Can. J. Math., Vol. XXXVI, No. 1, 1984, pp. 9-21

DEFORMATIONS G-VERSELLES ET G-STABLES

JEAN-JACQUES GERVAIS

1. Introduction. Soit $\mathscr{E}_n$ l'anneau des germes en 0 des fonctions numériques de classe C^∞ dans $\mathbf{R}^n$. On écrira aussi $\mathscr{E}_x$ pour $\mathscr{E}_n$ où x est la variable dans $\mathbf{R}^n$. Désignons par Diff (n) le groupe des germes en 0 des difféomorphismes locaux τ de classe C^∞ d'un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$ sur un voisinage de 0 tels que $\tau(0) = 0$. Soient G un sous-groupe de Lie de $Gl_p(\mathbf{R})$ et $C_0^\infty(\mathbf{R}^n, G)$ l'ensemble des germes en 0 des applications de classe C^∞ de $\mathbf{R}^n$ dans G.

Définition 1.1. Les germes f et $f' \in \mathscr{E}_x^p$ sont dits *G-équivalents* s'il existe $\tau \in$ Diff (n) et $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, G)$ tels que

$$g(x) \cdot f \circ \tau(x) = f'(x)$$

au voisinage de 0.

Cette notion est due à J. C. Tougeron [**4**, ch. 8] et [**5**] et généralise les notions de "right-equivalence" et "contact-equivalence" introduites par R. Thom et J. N. Mather.

N.B. Dans la suite de ce texte, on notera indifféremment un germe de fonction et un de ses représentants lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.

Définition 1.2. Soit $f \in \mathscr{E}_n^p$. Une *déformation à q paramètres de f* est un germe $F \in \mathscr{E}_{n+q}^p$ tel que $F|_{\mathbf{R}_n \times \{0\}} = f$.

Définition 1.3. Une déformation F à q paramètres de $f \in \mathscr{E}_n^p$ est dite *G-verselle* si toute autre déformation H de f est induite par F de la façon suivante: disons que $H \in \mathscr{E}_{n+q'}^p$, alors il existe $M \in C_0(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{q'}, G)$ et $\Phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{q'}, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q)$ tels que

(i) $H(x, v) = M(x, v) \cdot F(\Phi(x, v))$;

(ii) $\Phi(x, v) = (\phi(x, v), \psi(v))$ où

$\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{q'}, \mathbf{R}^n)$ et $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{q'}, \mathbf{R}^q)$;

Reçu le 7 avril 1982 et sous forme revisée le 25 avril 1983. Soutenu par le C.R.S.N.G. (Canada) et le F.C.A.C. (Québec).

(iii) $\Phi(x, 0) \equiv (x, 0)$ et $M(x, 0) \equiv e$ où e est l'élément neutre de G.

Supposons que G est de dimension l et soit $\{A_1, \dots, A_l\}$ une base sur $\mathbf{R}$ de l'algèbre de Lie T_eG. Pour $f \in \mathscr{E}^p_n$, considérons

$$M_f:\mathscr{E}^l_n \oplus \mathscr{E}^n_n \to \mathscr{E}^p_n$$

$$(\mu, \nu) \to \langle A, \mu \rangle \cdot f + \langle Df, \nu \rangle$$

où

$$\langle A, \mu \rangle = \sum_{k=1}^{l} \mu_k A_k \quad (\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l))$$

et

$$\langle Df, \nu \rangle = Df \cdot \nu$$

où Df est la matrice jacobienne de f. Désignons par O_f l'ensemble des germes dans $\mathscr{E}^p_n$ qui sont G-équivalents à f. Intuitivement, "l'espace tangent" à l'orbite O_f en f est $M_f(\mathscr{E}^l_n \oplus \mathscr{E}^n_n)$. Si O_f est de "codimension finie" i.e.,

$$\dim_{\mathbf{R}} (\mathscr{E}^p_n / M_f(\mathscr{E}^l_n \oplus \mathscr{E}^n_n)) < \infty,$$

on a le résultat fondamental suivant:

1.3. Théorème de G-versalité. *Soit $F \in \mathscr{E}^p_{x,u}$ une déformation à q paramètres de $f \in \mathscr{E}^p_x$. Alors F est G-verselle si et seulement si*

$$\frac{\partial F}{\partial u_1}(x, 0), \dots, \frac{\partial F}{\partial u_q}(x, 0)$$

engendrent sur $\mathbf{R}$ l'espace $\mathscr{E}^p_x / M_f(\mathscr{E}^l_x \oplus \mathscr{E}^n_x)$ i.e.,

$$(1.3.1) \quad \mathscr{E}^p_x = M_f(\mathscr{E}^l_x \oplus \mathscr{E}^n_x) + \mathbf{R}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_i}(x, 0)\right\}.$$

N.B. Ici, $\frac{\partial F}{\partial u_i}(x, 0)$ désigne le germe en $0 \in \mathbf{R}^n$ de $\left.\frac{\partial F}{\partial u_i}\right|_{\mathbf{R}^n \times \{0\}}$ et $\mathbf{R}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_i}(x, 0)\right\}$ est l'espace vectoriel engendré sur $\mathbf{R}$ par $\frac{\partial F}{\partial u_1}(x, 0), \dots,$ $\frac{\partial F}{\partial u_q}(x, 0)$.

