Canad. J. Math. Vol. **67** (3), 2015 pp. 597–638
http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5

Sommes friables d'exponentielles et applications

Sary Drappeau

Abstract. An integer is said to be y-friable if its greatest prime factor is less than y. In this paper, we obtain estimates for exponential sums over y-friable numbers up to x which are non-trivial when $y \geq \exp\{c\sqrt{\log x}\log\log x\}$. As a consequence, we obtain an asymptotic formula for the number of y-friable solutions to the equation $a+b=c$ which is valid unconditionally under the same assumption. We use a contour integration argument based on the saddle point method, as developped in the context of friable numbers by Hildebrand and Tenenbaum, and used by Lagarias, Soundararajan and Harper to study exponential and character sums over friable numbers.

1 Introduction

Soit $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier $n > 1$, avec la convention $P(1) = 1$. Un entier $n \geq 1$ est dit y-friable si $P(n) \leq y$. On note

$$S(x, y) = \{n \leq x \mid P(n) \leq y\}$$

l'ensemble des entiers y-friables inférieurs ou égaux à x. Le cardinal $\Psi(x, y)$ de cet ensemble a fait l'objet d'abondantes études, les techniques variant suivant le domaine en x et y auquel on s'intéresse (*cf.* les articles de survol de Hildebrand et Tenenbaum [HT93] et Granville [Gra08] qui exposent de façon exhaustive les travaux antérieurs). Le problème qui nous intéresse est l'étude des sommes d'exponentielles tronquées sur les friables

$$E(x, y\,; \vartheta) := \sum_{n\in S(x,y)} \mathrm{e}(n\vartheta)$$

où l'on note $\mathrm{e}(t) := \mathrm{e}^{2i\pi t}$. Le comportement de $E(x, y\,; \vartheta)$ diffère selon le degré de proximité de ϑ avec un rationnel de petit dénominateur. Pour tout entier $Q \geq 3$ et tout réel ϑ, il existe au moins un rationnel a/q avec

$$(a, q) = 1, \quad q \leq Q, \quad \Big|\vartheta - \frac{a}{q}\Big| \leq \frac{1}{qQ}.$$

On note $q(\vartheta, Q)$ le plus petit des dénominateurs q pour lesquels une fraction a/q vérifie cela ; dans ce cas $a = a(\vartheta, Q)$ est unique. Lorsque ϑ est irrationnel, on a

$$\lim_{Q\to\infty} q(\vartheta, Q) = \infty.$$

Reçu par la rédaction le 21 octobre, 2013; revu le 30 avril, 2014.
Publié electronique au 17 février, 2015.
Classification (AMS) par sujet: **12N25**, 11L07.
Mots clés: théorie analytique des nombres, entiers friables, méthode du col.

Une question intéressante est de déterminer dans quelle mesure la relation

$$E(x,y;\vartheta)=o\big(\Psi(x,y)\big) \tag{1.1}$$

est valable lorsque x et y tendent vers l'infini, avec ϑ irrationnel. Fouvry et Tenenbaum [FT91, théorème 10] montrent que la relation (1.1) a lieu pour tout $\delta>0$ et ϑ irrationnel fixés lorsque x et y tendent vers l'infini en vérifiant

$$x^{\delta(\log\log\log x)/\log\log x}\leq y\leq x.$$

La Bretèche [dlB98, corollaires 4 et 5] montre la validité de (1.1) pour tout ϑ irrationnel fixé lorsque x et y tendent vers l'infini en vérifiant

$$\exp\{c(\log x\log\log x)^{2/3}\}\leq y\leq x$$

pour une certaine constante $c>0$. L'argument présenté ici permet d'étendre encore le domaine de validité de (1.1). On définit le domaine

$$\exp\{c(\log x)^{1/2}\log\log x\}\leq y\leq x. \tag{$\mathcal{D}_c$}$$

Théorème 1.1 *Il existe une constante $c>0$ telle que la relation (1.1) soit valable pour tout ϑ irrationnel fixé lorsque x et y tendent vers l'infini en restant dans le domaine $\mathcal{D}_c$.*

Le théorème 1.1 découle d'une estimation asymptotique plus précise de la quantité $E(x,y;\vartheta)$. On définit

$$u:=(\log x)/\log y,$$
$$H(u):=\exp\Big\{\frac{u}{\log(u+1)^2}\Big\},\quad (u\geq 1),$$
$$\zeta(s,y):=\sum_{P(n)\leq y}n^{-s}=\prod_{p\leq y}(1-p^{-s})^{-1},\quad (\sigma>0).$$

