contient un élément dont l'image dans R, modulo IK, est inversible, c'est-à-dire un $j = \sum r_t k_t$ avec $(\sum r_t)$ inversible.

Alors

$$y.J \subset X \Rightarrow y.j \in X \Rightarrow y.(\sum r_t) \in X \Rightarrow y \in X$$

(en multipliant par $(\sum r_t)^{-1}$).

2.8 THÉORÈME. *Plaçons-nous dans la situation $L(K)$ et considérons le diagramme de K-modules*:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d, "\phi"'] & M \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "\psi"'] & IQ \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, tail] & N \arrow[r, "\tilde{\pi}'"] & IQ \end{tikzcd}$$

Si B est local, Ker ψ *et* Coker ψ *de torsion, Q étranger, $Gr(M)$ et $Gr(N)$ des groupes pour la loi de 2.3 (avec $\partial : q \to q - 1$) alors*

$$L^*Gr(M) = Gr(N).$$

La localisation relative est effectuée par rapport à $\bar{\partial}^1\tilde{\pi}Gr(M)$ qui est clairement un groupe (image d'un homorphisme du groupe $Gr(M)$ dans Q).

Preuve. Puisque Ker ψ et Coker ψ sont de torsion, il en est de même de Ker ϕ et Coker ϕ. Comme dans la preuve de 2.6, il en résulte que ϕ est la localisation.

Pour arriver au résultat, il suffit d'établir que

$$\bar{\partial}^1\tilde{\pi}(Gr\ M(M)) = \bar{\partial}^1\tilde{\pi}'(Gr(N)),$$

ce qui est évidemment le cas si $\tilde{\pi}(M) = \tilde{\pi}'(N)$.

Or: $\tilde{\pi}'(N)/\tilde{\pi}(M)$ est sans torsion parce que Q est étranger.

$\tilde{\pi}'(N)/\tilde{\pi}(M)$ est de torsion parce que Coker ψ est de torsion donc $\tilde{\pi}(M) = \tilde{\pi}'(N)$.

2.9 THÉORÈME. *Dans les situations $L(K)$ ou $L(Q)$, si le diagramme de 2.8 est dans ${}_Q\mathrm{Mod}_K$, que B est local*, Ker ψ *et* Coker ψ *de torsion et Q semi-étranger, alors*

$$L^*Gr(M) \simeq Gr(N).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1984-056-1 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Puisque M et N sont de Q-modules et ψ un Q-homomorphisme, l'hypothèse sur ψ a un sens dans le cas $L(Q)$.

D'autre part, $Gr(M)$ et $Gr(N)$ sont automatiquement des groupes par le raisonnement de 2.3 Enfin, "semi-étranger" suffit puisque $\widetilde{\pi}(M)$ et $\widetilde{\pi}(N)$ sont des Q-modules.

3. Applications de 2.8 et 2.9.

3.1 *Sous-K-groupes*. Soit $E:A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$, H un sous-K-groupe de G. Il lui correspond une extension

$$E':A \cap H \rightarrowtail H \twoheadrightarrow Q'$$

qui peut être regardée comme un objet de $\mathscr{E}(K;\, Q')$ ce qui permet de définir ME', L^*E', etc ... Gr garde cependant le sens qu'il a dans 2.3. Notons M' l'image de MG' dans MG.

Par le même raisonnement qu'en 2.3, $Gr(M')$ est un sous-groupe de $Gr(MG)$ (l'image de M' est IQ').

Si η désigne à la fois la transformation naturelle de $\mathrm{Id} \to M$ et l'application de G dans MG, on vérifie par comparaison des noyaux et des quotients que $\eta(H) = Gr(M')$.

3.2 *Intersection*. Lorsque l'intersection de deux sous-K-groupes de G a Q comme image, elle peut être traitée comme cas particulier de limite finie, par des considérations essentiellement catégoriques.

