SUR LES ENSEMBLES D'ACCUMULATION RELATIFS À DES TRANSFORMATIONS LOCALEMENT PSEUDO-ANALYTIQUES AU SENS DE PFLUGER-AHLFORS

MAKOTO OHTSUKA

Introduction

La question posée par Noshiro dans [5] pour les ensembles d'accumulation relatifs à des fonctions pseudo-analytiques classiques a été résolue par (T.) Yosida [12] premièrement et ensuite, le présent auteur [8] a étendu son résultat (théorème 1 de [12]) au cas où un nombre fini ou dénombrable de surfaces de Riemann, qui sont des surfaces de recouvrement, sont transformées dans une autre surface de Riemann par une application continue à dérivées partielles continues sauf en un ensemble fermé de mesure linéaire nulle, ayant pour image un ensemble de mesure linéaire également nulle; le quotient de dilatation n'y est pas nécessairement borné mais subit certaine condition, et les ensembles d'accumulation y sont définis pour les éléments frontières de Kerékjártó-Stoïlow. Une généralisation d'un théorème étoilé de Gross obtenue dans [7] a été utilisée dans sa démonstration. L'auteur a continué son étude sur ce théorème étoilé et un de ses résultats établis dans [9] lui permettra d'améliorer les résultats de [8] dans le présent mémoire. L'idée fondamentale est la même que dans [8] mais nous la récrirons, en nous reportant à [8] le moins possible.

Nous montrerons dans le théorème 1 que, sauf pour un ensemble exceptionnel, les valeurs de la différence d'un ensemble d'accumulation intérieure et d'un ensemble d'accumulation frontière sont prises dans tout voisinage d'un élément frontière où les ensembles d'accumulation sont définis, et, dans le théorème 2, que les valeurs non prises sont des valeurs asymptotiques.

En comparaison des résultats de [8], l'amélioration sera faite de trois points de vue. Un espace $\mathfrak{F}$ composé de surfaces de Riemann ne consistera pas nécessairement en des surfaces de recouvrement,[1] ce qui a été placé dans l'hypothèse

Received July 30, 1956.

[1] On l'a écrit $\mathfrak{R}$ dans [8].

dans [8], un élément frontière de $\mathfrak{F}$ sera défini au moyen d'un filtre d'un caractère assez général, et l'application sera une transformation localement pseudo-analytique au sens de Pfluger-Ahlfors à l'exception d'un certain ensemble fermé; elle n'a pas besoin d'avoir les dérivées partielles continues.

Comme élément frontière de la surface de Riemann $\mathfrak{R}$, dans laquelle $\mathfrak{F}$ est appliqué, on prend la composante frontière de Kerékjártó-Stoïlow. Si la question posée par Brelot à la fin de [1], à savoir si presque toute la ligne de Green converge vers un élément frontière de Martin et si la mesure harmonique d'un ensemble d'éléments frontières de Martin est égale à la mesure de Green des lignes de Green qui y convergent, est résolue affirmativement, alors on peut améliorer nos résultats en prenant l'élément frontière de Martin comme élément frontière de $\mathfrak{R}$. Mais nous ne nous occupons pas du détail de cette question ici.

Peut-être c'est la première fois que des transformations de surfaces de Riemann abstraites en des surfaces de Riemann également abstraites sont traitées dans la théorie des ensembles d'accumulation.

1. Soit $\mathfrak{F}$ un espace non compact composé d'un nombre fini ou dénombrable de surfaces de Riemann. Nous dirons qu'une suite de points ou ensembles tend vers la frontière de $\mathfrak{F}$ si, pour tout compact dans $\mathfrak{F}$, les points ou les ensembles se placent en dehors du compact, excepté un nombre fini au plus. Considérons un filtre $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{F}$ ayant pour base une suite décroissante d'ensembles ouverts tendant vers la frontière de $\mathfrak{F}$. Nous ajoutons à $\mathfrak{F}$ un nouvel élément $\mathfrak{L}$, dit *élément frontière*, correspondant à $\mathfrak{B}$, et munissons $\mathfrak{F}+\{\mathfrak{L}\}$ d'une topologie, en prenant le filtre qui consiste en $\{V+\{\mathfrak{L}\};\ V\in\mathfrak{B}\}$ pour le filtre des voisinages de $\mathfrak{L}$ et conservant les bases des voisinages des points de $\mathfrak{F}$.

Étant donnée une fonction réelle $q(P)$, $0\leqq q(P)\leqq\infty$, définie presque partout sur $\mathfrak{F}$ et, comme fonction de tout paramètre local $x+iy$, mesurable au sens de Lebesgue, on appellera $\mathfrak{L}$ *q-parabolique* s'il existe une base de $\mathfrak{B}$, composée d'une suite décroissante d'ensembles ouverts $\{D_n\}$ à frontières relatives disjointes $\{c_n\}$, telle que, pour tous n et m $(n<m)$, on trouve une fonction $x_{n,m}(P)$ harmonique dans $D_n-D_m-c_m$ qui satisfait aux conditions suivantes:

$$\overline{\lim_{c_n}}\, u_{n,m}(P)\leqq 0 \quad \text{et} \quad \underline{\lim_{c_m}}\, u_{n,m}(P)\leqq 1$$

et n étant fixé,

$$\int_0^1 \frac{du_{n,m}}{\int q\,dv_{n,m}} \to \infty \qquad \text{avec } m,$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000002014 Published online by Cambridge University Press

où $v_{n,m}(P)$ est la fonction conjuguée de $u_{n,m}(P)$ et l'intégrale $\int q(P)dv_{n,m}(P)$ est prise le long de presque toute la courbe de niveau $u_{n,m}(P)=\text{Cte}\, u_{n,m}$, $0<u_{n,m}<1$.

On va définir une transformation parabolique $[\mathfrak{L}]$ de $\mathfrak{F}$. Soient $\mathfrak{R}$ une autre surface de Riemann quelconque et $f(P)$ une application continue de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{R}$ localement pseudo-analytique au sens de Pfluger-Ahlfors en dehors d'un ensemble fermé E de mesure linéaire nulle, ayant pour image un ensemble $\tilde{E}$ de mesure linéaire également nulle dans $\mathfrak{R}$; $\tilde{E}$ est alors une réunion dénombrable d'enesmbles compacts dans $\mathfrak{R}$. Renvoyons aux n$^{\text{os}}$ 2 et 5 de [9] pour les définitions d'une transformation pseudo-analytique au sens de Pfluger-Ahlfors et de son quotient de dilatation ; on voit que celui-ci est mesurable au sens de Lebesgue. On dira que *$f(P)$ est parabolique* $[\mathfrak{L}]$ si $\mathfrak{L}$ est q-parabolique avec $q(P)$ égal au quotient de dilatation de $f(P)$.