En remarquant que $\mathbf{1}_{[1,x]}(n)\leq(x/n)^\sigma$ pour tout $\sigma>0$, on obtient la majoration de Rankin [Ran38],

$$\Psi(x,y)\leq x^\sigma\zeta(\sigma,y),\quad 2\leq y\leq x,\sigma>0.$$

Le membre de droite est minimal lorsque $\sigma=\alpha=\alpha(x,y)$, la solution à

$$\sum_{p\leq y}\frac{\log p}{p^\alpha-1}=\log x.$$

Pour x et y suffisamment grands, on a $0<\alpha<1$, et plus précisément lorsque $2\leq y\leq x$,

$$\alpha(x,y)=\frac{\log(1+y/\log x)}{\log y}\Big\{1+O\Big(\frac{\log\log(1+y)}{\log y}\Big)\Big\},$$

voir par exemple [HT86, théorème 2]. On a par ailleurs (*cf.* [HT86, lemme 2]),

$$\alpha=1+O\big(\log(u+1)/\log y\big).$$

La majoration de Rankin fournit en fait une majoration de bonne qualité de $\Psi(x,y)$: elle n'est qu'à un facteur $O(\log x)$ de l'ordre de grandeur exact, obtenu par Hildebrand et Tenenbaum par la méthode du col (*cf.* [HT86, théorèmes 1 et 2], formule (2.3) *infra*). Dans ce contexte, le réel α joue le rôle du point-selle.

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

On reprend les notations de La Bretèche et Granville [dlBG12] pour la région sans zéro des fonctions L de Dirichlet, et du zéro exceptionnel. Il existe une constante $b > 0$ telle que pour tout $Q \geq 2$ et $T \geq 2$, la fonction $s \mapsto L(s, \chi)$ n'admette pas de zéro dans la région

$$\Big\{ s = \sigma + i\tau \in \mathbf{C} \mid \sigma \geq 1 - \frac{b}{\log(QT)} \text{ et } |\tau| \leq T \Big\} \tag{1.2}$$

pour tous les caractères χ de modules q avec $1 \leq q \leq Q$ sauf éventuellement pour des caractères tous associés à un même caractère primitif χ_1 de module noté q_1. Si ce caractère existe, il est quadratique et le zéro exceptionnel, noté β, est unique, simple et réel ; si pour une même valeur de Q et deux valeurs distinctes de T, un tel caractère existe, alors il s'agit du même et on dira que ce caractère est Q-exceptionnel, tout en notant que pour des valeurs de T suffisamment grandes en fonction de Q, un tel caractère n'existe pas. Le "caractère de module 1" désigne ici le caractère trivial, et la fonction L associée est la fonction $s \mapsto \zeta(s)$. On note χ_r le caractère de module $q_1 r$ associé à χ_1, et on pose $q \mapsto \nu(q)$ la fonction indicatrice des entiers multiples de q_1 si β existe, et la fonction nulle sinon. On garde dans toute la suite la notation $s = \sigma + i\tau$.

On désigne par $\check{\Phi}_0(\lambda, s)$ la fonction définie pour $\sigma > 0$ par

$$\check{\Phi}_0(\lambda, s) := \int_0^1 \mathrm{e}(\lambda t) t^{s-1} \,\mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

En développant en série entière le terme $\mathrm{e}(\lambda t)$ on obtient

$$\check{\Phi}_0(\lambda, s) = \sum_{n \geq 0} (2i\pi\lambda)^n / \big((n+s) n! \big),$$

et cela permet de prolonger $s \mapsto \check{\Phi}_0(\lambda, s)$ en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$, qui possède un pôle simple en $s = 0$ de résidu 1, et lorsque $\lambda \neq 0$, un pôle simple en $s = -n$ pour tout entier $n \geq 1$, de résidu $(2i\pi\lambda)^n / n!$.

