ASTIN COLLOQUIUM 1965 LUCERNE

SUBJECT ONE

THE RECENT DEVELOPMENT OF RISK THEORY AND ITS APPLICATIONS

https://doi.org/10.1017/S0515036100010679 Published online by Cambridge University Press

REGARDS SUR LE DÉVELOPPEMENT RÉCENT DE LA THEORIE DU RISQUE

Conférence sur le thème no 1

P. Thyrion
Bruxelles

Trois traits caractérisent, me semble-t-il, le développement récent de la théorie du risque et influencent donc l'exposé dont notre Président m'a chargé, avec une amabilité tellement pressante que je n'ai pu m'y dérober.

Le temps n'est plus où l'on pouvait déplorer un manque d'intérêt des actuaires pour la théorie du risque: tel est le trait le plus immédiatement évident. ASTIN y a certainement contribué. Le cercle restreint d'adeptes — dirais-je d'initiés — a éclaté. Les idées traversent les frontières et même l'océan. Ce faisant, elles s'enrichissent au passage, se généralisent, ou bien encore rencontrent une idée-soeur qui leur ressemble parfois comme une jumelle mais porte un autre nom. On voit les idées „reçues" se heurter à des conceptions rajeunissantes. On voit aussi les nécessités pratiques infléchir la théorie. Bref il se produit un véritable bouillonnement de recherches et d'applications, des plus heureux pour la théorie du risque, mais des plus pénibles pour le conférencier qui voudrait en cerner convenablement l'évolution. Pour ce faire, l'ampleur et la diversité des publications exigeraient un professionnel en la matière, disposant du temps voulu pour s'informer complètement. Ce n'est pas mon cas et cela explique — et excusera, je l'espère — le cadre délibérément restreint de mon exposé. Car je n'ai pas l'intention de suivre la théorie dans ses multiples démarches récentes et dans tous ses perfectionnements les plus subtils. Je vous propose plutôt de jeter quelques regards sur le développement récent de la théorie du risque et ainsi de tenter de dégager et d'illustrer quelques idées essentielles sur cette évolution et d'essayer d'entrevoir son déroulement futur. Telles sont les limites de mon objectif.

La théorie du risque est née sous le signe „individuel". Puis la conception „collective" vint la revigorer puissamment. Mais il faut objectivement reconnaître que cela s'est fait, parfois et partiellement tout au moins, comme une sorte de réaction contre la conception „individuelle". Cette espèce d'antagonisme entre les deux conceptions s'est effacé: tel est le deuxième trait caractéristique de l'évolution. Les divers concepts se sont fondus dans la théorie plus générale des processus stochastiques et plus particulièrement des processus stochastiques discontinus. Les pionniers les plus éclairés de la théorie collective du risque avaient eux-mêmes annoncé cette évolution. Elle n'enlève d'ailleurs rien à l'intérêt des schémas mathématiques qui se sont édifiés sous l'un ou l'autre vocable; bien au contraire, elle les enrichit.

Le principal trait caractéristique me paraît être le troisième: c'est une extension — ou tout au moins l'amorce d'une extension — de la notion même de théorie du risque et par conséquent des objectifs qu'elle poursuit. Je reviendrai plus amplement sur ce trait tout à l'heure car il me dicte mon plan. Je consacrerai la première partie de mon exposé à l'évolution récente de la théorie du risque dans son acception classique. Dans une seconde partie, j'aborderai l'évolution de la notion même de théorie du risque.

I. Evolution de la théorie classique du risque

I. 1. Une formule déjà ancienne définit l'acception classique de la théorie du risque par son objet qui est l'analyse mathématique des fluctuations aléatoires dans les opérations d'assurance et l'étude des moyens de parer aux inconvénients qui en découlent. Sous cette acception, une bonne partie des travaux sur la théorie du risque se rangent d'une manière un peu simpliste en deux grandes classes: l'étude du problème de la ruine et l'étude de certaines fonctions de répartition nécessaires pour analyser les fluctuations aléatoires d'une opération d'assurance.

Quel que soit l'intérêt que suscite toujours le problème de la ruine, par exemple dans la question bien actuelle des marges de solvabilité, on observe cependant que le centre de gravité des recherches récentes s'est déplacé du problème de la ruine vers l'étude des fonctions de répartition.

On observe aussi que ces recherches constituent un effort ininter-

https://doi.org/10.1017/S0515036100010679 Published online by Cambridge University Press

rompu pour adapter les schémas théoriques à la complexité des phénomènes réels, c'est-à-dire aux exigences pratiques.

Cet effort d'adaptation revêt trois aspects:

— généralisation de schémas anciens et de leurs propriétés;
— influence sur les recherches, des problèmes soulevés par la réassurance;
— recours à des outils nouveaux.

I. 2. On peut illustrer le premier aspect en considérant tout d'abord la plus importante des fonctions de répartition, celle du coût total des sinistres frappant un risque ou un ensemble de risques pendant un intervalle de temps déterminé. Cette variable dépend de la variable „nombre de sinistres survenus pendant cet intervalle de temps" et de la variable „coût d'un sinistre si l'on sait qu'il est survenu".