La dernière idée qu'il faut pour énoncer le premier théorème, c'est celle d'ensembles d'accumulation. Si $\mathfrak{R}$ est ouvert, $\mathfrak{C}$ signifiera l'ensemble des composantes frontières de Kerékjártó-Stoïlow, et si $\mathfrak{R}$ est clos, on pose $\mathfrak{C}=\phi$. Soit $\mathfrak{L}_0$ un autre élément frontière de $\mathfrak{F}$ de caractère général qui est plus fin que $\mathfrak{L}$; nous munissons $\mathfrak{F}+\{\mathfrak{L}_0\}$ d'une topologie comme $\mathfrak{F}+\{\mathfrak{L}\}$. *L'ensemble d'accumulation intérieure* $S_{\mathfrak{L}_0}^{(\mathfrak{F})}=S(\mathfrak{L}_0)$ *en* $\mathfrak{L}_0$ *relatif à* $f(P)$ est défini par l'ensemble de points de $\mathfrak{R}+\mathfrak{C}$ tel que pour chacun $\tilde{P}$ de ces points il existe une suite $\{P_k\}$ sur $\mathfrak{F}$ convergeant vers $\mathfrak{L}_0$ dont l'image $f(P_k)$ tend vers $\tilde{P}$. Soit $\{D^{(n)}\}$ une base de $\mathfrak{L}_0$. Nous associons à $D^{(n)}$ l'adhérence $\tilde{M}_n$ dans $\mathfrak{R}+\mathfrak{C}$ de l'ensemble de toutes les limites dans $\mathfrak{R}+\mathfrak{C}$ dont chacune $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_k)$ est obtenue lorsqu'une suite $\{P_k\}$ dans $D^{(n)}$ tend vers la frontière de $\mathfrak{F}$ en restant en dehors d'un certain élément de $\mathfrak{B}$. *L'ensemble d'accumulation frontière* $S\Gamma_{\mathfrak{L}_0}^{(\mathfrak{F},\mathfrak{L})}=S\Gamma(\mathfrak{L}_0;\mathfrak{L})$ *en* $\mathfrak{L}_0$ *relatif à* $f(P)$ est défini par $\bigcap\limits_n M_n$.

Maintenant nous énonçons :

THÉORÈME 1. *Soit $\mathfrak{F}$ un espace composé d'un nombre fini ou dénombrable de surfaces de Riemann, $\mathfrak{R}$ une autre surface de Riemann, $\mathfrak{L}$ un élément frontière de $\mathfrak{F}$ correspondant à un filtre $\mathfrak{B}$, et $f(P)$ une transformation parabolique $[\mathfrak{L}]$ de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{R}$. Soient $S(\mathfrak{L}_0)$ et $S\Gamma(\mathfrak{L}_0;\mathfrak{L})$ respectivement l'ensemble d'accumulation intérieure et l'ensemble d'accumulation frontière en un élément frontière $\mathfrak{L}_0$, qui est plus fin que $\mathfrak{L}$ et possède pour base une suite décroissante $\{D^{(n)}\}$*

d'ensembles ouverts à frontières relatives $\{c^{(n)}\}$ *telles que chaque* $c^{(n)}$ *reste en dehors d'un certain élément de* $\mathfrak{B}$. *Alors toute composante connexe* $\tilde{\Omega}$ *de* $\tilde{\mathfrak{R}}+\tilde{\mathfrak{C}}-S\Gamma(\mathfrak{L}_0\,;\mathfrak{L})$ *est contenue dans* $S(\mathfrak{L}_0)$, *toute valeur de* $\tilde{\Omega}\cap\tilde{\mathfrak{R}}-\tilde{E}$ *est prise sur une suite de points de* $\mathfrak{F}$ *convergeant vers* $\mathfrak{L}_0$ *sauf au plus les valeurs d'un ensemble de capacité logarithmique nulle dans* $\tilde{\Omega}\cap\tilde{\mathfrak{R}}-\tilde{E}$, *et la mesure harmonique de* $\tilde{\Omega}\cap\tilde{\mathfrak{C}}$ *est nulle par rapport à* $\tilde{\Omega}\cap\tilde{\mathfrak{R}}$;[2] *sinon* $\tilde{\Omega}\cap S(\mathfrak{L}_0)-\tilde{E}$ *consiste en un ensemble dans* $\tilde{\mathfrak{R}}$ *de capacité logarithmique nulle et en un sous-ensemble de* $\tilde{\mathfrak{C}}$ *de mesure harmonique nulle par rapport à* $\tilde{\Omega}\cap\tilde{\mathfrak{R}}$.[3]

Le cas particulier $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_0$: Soient $\mathfrak{F}$ et $\tilde{\mathfrak{R}}$ les mêmes que dans le théorème. Si $f(P)$ est une transformation parabolique $[\mathfrak{L}_0]$ de $\mathfrak{F}$ dans $\tilde{\mathfrak{R}}$, toutes les conditions sont remplies.

2. Dans ce numéro on se prépare pour la démonstration du théorème 1.

Il y a encore une notion analogue à transformation parabolique $[\mathfrak{L}]$. C'est-à-dire, $\mathfrak{L}_1$ étant un élément frontière, défini au moyen d'un filtre $\mathfrak{B}_1$, d'une surface de Riemann $\mathfrak{R}$, on appelle une transformation continue $g(P')$ d'une autre surface de Riemann $\mathfrak{R}'$ dans $\mathfrak{R}$ *parabolique* $(\mathfrak{L}_1)$ lorsque $g(P')$ est localement pseudo-analytique au sens de Pfluger-Ahlfors en dehors d'un ensemble fermé E' dont l'image est de mesure linéaire nulle[4] et lorsque $\mathfrak{L}_1$ est q-parabolique avec $q(P)$ égal à la somme $\sum_{P'} q(P')$ pour P' tels que $g(P')=P$ et égal à 0 si P est disjoint de l'image de $\mathfrak{R}'$, où $q(P')$ est le quotient de dilatation de $g(P')$ en P' ; comme l'image $g(E')$ est de mesure linéaire nulle, $q(P)$ est défini presque partout dans $\mathfrak{R}$. La mesurabilité de $q(P)$ suit du fait que $g(P')$ est la transformation intérieure au sens de Stoïlow [11] définie dans $\mathfrak{R}'-E'$.

