Tadato Matsuzawa
Nagoya Math. J.
Vol. 42 (1971), 43–55

SUR LES ÉQUATIONS $\mathbf{u}_{tt}+\mathbf{t}^{\alpha}\mathbf{u}_{xx}=\mathbf{f}$ $(\alpha\geqq 0)$

TADATO MATSUZAWA

§ 1. Introduction.

Le but principal de cette note est de démontrer les Théorème 4.2 et 6.1. Pour l'effectuer nous utiliserons la méthode de développement par les fonctions propres cf. [6]. Nous ne utilisons pas la méthode de la régularisation elliptique, mais les résultats de Baouendi [1] sont essentiels.

Nous démontrerons la régularité (dans le § 5) et l'analyticité (dans le § 6) de la solution des équations

$$u_{tt}+t^{2k}u_{xx}=f,\qquad k=0,1,2,\cdots \tag{1.1}$$

comme application de l'estimation obtenue dans le Théorème 4.2.

Nous notons que l'hypoellipticité des équations (1.1) a été déjà obtenue comme dans le cas particulier des résultats dans [1] et [3].

§ 2. Un problème de Dirichlet.

Soient $\Omega=(0<x<1)$, $Q=\Omega\times(0<t<T)$ et $\Gamma=\partial Q$.

Pour α réel $\geqq 0$, on considère l'espace de Hilbert $V=V(Q)$ comme suit:

$$V=\{u;\,u\in H^1(0,T;\,L^2(\Omega)),\ t^{\frac{\alpha}{2}}u\in L^2(0,T;\,H^1(\Omega))\}$$

avec la norme

$$\|u\|_V=(\|u\|^2_{L^2(Q)}+\|u_t\|^2_{L^2(Q)}+\|t^{\frac{\alpha}{2}}u_x\|^2_{L^2(Q)})^{\frac{1}{2}}$$

Posons:

$$\mathring{V}=\text{adhérence de } C_0^\infty(Q) \text{ dans } V=V(Q).$$

La norme de $\mathring{V}$ est équivalente à

$$(\|u_t\|^2_{L^2(Q)}+\|t^{\frac{\alpha}{2}}u_x\|^2_{L^2(Q)})^{\frac{1}{2}}$$

Received October 8, 1969.

DÉFINITION 2.1. Soit $f \in L^2(Q)$, nous appelons $u \in \mathring{V}$ une solution du problème de Dirichlet:

$$Lu = -u_{tt} - t^\alpha u_{xx} = f \quad \text{dans } Q, \tag{2.1}$$

$$u|_\Gamma = 0 \tag{2.2}$$

si u vérifie

$$(u_t, v_t) + (t^{\frac{\alpha}{2}} u_x, t^{\frac{\alpha}{2}} v_x) = (f, v) \tag{2.3}$$

pour tout $v \in \mathring{V}$. Ici (,) désigne le produit scalaire dans $L^2(Q)$.

Considérons la forme sesquilinéaire

$$E(u, v) = (u_t, v_t) + (t^{\frac{\alpha}{2}} u_x, t^{\frac{\alpha}{2}} v_x), \quad u, v \in \mathring{V}.$$

Evidemment, pour tout $v \in \mathring{V}$, la forme $u \to E(u, v)$ est continue sur $\mathring{V}$. De plus, il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$E(v, v) \geqq \gamma \|v\|^2_{\mathring{V}} \tag{2.4}$$

pour tout $v \in \mathring{V}$.

Et, la forme

$$v \to (f, v)$$

est continue sur $\mathring{V}$. Alors, par le théorème de Riesz, nous avons le théorème suivant:

THÉORÈME 2.1. Soit $f \in L^2(Q)$. Il existe une solution u unique dans $\mathring{V}$ pour le problème de Dirichlet (2.1), (2.2). On a l'inégalité

$$\|u\|_{\mathring{V}} \leqq C\|f\|_{L^2(Q)}. \tag{2.5}$$

La constante C ne dépend pas de $f \in L^2(Q)$. (Dans la suite, les C désignent des constantes diverses.)

§ 3. La méthode de développement par les fonctions propres.