Enfin on note respectivement $\omega(n)$ et $\tau(n)$ le nombre de facteurs premiers et le nombre de diviseurs d'un entier $n \geq 1$, et on pose

$$\mathcal{L} := \exp \sqrt{\log x},$$
$$T_1 = T_1(x, y) := \min\{y, \mathcal{L}\}, \qquad T_2 = T_2(x, y) := \min\{y^{1/\log\log\log x}, \mathcal{L}\}. \tag{1.4}$$

Théorème 1.2 *Il existe des constantes c_1 et c_2 positives et une fonction $W(x, y; q, \eta)$ telles que pour tout (x, y) dans le domaine*

$$(\log x)^{c_1} \leq y \leq \exp\{(\log x)/(\log\log x)^4\}, \tag{1.5}$$

pour tout $\vartheta \in \mathbf{R}$ avec $\vartheta = a/q + \eta$ où $(a, q) = 1$, $q \leq T_2^{c_2}$ et $|\eta| \leq T_2^{c_2}/x$ on ait

$$\begin{aligned} E(x, y; \vartheta) = {} & \frac{\alpha q^{1-\alpha}}{\phi(q)} \prod_{p \mid q} (1 - p^{\alpha - 1}) \check{\Phi}_0(\eta x, \alpha) \Psi(x, y) + \nu(q) \chi_1(a) W(x, y; q, \eta) \\ & + O\Big(\frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha} \Psi(x, y)}{\phi(q)(1 + |\eta| x)^\alpha} \frac{(\log q)^2 (\log(2 + |\eta| x))^3}{u} + \frac{\Psi(x, y)}{T_2^{c_2}} \Big) \end{aligned} \tag{1.6}$$

où χ_1 est l'éventuel caractère $T_2^{c_2}$-exceptionnel, et avec, dans le cas $\nu(q) \neq 0$,

(1.7)
$$W(x,y;q,\eta) \ll \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}(q/q_1)^{1-\alpha}\Psi(x,y)}{\phi(q)(1+|\eta|x)^{\alpha}x^{1-\beta}H(u)^{c_2}} + \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}(q/q_1)^{1-\alpha}\Psi(x,y)}{\phi(q)T_2^{c_2}}.$$

Il est possible d'obtenir une estimation plus précise de $E(x,y;\vartheta)$, mais valable sous des conditions plus restrictives sur q et η. Il convient d'introduire quelques définitions supplémentaires : suivant De Bruijn [DB51] et Saias [Sai89], on définit

$$\Lambda(x,y) := \begin{cases} x\int_{-\infty}^{\infty}\rho(u-v)\,\mathrm{d}(\lfloor y^v\rfloor/y^v) & \text{si } x\in\mathbf{R}\smallsetminus\mathbf{N},\\ \Lambda(x+0,y) & \text{si } x\in\mathbf{N},\end{cases}$$

où $u\mapsto\rho(u)$ est la fonction de Dickman, l'unique solution continue sur $]0,\infty[$ de l'équation différentielle aux différences $u\rho'(u)+\rho(u-1)=0$ $(u>1)$ satisfaisant $\rho(u)=1$ $(u\in[0,1])$. Pour tout $\varepsilon>0$, dans le domaine (H_ε) défini par

$$(H_\varepsilon) \qquad 3\le \exp\{(\log\log x)^{5/3+\varepsilon}\}\le y\le x$$

on a

$$\Psi(x,y)=\Lambda(x,y)\{1+O_\varepsilon(\mathcal{Y}_\varepsilon^{-1})\} \tag{1.8}$$

où l'on a posé pour tout $\varepsilon>0$,

$$\mathcal{Y}_\varepsilon := \exp\{(\log y)^{3/5-\varepsilon}\}. \tag{1.9}$$

On pose également, de même que dans [dlBG12],

$$\lambda(t,y) := \frac{\Lambda(t,y)}{t} + \frac{1}{\log y}\int_{-\infty}^{\infty}\rho'\big((\log t)/\log y - v\big)\,\mathrm{d}(\lfloor y^v\rfloor/y^v).$$

On a l'égalité entre mesures

$$\mathrm{d}\,\Lambda(t,y)=\lambda(t,y)\,\mathrm{d}\,t - t\,\mathrm{d}(\{t\}/t). \tag{1.10}$$

Par ailleurs, la quantité $\lambda(t,y)-y\{t/y\}/(t\log y)$ est dérivable par rapport à t pour tout $t\ge y$. On note $\lambda'(t,y)$ cette dérivée.