L'évolution dans le temps de la variable X (t) „coût total des sinistres" se représente graphiquement par un escalier doublement

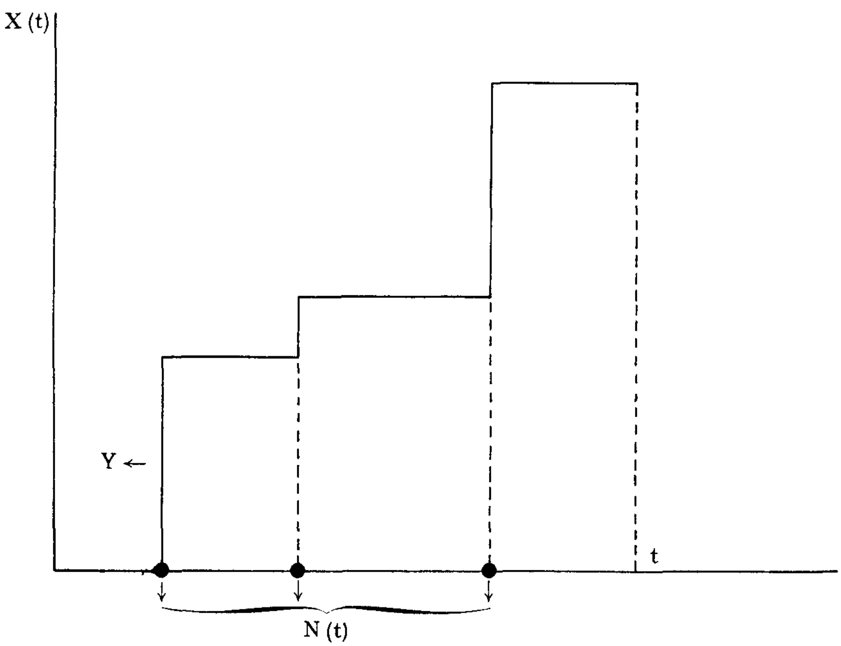


Fig. 1

aléatoire, par le nombre $N(t)$ de ses marches et par la hauteur Y de chacune d'elles. Cela revient à considérer $X(t)$ comme la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires. On a suggéré également de traiter $X(t)$ comme le produit de deux variables aléatoires, le nombre de sinistres et le coût moyen de chacun d'entre eux; mais il est clair que dans ce cas les deux variables de base ne sont jamais indépendantes.

Je me propose plutôt d'inscrire quelques recherches récentes sur la fonction de répartition de $X(t)$, dans le chapitre du calcul des probabilités qui traite de la transformation des fonctions de répartition ou bien de la transformation des fonctions caractéristiques.

On sait que la propriété fondamentale de transformation s'énonce comme suit:

si $S(x;\lambda)$ est une fonction mesurable de λ, qui pour toute valeur de λ est une fonction de répartition en x,
et si $U(\lambda)$ est une fonction de répartition quelconque,
alors $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x;\lambda)\, dU(\lambda)$ est aussi une fonction de répartition.
Autrement dit, si $z(u;\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\, d_x S(x;\lambda)$ est la fonction caractéristique de la variable $(x \mid \lambda)$ dont la fonction de répartition est $S(x;\lambda)$ pour toute valeur de λ, alors

$$z_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(u;\lambda)\, dU(\lambda)$$

est aussi une fonction caractéristique.

En la considérant sous cette forme, on dira que F est une loi S composée par la fonction de structure U: c'est, si l'on veut, une moyenne pondérée sur λ de lois $S(x;\lambda)$. S peut, par exemple, être la loi de probabilité d'une variable entière non négative; le cas le plus connu parmi les actuaires est certainement la loi de Poisson composée.

Un autre cas intéressant est celui où $S(x;\lambda) = S^{\lambda}(x)$, $S(x)$ étant une loi de répartition quelconque et λ étant > 0 quelconque. On obtient la loi $F(x) = \int_{0}^{\infty} S^{\lambda}(x)\, dU(\lambda)$ dont nous rencontrerons une application tout à l'heure. Mais le cas qui nous intéresse particulièrement est celui où λ est une variable entière non négative que nous noterons alors N et où $S\ (x;\ n) = S^{n*}(x)$, convoluée d'ordre n de $S\ (x)$ avec elle-même. Définissons la loi de probabilité de N par prob $(N = n) = P_n$ avec $\sum\limits_{n=0}^{=\infty} P_n = 1$

On a alors $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{=\infty} P_n \,.\, S^{n*}(x)$

ou bien $\quad z_X(u) = \sum\limits_{n=0}^{=\infty} P_n \,.\, z^n(u) = g_N[z(u)]$

si $g_N(z) = \sum\limits_{n=0}^{=\infty} P_n \,.\, z_n\ (|z| \leq 1)$ est la fonction génératrice de N.

Cette loi est précisément celle de la variable $X\ (t)$ définie ci-dessus dans l'hypothèse où les variables N et Y sont stochastiquement indépendantes et où les variables Y successives sont elles-mêmes stochastiquement indépendantes et identiques. Nous appellerons $X\ (t)$ une variable N généralisée par la généralisante Y dont la fonction caractéristique est $z\ (u)$; la généralisation signifie concrètement que la hauteur des marches de l'escalier, au lieu d'être uniformément unitaire, est régie par les valeurs prises successivement par la variable aléatoire Y.