Considérons le problème des valeurs propres:

$$X''(x) = \lambda X(x) \quad \text{dans} \quad \Omega = (0, 1), \tag{3.1}$$

$$X(0) = X(1) = 0. \tag{3.2}$$

Le système orthonormal des fonctions propres:

$$\left\{ g_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \pi\nu x, \qquad \nu = 1, 2, \cdots \right\}$$

est complet dans $L^2(\Omega)$ et vérifie

$$\frac{d^2}{dx^2} g_\nu(x) = -(\pi\nu)^2 g_\nu(x), \quad \nu = 1, 2, \cdots, \tag{3.3}$$

$$g_\nu \in \mathring{H}^1(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega}), \quad \nu = 1, 2, \cdots. \tag{3.4}$$

Pour $f(x, t) \in L^2(\Omega \times (0, T)) = L^2(Q)$, l'intégrale

$$f_\nu(t) = \int_\Omega f(x, t) g_\nu(x) dx$$

a un sens p.p. dans $(0, T)$ et on a

$$f(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x) f_\nu(t)$$

et

$$\|f(x, t)\|^2_{L^2(Q)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \|f_\nu(t)\|^2_{L^2(0,T)}.$$

Ensuite, désignons par $u_\nu = u_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \cdots$, les solutions du problème aux bords:

$$-u_{tt}(t) + (\pi\nu)^2 t^\alpha u(t) = f_\nu(t) \quad \text{dans } (0, T), \tag{3.5}$$

$$u_\nu(0) = u_\nu(T) = 0. \tag{3.6}$$

Les solutions $u_\nu(t)$ existent uniquement dans $\mathring{H}^1(0, T) \cap H^2(0, T)$.

THÉORÈME 3.1. La fonction

$$u(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x) u_\nu(t) \tag{3.7}$$

est la solution du problème de Dirichet défini dans le § 2 et appartient à $\mathring{V}$.

Démonstration. Posons

$$U_j(x, t) = \sum_{\nu=1}^{j} g_\nu(x) u_\nu(t),$$

$$F_j(x, t) = \sum_{\nu=1}^{j} g_\nu(x) f_\nu(t), \qquad j = 1, 2, \cdots.$$

Evidemment, $U_j \in \mathring{V}$, $j = 1, 2, \cdots$ et vérifient

(3.8) $$E(U_j, v) = (F_j, v)$$

pour tout $v \in \mathring{V}$. En vertu de (2.5), on a

$$\|U_j\|_{\mathring{V}} \leqq C\|F_j\|_{L^2(Q)}, \quad j = 1, 2, \cdots,$$

et

$$U_j \xrightarrow[\mathring{V}]{} u$$

Pour chaque v fixé dans $\mathring{V}$ faisons tendre j vers l'infini dans (3.8) on a

$$E(u, v) = (f, v). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

§ 4. Estimation principale.

Le but de ce § est la démonstration du théorème 4.2.

s étant un nombre réel, $H^s(R^1)$ est l'espace de Sobolev des distributions f, tempérées sur R^1 vérifiant

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^2(R^1) = H^0(R^1)$$

avec la norme

$$\|f\|_{H^s(R^1)} = \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi)\|_{L^2(R^1)},$$

$\hat{f}$ désignant la transformée de Fourier de f. $L^2_+(H^s(R^1))$ est donc l'espace des distributions u tempérées dans $R^2_+ = (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ telles que

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi, t) \in L^2_+(H^0(R^1)) = L^2(R^2_+),$$

$\hat{u}$ désignant la transformée de Fourier partielle de u par rapport à x.

Soit r un nombre réel: notons T_r l'opérateur défini par

$$(\widehat{T_r u})(\xi, t) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{r}{2}} \hat{u}(\xi, t),$$

T_r est une isométrie entre $L^2_+(H^s(R^1))$ et $L^2_+(H^{s-r}(R^1))$ pour tout nombre réel s.