Théorème 1.3 *Sous les hypothèses du théorème 1.2 et sous les conditions supplémentaires $(x,y)\in(H_\varepsilon)$, $q\le\mathcal{Y}_\varepsilon$ et $|\eta|\le\mathcal{Y}_\varepsilon/(qx)$ pour un certain $\varepsilon>0$, on a*

$$\begin{aligned} E(x,y;\vartheta) &= \widetilde{V}(x,y;q,\eta)+\nu(q)\chi_1(a)W(x,y;q,\eta)\\ &\quad + O_\varepsilon\Big(\frac{2^{\omega(q)}\Psi(x,y)}{\phi(q)\mathcal{Y}_\varepsilon}+\frac{\Psi(x,y)}{T_2^{c_2}}\Big)\end{aligned} \tag{1.11}$$

où l'on a posé

$$\widetilde{V}(x,y;q,\eta) := \sum_{k|q}\frac{\mu(q/k)k}{\phi(q)}\sum_{\substack{n\le x\\ k|n}}\mathrm{e}(n\eta)\lambda\Big(\frac{n}{k},y\Big) \tag{1.12}$$

et la quantité $W(x,y;q,\eta)$ vérifie encore (1.7).

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

Les estimations des théorèmes 1.2 et 1.3 ne sont valables que lorsque ϑ est proche d'un rationnel à petit dénominateur, ce qui correspond aux arcs majeurs dans la terminologie de la méthode du cercle. La différence entre les deux estimations provient d'un traitement différent des termes principaux qui proviennent des caractères principaux et exceptionnels, *cf.* la proposition 2.10 *infra*. Les valeurs complémentaires de ϑ sont traitées à l'aide du résultat suivant, déduit de [dlB98, corollaire 3].

Lemme 1.4 ([dlB98, corollaire 3]) *Lorsque les réels ϑ, x, R vérifient $x, R \geq 2$ et $q(\vartheta, \lceil x/R \rceil) \geq R$, on a*

$$E(x, y; \vartheta) \ll x(\log x)^4 \{1/R^{1/4} + 1/\mathcal{L}\}.$$

Démonstration du Théorème 1.1 Soient c_1 et c_2 les constantes données par le théorème 1.2 et supposons $y^{1/\log\log\log x} \geq \mathcal{L}$, de sorte que $T_1 = T_2 = \mathcal{L}$. On pose $q = q(\vartheta, \lceil x/\mathcal{L}^{c_2} \rceil)$ et $\theta = a/q + \eta$ avec $\eta \leq 1/(q\lceil x/\mathcal{L}^{c_2} \rceil)$; on a $|\eta| x \leq \mathcal{L}^{c_2}$. Lorsque $y \geq \exp\{(\log x)/(\log\log x)^4\}$, les résultats de La Bretèche [dlB98, théorème 2] s'appliquent, on suppose donc sans perte de généralité que $y \leq \exp\{(\log x)/(\log\log x)^4\}$. Lorsque $q > \mathcal{L}^{c_2}$, d'après le lemme 1.4 on a $E(x, y; \vartheta) \ll x/\mathcal{L}^{c_3}$ pour une constante $c_3 > 0$. Pour $\exp\{c\sqrt{\log x}\log\log x\} \leq y$ avec c suffisamment grande, cela est $o\big(\Psi(x, y)\big)$. Enfin, lorsque $q \leq \mathcal{L}^{c_2}$, l'estimation (1.6) est valable et tous les termes du membre de droite sont $o\big(\Psi(x, y)\big)$ quand $q \to \infty$ et $x \to \infty$, en remarquant que $\check{\Phi}_0(\eta x, \alpha) \ll 1$.

La démonstration que l'on propose des théorèmes 1.2 et 1.3 utilise une majoration du type $H(u)^{-\delta}(\log x) \ll_\delta 1$ pour tout $\delta > 0$ fixé, qui n'est pas valable lorsque y est trop proche de x. Ceci explique la borne supérieure en y du domaine (1.5). La borne inférieure $\exp\{c\sqrt{\log x}\log\log x\}$ dans le domaine $(\mathcal{D}_c)$ est expliquée par la condition $\max\{q, |\eta x|\} \leq T_2^{c_2}$ dans le théorème 1.2, qui est due à l'utilisation de la région sans zéros (1.2).