Dans le cas où Y est elle-même entière non négative, il est clair que X l'est aussi et nous dirons alors que X obéit à une loi N par grappes Y, le mot „grappes" concrétisant le fait que la hauteur des marches est toujours un nombre entier. La transformation se traduit alors, à l'aide des fonctions génératrices respectives des 3 variables, par

$$g_X(z) = g_N[g_Y(z)]$$

I. 3. L'évolution des recherches sur $X\ (t)$ se traduit par la succession des hypothèses faites sur la nature des lois de probabilité des deux variables de base. En ce qui concerne la variable N on peut les résumer en disant qu'un très grand nombre de lois composées ou par grappes ont été largement explorées. Je ne compte pas m'engager — pour ne pas risquer de m'y perdre — dans tous les méandres de ces recherches, d'autant plus qu'il m'a été donné d'en décrire quelques-uns lors du précédent colloque à Trieste. Je préfère illustrer par deux exemples les constatations suivantes:

— en premier lieu, une bonne partie des travaux récents aboutit à une large généralisation de propriétés démontrées tout d'abord à l'occasion d'études sur la théorie collective du risque dans sa forme première, c'est-à-dire avec la variable N obéissant à une loi de Poisson pure; les résultats ont, comme c'est souvent le cas, progressé pas à pas, de cas particulier en cas un peu plus général pour atteindre finalement une forme que l'on qualifierait volontiers de définitive si l'on n'avait appris à rester prudent en cette matière;

— en second lieu, ainsi qu'il est assez courant en mathématique, plus les propriétés considérées prennent une forme générale, plus leur démonstration apparaît simple dans son idée fondamentale et plus il semble évident, par des raisonnements heuristiques, qu'il devait bien en être ainsi.

Voyons-en un exemple.

I. 4. Un des premiers aménagements des hypothèses fondamentales a été de considérer le cas où la loi de probabilité de la variable Y, coût d'un sinistre, dépend de l'instant τ où survient le sinistre. Les diverses variables $Y(\tau)$ successives ne sont donc plus identiques. Notons $z(u; \tau)$ la f.c. de la variable $Y(\tau)$, coût d'un sinistre survenant à l'instant τ. Le résultat définitif obtenu à cet égard est le suivant: si la loi de probabilité du nombre de sinistres intervenant dans la variable $X(t)$ est une loi de Poisson composée au sens restreint, c'est-à-dire une loi de la forme $P(n; t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dU(\lambda)$, $U(\lambda)$ étant une loi de répartition quelconque d'une variable non négative λ et ne dépendant pas du temps, alors on peut remplacer les variables $Y(\tau)$ successives par une variable moyenne $\overline{Y}_t$ ne dépendant plus de τ et dont la f.c. est donnée par

$$\bar{z}(u; t) = \frac{1}{t} \int_0^t z(u; \tau)\, d\tau \tag{1}$$

On est arrivé finalement à cette propriété fort générale par diverses extensions successives de la propriété initiale qui avait été démontrée dans la théorie collective du risque pour le cas où N obéissait

https://doi.org/10.1017/S0515036100010679 Published online by Cambridge University Press

à une loi de Poisson pure. Si l'on réfléchit quelque peu sur la signification de la formule (1), on se convainc facilement que cette propriété devait s'appliquer à toute loi de Poisson composée. En effet, il est conforme au bon sens de considérer la variable $\overline{Y}_t$ comme une variable $Y(\tau)$ composée par le paramètre τ, car on ne voit pas bien ce qu'elle pourrait être d'autre; donc on peut écrire en toute généralité sa fonction caractéristique par la transformation

$$\bar{z}\,(u\,;\,t) = \int_0^t z\,(u\,;\,\tau)\; d\,V(\tau)$$

$V\,(\tau)$ étant la fonction de répartition de τ dans l'intervalle $(0\,;\,t)$. Toute la question revient à déterminer $V\,(\tau)$. Or, considérons pour être bref le cas d'un seul sinistre survenu pendant l'intervalle $(0\,;\,t)$. Si le nombre de sinistres obéit à n'importe quelle loi de Poisson composée au sens restreint et si l'on sait qu'un sinistre est survenu dans l'intervalle $(0,\,t)$, on voit aisément par les probabilités a posteriori que ce sinistre est survenu au hasard entre 0 et t. Donc la variable τ a comme fonction de fréquence $d\,V\,(\tau) = 1/t\,d\,\tau$. Dès lors on retrouve ainsi par un raisonnement heuristique la formule démontrée rigoureusement par ailleurs.

I. 5. Le schéma fondamental de la théorie collective du risque suppose que la loi P_n est une loi de Poisson dont la fonction génératrice est $g\,(z) = e^{\lambda t\,(z-1)}$ si $\lambda\,t$ est le paramètre de la loi de Poisson. Dès lors, la fonction caractéristique $z_X\,(u)$ prend la forme $z_X\,(u) = e^{\lambda t\,[z\,(u)-1]}$ (2). La fonction de répartition qui correspond à (2) a été largement étudiée dans la théorie collective du risque, au regard notamment de la probabilité de ruine et des expressions approchées ou asymptotiques.

Lorsque le schéma initial s'est transformé, par l'utilisation de lois plus adéquates aux résultats d'expérience que la loi de Poisson, il a naturellement paru intéressant de rechercher les schémas qui pouvaient se ramener à la fonction caractéristique du type simple (2) et bénéficier ainsi des nombreuses études dont elle a été l'objet. En cette matière également, on a obtenu des résultats généraux qui se démontrent sans plus de difficulté que les cas particuliers qui y ont finalement conduit et qui s'expliquent aisément par des raisonnements heuristiques.

https://doi.org/10.1017/S0515036100010679 Published online by Cambridge University Press

Il a été rappelé plus haut que la variable $N(t)$ qui obéirait à une distribution de Poisson par grappes, conjuguant

— une loi de probabilité de Poisson de paramètre λt pour le nombre de grappes ou lots de sinistres;

— une loi p_K ($k = 1, 2, \ldots ; \sum_{k=1}^{\infty} p_K = 1$) quelconque pour le nombre de sinistres dans une grappe,

aurait comme fonction génératrice

$$g_N(z) = e^{\lambda t [g_K(z)-1]}$$

avec $g_K(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_K \cdot z^k$, fonction génératrice de K.