Ensuite désignons par $W^1(\gamma, s)$ (c.f. ch. I. [1]) les classes de fonctions u telles que

(4.1) $$t^\gamma u \in L^2_+(H^s(R^1)),$$

(4.2) $$u_t \in L^2_+(H^0(R^1)) = L^2(R^2_+).$$

Nous prenons pour norme:

$$\|u\|_{W^1(\gamma,s)} = (\|u_t\|^2_{L^2(R^2_+)} + \|t^{\gamma}u\|^2_{L^2_+(H^s(R^1))})^{\frac{1}{2}}$$

si $u\in W^1(\gamma, s)$, par la condition $u_t\in L^2(R^2_+)$, il existe la trace $u(x,0)\in L^2(R^1)$. Désignons par $\mathring{W}^1(\gamma, s)$ les u appartenant à $W^1(\gamma, s)$ telles que $u(x,0)=0$. Nous avons le lemme suivant:

LEMME 4.1. (Le cas particulier des résultats dans le Ch.I. [1]). Pour tous nombres réels γ et β, vérifiant $-1\leqq\beta\leqq\gamma$, nous avons l'inclusion algébrique et topologique

$$\mathring{W}^1(\gamma, s)\subset\mathring{W}^1(\beta, s(1-\theta)). \tag{4.3}$$

avec $\theta=\dfrac{\gamma-\beta}{\gamma+1}$.

Et aussi, pour tous nombres réels γ et β, vérefiant $-\frac{1}{2}<\beta\leqq\gamma$, nous avons l'inclusion algébrique et topologique

$$W^1(\gamma, s)\subset W^1(\beta, s(1-\theta)), \tag{4.4}$$

avec $\theta=\dfrac{\gamma-\beta}{\gamma+1}$.

LEMME 4.2. Prenons $\zeta,\eta\in C_0^{\infty}((0,1)\times[0,T))$ telles que $\eta=1$ sur le support de ζ. Soient $f\in L^2(Q)$ et $u\in\mathring{V}(Q)$ la solution pour le problème de Dirichlet (2.1), (2.2). On a

$$\left\|\eta T\frac{1}{\alpha/2+1}\cdot\zeta u\right\|_{\mathring{W}^1\left(\frac{\alpha}{2},1\right)}\leqq C\|f\|_{L^2(Q)}. \tag{4.5}$$

La constante C ne dépend pas de $f\in L^2(Q)$.

Démonstration. Nous suivons le raisonnement dans le Ch. II, [1]. Soient $U_j=U_j(x,t)$ et $F_j=F_j(x,t)$ comme dans la démonstration du théorème 3.1.

Posons $M=\eta T\dfrac{1}{\alpha/2+1}\zeta$, et considérons les expressions

$$A_j = E(MU_j,\ MU_j),$$
$$B_j = E(U_j,\ M^*MU_j).$$

Utilisons le lemme 4.1 en prenant $\gamma=\frac{\alpha}{2}$, $s=1$, $\beta=0$ $\left(\text{donc } \theta=\frac{\alpha}{2}\Big/\frac{\alpha}{2}+1\right)$

les mêmes calculs qu'en Ch. I, II, [1]) nous donnent:

$$|A_j - B_j| \leqq C\|\eta U_j\|_{\mathring{W}^1\left(\frac{\alpha}{2},1\right)}\|MU_j\|_{\mathring{W}^1\left(\frac{\alpha}{2},1\right)}, \tag{4.6}$$

$$|B_j| \leqq |(F_j,\ M^*MU_j) \leqq \|F_j\|_{L^2(Q)}\|M^*MU_j\|_{L^2(Q)} \tag{4.7}$$

Comme M^* est un opérateur tangentiel d'ordre $\dfrac{1}{\alpha/2+1}$ et qu'on a l'inclusion $\mathring{W}^1\left(\dfrac{\alpha}{2},1\right)\subset\mathring{W}^1\left(0,\dfrac{1}{\alpha/2+1}\right)$ (par le lemme 4.1), nous obtenons

$$|B_j| \leqq \|F_j\|_{L^2(Q)}\|MU_j\|_{\mathring{W}^1\left(\frac{\alpha}{2},1\right)}. \tag{4.8}$$

Nous déduisons de (2.4), (4.6) et (4.8),

$$\|MU_j\|^2_{\mathring{W}^1\left(\frac{\alpha}{2},1\right)} \leqq \{C\|\eta U_j\|_{\mathring{W}^1\left(\frac{\alpha}{2},1\right)} + \|F_j\|_{L^2(Q)}\}\|MU_j\|_{\mathring{W}^1\left(\frac{\alpha}{2},1\right)}. \tag{4.9}$$

D'autre part, d'aprés (2.4) on a

$$\|\eta U_j\|_{\mathring{W}^1\left(\frac{\alpha}{2},1\right)} \leqq C'\|U_j\|_{V(Q)} \leqq C''\|F_j\|_{L^2(Q)}, \tag{4.10}$$

où les constantes C', C'' sont indépendantes de U_j et F_j. De (4.9) et de (4.10) on obtient le lemme 4.2 en faisant tendre j vers l'infini.