Définition 1.4. Lorsque l'égalité (1.3.1) est satisfaite, on dit que F est *G-infinitésimalement verselle.*

On déduit immédiatement du Théorème 1.3, le corollaire suivant qui permet de construire une déformation G-verselle d'un germe de codimension finie.

COROLLAIRE 1.5. *Soit $f \in \mathscr{E}_x^p$ tel que*

$$\dim_{\mathbf{R}} (\mathscr{E}_x^p / M_f(\mathscr{E}_x^l \oplus \mathscr{E}_x^n)) = q.$$

Si $b_1, \ldots, b_q \in \mathscr{E}_x^p$ se projettent sur un base de $\mathscr{E}_x^p / M_f(\mathscr{E}_x^l \oplus \mathscr{E}_x^n)$,

$$F(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^{q} u_i b_i(x)$$

est une déformation G-verselle de f.

Nous verrons comment démontrer le théorème de versalité à partir d'arguments dus à R. Thom et J. N. Mather qu'on retrouve, par exemple, dans [**6**]. Ensuite, nous traduirons la G-versalité en termes de transversalité. Enfin, nous montrerons que la G-versalité est équivalente à la G-stabilité. Intuitivement, une déformation $F \in \mathscr{E}_{x,u}^p$ de $f \in \mathscr{E}_x^p$ est G-stable si tout $H \in \mathscr{E}_{x,u}^p$ "assez près" de F est G-équivalent (notion analogue à celle définie en 1.1 mais qui, en particulier, respecte la fibration de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$) à F. En particulier, on en déduit que tout germe $h \in \mathscr{E}_x^p$ "assez près" de f est G-équivalent à $F(-, u_0)$ pour un certain $u_0 \in \mathbf{R}^q$.

Nous verrons dans la dernière section que nos résultats s'étendent au cas de changements de restreints ($\tau \in \text{Diff}\,(n + s)$) de coordonnées i.e., qui respectent une certaine fibration de l'espace de départ $\mathbf{R}^{n+s} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^s$. Par exemple, cette notion avec $G = Gl_p(\mathbf{R})$ et $s = 1$ est utilisée en théorie de la bifurcation (voir e.g. [**3**]). En particulier, nous prolongeons et précisons certains résultats de [**3**].

2. G-versalité. Comme dans [**7**], on voit aisément que le théorème de G-versalité est une conséquence du

LEMME 2.1. *Soit $F \in \mathscr{E}_{x,u}^p$ une déformation G-infinitésimalement verselle à q paramètres de $f \in \mathscr{E}_x^p$, i.e.,*

$$(2.1.1) \quad \mathscr{E}_x^p = M_f(\mathscr{E}_x^l \oplus \mathscr{E}_x^n) + \mathbf{R}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_i}(x, 0)\right\}.$$

Si $F' \in \mathscr{E}_{x,u}^p$ est une déformation de f à q paramètres telle que

$$\frac{\partial(F - F')}{\partial u_i}(x, 0) \in M_f(\mathscr{E}^l_x \oplus \mathscr{E}^n_x), \quad i = 1, \ldots, q,$$

alors F et F' sont G-isomorphes i.e., F' est induite par F au sens de 1.3 *avec Φ un difféomorphisme local.*

2.2. *Esquisse de la démonstration du Lemme* 2.1. Pour $s \in \mathbf{R}$ fixé, posons

$$F_s(x, u) = sF'(x, u) + (1 - s)F(x, u),$$

et soit

$$H(x, u, t) = F_{s+t}(x, u) \quad \text{où } t \in \mathbf{R}.$$

Nous montrerons que $H(x, u, 0)$ est G-isomorphe à $H_t(x, u)$ si t est assez près de 0. En fait, nous montrerons qu'il existe

$$\Phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q) \quad \text{et} \quad M \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}, G)$$

tels que:

(2.2.1) $\quad H(x, u, 0) = M(x, u, t) \cdot H(\Phi(x, u, t), t)$;