Le domaine en x et y dans lequel on peut majorer non trivialement $E(x, y; \vartheta)$ pour ϑ irrationnel a une influence directe sur le domaine de validité de certains résultats qui sont liés aux sommes d'exponentielles. On en cite deux ; le premier est une généralisation d'un théorème de Daboussi [Dab75].

Théorème 1.5 *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute fonction $Y\colon [2, \infty[\to \mathbf{R}$ croissante avec $\big(Y(x), x\big) \in \mathcal{D}_c$, toute fonction $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ multiplicative satisfaisant pour tous x et y avec $Y(x) \leq y \leq x$,*

$$\sum_{n \in S(x,y)} |f(n)|^2 \leq K_f \Psi(x, y)$$

pour un certain réel $K_f > 0$ dépendant au plus de f, et tout ϑ irrationnel, lorsque x et y tendent vers l'infini avec $Y(x) \leq y \leq x$, on ait

$$\sum_{n \in S(x,y)} f(n)\, \mathrm{e}(n\vartheta) = o_\vartheta\big(K_f^{1/2}\Psi(x, y)\big).$$

Cela est une extension de [dlBT05a, théorème 1.5]. Suivant Dupain, Hall et Tenenbaum [BHT82], on peut se poser la question de savoir pour quelle classe de

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

fonctions multiplicatives f et quelles suites d'ensembles finis d'entiers $(E_N)_{N\geq 1}$ la relation

$$\sum_{n\in E_N} f(n)\,\mathrm{e}(n\vartheta) = o\Big(\sum_{n\in E_N} |f(n)|\Big)$$

est valable pour tout ϑ irrationnel fixé lorsque $N\to\infty$. Le théorème 1.5 aborde le cas particulier $E_N = S(N, y_N)$ avec $Y(N)\leq y_N\leq N$.

La deuxième application que l'on considère concerne le problème du comptage des solutions friables à l'équation $a+b=c$. Posons

$$N(x,y) := \operatorname{card}\{(a,b,c)\in S(x,y)^3 \mid a+b=c\}. \tag{1.13}$$

Lagarias et Soundararajan étudient cette quantité dans [LS12]. Leur travail, précisé par l'auteur [Dra12], implique en particulier qu'en supposant l'hypothèse de Riemann généralisée aux fonctions L de Dirichlet, on a

$$N(x,y)\sim\frac{\Psi(x,y)^3}{2x} \tag{1.14}$$

lorsque $(\log\log x)/\log y\to 0$. Dans [dlBG12], La Bretèche et Granville obtiennent inconditionnellement, à partir des estimations de $E(x,y;\vartheta)$ démontrées dans [dlB98], que la relation (1.14) est valable, pour tout $\varepsilon>0$ fixé, lorsque x et y tendent vers l'infini avec $\exp\{(\log x)^{2/3+\varepsilon}\}\leq y\leq x$. Les estimations de $E(x,y;\vartheta)$ présentées ici permettent d'ètendre le domaine de validité de cette estimation.

Théorème 1.6 *Il existe $c>0$ tel que lorsque $(x,y)\in\mathcal{D}_c$, on ait*

$$N(x,y) = \frac{\Psi(x,y)^3}{2x}\Big\{1+O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\}. \tag{1.15}$$

Remarque Le terme d'erreur dans l'estimation (1.15) est attendu comme optimal. On peut, à la façon de Saias [Sai89], obtenir un développement du membre de gauche selon les puissances de $(\log y)^{-1}$.

Dans [dlBG12], les auteurs étudient la densité sur les friables d'une suite générale satisfaisant des hypothèses de crible. Cette application n'est pas développée ici mais les théorèmes 1.2 et 1.3 permettent d'étendre leur résultat à tout $(x,y)\in\mathcal{D}_c$ pour un certain $c>0$.

2 Estimation de $E(x,y;\vartheta)$

2.1 Méthode du col

Soit à étudier la fonction sommatoire sur les entiers friables d'une suite de nombres complexes de modules ≤ 1

$$A(x,y) = \sum_{n\in S(x,y)} a_n$$

lorsque $x\notin\mathbf{N}$, prolongée par $A(x,y) := A(x-0,y)+a_x/2$ lorsque x est un entier y-friable. La série de Dirichlet associée

$$F(s,y) := \sum_{P(n)\leq y} a_n n^{-s} \tag{2.1}$$

converge absolument lorsque $\sigma > 0$. En appliquant la formule de Perron, on écrit