Lemme 4.3. Prenons $\zeta\in C_0^\infty((0,1)\times[0,T))$ quelconque. Soient $f\in L^2(Q)$ et $u(x,t)\in\mathring{V}(Q)$ la solution du problème de Dirichlet (2.1), (2.2). On a

$$\|t^{\frac{\alpha}{2}}\zeta u_x\|_{\mathring{V}(Q)} \leqq C\|f\|_{L^2(Q)}. \tag{4.11}$$

La constante C ne dépend pas de $f\in L^2(Q)$.

Démonstration. Soient $U_j=U_j(x,t)$ $F_j=F_j(x,t)$ comme ci-dessus. Comme $t^{\frac{\alpha}{2}}\zeta U_{jx}\in\mathring{V}$ on a

$$\|t^{\frac{\alpha}{2}}\zeta U_{jx}\|_{\mathring{V}} \leqq C'\|t^{\frac{\alpha}{2}}\zeta U_{jx}\|_{\mathring{W}^1\left(\frac{\alpha}{2},1\right)} \leqq C''E(t^{\frac{\alpha}{2}}\zeta U_{jx},\ t^{\frac{\alpha}{2}}\zeta U_{jx}) \quad [(2,4)].$$

En utilisant (4.5), (2.5) et l'inclusion

$$\mathring{W}^1\left(\frac{\alpha}{2},1\right)\subset\mathring{W}^1\left(\frac{\alpha}{2}-1,\frac{\alpha/2}{\alpha/2+1}\right) \quad [\text{Lemme } 4.1],$$

nous avons

$$E(t^{\frac{\alpha}{2}}\zeta U_{jx},\ t^{\frac{\alpha}{2}}\zeta U_{jx}) \leqq C'''\{\|F_j\|_{L^2(Q)}\|t^{\frac{\alpha}{2}}\zeta U_{jx}\|_{\mathring{W}^1\left(\frac{\alpha}{2},1\right)} + \|F_j\|^2_{L^2(Q)}\}$$

D'où résulte (4.11). C.Q.F.D.

Ensuite, prolongeons les fonctions $u(x,t)$ et $f(x,t)$ comme suit:

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & (x,t)\in Q, \\ -u(x,t), & -1<x<0, \quad 0<t<T, \\ -u(x-1,t) & 1<x<2, \quad 0<t<T, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t)\in Q, \\ -f(-x,t), & -1<x<0, \quad 0<t<T, \\ -f(x-1,t), & 1<x<2, \quad 0<t<T. \end{cases}$$

Alors, en désignant $\tilde{Q}=(-1,2)\times(0,T)$, $\tilde{\Gamma}=\partial\tilde{Q}$, on voit que $\tilde{u}\in\mathring{V}(\tilde{Q})$, $\tilde{f}\in L^2(\tilde{Q})$ et $\tilde{u}$ est une solution du problème de Dirichlet:

(2.1)˜ $$-u_{tt}-t^{\alpha}u_{xx}=f \quad \text{dans} \quad \tilde{Q},$$

(2.2)˜ $$u|_{\tilde{\Gamma}}=0.$$

Ce qui peut être formulé comme dans le § 2.

On peut procéder comme ci-dessus et en utilisant la division de l'unité on obtient enfin le théoreme suivant:

THÉORÈME 4.2. Soit $\alpha\geqq 0$. On considere le problème de Dirichlet:

(2.1) $$Lu=-u_{tt}-t^{\alpha}u_{xx}=f \quad \text{dans} \quad Q,$$

(2.2) $$u|_{\Gamma}=0$$

avec $f\in L^2(Q)$.