(2.2.2) $\quad \Phi_t \in \mathrm{Diff}\,(n+q)$ et $\Phi_t(x, u) = (\phi_t(x, u), \psi_t(u))$ pour t près de 0;

(2.2.3) $\quad \Phi_0(x, u) \equiv (x, u)$;

(2.2.4) $\quad \phi_t(x, 0) \equiv x$ pour tout t près de 0;

(2.2.5) $\quad M(x, u, 0) \equiv e$

(2.2.6) $\quad M(x, 0, t) \equiv e$ pour tout t près de 0;

Ayant $M(0, 0, 0) = e$, il existe $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathscr{E}^l_{x,u,t}$ tel que

$$M(x, u, t) = \exp\left(\langle A, \lambda(x, u, t)\rangle\right).$$

Ainsi, d'après (2.2.5) et (2.2.6), λ vérifie:

(2.2.5′) $\quad \lambda(x, u, 0) \equiv 0$;

(2.2.6′) $\quad \lambda(x, 0, t) \equiv 0$ pour tout t près de 0.

Dérivons (2.2.1) par rapport à t, on obtient

$$(2.2.7) \quad \left\langle A, \frac{\partial \lambda}{\partial t}(x, u, t) \right\rangle H(\Phi(x, u, t), t) + \left\langle \frac{\partial H}{\partial x}(\Phi(x, u, t), t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, u, t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H}{\partial u}(\Phi(x, u, t), t), \frac{\partial \psi}{\partial t}(u, t) \right\rangle = F(\Phi(x, u, t)) - F'(\Phi(x, u, t)).$$

Tenant compte des conditions (2.2.2) à (2.2.6), l'égalité (2.2.1) est satisfaite pour $t = 0$, et donc (2.2.7) est équivalent à (2.2.1).

De là, on procède comme dans [7] pour déduire l'existence de λ, ϕ et ψ vérifiant les conditions précédentes.

3. Transversalité. Nous verrons dans cette section que la G-versalité se traduit en termes de transversalité. $\mathcal{G}(n) = C_0^\infty(\mathbf{R}^n, G) \times \mathrm{Diff}\,(n)$ est un groupe lorsque muni de la multiplication:

$$(g_1, \tau_1) \cdot (g_2, \tau_2) = (g_1(g_2 \circ \tau_1), \tau_2 \circ \tau_1).$$

Il est alors clair que $\mathcal{G}(n)$ opère sur $\mathcal{E}_n^p$ de la façon suivante: $(g, \tau) \cdot f$ est le germe en 0 de

$$x \rightarrow g(x) \cdot (f \circ \tau(x)).$$

Désignons par $J^k(n, p)$ (resp. $J_0^k(n, p)$) l'espace des jets d'ordre k en 0 des éléments de $\mathcal{E}_n^p$ (resp. $\mathfrak{m}_n \cdot \mathcal{E}_n^p$) et par $\mathcal{G}^k$ le groupe de Lie analytique des k-jets en 0 des éléments de $\mathcal{G}(n)$. L'action du groupe $\mathcal{G}(n)$ sur $\mathcal{E}_n^p$ induit, pour tout k, une action analytique de $\mathcal{G}^k$ sur $J^k(n, p)$ définie par:

$$j^k((g, \tau))j^k(f) = j^k((g, \tau) \cdot f).$$

Pour $z \in J^k(n, p)$, on désigne par O_z^k l'orbite de z dans $J^k(n, p)$ sous l'action de $\mathcal{G}^k$.

LEMME 3.1.

(3.1.1) $T_I \mathcal{G}^k = \mathbf{R}^l \times J_0^k(n, l) \times J_0^k(n, n)$

où I est l'élément neutre de $\mathcal{G}^k$.

(3.1.2) $T_z O_z^k = \pi_k[M_f(\mathcal{E}_n^l \oplus \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_n^n)]$

où $z = j^k(f)$ et $\pi_k : \mathcal{E}_n^p \rightarrow J^k(n, p)$ est la projection canonique.

Démonstration. (i) On a

$$C_0^\infty(\mathbf{R}^n, G) = G \oplus C_{0,e}^\infty(\mathbf{R}^n, G)$$

où

$$C_{0,e}^\infty(\mathbf{R}^n, G) = \{g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, G) | g(0) = e\};$$

ce dernier ensemble s'identifie à $\mathfrak{m}_x \cdot \mathscr{E}_x^l$ car tout $g \in C_{0,e}^\infty(\mathbf{R}^n, G)$ est de la forme

$$g(x) = \exp(\langle A, r(x) \rangle) \quad \text{où } r \in \mathfrak{m}_x \mathscr{E}_x^l.$$