Avec cette définition, il est facile d'établir le lemme suivant:

Lemme 1. *Soit* $f(P)$ *une transformation parabolique* $[\mathfrak{L}]$ *de* $\mathfrak{F}$ *dans* $\tilde{\mathfrak{R}}$, $\mathfrak{F}'$ *l'espace composé de surfaces de Riemann, correspondant à* $\mathfrak{F}-E$ *par rapport à* $f(P)$, *qui sont des surfaces de recouvrement de* $\tilde{\mathfrak{R}}$, *et* $f^{-1}(P')$ *l'homéomorphisme*

[2] S'il n'existe aucune fonction de Green dans $\tilde{\Omega}\cap\tilde{\mathfrak{R}}$, on suppose que tout ensemble sur la frontière est de mesure harmonique nulle.

[3] On dira simplement que $\tilde{\Omega}\cap S(\mathfrak{L}_0)-\tilde{E}$ est de mesure harmonique nulle; de la même manière on définira la nullité de la mesure harmonique de $\tilde{G}\cap S(\mathfrak{L}_0)-\tilde{E}$ pour un sous-domaine quelconque $\tilde{G}$ de $\tilde{\Omega}$.

[4] Ici on ne demande pas nécessairement que l'ensemble lui-même soit de mesure linéaire nulle.

https://doi.org/10.1017/S0027763000002014 Published online by Cambridge University Press

de $\mathfrak{F}'$ *sur* $\mathfrak{F}-E$. *Alors la restriction de* $f^{-1}(P')$ *à un domaine quelconque* D' *de* $\mathfrak{F}'$ *est une transformation parabolique* $(\mathfrak{L}_1)$ *de* D' *dans la composante connexe* $\mathfrak{F}_1$ *de* $\mathfrak{F}$ *qui contient* $f^{-1}(D')$, *où* $\mathfrak{L}_1$ *est l'élément frontière correspondant à la trace sur* $\mathfrak{F}_1$ *du filtre qui définit* $\mathfrak{L}$, *pourvu que cette trace soit un filtre.*

Rappelons certaines terminologies données au n° 2 de [7]. Étant donnée une transformation analytique, non nécessairement univalente mais localement homéomorphe, d'un domaine G du plan $z=x+iy$ de la forme $0<x<1$, $0<y<h(x)\leqq+\infty$, dans une surface de Riemann $\mathfrak{R}'$, on appelle l'image de G un *écoulement harmonique*. L'ensemble des images de quelques lignes $x=$ Cte, $0<y<h(x)$, est appelé un *sous-écoulement harmonique*, et l'image de chaque ligne $x=$ Cte est une *trajectoire* de cet écoulement. Si la représentation est univalente, l'écoulement est appelé *monofeuillet*. Si $h(x)<+\infty$ pour tout x de l'intervalle $(0, 1)$ ou pour une partie de cet intervalle, l'écoulement ou le sous-écoulement correspondant est appelé *fini*. Selon qu'un sous-écoulement est l'image d'un ensemble de lignes $x=$ Cte, dont la trace sur l'axe des x est de mesure linéaire nulle ou positive, il est appelé respectivement *nul* ou *positif*. On dit qu'une transformation d'un écoulement harmonique placé sur une surface de Riemann $\mathfrak{R}'$ dans une autre surface de Riemann ouverte $\mathfrak{R}$ est *parabolique* $(\mathfrak{L})$ quand la transformation dans $\mathfrak{R}$ définie dans G par l'intermédiaire de $\mathfrak{R}'$ est parabolique $(\mathfrak{L})$, $\mathfrak{L}$ étant un élément frontière de $\mathfrak{R}$.

Il découle immédiatement de ces définitions et du théorème 5 de [9] (pour une correction de la démonstration de ce théorème, voir la note 7) au bas de [10]) :

LEMME 2. *Soit* $\mathfrak{R}$ *une surface de Riemann ouverte et* $\mathfrak{R}'$ *une autre surface de Riemann quelconque; considérons une transformation parabolique* $(\mathfrak{L})$ *dans* $\mathfrak{R}$ *d'un écoulement harmonique* H' *placé sur* $\mathfrak{R}'$. *Si chaque trajectoire d'un sous-écoulement fini* H_1' *de* H' *contient une suite de points dont les images tendent vers* $\mathfrak{L}$, *alors* H_1' *est nul.*

Soient $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{L}$ l'espace, le filtre et l'élément frontière définis au n° 1, et soit $f(P)$ une transformation parabolique $[\mathfrak{L}]$ de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{R}$. On désignera par $\tilde{M}(\mathfrak{L})$ l'adhérence dans $\mathfrak{R}+\mathfrak{C}$ de l'ensemble de toutes les limites dans $\mathfrak{R}+\mathfrak{C}$ dont chacune $\lim_{k\to\infty} f(P_k)$ est obtenue lorsqu'une suite $\{P_k\}$ dans $\mathfrak{F}$ tend vers sa frontière en restant en dehors d'un certain élément de $\mathfrak{B}$. Pour un ensemble

https://doi.org/10.1017/S0027763000002014 Published online by Cambridge University Press

ouvert $D \subset \mathfrak{F}$, on note $n(\tilde{P}, D)$ le nombre des points dans $D-E$ qui sont transformés en $\tilde{P}$ par $f(P)$, où E est l'ensemble exceptionnel, à l'image $\tilde{E}=f(E)$, défini au n° 1; $n(\tilde{P}, \mathfrak{F})$ sera noté simplement $n(\tilde{P})$.

Le lemme suivant jouera le rôle important dans la démonstration du théorème 1.

LEMME 3. *Pour chaque composante connexe* $\tilde{\omega}$ *de* $\tilde{\mathfrak{R}}+\tilde{\mathfrak{C}}-\tilde{M}(\mathfrak{L})$, *on conclut que*

$$n(\tilde{P}) = \sup_{\tilde{P}\in\tilde{\omega}\cap\tilde{\mathfrak{R}}} n(\tilde{P})$$

quasi-partout (*c'est-à-dire sauf en un ensemble de capacité logarithmique nulle*) *dans* $\tilde{\omega}\cap\tilde{\mathfrak{R}}-\tilde{E}$. *Si* $n(\tilde{P})\not\equiv 0$ *dans* $\tilde{\omega}\cap\tilde{\mathfrak{R}}$, *la mesure harmonique de* $\tilde{\omega}\cap\tilde{\mathfrak{C}}$ *par rapport à* $\tilde{\omega}\cap\tilde{\mathfrak{R}}$ *est nulle*[2].