Il existe une solution u unique dans $\mathring{V}$. De plus, il existe une constante C telle que

(4.12) $$\|u\|+\|u_t\|+\|u_{tt}\|+\|t^{\frac{\alpha}{2}}u_x\|+\|t^{\frac{\alpha}{2}}u_{tx}\|+\|t^{\alpha}u_{xx}\|\leqq C\|f\|.$$

La constante C ne dépend pas de $f\in L^2(Q)$. Ici on a noté par $\|\ \ \|$ la norme dans $L^2(Q)$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000014227 Published online by Cambridge University Press

§ 5. La régularité de la solution des équations $-u_{tt}-t^{2k}u_{xx}=f$, $k=0,1,2,\cdots$.

Dans ce §, notons $Q=(0<x<1)\times(-T<t<T)$, $\Gamma=\partial Q$ et k un entier $\geqq 0$.

THÉORÈME 5.1. Supposons $u\in H^2(-T,T;L^2(\Omega))=H^{0;2}_{x;t}(Q)$, $t^{2k}u\in L^2(-T,T;H^2(\Omega))=H^{2;0}_{x;t}(Q)$ et $Lu=-u_{tt}-t^{2k}u_{xx}=f\in C^\infty(Q)$, alors on a $u\in C^\infty(Q)$.

Désignons par $\mathfrak{H}^{2,2}_\alpha(Q)=\mathfrak{H}^2_\alpha(Q)$ l'espace des distributions u définies dans Q, et telles que:

$$u\in L^2(Q),\quad u_{tt}\in L^2(Q),\quad |t|^\alpha u\in L^2(-T,T;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)). \tag{5.1}$$

Nous prenons pour la norme:

$$\|u\|_{\mathfrak{H}^2_\alpha(Q)}=(\|u\|^2_{L^2(Q)}+\|u_t\|^2_{L^2(Q)}+\|u_{tt}\|^2_{L^2(Q)}+\||t|^{\frac{\alpha}{2}}u_x\|^2_{L^2(Q)}+\||t|^\alpha u_{xx}\|^2_{L^2(Q)})^{\frac{1}{2}}$$

Pour la démonstration du théoreme 5.1 nous préparons le théorème suivant.

THÉORÈME 5.2. Considérons un problème de Dirichlet:

$$Lu=-u_{tt}-t^{2k}u_{xx}=f \quad \text{dans} \quad Q \tag{2.1)'$$

$$u|_\Gamma=0 \tag{2,2)'$$

avec $f\in L^2(Q)$. Alors il existe une solution u unique dans $\mathfrak{H}^2_{2k}(Q)$, et on a l'inégalité

$$\|u\|_{\mathfrak{H}^2_{2k}(Q)}\leqq C\|f\|_{L^2(Q)}. \tag{5.2}$$

La constante C ne dépend pas de f.

Nous pouvons formuler le problème de Dirichlet (2.1)′, (2.2)′ comme au § 2. Alors en poursuivant le raisonnement donné dans les § 2–4, on obtient le théorème 5.2 comme au théorème 4.2. On y utilise (4.4) au lieu de (4.3). (Il s'agit des cas $k=1,2,\cdots$).

Remarque Compte tenu du Théorème 4.2, on voit que l'inégalité (5.2) est équivalente a l'inégalité

$$\|u\|_{\mathfrak{H}^2_{2k}(Q)}+\||t|^k D_x D_t u\|_{L^2(Q)}\leqq C'\|f\|_{L^2(Q)} \tag{5.3}$$

pour une autre constante C'.

https://doi.org/10.1017/S0027763000014227 Published online by Cambridge University Press

Démonstration du Théorème 5.1. Soient u et f comme au Théorème 5.1 et $Lu=f$ dans Q.