La fonction caractéristique de la variable $X(t)$ qui y correspondrait s'obtiendrait en y remplaçant z par $z(u)$, fonction caractéristique de la variable Y et s'écrirait donc

$$z_X(u) = \exp. \{\lambda t [g_K(z(u)) - 1]\}$$

ou encore

$$z_X(u) = e^{\lambda t [z_1(u)-1]}$$

en posant $z_1(u) = g_K[z(u)]$, car $z_1(u)$ est toujours la fonction caractéristique d'une variable Y_1, en vertu de la propriété de transformation rappelée plus haut.

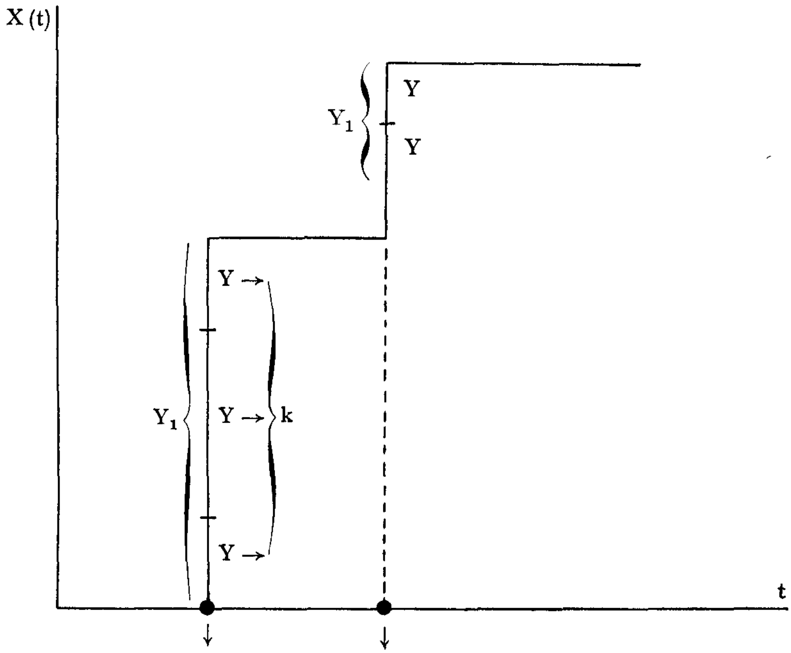
Il est donc clair que ce cas se ramène également à la fonction caractéristique canonique de la théorie collective du risque dans sa version première.

Cette propriété apparaît tout-à-fait intuitive, dans toute sa généralité, si l'on considère l'escalier aléatoire concrétisant $X(t)$. Si la loi du nombre de sinistres est une loi de Poisson par grappes, cet escalier a un nombre de marches régi par une loi de Poisson pure, tandis que la hauteur de chacune d'entre elles est un nombre aléatoire k de variables aléatoires Y.

Il est clair que cela doit revenir au même de considérer que la hauteur de chacune des marches est définie par une seule variable aléatoire Y_1, résultante des k variables Y. Dépouillée de tout son appareil mathématique et réduite à son axe principal, cette propriété se ramène à cette constatation fort simple. Or elle est l'aboutissement de nombreux travaux dans lesquels on a montré succes-

https://doi.org/10.1017/S0515036100010679 Published online by Cambridge University Press

sivement que diverses lois de Poisson composées, allant de la loi binomiale négative à d'autres de plus en plus compliquées, permettaient de ramener la fonction caractéristique de la variable $X(t)$ à la forme simple donnée en (2). Au fond c'est parce que ces diverses lois pouvaient être interprétées comme des lois de Poisson par grappes que la dite transformation était possible et non parce que ces lois étaient des lois de Poisson composées. Mais en fait on a constaté également que l'on pouvait interpréter comme lois de



(Loi de Poisson) Fig. 2

Poisson par grappes une très vaste famille de lois de Poisson composées dont la forme canonique est la suivante:

$$P(0; t) = e^{\theta(t)}$$

$$P(n; t) = (-1)^n \frac{t^n}{n!} P^{(n)}(0; t)$$

avec $\theta(0) = 0$

$\theta(t)$ indéfiniment dérivable et telle que $(-1)^n \theta^{(n)}(t) \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.

https://doi.org/10.1017/S0515036100010679 Published online by Cambridge University Press

Je n'ai délibérement pas choisi ces deux exemples parmi les plus compliqués. Mais on en trouverait aisément d'autres plus complexes qui confirmeraient combien il est utile de dépouiller les résultats de leur gangue mathématique parfois bien lourde, pour en extraire les idées fondamentales qui sont assez souvent simples.