D'autre part, l'espace tangent à $\pi_k(\text{Diff }(n))$, en l'identité, est $J_0^k(n, n)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} T_I \mathscr{G}^k &= T_e G \times J_0^k(n, l) \times J_0^k(n, n) \\ &= \boldsymbol{R}^l \times J_0^k(n, l) \times J_0^k(n, n). \end{aligned}$$

(ii) $T_z 0_z^k$ est l'image de l'application

$$T_I\, \Theta : T_I \mathscr{G}^k \to J^k(n, p)$$

où

$$\Theta : \mathscr{G}^k \to J^k(n, p)$$

$$j^k((g, \tau)) \to (j^k(g, \tau)) \cdot z.$$

En considérant les courbes différentiables dans $\mathscr{G}^k$ issues de I, on montre facilement (voir e.g. [**6**, p. 41]) la deuxième partie du lemme.

Soit $F \in \mathscr{E}_{n+q}^p$ une déformation de $f \in \mathscr{E}_n^p$, et soit $\bar{F}$ un représentant de F sur un voisinage U de 0 dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$. Pour $(x, u) \in U$, désignons par F_x^u le germe en $0 \in \mathbf{R}^n$ de l'application $\bar{F}_x^u : y \to \bar{F}(x + y, u)$ et posons

$$j_*^k \bar{F} : U \ni (x, u) \mapsto j^k F_x^u \in J^k(n, p);$$

ceci est bien défini car il est clair que le germe de $j_*^k \bar{F}$ en un point de U ne dépend que du germe de $\bar{F}$ en ce point.

Définition 3.2. On dit que F est *G-k-transverse* si $j_*^k \bar{F}$ est transverse en 0 à 0_z^k où $z = j^k f$.

PROPOSITION 3.3. *F est G-k-transverse si et seulement si*

$$\mathscr{E}_x^p = M_f(\mathscr{E}_x^l \oplus \mathscr{E}_x^n) + \mathbf{R}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_i}(x, 0)\right\} + \mathfrak{m}_x^{k+1} \cdot \mathscr{E}_x^p.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1984-002-9 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. On vérifie aisément que l'image de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$ par l'application linéaire tangente de $j_*^k\bar{F}$ en 0 est

$$\pi_k\left[\mathbf{R}\left\{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, 0), \frac{\partial F}{\partial u_i}(x, 0)\right\}\right].$$

Ainsi, la G-k-transversalité de F équivaut à l'égalité

$$J_k(n, p) = \pi_k\left[M_k(\mathcal{E}_x^l \oplus \mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x^n) + \mathbf{R}\left\{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, 0), \frac{\partial F}{\partial u_i}(x, 0)\right\}\right]$$

i.e.,

$$\mathcal{E}_x^p = M_f(\mathcal{E}_x^l \oplus \mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x^n) + \mathbf{R}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \frac{\partial F}{\partial u_j}(x, 0)\right\} + \mathfrak{m}_x^{k+1} \cdot \mathcal{E}_x^p.$$

Mais

$$M_f(\mathcal{E}_x^l \oplus \mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x^n) + \mathbf{R}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right\} = M_f(\mathcal{E}_x^l \oplus \mathcal{E}_x^n),$$

d'où le résultat.

Il est alors clair que la G-versalité (ou de façon équivalente, la G-versalité infinitésimale) entraîne la G-k-transversalité pour tout k. La réciproque est aussi vraie; pour le vérifier nous introduisons d'abord la

Définition 3.4. On dit que $z \in J^k(n, p)$ est *G-suffisant* si pour tout f et $f' \in \mathcal{E}_x^p$ tels que $j^kf = z = j^kf'$, f et f' sont G-équivalents.

Une conséquence immédiate du Théorème 1 de [**1**] est la

PROPOSITION 3.5. *Soit $f \in \mathcal{E}_x^p$.*
(3.5.1.) *Si $j^k(f)$ est G-suffisant,*

$$M_f(\mathcal{E}_x^l \oplus \mathcal{E}_x^n) \supset \mathfrak{m}_x^{k+1} \cdot \mathcal{E}_x^p.$$

(3.5.2) *Si $M_f(\mathcal{E}_x^l \oplus \mathcal{E}_x^n) \supset \mathfrak{m}_x^k \cdot \mathcal{E}_x^p$, $j^k(f)$ est G-suffisant.*

De (3.5.2) et du Lemme de Nakayama (voir e.g. [**4**, p. 3]) on obtient aisément:

PROPOSITION 3.6. *Soit $F \in \mathcal{E}_{x,u}^p$ une déformation à q paramètres de $f \in \mathcal{E}_x^p$ qui est G-k-transverse pour tout $k \in \mathbf{N}$. Alors F est G-verselle et il existe un $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que $j^{k_0}(f)$ soit G-suffisant.*

Remarques 3.7.