Pour t_1, t_2 fixés, vérifiant $-T<t_1<0<t_2<T$, prenons $\zeta\in C_0^\infty(Q)$ telle que

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}(x,t)=0 \quad \text{si} \quad (x,t)\in Q \quad \text{et} \quad t\in(t_1,t_2).$$

Nous supposons que

$$t^{2k}u\in H_{\mathrm{loc}}^{2+j,0}(Q), \qquad u\in H_{\mathrm{loc}}^{j,2}(Q)$$

pour quelque $j\geqq 0$. Alors on a

$$L(\zeta D_x^{j+1}u)=\zeta D_x^{j+1}f-\zeta_{tt}D_x^{j+1}u-\zeta_t D_x^{j+1}D_g u-t^{2k}\zeta_x D_x^{j+2}u-t^{2k}\zeta_{xx}D_x^{j+1}u\in L^2(Q),$$

puisque $u\in C^\infty(Q-\{(x,0)\,;\,0<x<1\})$. D'après le Théorème 5.2, nous avons

$$t^{2k}D_x^2(\zeta D_x^{j+1}u)\in L^2(Q), \quad \zeta D_x^{j+1}u\in L^2(Q).$$

D'où

$$t^{2k}u\in H_{\mathrm{loc}}^{2+j+1,0}(Q), \qquad u\in H_{\mathrm{loc}}^{j+1,2}(Q).$$

Donc

(5.4) $$D_x^j u\in L_{\mathrm{loc}}^2(Q), \qquad j=0,1,2,\cdots.$$

Comme l'équation $Lu=f$ s'écrit

$$D_t^2u=-t^{2k}D_x^2u-f$$

on a

$$D_t^2D_x^ju\in L_{\mathrm{loc}}^2(Q), \qquad j=0,1,2,\cdots.$$

Nous supposons maintenant

(5.5) $$D_t^jD_x^ru\in L_{\mathrm{loc}}^2(Q), \qquad j=1,2,\cdots.$$

pour quelque r entier ≥ 2. Alors on a

$$D_x^jD_t^{r+1}u=D_x^jD_t^{r-1}(D_t^2u)=D_x^jD_t^{r-1}(-t^{2k}D_x^2u-f)\in L_{\mathrm{loc}}^2(Q).$$

D'où résulte (5.5) dans le cas $r+1$. Donc on a

$$D_x^jD_t^ru\in L_{\mathrm{loc}}^2(Q), \qquad j,r=0,1,2,\cdots.$$

D'après le lemme de Sobolev on a $u\in C^\infty(Q)$. C.Q.F.D.

https://doi.org/10.1017/S0027763000014227 Published online by Cambridge University Press

§ 6. L'analyticité de la solution des équations $-u_{tt} - t^{2k}u_{xx} = f$, $k = 0, 1, \cdots$.

DÉFINITION 6.1. Soit $\mathfrak{D}$ un domaine dans R^2. On dit qu'une fonction $u \in C^\infty(\mathfrak{D})$ est une fonction analytique dans $\mathfrak{D}$ si, pour chaque compact K de $\mathfrak{D}$, il y a une constante C telle que

$$\|D_x^{\beta_1} D_t^{\beta_2} u\|_{L^2(K)} \leqq C^{|\beta|+1} |\beta|^{|\beta|}. \tag{6.1}$$

On a noté $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$ pour β_1, β_2 entiers $\geqq 0$.

Notons $Q = \Omega \times (-T, T)$ comme dans le § 5.

THÉORÈME 6.1. Soit k un entier $\geqq 0$. Si $u \in H^2(-T, T; L^2(\Omega)) = H^{0,2}(Q)$ et $t^{2k}u \in L^2(-T, T; H(\Omega)) = H^{2,0}(Q)$ et

$$Lu = -u_{tt} - t^{2k}u_{xx} = f \quad \text{dans} \quad Q \tag{6.2}$$

avec f une fonction analytqiue sur $\bar{Q}$. Alors u est une fonction analytique dans Q.

Dans la suite, supposons que $\frac{1}{2} < T$ et prenons $t_0 > 0$ tel que $0 < t_0 < T - \frac{1}{2}$. Nous introduisons les notations:

$$Q_\varepsilon = (\varepsilon, 1-\varepsilon) \times (-T+\varepsilon,\ T-\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2},$$

$$Q_\varepsilon^* = Q_\varepsilon (\varepsilon, 1-\varepsilon) \times (-t_0, t_0),$$