I. 6. A côté de recherches sur la forme analytique de la loi de répartition de $X(t)$, les nécessités pratiques ont stimulé l'étude des méthodes approchées de calcul numérique de cette fonction de répartition. A cet égard, on constate également une généralisation de résultats antérieurs. La théorie collective du risque avait proposé, il y a longtemps déjà, une méthode de calcul approché de $F(x;t)$ pour le cas où le nombre de sinistres obéissait à une loi de Poisson. Cette méthode faisait appel à la fonction de répartition auxiliaire $\bar{F}(x;t)$ définie par

$$d\bar{F}(x;t) = \frac{e^{hx}\,dF(x;t)}{\int_0^\infty e^{hx}\,dF(x;t)}$$

l'intégrale au dénominateur étant convergente pour toute valeur réelle de h dans l'intervalle $-H_1 < h < H_2$.

L'idée fondamentale de la méthode était que le développement en série de Edgeworth s'appliquait mieux à la fonction auxiliaire $\bar{F}$ qu'à la distribution de Poisson généralisée initiale F.

Cette méthode avait été étendue au cas où le nombre de sinistres obéissait à la loi binomiale négative. En fait il a été montré récemment que sous des conditions très générales cette méthode est applicable à des fonctions de répartition quelconques dont on connaît la fonction caractéristique.

Les estimations numériques de $F(x;t)$ se basent sur une approximation adéquate de $\bar{F}(x,t)$, fondée sur ses propriétés asymptotiques et tenant compte notamment de la région où il est spécialement important d'obtenir la meilleure précision pour F.

Une autre méthode d'estimation numérique consiste à encadrer la fonction $F(x,t)$ par 2 autres fonctions telles que l'on ait pour tout x

$$F_1(x,t) \leq F(x,t) \leq F_2(x,t)$$

les fonctions auxiliaires F_1 et F_2 étant définies par des transformations de la fonction caractéristique de F et étant calculées par la formule d'inversion à partir de ces fonctions caractéristiques modifiées.

La validité pratique de ces méthodes approchées a été testée tout récemment sur une large échelle par utilisation d'une calculatrice électronique.

I. 7. Il est clair que, parallèlement à ces études sur la loi $F(x, t)$ les nécessités pratiques devaient provoquer également des recherches sur la loi de répartition $S(x)$ du coût d'un sinistre si l'on sait qu'il est survenu. La loi exponentielle

$S(x; \lambda) = 1 - e^{-\lambda x}$, ($\lambda$ constante > 0) qui est une première approximation agréable dans les calculs ne convient généralement pas en pratique. De multiples formes de lois ont été proposées; ici également on constate que beaucoup d'entre elles s'obtiennent en appliquant à la loi exponentielle pure la formule générale de transformation que nous avons vue plus haut:

$$\text{soit, } S(x) = \int_0^\infty S(x; \lambda) dU(\lambda)$$

où $U(\lambda)$ est la fonction de répartition d'une variable λ non négative.

Tous comptes faits, il semble bien qu'une des meilleures lois au point de vue pratique soit encore celle où λ est une variable discrète prenant les valeurs λ_i avec des probabilités p_i, c'est-à-dire un polynôme d'exponentielles.

Mais il faut reconnaître que ce sujet laisse encore matière à réflexion et nous aurions peut-être intérêt à nous inspirer de recherches faites dans des domaines en apparence assez différents, mais où les schémas mathématiques fondamentaux sont néanmoins identiques, comme dans les files d'attente par exemple.

I. 8. Quoi qu'il en soit, nous avons souvent affaire à des distributions fort asymétriques et ceci nous conduit à un exemple d'influence des besoins de la réassurance sur les recherches. En effet, pour la réassurance, la partie importante de la loi est la queue de la distribution, sur laquelle précisément les données nécessaires pour effectuer les compensations sont le plus souvent fort insuffisantes. Dès lors il est naturel que des recherches récentes aient

https://doi.org/10.1017/S0515036100010679 Published online by Cambridge University Press

tenté de définir et de déterminer le type de courbe le plus dangereux (du point de vue du souscripteur) c'est-à-dire celui qui donne une limite supérieure de la prime dans un traité d'excess-loss.

La mesure de l'asymétrie par l'ancienne méthode du 3e moment normalisé ne paraissant pas suffisamment fine, divers critères nouveaux ont été proposés. On s'est, par exemple, inspiré du taux instantané de mortalité en assurance sur la vie: on a ainsi proposé de classer les lois de distribution du coût d'un sinistre selon la probabilité $\mu(x).dx$ qu'un sinistre dont on sait qu'il est au moins égal à x, n'excède pas $(x + dx)$. Plus $\mu(x)$ est petit, plus la distribution serait „dangereuse".

Dans cette optique, il a été suggéré que la loi de Pareto serait la courbe la plus dangereuse. Mais ce résultat, à première vue surprenant au regard de la théorie des séries, ne paraît pas définitif. Il a d'ailleurs été signalé tout récemment que la fonction de fréquence

$f(x) = \dfrac{A}{x^2 (\log x)^{1+\alpha}}$ $0 < \alpha \leq 1$, $x \geq c$, A constant, peut être plus dangereuse qu'une courbe de Pareto à valeur moyenne finie. Ce sujet reste donc ouvert pour de futures recherches.

I. 9. Les besoins de la réassurance ont encore influencé d'une autre manière l'évolution récente de la théorie du risque: il s'agit de la couverture du plus grand ou des k plus grands sinistres.

Les actuaires dans leurs recherches récentes ont vu leur attention attirée sur l'outil important que peut constituer la théorie des extrêmes, déjà utilisée dans d'autres sciences appliquées, mais peu exploitée jusqu'ici en assurance.