Mais bien sûr ce n'est pas le cas en général. Cependant:

THÉORÈME. *Dans le cas $L(K)$, si G_1 et G_2 sont des sous-K-groupes de G, que $tA.I = 0$ pour un I dans $\mathscr{F}$ et Q étranger, alors*

$$L^*(G_1 \cap G_2) \xrightarrow{\sim} L^*G_1 \cap L^*G_2.$$

Preuve. Vu dans MG, avec M_1 et M_2 définis comme M' dans 3.1, on a

$$\eta(G_1 \cap G_2) = \eta G_1 \cap \eta G_2 = Gr(M_1) \cap Gr(M_2) = Gr(M_1 \cap M_2).$$

De même, dans $\widetilde{L}^*MG = ML^*G$,

$$\eta(L^*G_1 \cap L^*G_2) = Gr(\widetilde{L}^*M_1 \cap \widetilde{L}^*M_2).$$

Ceci nous permet de ramener la comparaison de $G_1 \cap G_2$ avec $L^*G_1 \cap L^*G_2$ à la comparaison de $Gr(M_1 \cap M_2)$ avec $Gr(\widetilde{L}^*M_1 \cap \widetilde{L}^*M_2)$. Comme il s'agit de groupes, que les M_i et $\widetilde{L}^*M_i$ sont des K-modules, on peut espérer utiliser 2.8.

Considérons

$$M_1 \cap M_2 \to \widetilde{L}^*M_1 \cap \widetilde{L}^*M_2.$$

Le noyau est bien de torsion. Si $x \in \widetilde{L}^*M_1 \cap \widetilde{L}^*M_2$, il existe un $J \in \mathscr{F}$ avec

$$xJ \subset e(M_1 \cap M_2).$$

Pour tout $\lambda \in J$,

$$x\lambda = ey = ez, y \in M_1, z \in M_2 \text{ et } y - z \in tA.$$

Donc, pour tout $\mu \in I$,

$$y\mu = z\mu = k \in M_1 \cap M_2 \quad \text{et} \quad x(\lambda\mu) = ek$$

$$x(JI) \subset e(M_1 \cap M_2) \quad \text{et} \quad JI \in \mathcal{F}$$

([**8**], VI.5.3) donc le conoyau est de torsion.

Quant au noyau de $\widetilde{L}^*M_1 \cap \widetilde{L}^*M_2 \to IQ$, il est l'intersection de deux sous-modules locaux dans un module local, donc local lui-même (c'est une conséquence immédiate de [**8**], p. 198).

Remarque. L'hypothèse sur tA n'est utilisée que pour prouver que le conoyau est de torsion.

Si $\mathcal{F}$ est engendré par S, la torsion peut s'exprimer en fonction de S. Plus précisément, il existe $s, t \in S$ tels que

$$xs = ey = ez \quad \text{et} \quad yt = zt = k \in M_1 \cap M_2,$$

de sorte que $x(st) \in e(M_1 \cap M_2)$ et le conoyau est de torsion. L'hypothèse sur tA est donc inutile.

3.3 Notons G^K le sous-groupe de G formé des éléments laissés fixes par K. De même M^K est l'ensemble des éléments du K-module M laissés fixes par K. On remarque que

$$M^K = \{x \in M | x.IK = 0\}$$

et que

$$(\widetilde{L}^*M)^K = \{y \in \widetilde{L}^*M | y.IK = 0\}.$$

THÉORÈME. *Si A est sans torsion, Q semi-étranger et IK régulier alors*

$$L^*G^K \rightrightarrows (L^*G)^K.$$

Preuve. Plaçons-nous dans le cas $L(K)$, l'autre est symétrique.

$$\eta(G^K) = Gr(M^K) \text{ et } \eta(L^*G)^K = Gr(\widetilde{L}^*M)^K.$$

M^K et $(\widetilde{L}^*M)^K$ sont évidemment des K-modules mais également des Q-modules.

L'application de $M^K \to (\widetilde{L}^*M)^K$ est injective (puisque A est sans torsion) et son conoyau est de torsion; en effet, si $x \in (\widetilde{L}^*M)^K$, il existe un $J \in \mathcal{F}$ tel que $xJ \subset eM$, c'est-à-dire que pour tout $\lambda \in J$,

$$x\lambda = em_\lambda \text{ et } m_\lambda \in M^K$$

puisque e est injective.

On peut maintenant appliquer 2.9 dès que l'on a prouvé que le noyau de $(\widetilde{L}^*M)^K \to IQ$ est local. Mais ce noyau est $(LA)^K$, l'annulateur de IK dans LA et le résultat suit du Théorème 1.3 puisque IK est régulier.