$$A(x,y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} F(s,y)x^s \frac{\mathrm{d}\, s}{s}$$

où $\kappa > 0$ est fixé. La méthode du col consiste à modifier le chemin d'intégration pour faire en sorte que la contribution principale à l'intégrale entière vienne d'une petite partie du chemin d'intégration, suffisamment petite pour pouvoir l'estimer par une formule de Taylor. Dans le cas $a_n = 1$, où il s'agit essentiellement d'estimer $\Psi(x,y)$, on intégre sur la droite $\sigma = \alpha$. Le point α est le minimum de la fonction $\sigma \mapsto x^\sigma \zeta(\sigma, y)$ et sa dérivée seconde en ce point est non nulle, le point $\tau = 0$ est donc un maximum local de la fonction $\tau \mapsto |x^{\alpha + i\tau}\zeta(\alpha + i\tau, y)|$. On définit

$$\sigma_2 = \sigma_2(x,y) := \sum_{p \le y} \frac{p^\alpha (\log p)^2}{(p^\alpha - 1)^2}$$

qui est la valeur en α de la dérivée seconde de la fonction $s \mapsto \log \zeta(s,y)$. Lorsque $2 \le y \le x$, on a d'après [HT86, théorème 2],

$$\sigma_2(x,y) = \log x \log y \Big(1 + \frac{\log x}{y}\Big)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log(1+u)} + \frac{1}{\log y}\Big)\Big\}. \tag{2.2}$$

Le résultat principal de [HT86] est l'estimation, uniforme pour $2 \le y \le x$,

$$\Psi(x,y) = \frac{x^\alpha \zeta(\alpha, y)}{\alpha\sqrt{2\pi\sigma_2}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{u} + \frac{\log y}{y}\Big)\Big\}. \tag{2.3}$$

Par rapport aux précédents résultats sur $\Psi(x,y)$, cette estimation a l'avantage, au prix d'un terme principal moins explicite, d'être valide sans aucune contrainte sur x et y. L'estimation (2.2) implique en particulier que pour tout (x,y) avec $2 \le y \le x$, on a

$$\zeta(\alpha, y)x^\alpha \ll (\log x)\Psi(x,y).$$

Un autre intérêt de la méthode du col est qu'elle permet une étude uniforme du rapport $\Psi(x/d, y)/\Psi(x,y)$, ce qui est utile dans beaucoup d'applications. Cette question ainsi que d'autres problèmes associés sont étudiés en détail dans [dlBT05b].

Lemme 2.1 ([dlBT05b, théorème 2.4]) *Il existe deux constantes positives b_1 et b_2 et une fonction $b = b(x,y;d)$ satisfaisant $b_1 \le b \le b_2$ telles que pour $\log x \le y \le x$ et $1 \le d \le x$ on ait uniformément*

$$\Psi\Big(\frac{x}{d}, y\Big) = \Big\{1 + O\Big(\frac{t}{u}\Big)\Big\}\Big(1 - \frac{t^2}{u^2}\Big)^{bu}\frac{\Psi(x,y)}{d^\alpha}$$

où l'on a posé $t = (\log d)/\log y$.

Cela implique sous les mêmes hypothèses la majoration

$$\Psi(x/d, y) \ll \Psi(x,y)/d^\alpha, \tag{2.4}$$

celle-ci étant valable pour tout $d \ge 1$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

2.2 Somme sur les caractères, formule de Perron

Pour tout caractère de Dirichlet χ de module q, on définit la somme de Gauss $\tau(\chi) := \sum_{b \pmod q} \chi(b)\,\mathrm{e}(b/q)$. On a pour tous x et y avec $x \geq y \geq 2$, $\vartheta \in \mathbf{R}$ et $(a,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ avec $\vartheta = a/q + \eta$,

$$E(x,y;\vartheta) = \sum_{\substack{d|q \\ P(d)\leq y}} \frac{1}{\phi(q/d)} \sum_{\chi \pmod{q/d}} \chi(a)\tau(\overline{\chi}) \sum_{m \in S(x/d,y)} \mathrm{e}(md\eta)\chi(m). \tag{2.5}$$

Une façon d'étudier $E(x,y;\vartheta)$ est donc d'obtenir des estimations uniformes de la somme

$$\Psi_0(z,y;\chi,\gamma) := \sum_{n\in S(z,y)} \mathrm{e}(n\gamma)\chi(n). \tag{2.6}$$

On rappelle que $\check{\Phi}_0(\lambda,s)$ et $F(s,y)$ sont définis respectivement en (1.3) et (2.1).