(3.7.1) D'après ce qui précéde, $f \in \mathcal{E}_x^p$ admet une déformation G-verselle si et seulement si

$$\dim_{\mathbf{R}}\left(\mathcal{E}_x^p / M_f(\mathcal{E}_x^l \oplus \mathcal{E}_x^n)\right) < \infty.$$

(3.7.2) Si $G^{\mathbf{C}}$, le complexifié de G, a au plus une famille à un paramètre d'orbites dans $\mathbf{C}^p$, la remarque précédente et un résultat de J. C. Tougeron [**5**] (voir aussi [**2**, p. 267]) entraînent qu'"en général" $f \in \mathcal{E}_x^p$ admet une déformation G-verselle i.e., l'ensemble des $f \in \mathcal{E}_x^p$ qui n'admettent pas de déformation G-verselle est, dans un sens que nous ne préciserons pas (cf. [**4**, p. 150]), de "codimension infinie" dans $\mathcal{E}_x^p$.

4. ***G*-stabilité.** Dans ce qui suit, les espaces de fonctions C^∞ sont munis de la topologie de Whitney (voir e.g. [**4**, p. 144]).

Définition 4.1. Soient U et V des ouverts de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$, $F \in C^\infty(U, \mathbf{R}^p)$ et $H \in C^\infty(V, \mathbf{R}^p)$. Nous dirons que F est, en $(x_0, u_0) \in U$, *G-équivalent, en tant que déformation à q paramètres, à H en* $(x_1, u_1) \in V$, s'il existe des voisinages ouverts W_1 de x_0 dans $\mathbf{R}^n$ et W_2 de u_0 dans $\mathbf{R}^q$ tels que $W_1 \times W_2 \subset U$ et s'il existe $\Phi \in C^\infty(W_1 \times W_2, V)$ et $M \in C^\infty(W_1 \times W_2, G)$ tels que:

(i) $F(x, u) = M(x, u) \cdot H(\Phi(x, u))$ dans $W_1 \times W_2$;

(ii) $\Phi(x_0, u_0) = (x_1, u_1)$;

(iii) $\Phi(x, u) = (\phi(x, u), \psi(u))$ pour $x \in W_1$ et $u \in W_2$;

(iv) $\phi|_{W_1 \times \{u_0\}}$ est inversible en x_0 et ψ est inversible en u_0.

Définition 4.2. Une déformation $F \in \mathcal{E}_{n+q}^p$ de $f \in \mathcal{E}_n^p$ est dite *G-stable* si pour tout voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$ et tout représentant $\bar{F} \in C^\infty(U, \mathbf{R}^p)$ de F, la condition suivante est satisfaite: il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $\bar{F}$ dans $C^\infty(U, \mathbf{R}^p)$ tel que pour tout $\bar{H} \in \mathcal{U}$, il existe un point $(x_0, u_0) \in U$ tel que $\bar{H}$ en (x_0, u_0) soit G-équivalent à $\bar{F}$ en $(0, 0)$.

Le résultat principal de ce travail est:

THÉORÈME 4.3. *Soit $F \in \mathcal{E}_{n+q}^p$ une déformation de $f \in \mathcal{E}_n^p$. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(4.3.1) *F est G-infinitésimalement verselle.*

(4.3.2) *F est G-verselle.*

(4.3.3) *F est G-k-transverse pour tout $k \in \mathbf{N}$.*

(4.3.4) *F est G-stable.*

Démonstration. En vertu des résultats des sections précédentes, il suffit de montrer les implications (4.3.3) $\Rightarrow$ (4.3.4) et (4.3.4) $\Rightarrow$ (4.3.2).

(i) (4.3.3) $\Rightarrow$ (4.3.4). La démonstration s'inspire de [**8**, p. 325]. Soit U voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$, et soit $\bar{F} \in C^\infty(U, \mathbf{R}^q)$ un représentant de F. En vertu de l'hypothèse et de la Proposition 3.6, il existe un k_0 tel que $z = j^{k_0}f$ soit G-suffisant. Puisque F est G-k_0-transverse, il résulte du théorème de transversalité ([**8**, p. 321]) qu'il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de $\bar{F}$ dans $C^\infty(U, \mathbf{R}^p)$ tel que pour tout $\bar{H} \in \mathscr{U}$, $j_*^{k_0}\bar{H}$ rencontre transversalement $O_z^{k_0}$ au moins en un point. Soit $\bar{H} \in \mathscr{U}$, et soit $(x_0, y_0) \in U$ tel que