On désigne par $\mathfrak{F}'$ l'espace composé des surfaces de Riemann, homéomorphes à $\mathfrak{F}-E$ par rapport à $f(P)$, qui sont des surfaces de recouvrement de $\tilde{\mathfrak{R}}$.

Posons $\sup_{\tilde{P}\in\tilde{\omega}\cap\tilde{\mathfrak{R}}} n(\tilde{P}) = N$, et supposons que $N>0$ et que l'ensemble

$$\tilde{B} = \{\tilde{P}\in\tilde{\omega}\cap\tilde{\mathfrak{R}}-\tilde{E};\ n(\tilde{P})<N\}^{5)}$$

soit de capacité logarithmique positive. Si $N=\infty$, il existe n_0, $0<n_0<\infty$, tel que

$$\tilde{B}' = \{\tilde{P}\in\tilde{\omega}\cap\tilde{\mathfrak{R}}-\tilde{E};\ n(\tilde{P})<n_0\}^{5)}$$

soit de capacité logarithmique positive. Par le lemme 3.1 de [6] on trouve un sous-ensemble compact discret $\tilde{B}_0$ de capacité logarithmique positive de $\tilde{B}$ (si $N<\infty$) ou de $\tilde{B}'$ (si $N=\infty$). Soit $\tilde{P}_0\in\tilde{\omega}\cap\tilde{\mathfrak{R}}-\tilde{E}$ un point tel que $n(\tilde{P}_0)=N$ (si $N<\infty$) ou $n(\tilde{P}_0)=N'\geqq n_0$ (si $N=\infty$), et soient $\{Q_i'\}$ ($i=1, 2, \ldots, N$ ou N') les points de $\mathfrak{F}'$ situés au-dessus de $\tilde{P}_0$. On peut supposer qu'aucun Q_i' n'est pas de point de ramification. On définit la fonction de Green $G(\tilde{P}, \tilde{P}_0)$ ayant $\tilde{P}_0$ pour pôle dans $\tilde{\omega}\cap\tilde{\mathfrak{R}}-\tilde{B}_0$ et on la considère sur $\mathfrak{F}'$. Les trajectoires orthogonales maximales issues de $\tilde{P}_0$, sans points multiples, des courbes de niveau de $G(\tilde{P}, \tilde{P}_0)$, sont appelées *lignes de Green* [2]. Comme $\tilde{E}$ est de mesure linéaire nulle, presque toutes les lignes de Green ne rencontrent pas $\tilde{E}$. On considère, pour chaque ligne de Green, la courbe maximale issue de Q_i' dans $\mathfrak{F}'$, située

5) C'est un ensemble borélien et donc capacitable d'après le résultat de Choquet [3].

au-dessus de cette ligne et ne passant pas par des points de ramification de $\mathfrak{F}'$. L'ensemble de telles courbes issues de Q_i' engendre un écoulement harmonique monofeuillet fini sur $\mathfrak{F}'$ tel que les trajectoires dont les projections convergent vers $\tilde{B}_0$ forment un sous-écoulement harmonique positif.[6] D'après les lemmes 1 et 2, on conclut que les images dans $\mathfrak{F}$ de presque toutes les trajectoires de ce sous-écoulement ne s'étendent pas vers $\mathfrak{L}$. Comme $\tilde{B}_0 \cap \tilde{M}(\mathfrak{L}) = \phi$, les images ne tendent pas vers la frontière de $\mathfrak{F}$ et donc aboutissent en des points de $\mathfrak{F} - E$. C'est vrai pour tout i $(1 \leqq i \leqq N$ ou $N')$ et il en résulte qu'il existe au moins un point de $\tilde{B}_0$ qui possède N (ou N') images réciproques dans $\mathfrak{F} - E$. Ainsi arrive une contradiction. Comme l'image réciproque d'une ligne de Green qui tend vers $\tilde{\mathfrak{C}} - \tilde{M}(\mathfrak{L})$ s'étend vers $\mathfrak{L}$, encore par suite des lemmes 1 et 2, il suit que la mesure harmonique de $\tilde{\omega} \cap \tilde{\mathfrak{C}}$[6] est nulle si $n(\tilde{P}) \not\equiv 0$ dans $\tilde{\omega} \cap \tilde{R}$.

Remarque. Définissons un ensemble $\tilde{N}(\mathfrak{L})$ par les points de $\tilde{\mathfrak{R}} + \tilde{\mathfrak{C}}$ tels que, pour chacun $\tilde{P}$ de ces points, il existe une courbe sur $\mathfrak{F}$ dont l'image converge vers $\tilde{P}$ et qui tend vers la frontière de $\mathfrak{F}$ en restant en dehors d'un certain élément de $\mathfrak{B}$. Alors $\tilde{N}(\mathfrak{L}) \subset \tilde{M}(\mathfrak{L})$. Si on emploie $\tilde{N}(\mathfrak{L})$ au lieu de $\tilde{M}(\mathfrak{L})$ dans le lemme, on a une même conclusion.

COROLLAIRE.[7] *Soit $\mathfrak{R}$ une surface de Riemann ouverte, $\tilde{\mathfrak{R}}$ une autre quelconque, $\mathfrak{L}_1$ un élément frontière de $\mathfrak{R}$ et $f(P)$ une transformation parabolique $[\mathfrak{L}_1]$ de $\mathfrak{R}$ dans $\tilde{\mathfrak{R}}$. On suppose que toute la courbe sur $\mathfrak{R}$ qui tend vers la frontière et sur laquelle $f(P)$ tend vers une valeur de $\tilde{\mathfrak{R}} + \tilde{\mathfrak{C}}$, s'étend vers $\mathfrak{L}_1$. Alors, si $D \subset \mathfrak{R}$ est une composante connexe de l'image réciproque d'un domaine quelconque $\tilde{D} \subset \tilde{\mathfrak{R}}$, on conclut que*

$$n(\tilde{P}, D) = \sup_{\tilde{P} \in \tilde{D}} n(\tilde{P}, D)$$

quasi-partout dans $\tilde{D} - \tilde{E}$.

En effet, si on prend D pour $\mathfrak{F}$ dans le lemme 3 et un élément frontière correspondant à la trace sur D du filtre qui définit $\mathfrak{L}_1$, pour $\mathfrak{L}$ dans le lemme 3, alors $\tilde{N}(\mathfrak{L})$ est égal à la frontière relative de $\tilde{D}$ et $\tilde{D}$ est une composante connexe de $\tilde{\mathfrak{R}} - \tilde{N}(\mathfrak{L})$; ainsi le lemme 3 s'applique.