3.4 THÉORÈME. *Plaçons-nous dans la situation $L(K)$ avec Q étranger. Si A est central et sans torsion, alors*

$$L^*ZG \stackrel{\sim}{\to} ZL^*G.$$

Preuve. ZG est un K-groupe et L^*ZG doit être compris comme en 3.1 L'action de G est induite par la conjugaison de G sur lui-même.

Notons d'abord que si $x \in (L^*G)^G$, x commute avec tout eg, $g \in G$; donc aussi avec tout ea, $a \in A$, et finalement avec tout élément de LA. Comme LA et eG engendrent L^*G,

$$(L^*G)^G = ZL^*G.$$

On peut refaire le raisonnement de 3.3 en prenant sur M l'action induite par la conjugaison par G, mais en utilisant 2.8 plutôt que 2.9 (M^G est un K-module).

Puisqu'on a

$$\eta(ZG) = \eta(G^G) = Gr(M^G)$$

et de même

$$\eta(ZL^*G) = \eta(L^*G)^G = Gr(\widetilde{L}^*MG)^G,$$

$Gr(M^G)$ et $Gr(\widetilde{L}^*MG)^G$ sont des groupes.

On prouve comme précédemment que le conoyau de $M^G \to (L^*MG)^G$ est de torsion.

Quant au noyau de $(\widetilde{L}^*M)^G \to IQ$, c'est $(LA)^G$, égal à LA (puisque $A^G = A$ par hypothèse) et donc bien local.

4. Application aux variétés.

4.1 Rappelons qu'une variété de groups $\mathscr{D}$ est une classe de groupes fermée pour les sous-groupes, les quotients et les produits directs quelconques. Il revient au même de dire qu'il s'agit de la classe des groupes dans lesquels une famille donnée de lois$(v_i)_{i \in I}$ est identiquement triviale.

Pour G un groupe et $(v_i)_{i \in I}$ une famille de lois définissant $\mathscr{D}$, nous notons le sous-groupe verbal de G par VG; c'est le sous-groupe (normal) engendré par les $v_i(x_j)$, $x_j \in G$, $i \in I$. $G/VG \in \mathscr{D}$ et $G \in \mathscr{D}$ si et seulement si $VG = 1$.

Soit E dans $\mathscr{E}(K; Q)$. Nous dirons que $E \in \mathscr{D}$ si $G \in \mathscr{D}$. Pour que $E \in \mathscr{D}$, il faut que $Q \in \mathscr{D}$. Une autre condition nécessaire est que A soit un $\mathscr{D}Q$-module (**[5]**, 1.10). Précisons:

Définition. Soit A un R-module et X un groupe agissant sur A. A est $\mathscr{D}X$-module si $V(A]X) \subset X$ (on vérifie immédiatement que $V(A]X) = VX$). L'importance de cette notion est illustrée dans [**5**].

On peut prouver le résultat suivant ([7], III.4.4).

A est un $\mathscr{D}X$-module si et seulement si $I_V X.A = 0$ où $I_V X$ est un idéal bilatère de $\mathbf{Z}X$ dépendant de $\mathscr{D}$.

En notant $I_{RV}X$ l'idéal bilatère engendré dans RX par l'image canonique de $I_V X$, on obtient:

(*) A est un $\mathscr{D}X$-module si et seulement si $I_{RV}X.A = 0$.

4.2 La notion de $\mathscr{D}X$-module est donc une question d'annulateur et on peut appliquer immédiatement le Théorème 1.3 pour obtenir:

THÉORÈME. *Dans la situation $L(K)$; si A est un $\mathscr{D}Q$-module, alors LA est un $\mathscr{D}Q$-module; si A est un $\mathscr{D}K$-module et* $\mathrm{I_{RV}K}$ *est régulier pour $\mathscr{F}$, alors LA est un $\mathscr{D}K$-module.*

4.3 COROLLAIRE 1. *Dans la situation $L(K)$ ou la situation $L(Q)$ avec $I_{RV}Q$ régulier.*

(i) *si A est un $\mathscr{D}Q$-module, alors $V(L^*G)$ est un quotient de VG*

(ii) *si $G \in \mathscr{D}$, alors $L^*G \in \mathscr{D}$.*

Preuve. (i) On sait que

$$L^*G = (LA]G)/\widetilde{A},$$

donc $V(L^*G)$ est un quotient de $V(LA]G)$. Mais $V(LA]G) = VG$ puisque LA est un $\mathscr{D}Q$-module donc aussi un $\mathscr{D}G$-module.