Un premier résultat a été d'obtenir la loi de répartition du sinistre le plus élevé qui s'écrit simplement

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \, . \, S^n(x) = g_N [S(x)]$$

si $S(x)$ est la loi de répartition du coût d'un sinistre et $g_N(z)$ est la fonction génératrice du nombre de sinistres N.

On retrouve donc ici une application, dans le discontinu, d'une transformation de fonction de répartition indiquée plus haut.

On s'est penché alors sur la loi de répartition du coût total des sinistres lorsque l'on en exclut les k plus élevés, c'est-à-dire sur

https://doi.org/10.1017/S0515036100010679 Published online by Cambridge University Press

la loi de répartition du coût total des sinistres pour un cédant qui aurait réassuré en totalité les k plus gros sinistres. On en a tiré également la loi de répartition du coût du k^e plus grand sinistre, d'où l'on a déduit par exemple la valeur moyenne du coût de la somme des k plus grands sinistres quand le coût d'un sinistre se distribue suivant une loi de Pareto. On est alors armé pour exprimer la prime — tout au moins la prime pure — d'un type de traité de réassurance proposé il y a une quinzaine d'années déjà et consistant à couvrir la somme des montants dont chacun des k plus grands sinistres dépasse le k^e.

D'autres recherches ont utilisé la théorie des extrêmes pour tenter de déterminer la queue de la loi de distribution du coût d'un sinistre. Mais ici également la question reste ouverte. Peut-on raisonnablement escompter que la théorie des extrêmes permette de suppléer à une insuffisance de renseignements statistiques? On remarque d'ailleurs que certaines formules approchées auxquelles conduit la théorie des extrêmes pour l'évaluation de la prime de réassurance en excess-loss sont identiques à celles que donnerait l'une ou l'autre hypothèse sur la forme analytique de la loi de répartition du coût d'un sinistre. Cette question offre donc un champ à explorer.

Il reste certes pas mal d'autres travaux récents sur la théorie du risque dans sa version classique. Je ne puis, sans risquer d'allonger exagérément cet exposé les détailler tous. On ne m'en voudra pas, je l'espère, de m'être borné à choisir quelques exemples qui illustrent assez bien 3 aspects de l'effort d'adaptation aux exigences pratiques que j'ai rappelés plus haut:

— généralisation de schémas et de propriétés précédents,
— influence des besoins de la réassurance,
— appel à des outils nouveaux.

II. Evolution du concept „théorie du risque"

II. 1. Ce dernier aspect se marque surtout dans l'évolution de la notion même de théorie du risque que je vous propose d'aborder maintenant.

Les mathématiques ont trouvé ces dernières années de larges applications dans les problèmes de gestion et d'administration des

https://doi.org/10.1017/S0515036100010679 Published online by Cambridge University Press

entreprises. Il est fatal que ce mouvement d'idées gagne les sciences actuarielles et y introduise les outils les plus appropriés pour résoudre les problèmes de gestion qui se posent aux entreprises d'assurance. Ces problèmes incluent notamment les méthodes de tarification, le niveau des réserves techniques et des réserves de sécurité, les divers aspects de la réassurance, la distribution de dividendes, les critères de choix, etc. Sans en arriver à la dénomination un peu présomptueuse de théorie de la décision dans les opérations d'assurance, il est incontestable que la théorie du risque tend progressivement à couvrir des problèmes plus larges ou bien à traiter des problèmes anciens dans une optique plus large.

N'est-il pas heureux pour les actuaires qu'il en soit ainsi ? Pour qu'ils ne se voient pas réduits au rôle de calculateurs plus ou moins pris au sérieux, les actuaires doivent non seulement maîtriser le hasard, mais aussi adapter leurs schémas à la réalité des phénomènes de la vie économique, c'est-à-dire aux besoins les plus fondamentaux de la pratique.

Cette évolution s'est amorcée, ainsi que nous allons le voir brièvement.

II. 2. Parmi les facteurs qui conditionnent l'action et à côté de l'aléatoire dont la théorie classique du risque s'est largement occupée, on doit relever d'une part la réaction des adversaires et, d'autre part, les critères de décision ou de choix que se fixe, implicitement ou explicitement, celui qui doit décider.

Dans notre sphère, la réaction des adversaires n'est pas seulement celle des concurrents, c'est aussi celle des clients, celle des réassureurs, ou bien celle des cédants si l'on est réassureur.

L'analyse mathématique de la réaction des adversaires a suscité l'étude des jeux stratégiques, dont il faut bien reconnaître que l'utilisation pratique reste encore loin en arrière de la théorie. Néanmoins cet outil a déjà influencé certains de nos travaux, notamment par le schéma de raisonnement et par les divers concepts qu'il introduit (stratégies pure et mixte, relations entre les joueurs, représentation des résultats par une matrice).

Mais sur un plan moins théorique, on peut remarquer que c'est essentiellement pour rencontrer au mieux les réactions des clients et des concurrents que s'est développée toute une série d'études sur la correction a posteriori de la tarification. Je me garderai d'empiéter sur le deuxième sujet de ce colloque, mais il est permis de considérer qu'il appartient à une version large de la théorie du risque.