$$N_\varepsilon(v) = \|v\|_{L^2(Q_\varepsilon)}$$

$$N_\varepsilon^*(v) = \|v\|_{L^2(Q_\varepsilon^*)}.$$

LEMME 6.1. (c.f. ch. I, [2]). Soient ε, ε_1 positifs avec $0 < \varepsilon + \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$. Il y a des fonctions $\psi = \psi_{\varepsilon,\varepsilon_1} \in C_0^\infty(Q_{\varepsilon_1})$ telles que $\psi_{\varepsilon.\varepsilon_1} \equiv 1$ sur $Q_{\varepsilon+\varepsilon_1}$ et

$$\begin{cases} \operatorname{Max} |D_x^{\alpha_1} D_t^{\beta_2} \psi| \leqq C_{|\beta|} \varepsilon^{-|\beta|}, \quad |\beta| \leqq 2, \\ D_t \psi \equiv 0 \quad \text{sur} \quad (\varepsilon_1, 1-\varepsilon_1) \times (-t_0, t_0). \end{cases} \tag{6.3}$$

LEMME 6.2. Il existe une constante $C > 0$, telle que

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D_t^j v) + \sum_{j=0}^{2} \varepsilon^j N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(t^{2k} D_x^j v) + N_{\varepsilon+\varepsilon_1}^*(v) + \\ &\quad + \varepsilon N_{\varepsilon+\varepsilon_1}^*(D_x v) + \varepsilon^2 N_{\varepsilon+\varepsilon_1}^*(D_t D_x v) \leqq \\ &\quad \leqq C\{\varepsilon^2 N_{\varepsilon_1}(Lv) + \sum_{j=0,1} \varepsilon^j N_{\varepsilon_1}(t^{2k} D_x^j v) + N_{\varepsilon_1}^*(v) + \varepsilon N_{\varepsilon_1}^*(D_t v)\} \end{aligned} \tag{6.4}$$

pour tout $v\in C^{\infty}(Q)$. La constante C ne dépend pas de $\varepsilon, \varepsilon_1$ ($\varepsilon, \varepsilon_1>0$, $\varepsilon+\varepsilon_1<T-t_0$) ni de v.

Démonstration. Prenons $\psi=\psi_{\varepsilon,\varepsilon_1}$ introduite dans le lemme 6.2. Nous substituons ψv dans l'inégalité (5.3). Alors on a

$$N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D_t^2 v)+N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(t^{2k}D_x^2 v)+N^*_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D_tD_xv)\leqq \leqq C''\{N_{\varepsilon_1}(Lv)+\varepsilon^{-2}N^*_{\varepsilon_1}(v)+\varepsilon^{-1}N^*_{\varepsilon_1}(D_tv)+ +\varepsilon^{-1}N_{\varepsilon_1}(t^{2k}D_xv)+\varepsilon^{-2}N_{\varepsilon_1}(t^{2k}v)\}. \tag{6.5}$$

D'où résulte l'inégalité (6.4).

LEMME 6.3. (c.f. Ch. 7, [2]) *Soit v une fonction analytique sur $\bar{Q}$. Il y a une constante $C>0$ telle que*

$$\varepsilon^{|\beta|}N_{j\varepsilon}(D_x^{\beta_1}D_t^{\beta_2}v)\leqq C^{|\beta|+1} \qquad \text{si} \qquad |\beta|<j, \tag{6.6}$$

pour tous les entiers $j>0$. Réciproquement, si $v\in C^{\infty}(Q)$ vérifie (6.6), *alors v est une fonction analytique dans Q.* $\left(\text{Si } j\varepsilon>\frac{1}{2},\ N_{j\varepsilon}=\phi!\right)$

Démonstration du Théorème 6.1. D'abord, nous démonstrons qu'il existe une constante $B>0$, telle que pour tout $\varepsilon>0$, et pour tout l entier >0 on a

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{r=0}^{2}\varepsilon^{r+j}N_{l\varepsilon}(D_t^rD_x^ju), \\ \sum_{r=0}^{2}\varepsilon^{r+j}N_{l\varepsilon}(t^{2k}D_x^{r+j}u), \\ \sum_{r=0,1}\varepsilon^{r+j}N^*_{l\varepsilon}(D_x^{r+j}u), \\ \qquad \varepsilon^{2+j}N^*_{l\varepsilon}(D_tD_x^{j+1}u) \end{array}\right\} \leqq B^{l+1} \tag{6.7}$$

si $j<l$.