(ii) Si $G \in \mathscr{D}$, A est un $\mathscr{D}G$-module ([**5**], 1.10) donc un $\mathscr{D}Q$-module ([**5**], 1.11) et on applique *i*.

4.4 COROLLAIRE 2. *Dans les mêmes situations qu'au Corollaire 1, supposons que $\phi:E_1 \to E_2$ est dans $\mathscr{F}(L^*)$, que $G_1 \in \mathscr{D}$ et A_2 sans torsion; alors $G_2 \in \mathscr{D}$.*

Preuve. Car $L^*G_1 \in \mathscr{D}$ par 4.3, $L^*G_1 \twoheadrightarrow L^*G_2$ puisque $\phi \in \mathscr{F}(L^*)$; enfin, $e:G_2 \to L^*G_2$ est injectif puisque A_2 est sans torsion.

4.5 *Actions nilpotentes*. Une action de G sur A est nilpotente de classe c si A est une $\mathscr{N}_c G$-module mais non un $\mathscr{N}_{c-1}G$-module. $\mathscr{N}_c$ est la variété des groupes nilpotents de classe $\leqq c$. L'intérêt de cette notion apparait dans [**4**]. Il est connu que

$$I_{\mathscr{N}_c}X = (I_{\mathbf{Z}}X)^c$$

([7], III 4.5) donc

$$I_{R\mathscr{N}_c}Q = (IQ)^c.$$

On obtient immédiatement le

COROLLAIRE. *Dans la situation $L(K)$ ou la situation $L(Q)$, avec les IQ réguliers,* (i) *si l'action de Q sur A est nilpotent de classe c, alors l'action de Q sur LA est nilpotente de classe $\leqq c$.*

(ii) *si G est nilpotent de class c, L^*G est nilpotent de classe $\leqq c$.*

4.6 Rappelons ([7] V. 3.1) que $A \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ est une "commutator extension" si elle est centrale et si $\Gamma_2 G \cap A = 1$. ($\Gamma_2 G$ est le groupe des commutateurs de G.)

COROLLAIRE. *Dans la situation $L(K)$ ou la situation $L(Q)$ si IQ est régulier, si E est une "commutator extension", alors L^*G est "commutator extension".*

Preuve. Prenons pour $\mathcal{D}$ la variété $/\mathbf{Ab}$ des groupes abéliens. Le sous-groupe verbal correspondant est le groupe des commutateurs $\Gamma_2 G$ et $I_{R/\mathbf{Ab}}Q = IQ$, dans A est un $/\mathbf{Ab}Q$-module si et seulement si A est central.

Si A est central, $IQ.A = 0$ mais alors $IQ.LA = 0$ par 1.3 puisque IQ est régulier et L^*E est centrale. Par 4.3.i, $\Gamma_2(L^*G)$ est un quotient de $\Gamma_2 G$ et

$$\Gamma_2(L^*G) \cap LA = 1.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. R. H. Crowell, *Corresponding group and module sequences*, Nagoya Math. J. *19* (1961), 27-40.

2. J. S. Golan, *Localisation of non commutative rings* (Dekker, 1975).

3. P. Hilton, *Relative nilpotent groups*, à paraître Proc. Summer Conf. in Cat. Alg. and Topology, Carleton University.

4. P. Hilton, G. Mislin and J. Roitberg, *Localization of nilpotent groups and spaces* (North Holland, 1975).

5. C. R. Leedham-Green and S. McKay, *Baer-invariants, isologism, varietal laws and homology*, Acta Math. *137* (1976), 99-150.

6. C. Lemaire, *Localisation relative et actions*, Annales Sci. Math. du Québec (1981), 147-167.

7. U. Stammbach, *Homology in group theory*, Lecture Notes *359* (Springer-Verlag, 1973).

8. B. Stenström, *Rings of quotients* (Springer-Verlag, 1975).

Université Laval,
Québec, Québec