Laissons donc ce point pour nous concentrer sur une orientation récente qui consiste au fond, comme je viens de le dire, à considérer les opérations d'assurance non seulement comme des processus aléatoires mais aussi comme des phénomènes économiques. Il est clair que l'on ne peut se borner à résoudre des problèmes de gestion par le critère de la maximisation de la grandeur moyenne du bénéfice. Appliqué par nos assurés, ce critère signifierait d'ailleurs la fin de notre activité. On ne peut traiter de manière réaliste les problèmes économiques, donc en particulier les problèmes de gestion en assurance, sans introduire certains éléments plus ou moins subjectifs. Il n'y a pas nécessairement une réponse incontestablement correcte à tout problème de gestion; des éléments subjectifs doivent jouer un rôle dans la théorie du risque. Un de ces éléments est l'attitude vis-à-vis du risque qui, moyennant quelques axiomes, peut être définie par une fonction d'utilité $u\ (S)$ mesurant l'utilité d'une certaine somme d'argent S. Si S est une aléatoire X de fonction de répartition $F\ (x)$, il a été proposé d'attacher à cette situation de risque la valeur moyenne de l'utilité, soit

$$E\,[u(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, d\, F(x)$$

Ce principe ou hypothèse de D. Bernouilli est discuté. Il se transforme en théorème grâce à quelques axiomes simples et intuitivement très acceptables. Il s'éclaire concrètement quand on analyse la liaison entre une fonction d'utilité et le concept d'aversion du risque, telle qu'elle a été proposée tout récemment de la manière suivante.

II. 3. Pour isoler le concept „aversion du risque", on compare deux situations de risque où les valeurs moyennes sont égales; soit par exemple:

— la situation I où l'on dispose avec certitude d'une somme x
— la situation II où l'on a 1 chance sur 2 de disposer d'une somme $(x + h)$
1 chance sur 2 de disposer d'une somme $(x - h)$.

https://doi.org/10.1017/S0515036100010679 Published online by Cambridge University Press

Supposons qu'à la situation I corresponde une utilité U_{I} et à la situation II une utilité U_{II}. L'aversion du risque se mesure alors naturellement par $U_{\mathrm{I}} - U_{\mathrm{II}}$.

Si nous admettons une fonction d'utilité $u(x)$ et l'hypothèse de Bernoulli, nous obtiendrons

$$U_{\mathrm{I}} = u(x)$$

$$U_{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}\left[u(x+h) + u(x-h)\right]$$

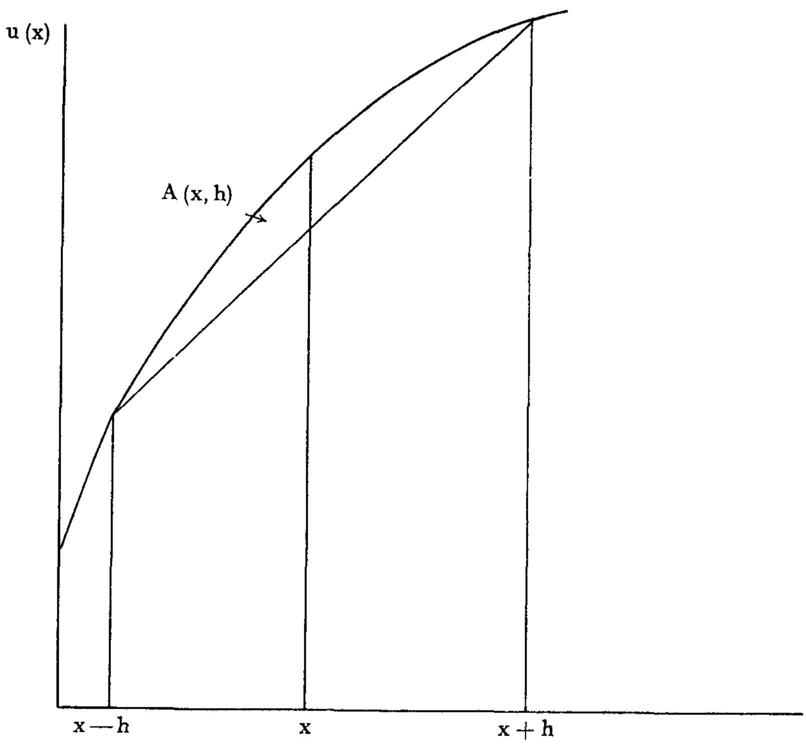


Fig. 3

d'où l'aversion du risque

$$A(x, h) = u(x) - \tfrac{1}{2}\left[u(x+h) + u(x-h)\right]$$

La définition même de $A(x, h)$ montre qu'elle jouit des propriétés suivantes

$A\ (x, 0) = 0$ pour tout x

$A\ (x, h) = A\ (x, -h)$ pour tous x et h

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{(x,\,h)} - \left(\frac{\partial^2 A}{\partial h^2}\right)_{(x,\,h)} = -\left(\frac{\partial^2 A}{\partial h^2}\right)_{(x,\,0)}$$

(la fonction A étant supposée être différentiable deux fois).

Cela étant, on a montré

— que toute fonction $A\ (x, h)$ qui possède les 3 propriétés indiquées est nécessairement de la forme $f\,(x) - \dfrac{f\,(x+h) + f\,(x-h)}{2}$

— que si deux fonctions d'utilité $u\ (x)$ et $v\ (x)$ engendrent la même aversion du risque $A\ (x, h)$ elles sont identiques à une expression linéaire près, laquelle ne joue aucun rôle dans l'expression de l'aversion.