---

[6] La mesure harmonique de $\tilde{B}_0$ à $\tilde{P}_0$ est égale à la mesure de Green des lignes de Green qui covergent vers $\tilde{B}_0$ (voir [2]); il en est de même de $\tilde{\omega} \cap \tilde{\mathfrak{C}}$.

[7] C'est une extension des résultats de Nagai, Tsuji, Yûjôbô et de l'auteur.

https://doi.org/10.1017/S0027763000002014 Published online by Cambridge University Press

3. *Démonstration du théorème* 1. Supposons que $\tilde{\Omega} \cap S(\mathfrak{L}_0) - \tilde{E}$ ne soit pas de mesure harmonique nulle. On peut trouver $\tilde{P}_0 \in \tilde{\Omega} \cap S(\mathfrak{L}_0) - \tilde{E}$ tel que, pour tout voisinage $\tilde{U} \subset \tilde{\Omega}$ de $\tilde{P}_0$, $\tilde{U} \cap S(\mathfrak{L}_0) - \tilde{E}$ ne soit pas de mesure harmonique nulle. Soit $\tilde{\Omega}_0 \ni \tilde{P}_0$ un domaine quelconque relativement compact dans $\tilde{\Omega}$. Nous choisissons n tel que $\tilde{M}_n \cap \tilde{\Omega}_0 = \phi$. Soit $\tilde{P} = \lim\limits_{k \to \infty} f(P_k)$ une limite obtenue lorsque $P_k \in c^{(n)}$ tend vers la frontière de $\mathfrak{F}$. Alors $\tilde{P} \in \tilde{M}_n$. En effet, d'après l'hypothèse il existe un élément V de $\mathfrak{V}$ tel que $V \cap c^{(n)} = \phi$. Prenons un autre élément $V_1 \subset V$ de $\mathfrak{V}$ tel que sa frontière relative γ_1 soit disjointe de celle de V. Évidemment $c^{(n)} \cap \gamma_1 = \phi$. On peut donc choisir $P_k' \in D^{(n)} - V_1$ près de P_k tel que $f(P_k')$ tende vers $\tilde{P}$, d'où $\tilde{P} \in \tilde{M}_n$.

Maintenant si $\tilde{P}_0 \notin f(c^{(n)})$, on pose $D^{(n)\prime} = D^{(n)}$ et $c^{(n)\prime} = c^{(n)}$. Si $\tilde{P}_0 \in f(c^{(n)})$, l'ensemble $A \subset c^{(n)}$ qui est transformé en $\tilde{P}_0$ est compact dans $\mathfrak{F}$, parce que $\tilde{P}_0 \notin \tilde{M}_n$. Puisque $f(P)$ est une transformation intérieure au sens de Stoïlow [11] en dehors de E qui est totalement discoutinu, A est totalement discontinu et on peut renfermer A par un nombre fini de courbes fermées dont les images ne passent pas par $\tilde{P}_0$. On retranche de $D^{(n)}$ les intérieurs de ces courbes et on désigne par $D^{(n)\prime}$ le domaine qui reste et par $c^{(n)\prime}$ sa frontière relative.

Soit $\tilde{\omega}$ la composante connexe de

$$\mathfrak{R} + \mathfrak{C} - \tilde{M} - f(c^{(n)\prime})$$

qui contient $\tilde{P}_0$. D'après le lemme 3 appliqué à $D^{(n)\prime}$, on conclut que

$$n(\tilde{P}, D^{(n)\prime}) = \sup_{\tilde{P} \in \tilde{\omega} \cap \mathfrak{R}} n(\tilde{P}, D^{(n)\prime}) = N \leqq \infty$$

quasi-partout dans $\tilde{\omega} \cap \mathfrak{R} - \tilde{E}$, et que la mesure harmonique dans $\tilde{\omega} \cap \mathfrak{R}$ de $\tilde{\omega} \cap \mathfrak{C}$ est nulle. Si $N < \infty$, les points $\tilde{P} \notin \tilde{E}$ tels que $n(P, D^{(n)\prime}) = N$ n'appartiennent pas à $S(\mathfrak{L}_0)$, et donc $S(\mathfrak{L}_0) \cap \tilde{\omega} \cap \mathfrak{R} - \tilde{E}$ est de capacité logarithmique nulle. C'est en contradiction avec notre hypothèse sur $\tilde{P}_0$. Donc $n(\tilde{P}, D^{(n)}) = \infty$ quasi-partout dans un voisinage dans $\mathfrak{R}$ de $\tilde{P}_0$, $\tilde{E}$ étant exclu.

Soit $\tilde{\Omega}_0'$ l'ensemble des points de $\tilde{\Omega}_0 \cap \mathfrak{R}$ dont chacun $\tilde{P}$ possède un voisinage $U_{\tilde{P}}$ dans $\tilde{\Omega}_0$ tel que $n(\tilde{P}, D^{(n)}) = \infty$ quasi-partout dans $U_{\tilde{P}} - \tilde{E}$. Alors $\tilde{\Omega}_0'$ est visiblement un ensemble ouvert et $n(\tilde{P}, D^{(n)}) = \infty$ quasi-partout dans $\tilde{\Omega}_0' - \tilde{E}$. Supposons qu'il existe un point frontière $\tilde{P}_1 \notin \tilde{E}$ de $\tilde{\Omega}_0'$ dans $\tilde{\Omega}_0$. Comme $\tilde{P}_1 \notin \tilde{M}_n$, il y a, sur $c^{(n)}$, au plus un nombre fini de points qui correspondent à $\tilde{P}_1$. On retranche de $D^{(n)}$ des voisinages compacts de ces points tels que l'image de la frontière relative de l'ensemble ouvert restant ne passe pas par $\tilde{P}_1$. Encore en vertu du lemme 3, on voit que $\tilde{P}_1 \in \tilde{\Omega}_0'$. Par suite,

$$\tilde{\Omega} \cap \mathfrak{R} - \tilde{\Omega}_0' \subset \tilde{E}$$

et donc $n(\tilde{P}, D^{(n)}) = \infty$ quasi-partout dans $\tilde{\Omega}_0 \cap \mathfrak{R} - \tilde{E}$. C'est vrai pour tout m plus grand que n. Donc tout point de $\tilde{\Omega}_0 \cap \mathfrak{R} - \tilde{E}$ est pris sur une suite de points de $\mathfrak{F}$ qui converge vers $\mathfrak{L}_0$ sauf les points d'un ensemble de capacité logarithmique nulle. $\tilde{\Omega}_0$ étant pris arbitrairement près de $\tilde{\Omega}$, on a la même conclusion pour $\tilde{\Omega}$. Il est facile de voir que la mesure harmonique de $\tilde{\Omega} \cap \mathfrak{C}$ est nulle par rapport à $\tilde{\Omega} \cap \mathfrak{R}$.