En effet, comme f est une fonction analytique sur $\bar{Q}$, il y a une constante $C_1>0$ telle que

$$\varepsilon^{2+j}N_{j\varepsilon}(D_x^jf)\leqq C^{j+1}. \qquad \text{[Lemme 6.3.]}$$

Donc on a déjà le cas $l=1$ si B est suffisamment grand.

En supposant que (6.7) soit démontré pour $l>0$, nous allons démontrer (6.7) pour le cas $l+1$. En remplacant u par $\varepsilon^lD_x^lu$ et ε_1 par $l\varepsilon$ dans (6.4), on voit que les premiers membres de (6.7) pour le cas $l+1$ sont plus petits que $5CB^{j+1}$ si $j < l+1$. Donc il s'ensuit que (6.7) avec l remplacé par $l+1$ si $5CB^{l+1} \leqq B^{l+2}$. Cette condition est vérifiée pour tout l si $B > \mathrm{Max}\,(5C, 1)$.

Posons $Q_0 = (\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0) \times (t_0, t_0)$ avec ε_0 réel tel que $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$.

En vertu du lemme 8.3, on a

$$\sum_{r=0}^{2} \|D_t^r D_x^j u\|_{2(Q_0)} \leqq C_0^{j+1} j^j, \qquad j = 0, 1, 2, \cdots \tag{6.8}$$

pour une constante C_0 convenable.

L'équation $Lu = f$ s'écrit

$$D_t^2 u = -t^{2k} D_x^2 u - f.$$

En poursuivant la manière habituelle pour la majoration des dérivées normales (voir [5] par exemple), nous avons

$$\|D_x^{\beta_1} D_t^{\beta_2} u\|_{L^2(Q_0)} \leqq C_0^{|\beta|+1} |\beta|^{|\beta|}$$

pour une constante $C_0 > 0$. C.Q.F.D.

Remarque. On peut étendre le Théorème 4.2 pour les équations plus générales (cf. [6]):

$$Lu = -u_{tt} - t^\alpha A u = f, \qquad (\alpha \geqq 0), \tag{6.9}$$

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} D_j a_{ij}(x) D_i, \qquad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

a_{ij} réels $\in C^\infty(\bar{\Omega})$, Ω étant un domaine borné dans R^n de frontière assez régulière.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqq r |\xi|^2, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in R^n, \quad r > 0.$$

Aussi, on peut démontrer, par la même méthode qu'aux Théorème 5.1 et Théorème (6.1), l'hypoellipticité et l'hypoanalyticité (pour le cas ou $a_{ij}(x)$ sont analytiques sur $\bar{\Omega}$) des équations (6.9) avec $\alpha = 2k$, $k = 0, 1, 2, \cdots$ et des équations plus générales.

Ajouté en epreuve: Analyticité jusqu' au bord pour l'opérateur elliptique dégénéré du type différent de (6.9) a été aussi démontré dans la collaboration de MM. M.S. Baouendi et C. Goulaouic, C.R. Acad. Sc. Paris, t 270, 1158–1161.

Bibliographie

[1] Baouendi (Mohamed Salah)-Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Bull. Soc. Math. France, **95,** 1967, 45–87.

[2] Hörmander (Lars)-Linear partial differential operators,-Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Grundlehren, **116**).

[3] Hörmander (Lars)-Hypoelliptic second order differential equations, Acta Math. **119,** 1968, 147–171.

[4] Kato (Yoshio)-On a class of hypoelliptic differential operators, (à paraître).

[5] Matsuzawa (Tadato)-Sur les équations quasi elliptiques et les classes de Gevrey, Bull. Soc. Math. France, **96,** 1968, 243–263.

[6] Matsuzawa (Tadato)-Sur les équations $-\frac{d^2}{dt^2}u + t^{\alpha} \wedge u = f$, (à paraître).

[7] Petrovsky (I.-G.)-Lectures on partial differential equations,-New York, London, Interscience Publishers, 19541

Mathematical Institute
Nagoya University
Nagoya, Japan.

https://doi.org/10.1017/S0027763000014227 Published online by Cambridge University Press