Ainsi s'établit une certaine correspondance entre la fonction d'utilité et l'aversion du risque; il est amusant de remarquer que l'auteur de ce travail a trouvé une source d'inspiration dans la théorie des cordes vibrantes dont l'équation différentielle indiquée ci-dessus est le schéma mathématique de base.

Il est évident que si $u\ (x)$ est linéaire, $A\ (x, h) = 0$ pour tous x et h: il y a indifférence au risque et le critère de choix est uniquement celui de la valeur moyenne du bénéfice. Si $u\ (x)$ est de la forme parabolique $(-ax^2 + bx + c)$ (a et $b > 0$), $A\ (x, h) = a\,h^2$; l'aversion au risque ne dépend que de h et le critère de choix ne fait intervenir que les 2 premiers moments de la variable aléatoire. Une version plus plausible serait celle où l'aversion au risque varierait avec x et h: par exemple si $u\ (x) = -e^{-ax}$ $(a > 0)$, à une fonction linéaire près, ce qui est le cas le plus simple d'une fonction d'utilité définie par les fonctions trigonométriques hyperboliques de x, $A\ (x, h)$ est une fonction croissante de h et décroissante de x, ce qui répond à un comportement assez courant.

La *fonction d'utilité* étant choisie, l'objectif d'une entreprise opérant rationnellement dans l'incertain est de rendre $E\,[u\ (x)]$ maximum entre toutes les distributions possibles de x. Cette conception permet de reformuler certains problèmes qui se posent aux entreprises d'assurance: c'est ce travail qui constitue une extension de la version classique de la théorie du risque.

II. 4. Je ne détaillerai pas toutes les questions qui ont ainsi été réétudiées, depuis les problèmes de ruine jusqu'aux distributions de dividende en passant par les problèmes d'optimum en matière de réassurance: on les trouve dans d'excellents articles récents.

Il me suffit d'observer en bref et pour en revenir au point de vue probabilitaire qui reste tout de même fondamental, que la fonction d'utilité n'est autre chose qu'un opérateur qui, appliqué à des fonctions de répartition que l'on veut comparer, les classe sur la base d'une sorte d'amalgame de divers moments et non plus simplement sur l'un ou l'autre moment considéré isolément. Le classement ainsi établi dicte la conduite rationnelle, si la fonction d'utilité choisie traduit bien l'attitude de l'entreprise considérée vis-à-vis du risque.

Tout le problème pratique réside évidemment dans le choix adéquat de cette fonction d'utilité. Et l'on peut dire qu'ici aussi, comme pour les jeux stratégiques, la théorie devance la pratique.

La théorie ne se borne d'ailleurs pas à ce que je viens de rappeler. Elle a abordé l'analyse des problèmes de coopération entre parties qui ont des intérêts divergents, dans le but de permettre d'arbitrer les conflits sur des bases objectives. Elle a également étudié les jeux où tous les joueurs ne se conduisent pas rationnellement, c'est-à-dire les jeux contre la nature qui intéressent évidemment au tout premier chef les assureurs.

On voit ainsi une série d'outils non utilisés dans la théorie classique du risque s'y introduire progressivement. Leur mise en oeuvre n'enlève rien à l'intérêt de toutes les études classiques essentiellement probabilitaires. Au contraire, ces études demeurent la base indispensable. Mais les nouveaux outils permettent d'approcher certains problèmes d'une manière plus réaliste et ainsi d'utiliser à meilleur escient tous les travaux précédents. Bref au-delà de tous les concepts qui se sont rencontrés — sinon affrontés — dans la théorie du risque, mais grâce à eux tous, on entrevoit la possibilité d'une riche synthèse.

II. 5. Ceci me servira à la fois de supputation quant à l'évolution future de la théorie du risque dans son sens large et de conclusion finale.

Je pourrais dire aussi que le développement récent de la théorie du risque se conforme au développement scientifique actuel dans quelque branche que ce soit. On y observe l'influence de l'interpénétration de diverses disciplines scientifiques; nous venons de le voir à l'instant. On y exploite la similitude de phénomènes en apparence fort différents mais dont la structure logique est commune: ne trouve-t-on pas des expressions de probabilité de ruine tout à fait semblables à des expressions de fonction de distribution dans la théorie des files d'attente?

Au terme de cet exposé, je tiens à répéter que je n'ai pas voulu en faire une histoire des développements récents de la théorie du risque; j'ai simplement essayé de dégager quelques idées générales sur cette évolution. Ceci explique que je n'ai pas évoqué tous les travaux récents dignes d'intérêt. Dois-je préciser que j'en ai choisi certains non pas parce que je les jugeais supérieurs à d'autres, mais parce qu'ils servaient peut-être mieux mon propos.

L'objectif que j'ai visé explique aussi pourquoi je n'ai pas émaillé mon exposé des noms des auteurs des divers travaux auxquels je me suis référé; d'ailleurs j'aurais dû dans certains cas entreprendre des actions en recherche de paternité aussi délicates qu'elles le sont parfois en droit civil. En outre, la construction de l'édifice est une oeuvre commune. C'est pourquoi, les auteurs ne m'en voudront pas, je l'espère, si j'adopte résolument la méthode collective pour rendre l'hommage qu'ils méritent bien à tous ceux qui y ont participé, des pionniers dont certains travaux se prolongent encore maintenant aux novateurs dont les idées approfondissent ou rajeunissent les conceptions premières.