Remarque 1. Supposons qu'il exsite, dans toute composante connexe de chaque $D^{(n)}$, une courbe tendant vers la frontière de $\mathfrak{F}$ en dehors d'un certain élément de $\mathfrak{B}$. Si $\tilde{\Omega} \cap S(\mathfrak{L}_0) \neq \phi$, alors $\tilde{\Omega} \cap S(\mathfrak{L}_0) - \tilde{E}$ n'est pas de mesure harmonique nulle.

En effet, soit $\{P_n\}$ une suite de points de $\mathfrak{F}$ telle que $P_n \in D^{(n)}$, qui converge vers $\mathfrak{L}_0$ et dont l'image $\{f(P_n)\}$ converge vers un point $\tilde{P}$ de $\tilde{\Omega} \cap S(\mathfrak{L}_0)$. Menons une courbe l_n dans $D^{(n)}$ partant de P_n et tendant vers la frontière de $\mathfrak{F}$ telle qu'elle reste en dehors d'un certain élément de $\mathfrak{B}$. L'image $f(l_n)$ est une courbe qui part de $f(P_n)$ et tend vers $\tilde{M}_n$. L'ensemble d'accumulation de $\{f(l_n)\}$ est un continu qui est contenu dans $S(\mathfrak{L}_0)$ et joint $\tilde{P}$ avec $S\Gamma(\mathfrak{L}_0\,;\,\mathfrak{L})$ dans $\tilde{\Omega}$. Donc $S(\mathfrak{L}_0) \cap \tilde{\Omega} - \tilde{E}$ n'est pas de mesure harmonique nulle.

La supposition est remplite, par exemple, dans le cas où $\mathfrak{F}$ est un domaine D dans un plan, $\mathfrak{L}$ correspond à un ensemble fermé F sur la frontière C de D de capacité logarithmique nulle, et $\mathfrak{L}_0$ correspond à un point de F qui appartient à l'adhérence de $C - F$; on y considère la topologie ordinaire dans un plan. Avec ces $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{L}$, une transformation pseudo-analytique classique quelconque définie dans D à quotient de dilatation borné est une transformation parabolique [$\mathfrak{L}$]. C'est dans cette situation que Noshiro [5] a posée une question (voir l'introduction). Ainsi on voit que notre théorème 1 répond à la question.

Remarque 2. Nous avons supposé que $\mathfrak{L}_0$ possède une base $\{D^{(n)}\}$ à frontières relatives $\{c^{(n)}\}$ telle que chaque $c^{(n)}$ soit située en dehors d'un certain voisinage de $\mathfrak{L}$. On montrera que, sans une telle hypothèse, le théorème n'est pas toujours vrai.

En effet, prenons le demi-plan $x > 0$ $(z = x + iy)$ pour $\mathfrak{F}$, et le plan $|w| \leqq \infty$

https://doi.org/10.1017/S0027763000002014 Published online by Cambridge University Press

pour $\tilde{\mathfrak{R}}$; soit $w=f(z)$ une fonction analytique bornée dans le demi-plan et continue dans le demi-plan fermé, l'origine étant exclue, telle que $f(iy)$ tende vers une limite w_0 lorsque $y<0$ tend vers $z=0$ mais n'ait pas de limite lorsque $y>0$ tend vers $z=0$. On prend les demi-cercles $\{D_n\}$, où $D_n=\{|z|<1/n,\ x>0\}$, pour base de $\mathfrak{L}$. Soit $\{z_n\}$ une suite tendant vers $z=0$ dans le demi-plan telle que $|z_n|<1/n$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=w_1$ existe et $w_1 \neq w_0$. On mène une courbe l_n dans le premier quart du cercle $|z|<1/n$, qui part du point $z=1/n$ et se termine à l'origine et qui renferme, ensemble avec le segment $(0, 1/n)$, tout $\{z_k\}$, $k \geqq n$. On prend, pour la frontière relative de l'élément $D^{(n)}$ d'une base de $\mathfrak{L}_0$, l_n et un quart de circonférence : $|z|=1/n$, $x>0$, $y<0$. On peut supposer que $\{D^{(n)}\}$ est décroissante. Alors, $S(\mathfrak{L}_0)$ est un continu borné qui contient w_0 et w_1 et $S\Gamma(\mathfrak{L}_0\,;\mathfrak{L})$ consiste seulement en w_0. Donc $\tilde{\Omega}=\tilde{\mathfrak{R}}-S\Gamma(\mathfrak{L}_0\,;\mathfrak{L})$ est le plan $|w|\leqq\infty$ piqué à w_0, et $\tilde{\Omega}\cap S(\mathfrak{L}_0)$ n'est pas de mesure harmonique nulle. Cependant, $\tilde{\Omega}\not\subset S(\mathfrak{L}_0)$.

4. On va établir

THÉORÈME 2. *Sous les mêmes conditions que celles du théorème* 1, *si* $\tilde{\Omega}\subset S(\mathfrak{L}_0)$ *et si un point* $\tilde{P}$ *de* $\tilde{\Omega}$ *n'est pas pris par* $f(P)$ *dans un certain* $D^{(n)}$, *alors* $\tilde{P}$ *est la valeur asymptotique suivant une courbe dans* $D^{(n)}$ *qui converge vers* $\mathfrak{L}$.

D'abord nous donnons deux lemmes. Soit $F(P)$ une transformation continue quelconque de $\mathfrak{F}$ dans $\tilde{\mathfrak{R}}$. Pour un domaine $\tilde{D}\subset\tilde{\mathfrak{R}}$, on dira que $F(P)$ *possède la propriété d'Iversen par rapport à* $\tilde{D}$ si pour un point quelconque $P_1\in\mathfrak{F}$ dont l'image $F(P_1)=\tilde{P}_1$ se place dans $\tilde{D}$, pour un autre point quelconque $\tilde{P}_2\in\tilde{D}$ et pour un sous-domaine quelconque $\tilde{V}$ de $\tilde{D}$, contenant $\tilde{P}_1$ et $\tilde{P}_2$, on peut trouver une courbe $l\subset\mathfrak{F}$ telle que $F(l)\subset\tilde{V}$, partant de P_1 et ayant la valeur $\tilde{P}_2$ comme valeur asymptotique lorsque $P\in l$ tend vers un point extrémité.