Lemme 2.2 *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes telle que l'abscisse de convergence absolue de la série $\sum_{P(n)\leq y} a_n n^{-s}$ soit strictement inférieure à 1/2. Lorsque $x, y \geq 2$, $\eta \in \mathbf{R}$, $T \geq 2$, $\kappa \in [1/2,1]$, $c \in \,]0,1/2]$ et $M \geq 0$, et lorsque les inégalités suivantes sont satisfaites :*

$$\sum_{P(n)\leq y} |a_n| n^{-\kappa} \leq M\zeta(\kappa,y) \quad \textit{et} \quad \sum_{\substack{P(n)\leq y \\ |n-x|<x/\sqrt{T}}} |a_n| \leq M\Psi(x,y)/T^c,$$

on a uniformément

$$\sum_{n\in S(x,y)} a_n\,\mathrm{e}(n\eta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s,y)x^s\check{\Phi}_0(\eta x,s)\,\mathrm{d}s + O\Big(M(\log T)(1+|\eta x|)\frac{x^\kappa\zeta(\kappa,y)}{T^c}\Big).$$

Remarque En particulier, si l'on suppose que la suite (a_n) est bornée, un théorème de Hildebrand sur le nombre des friables dans les petits intervalles [Hil85, théorème 4] ainsi que la majoration (2.4) assurent que les hypothèses sur $(a_n)_{n\geq 1}$ sont satisfaites pour M absolu et $c = \alpha(x,y)/2$. Lorsque $(\log x)^K \leq y \leq x$ pour un certain $K > 1$ fixé, on a $\alpha(x,y) \gg_K 1$.

Le lemme 2.2 découle du lemme suivant, qui est une généralisation d'un lemme classique de Perron (*cf.* [Ten08, lemme II.2.2]).

Lemme 2.3 *Pour tous réels x, κ, T et λ avec $x \geq 0$, $\kappa \in [1/2,1]$ et $T \geq 2$, on a*

$$\Big|\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)\,\mathrm{e}(\lambda/x) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} x^s\check{\Phi}_0(\lambda,s)\,\mathrm{d}s\Big| \ll \frac{(\log T)(1+|\lambda|)x^\kappa}{1+T|\log x|}.$$

On énonce pour cela un lemme qui fournit des informations sur la taille de $\check{\Phi}_0$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

Lemme 2.4 *Pour tous $s \in \mathbf{C}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ avec $\sigma \geq 1/2$, on a*

$$\check{\Phi}_0(\lambda, s) \ll \min\Big\{\frac{1}{\sigma}, \frac{|s|}{\sigma}\log(2+|\lambda|)(|\lambda|^{-\sigma}+|\lambda|^{-1}), \frac{1+|\lambda|/\sigma}{|s|}\Big\}.$$

Preuve On a trivialement $\check{\Phi}_0(\lambda, s) \ll 1/\sigma$. On a d'une part lorsque $|\lambda| \geq 1$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}(\lambda t)t^{s-1}\,\mathrm{d}\,t &= \Big[\frac{\mathrm{e}(\lambda t)-1}{2i\pi\lambda}t^{s-1}\Big]_0^1 - (s-1)\int_0^1 \frac{\mathrm{e}(\lambda t)-1}{2i\pi\lambda}t^{s-2}\,\mathrm{d}\,t\\ &\ll |\lambda|^{-1} + |s-1|\Big(\frac{|\lambda|^{-\sigma}}{\sigma} + \frac{|\lambda|^{-1}-|\lambda|^{-\sigma}}{\sigma-1}\Big)\\ &\ll \frac{|s|}{\sigma}\log(2+|\lambda|)(|\lambda|^{-\sigma}+|\lambda|^{-1})\end{aligned}$$

en séparant l'intégrale selon la position de t par rapport à $1/|\lambda|$, et d'autre part, pour tout λ,

$$\int_0^1 \mathrm{e}(\lambda t)t^{s-1}\,\mathrm{d}\,t = \Big[\mathrm{e}(\lambda t)\frac{t^s}{s}\Big]_0^1 - \frac{1}{s}\int_0^1 (2i\pi\lambda)\,\mathrm{e}(\lambda t)t^s\,\mathrm{d}\,t \ll \frac{1+|\lambda|/\sigma}{|s|}.$$

Le résultat suit en notant que $|s|\log(2+|\lambda|)/|\lambda|^\sigma \gg 1$ pour $|\lambda| < 1$.