$$j_*{}^{k_0}\bar{H}(x_0, y_0) = z_0 \in O_z^{k_0}.$$

Les germes z et $z_0 \in \mathscr{E}_x^p$ sont G-équivalents, au sens de 1.1, car $z_0 \in O_z^{k_0}$ et z est G-suffisant; il en résulte que z_0 est G-suffisant. Soit $\widetilde{H}$ le germe en (0, 0) de l'application

$$(x, u) \rightarrow \bar{H}(x_0 + x, u_0 + u),$$

et soit h le germe en 0 de l'application

$$x \mapsto \bar{H}(x_0 + x, u_0).$$

Comme $j^{k_0}h = z_0$ et $j_*^{k_0}\bar{H}$ est transverse à $O_z^{k_0} = O_{z_0}^{k_0}$ en (x_0, u_0), il en résulte que $\widetilde{H}$ est G-k_0-transverse. D'autre part, $z_0 = j^{k_0}h$ étant G-suffisant, on déduit de 3.3, 3.5.1 et du théorème de G-versalité que $\widetilde{H}$ est G-verselle. Par ailleurs, f est G-équivalent, en tant que germe, (i.e., au sens de 1.1) à h car z et z_0 sont G-équivalents et G-suffisants; il existe donc $\tau \in$ Diff (n) et $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, G)$ tels que

$$h(x) = g(x) \cdot f \circ \tau(x).$$

Posons $\widetilde{F}(x, u) = g(x) \cdot F(\tau(x), u)$; alors $\widetilde{F}$ est une déformation de h car

$$\widetilde{F}(x, 0) = g(x) \cdot F(\tau(x), 0) = g(x) \cdot f \circ \tau(x) = h(x).$$

La G-versalité de $\widetilde{H}$ entraîne donc l'existence de

$$M \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q, G) \quad \text{et} \quad \Phi = (\phi, \psi) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q)$$

tels que:

$$\widetilde{F}(x, u) = M(x, u) \cdot \widetilde{H}(\Phi(x, u));$$

$$\Phi(x, u) = (\phi(x, u), \psi(u));$$

$$\Phi(x, 0) \equiv x \text{ et } M(x, 0) \equiv e.$$

Mais

$$F(x, u) = m'(x) \cdot \widetilde{F}(\tau^{-1}(x), u)$$

où

$$m'(x) = (g(\tau^{-1}(x)))^{-1},$$

d'où

$$\begin{aligned} F(x, u) &= m'(x) \cdot M(\tau^{-1}(x), u) \cdot \widetilde{H}(\Phi(\tau^{-1}(x), u)) \\ &= M'(x, u) \cdot \bar{H}(x_0 + \phi(\tau^{-1}(x), u), u_0 + \psi(u)) \end{aligned}$$

où $M'(x, u) = m'(x)M(\tau^{-1}(x), u)$. Par conséquent, F est, en (0, 0), G-équivalent à $\bar{H}$ en (x_0, y_0).

(ii) (4.3.4) $\Rightarrow$ (4.3.2). Soit U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$, et soit $\bar{F}$ un représentant de F sur U. Le théorème de transversalité ([**8**, p. 321]) et la G-stabilité de F entraîne qu'il existe $H \in C^\infty(U, \mathbf{R}^p)$ telle que $\bar{F}$ en (0, 0) soit G-équivalent à $\bar{H}$ en un point $(x_0, y_0) \in U$ et telle que $j_*^k\bar{H}$ soit transverse à $O^k_{j^k(f)}$ en tout point de U, pour tout $k \in \mathbf{N}$. Soit $\widetilde{H}$ définie sur un voisinage de (0, 0) par

$$\widetilde{H}(x, u) = \bar{H}(x_0 + x, u_0 + u);$$

ainsi, $j_*^k\bar{H}$ est transverse à $O^k_{j^k(f)}$ en (0, 0) pour tout $k \in N$, et $\widetilde{H}$ est en (0, 0) G-équivalent à $\bar{F}$ en (0, 0). En particulier

$$\widetilde{H}(x, u) = M(x, u) \cdot \bar{F}(\Phi(x, u))$$

où M et Φ sont comme en 4.1. Posons $\bar{h}(x) = \widetilde{H}(x, 0)$; on a

$$\bar{h}(x) = \widetilde{H}(x, 0) = M(x, 0) \cdot \bar{F}(\phi(x, 0)0) = M(x, 0) \cdot f(\phi_0(x)),$$

d'où le germe h de $\bar{h}$ en 0 est G-équivalent (au sens de 1.1) à f. Par conséquent,

$$O^k_{j^k(f)} = O^k_{j^k(h)} \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{N};$$

il en résulte que le germe H de $\widetilde{H}$ en (0, 0) est G-k-transverse pour tout $k \in \mathbf{N}$ car $j_*^k\widetilde{H}$ est transverse à $O^k_{j^k(f)}$ en (0, 0) pour tout $k \in \mathbf{N}$. D'après l'équivalence de (4.3.2) et (4.3.3) H est G-verselle. D'autre part, ayant H en (0, 0) G-équivalente à $\bar{F}$ en (0, 0), on vérifie alors aisément que F est G-verselle.