LEMME 4. *Sous les mêmes conditions que dans le lemme* 3, $f(P)$ *possède la propriété d'Iversen par rapport à* $\tilde{\omega}\cap\tilde{\mathfrak{R}}$.

Soient $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$ et $\tilde{V}$ définis comme ci-dessus. Soit $\tilde{V}'$ un sous-domaine relativement compact dans $\tilde{V}$, contenant $\tilde{P}_1$ et $\tilde{P}_2$. Puisque, dans un voisinage quelconque de P_1, on peut joindre P_1 à un certain point $P_1'\notin E$, on peut supposer que $P_1\notin E$. Pour la même raison que dans la démonstration du lemme

3, presque toutes les lignes de Green de la fonction de Green dans $\tilde{V}'$, ayant $\tilde{P}_1$ pour pôle, ne passent pas par $\tilde{E}$ et ont des images réciproques partant de P_1 et aboutissant en les points de $\mathfrak{F}$ qui correspondent à des points frontières de $\tilde{V}'$. Il existe au moins une telle ligne de Green $\tilde{l}$ qui passe par un point $\tilde{P}'$ dans un voisinage de $\tilde{P}_2$. A partir de $\tilde{P}'$, au moins une ligne de Green analogue à $\tilde{l}$ passe dans un voisinage plus petit de $\tilde{P}_2$. En répétant ce procédé, on obtient une courbe dans $\tilde{V}'$ aboutissant en $\tilde{P}_2$, courbe dont l'image réciproque dans $\mathfrak{F}$ part de P_1 et a $\tilde{P}_2$ comme valeur asymptotique.

Lemme 5. *Sous les mêmes conditions que dans le lemme* 3, *chaque valeur* $\tilde{P}_1$ *non prise de* $\tilde{\omega} \cap \mathfrak{R}$ *dans lequel* $n(\tilde{P}) \not\equiv 0$ *est une valeur asymptotique suivant une courbe sur* $\mathfrak{F}$ *qui converge vers* $\mathfrak{L}$; *il en est de même de chaque point de* $\tilde{\omega} \cap \tilde{\mathfrak{E}}$.

En effet, soit $\tilde{P}_0 \in \tilde{\omega} \cap \tilde{\mathfrak{R}} - \tilde{E}$ une valeur que $f(P)$ admet en P_0. D'après le lemme 4 on trouve une couve $l \subset \mathfrak{F}$ partant de P_0 et ayant $\tilde{P}_1$ comme valeur asymptotique suivant l. Comme $\tilde{P}_1$ n'est pas pris par $f(P)$, l tend vers la frontière de $\mathfrak{F}$; elle converge vers $\mathfrak{L}$ parce que $\tilde{P}_1 \notin \tilde{M}(\mathfrak{L})$. Le deuxième énoncé est démontré de la même façon.

Remarque. De la même manière on peut prouver que chaque valeur $\tilde{P}_1 \in \tilde{\omega} \cap \tilde{\mathfrak{R}} - \tilde{E}$ telle que $n(\tilde{P}) < \sup_{\tilde{P} \in \tilde{\omega} \cap \tilde{\mathfrak{R}}} n(\tilde{P})$ est une valeur asymptotique suivant une courbe sur $\mathfrak{F}$ qui converge vers $\mathfrak{L}$.

Le lemme 5 étant établi, le théorème 2 est maintenant une conséquence immédiate du lemme 5.

Il est clair que nos théorèmes 1 et 2 et nos lemmes 3 et 4 généralisent les théorèmes 1 et 2 et les lemmes 1 et 2 de [8] respectivement.

5. Enfin on appliquera les théorèmes 1 et 2 à un cas particulier. Si $\mathfrak{F}$ est une surface de Riemann parabolique et si le filtre $\mathfrak{B}$ sans point adhérent, ayant une base formée d'ensembles ouverts à frontière relative compacte, définit $\mathfrak{L}$, alors toute transformation pseudo-analytique au sens de Pfluger-Ahlfors à quotient de dilatation borné d'un élément de $\mathfrak{B}$, dans une autre surface de Riemann $\mathfrak{R}$ quelconque est parabolique [$\mathfrak{L}$]. Ainsi les théorèmes 1 et 2 s'appliquent et on obtient le

Théorème 3. *Soit* $\mathfrak{F}$ *une surface de Riemann parabolique et* $\mathfrak{R}$ *une autre*

https://doi.org/10.1017/S0027763000002014 Published online by Cambridge University Press

surface de Riemann quelconque. Appliquons dans $\tilde{\mathfrak{R}}$ un ensemble ouvert D relativement non compact dans $\mathfrak{F}$ à frontière relative compacte par une transformation pseudo-analytique au sens de Pfluger-Ahlfors à quotient de dilatation borné, et désignons par $S(F_{\mathfrak{C}})$ l'ensemble d'accumulation en un ensemble fermé $F_{\mathfrak{C}}$ de composantes frontières de Kerékjártó-Stoïlow qui fait une partie de la frontière idéale de D.

Alors ou bien $\tilde{\mathfrak{R}}$ est parabolique et toute valeur de $\tilde{\mathfrak{R}}$ est prise sur une suite de points de $\mathfrak{F}$ tendant vers $F_{\mathfrak{C}}$ sauf au plus les valeurs d'un ensemble de capacité logarithmique nulle dans $\tilde{\mathfrak{R}}$, ou bien $S(F_{\mathfrak{C}})$ consiste en un ensemble dans $\tilde{\mathfrak{R}}$ de capacité logarithmique nulle et en un ensemble de composantes frontières de $\tilde{\mathfrak{R}}$ de mesure harmonique nulle par rapport à $\tilde{\mathfrak{R}}$; dans le premier cas, chaque point de $\tilde{\mathfrak{R}}$ qui n'est pas pris dans un voisinage de $F_{\mathfrak{C}}$ est la valeur asymptotique suivant une courbe tendant vers la frontière de $\mathfrak{F}$ dans tout voisinage de $F_{\mathfrak{C}}$.