5. *G*-versalité dans le cas de changements restreints de coordonnées. Il importe dans certaines situations (e.g. en théorie de la bifurcation [**3**]) de distinguer entre les différents paramètres d'une déformation. A cette fin, on introduit une relation d'équivalence entre les germes qui respecte une certaine fibration de l'espace de départ. Ceci nous amène à poser la définition suivante:

Définition 5.1. $f \in \mathscr{E}^p_{n+s} = \mathscr{E}^p_{x,\lambda}$ est dit *$G(n, s)$-équivalent à* $f' \in \mathscr{E}^p_{x,\lambda}$ s'il existe $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+s}, G)$ et $\tau = (\phi, \psi) \in \mathrm{Diff}(n + s)$ tels que

$$f'(x, \lambda) = g(x, \lambda)(f \circ \tau(x, \lambda)),$$

où

$$\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^s, \mathbf{R}^n) \quad \text{et} \quad \psi \in C_o^\infty(\mathbf{R}^s, \mathbf{R}^s).$$

La notion de $G(n, s)$-versalité se définit comme suit:

Définition 5.2. Une déformation $F \in \mathscr{E}^p_{n+s+q}$ de $f \in \mathscr{E}^p_{n+s}$ est dite *$G(n, s)$-verselle* si toute autre déformation H de f est induite par f de la façon suivante: disons que $H \in \mathscr{E}^p_{n+s+q'}$, alors il existe

$$M \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^{q'}, G) \quad \text{et}$$
$$\Phi \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^{q'}, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^q)$$

tels que:

(i) $H(x, \lambda, v) = M(x, \lambda, v) \cdot F(\Phi(x, \lambda, v))$;

(ii) $\Phi(x, \lambda\ v) = (\phi(x, \lambda, v), \psi(\lambda, v), \theta(v))$ où $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^{q'}, \mathbf{R}^n)$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^{q'}, \mathbf{R}^s)$ et $\theta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{q'}, \mathbf{R}^q)$;

(iii) $\Phi(x, \lambda, 0) \equiv (x, \lambda, 0)$ et $M(x, \lambda, 0) \equiv e$.

On peut alors, dans ce contexte, définir les notions analogues à celles des sections précédentes. On montre, en utilisant les mêmes méthodes, le théorème suivant qui précise et prolonge certains résultats de Golubitsky-Schaeffer [**3**]:

THÉORÈME 5.3. *Soit $F \in \mathscr{E}^p_{x,\lambda,u}$ une déformation de $f \in \mathscr{E}^p_{x,\lambda}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

(5.3.1) *F est $G(n, s)$-verselle.*

(5.3.2) *F est $G(n, s)$-infinitésimalement verselle.*

(5.3.3) *F est $G(n, s)$-k-transverse pour tout $k \in \mathbf{N}$.*

(5.3.4) *F est $G(n, s)$-stable.*

Nous ne ferons pas la démonstration, nous nous contenterons de faire les remarques suivantes à la suite desquelles il est possible d'utiliser les démonstrations, mutadis mutandis, des résultats des sections précédentes.

Remarques 5.4.

(5.4.1) Ici la $G(n, s)$-versalité infinitésimale de F s'écrit:

$$\mathcal{E}^p_{x,\lambda} = M_f(\mathcal{E}^l_{x,\lambda} \oplus \mathcal{E}^n_{x,\lambda}) + N_f(\mathcal{E}^s_\lambda) + \mathbf{R}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_i}(x, \lambda, 0)\right\}$$

où

$$M_f(\mu, \nu)(x, \lambda) = \langle A, \mu(x, \lambda) \rangle \cdot f(x, \lambda) + \langle D_x f(x, \lambda), \nu(x, \lambda) \rangle$$

et

$$N_f(\eta)(x, \lambda) = \langle D_\lambda f(x, \lambda), \eta(\lambda) \rangle.$$

(5.4.2) La $G(n, s)$-k-transversalité de F se traduit par

$$\mathcal{E}^p_{x,\lambda} = M_f(\mathcal{E}^l_{x,\lambda} \oplus \mathcal{E}^n_{x,\lambda}) + N_f(\mathcal{E}^s_\lambda) + \mathbf{R}\left\{\frac{\partial F}{\partial u_i}(x, \lambda, 0)\right\} + \mathfrak{m}^{k+1}_{x,\lambda}\mathcal{E}^p_{x,\lambda}.$$

(5.4.3) Un jet $z \in J^k(n + s, p)$ est $G(n, s)$-suffisant si et seulement si, pour tout $f \in \mathcal{E}^p_{x,\lambda}$ tel que $j^k(f) = z$, on a

$$M_f(\mathcal{E}^l_{x,\lambda} \oplus \mathfrak{m}_{x,\lambda} \cdot \mathcal{E}^n_{x,\lambda}) + N_f(\mathfrak{m}_\lambda \mathcal{E}^s_\lambda) \supset \mathfrak{m}^{k+1}_{x,\lambda} \cdot \mathcal{E}^p_{x,\lambda}.$$

Ceci se démontre en utilisant la même méthode que [**1**] sauf que là où on utilise le lemme de Nakayama, il faut employer le théorème de préparation.

6. Exemples. Dans ce qui suit, $G = Gl_1(\mathbf{R})$.

Considérons l'équation $x^3 - \lambda x = 0$ que l'on rencontre, par exemple, dans le problème de flambement d'une poutre (voir e.g. [**3**]). On peut dans ce cas considérer que x est la déviation maximale de la poutre et que λ est la force exercée aux extrémités de la poutre.

6.1. Le germe en (0, 0) de $x^3 - \lambda x$ est de $G(1, 1)$-codimension 2 et une déformation $G(1, 1)$-verselle est donnée par $x^3 - \lambda x + \beta x^2 + \alpha$. Dans le cas du problème de flambement d'une poutre, α et β représentent respectivement la courbure initiale de la poutre et une force normale exercée au centre de la poutre.

6.2. Considérons $x^3 - \lambda x$ comme une déformation à un paramètre de x^3, alors il faut ajouter un second paramètre pour obtenir une déformation $G(1, 0)$-verselle de x^3. En fait, dans ce cas, $x^3 - \lambda x + \alpha$ est une déformation $G(1, 0)$-verselle de x^3.

Notons qu'en 6.1 l'on ne permet pas de "mélange" du paramètre (de bifurcation) λ avec les paramètres externes (imperfections) α et β, tandis qu'en 6.2 les paramètres λ et α sont traités sur le même pied. La première façon d'aborder le problème est plus adéquate: nous renvoyons le lecteur à la discussion dans [**3**], p. 27.

6.3. Considérons l'équation $x^3 - \lambda x + \beta x^2 = 0$ que l'on recontre aussi dans le problème (perturbé) de flambement d'une poutre. Ici, β représente une force normale exercée au centre de la poutre.

Si ce problème est traité comme un problème de $G(1, 2)$-stabilité, il est facile de voir que $x^3 - \lambda x + \beta x^2$ est de $G(1, 2)$-codimension infinie.

D'autre part, on peut considérer $x^3 - \lambda x + \beta x^2$ comme une déformation à un paramètre de $x^3 - \lambda x$. On est ainsi ramené au cas 6.1.

Si, par contre, $x^3 - \lambda x + \beta x^2$ est considéré comme un déformation à un paramètre de $x^3 + \beta x^2$, on a un problème de codimension infinie i.e., $x^3 + \beta x^2$ est de $G(1, 1)$-codimension infinie.

Ces quelques exemples simples illustrent l'importance, en théorie de la bifurcation perturbée, d'établir une hiérachie entre les différents paramètres; nous renvoyons encore le lecteur à la discussion dans [**3**], p.27.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. J. Gervais, *Sufficiency of jets*, Pacific Journal of Math. *72* (1977), 419-422.

2. ——— *Critères de G-stabilité en termes de transversalité*, Can. J. Math. *31* (1979), 264-273.

3. M. Golubitsky and D. Schaeffer, *A theory for imperfect bifurcation via singularity theory*, Comm. Pure Appl. Math. *32* (1979), 21-98.

4. J. C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Ergebnisse Band *71* (Springer-Verlag, New York, 1972).

5. ——— *$\mathcal{G}$-stabilité des germes d'applications différentiables*, Séminaire d'analyse de Rennes (1971).

6. G. Wasserman, *Stability of unfoldings*, Springer Lecture Notes *393* (New York, 1974).

7. V. M. Zakalyukin, *The versality theorem*, Functional Anal. Appl. 7 (1973), 110-112.

8. C. Zeeman, *The classification of elementary catastrophes of codimension* $\leqq$ 5, Springer Lectures Notes *525* (New York, 1976), 263-327.

Université Laval,
Québec, Québec

https://doi.org/10.4153/CJM-1984-002-9 Published online by Cambridge University Press