Considérons le cas où $\mathfrak{F}$ est un domaine plan situé en dehors d'un ensemble de capacité logarithmique nulle. Soit D un domaine de frontière C dans le plan z, soit F un ensemble relativement fermé dans D de capacité logarithmique nulle, et soit $w = f(z)$ une fonction pseudo-analytique au sens de Pfluger-Ahlfors de quotient de dilatation borné définie dans $D - F$. Soit z_0 un point de F. Si on prend pour le filtre définissant un élément frontière $\mathfrak{L}_0$ le filtre des voisinages dans $D - F$ de z_0 et pour $\mathfrak{B}$ définissant $\mathfrak{L}$ le filtre des voisinages dans $D - F$ de F, alors $S\Gamma(\mathfrak{L}_0\ ;\ \mathfrak{L}) = \phi$. On écrira $S(z_0)$ au lieu de $S(\mathfrak{L}_0)$. Le plan entier $|w| \leqq \infty$ étant pris pour $\tilde{\mathfrak{R}}$, le théorème 3 montre que toute valeur w est prise dans tout voisinage de z_0 sauf au plus les valeurs d'un ensemble de capacité logarithmique nulle et toute valeur non prise est la valeur asymptotique suivant une courbe se terminant en F, sinon $S(z_0)$ consiste en un point.

Supposons que $S(z)$ consiste en un point pour tout point z de F. Alors $f(z)$ peut être prolongé en une fonction définie et continue partout dans D; cette fonction sera notée encore par $f(z)$. On montrera qu'elle est pseudo-analytique partout dans D.

LEMME 6. *Soit $w = f(z)$ une fonction définie et continue dans un domaine D et soit F un ensemble relativement fermé dans D de capacité logarithmique nulle ; supposons que $f(z)$ soit pseudo-analytique au sens de Pfluger-Ahlfors de* *quotient de dilatation borné dans $D-F$. Alors $f(z)$ est pseudo-analytique partout dans D.*

En premier lieu, nous prouverons que $f(z)$ transforme tout ensemble ouvert dans D en un ensemble ouvert. On peut supposer que $f(z)$ est pseudo-analytique sur la frontière C de D. En prenant le filtre des voisinages de F dans $D-F$ pour $\mathfrak{B}$, tout domaine complémentaire $\varDelta$ de $f(C)$ possède la propriété d'Iversen d'après le lemme 4. Donc, si $\varDelta \cap f(D-F) \neq \phi$ et s'il existe une valeur $w_0 \in \varDelta - f(D-F)$, on trouve une courbe l dans $D-F$ suivant laquelle $f(z)$ tend vers w_0. Cet l doit aboutir en un point de F et donc w_0 est l'image d'un point de F. On en conclut que $\varDelta \subset f(D)$. Soit z_0 un point quelconque de D. Puisque F est totalement discontinu et $f(z)$ est pseudo-analytique dans $D-F$, on peut trouver une courbe fermée l_0 autour de z_0 telle que son image ne passe pas par $f(z_0)$. Le domaine complémentaire δ, contenant $f(z_0)$, de $f(l_0)$ contient l'image au moins d'un point $P \notin F$ situé dans l'intérieur de l_0. Donc le raisonnement ci-dessus s'applique et il résulte que $\delta \subset f(D)$. On voit que $f(z)$ est une transformation ouverte.

Il est facile de conclure que l'ensemble des points de D correspondant à une valeur w quelconque est totalement discontinu. Ainsi $f(z)$ est une transformation intérieure au sens de Stoïlow [11] dans D. Le résultat suivant de Mori [4] achevera la démonstration de notre lemme:

Soit $f(z)$ une transformation intérieure d'un domaine D; supposons qu'elle soit pseudo-analytique dans $D-K$, où K est un ensemble relativement fermé dans D qui est une réunion dénombrable d'ensembles de mesure linéaire finie. Alors $f(z)$ est pseudo-analytique partout dans D.

Ainsi on a établi le

THÉORÈME 4. *Soit D un domaine dans le plan z et soit F un ensemble relativement fermé dans D de capacité logarithmique nulle. Soit $w=f(z)$ une fonction pseudo-analytique au sens de Pfluger-Ahlfors de quotient de dilatation borné définie dans $D-F$, telle qu'elle ne puisse pas être prolongée à une fonction pseudo-analytique partout dans D. Alors $f(z)$ prend toute valeur w, $|w| \leqq \infty$, dans tout voisinage de F dans $D-F$ sauf au plus les valeurs d'un ensemble de capacité logarithmique nulle et chaque valeur non prise est la valeur asymptotique suivant une courbe aboutissant à F.*

https://doi.org/10.1017/S0027763000002014 Published online by Cambridge University Press

C'est une généralisation des résultats obtenus par Nevanlinna, Hällström, Kametani, Cartwright et Noshiro dans le cas où $f(z)$ est analytique.

Bibliographie[8)]

[1] M. Brelot: Topology of R. S. Martin and Green lines, Lectures Func. Comp. Var., Ann Arbor (1955), pp. 105–121.

[2] M. Brelot et G. Choquet: Espaces et lignes de Green, Ann. Inst. Fourier, **3** (1952), pp. 199–263.

[3] G. Choquet: Theory of capacities, ibid, **5** (1955), pp. 131–295.

[4] A. Mori: On quasi-conformality and pseudo-analyticity, à paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.

[5] K. Noshiro: A theorem on the cluster sets of pseudo-analytic functions, Nagoya Math. J., **1** (1950), pp. 83–89.

[6] M. Ohtsuka: Dirichlet problems on Riemann surfaces and conformal mappings, ibid., **3** (1951), pp. 91–137.

[7] M. Ohtsuka: Théorèmes étoilés de Gross et leurs applications, Ann. Inst. Fourier, **5** (1955), pp. 1–28.

[8] M. Ohtsuka: Sur les ensembles d'accumulation relatifs à des transformations plus générales que les transformations quasi conformes, ibid., pp. 29–37.

[9] M. Ohtsuka: Sur un théorème étoilé de Gross, Nagoya Math. J., **9** (1955), pp. 191–207.

[10] M. Ohtsuka: Generalizations of Montel-Lindelöf's theorem on asymptotic values, ibid., **10** (1956), pp. 129–163.

[11] S. Stoïlow: Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, Paris (1938).

[12] T. Yosida: Theorems on the cluster sets of pseudo-analytic functions, Proc. Japan Acad., **27** (1951), pp. 268–274.

Institut de Mathématiques
Université de Nagoya

8) Dans la bibliographie de [7], il a été écrit: [3] W. Gross: Zum ..., pp. 3–47. Ces numéros de page doivent être corrigés à 242–294.