Démonstration du lemme 2.3

Le cas $\lambda = 0$ étant démontré dans [Ten08, lemme II.2.2], on suppose $\lambda \neq 0$. On rappelle que la fonction $s \mapsto \check{\Phi}_0(\lambda, s)$ est prolongeable en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ ayant pour tout $n \geq 0$ un pôle simple en $s = -n$, de résidu $(2i\pi\lambda)^n/n!$. On suppose $x < 1$. Pour tout réel $k \geq 0$, en intégrant sur le rectangle de côtés

$$\kappa + k \pm iT, \quad \kappa \pm iT$$

on obtient grâce aux majorations du lemme 2.4,

$$\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} x^s\check{\Phi}_0(\lambda, s)\,\mathrm{d}\,s \ll \frac{(1+|\lambda|)x^\kappa(1-x^k)}{T|\log x|} + \frac{T(1+|\lambda|)x^{\kappa+k}}{k+\kappa} \ll \frac{(1+|\lambda|)x^\kappa}{T|\log x|} \tag{2.7}$$

en faisant tendre k vers l'infini.

Pour $x \geq 1$, d'après la définition de $\check{\Phi}_0(\lambda, s)$, on a

$$\begin{aligned}I := \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} x^s\check{\Phi}_0(\lambda, s)\,\mathrm{d}\,s &= \frac{1}{2\pi}\int_0^1\Big(\int_{-T}^T (tx)^{i\tau}\,\mathrm{d}\,\tau\Big)\,\mathrm{e}(\lambda t)\frac{(tx)^\kappa}{t}\,\mathrm{d}\,t\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{T\log x}\frac{\sin w}{w}\,\mathrm{e}(\lambda\,\mathrm{e}^{w/T}/x)\,\mathrm{e}^{\kappa w/T}\,\mathrm{d}\,w\end{aligned}$$

ayant posé $xt = e^{w/T}$. Une intégration par parties permet d'écrire $I = I_1 + I_2 - I_3$ avec

$$\begin{aligned}I_1 &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{T\log x}\frac{1-\cos w}{w^2}\,\mathrm{e}(\lambda\,\mathrm{e}^{w/T}/x)\,\mathrm{e}^{\kappa w/T}\,\mathrm{d}\,w,\\ I_2 &:= \frac{1-\cos(T\log x)}{\pi T\log x}\,\mathrm{e}(\lambda)x^\kappa,\\ I_3 &:= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{T\log x}\frac{1-\cos w}{w}\Big(\frac{2i\pi\lambda}{xT}\,\mathrm{e}^{w/T}+\frac{\kappa}{T}\Big)\,\mathrm{e}(\lambda\,\mathrm{e}^{w/T}/x)\,\mathrm{e}^{\kappa w/T}\,\mathrm{d}\,w.\end{aligned}$$

Des estimations élémentaires fournissent

$$\begin{aligned}I_1 &= \mathrm{e}(\lambda/x) - \frac{\mathrm{e}(\lambda/x)}{\pi}\int_{T\log x}^{\infty}\frac{1-\cos w}{w^2}\,\mathrm{d}w\\&\quad+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{T\log x}\frac{1-\cos w}{w^2}\big(\mathrm{e}(\lambda\,\mathrm{e}^{w/T}/x)\,\mathrm{e}^{\kappa w/T}-\mathrm{e}(\lambda/x)\big)\,\mathrm{d}w\\&= \mathrm{e}(\lambda/x) + O\Big(\frac{1}{1+T\log x}+\frac{x^\kappa}{T\big(1+(\log x)^2\big)}+\frac{\log T}{T}\Big(1+\frac{|\lambda|}{x}\Big)\Big),\\I_2 &\ll \frac{T(\log x)x^\kappa}{1+(T\log x)^2},\\I_3 &\ll \frac{\log T}{T}\Big(1+\frac{|\lambda|}{x}\Big)+\frac{(\log T)(1+|\lambda|)x^\kappa}{T\log x}\mathbf{1}_{[1,\infty[}(T\log x).\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $x > 1$, on a

$$\Big|\mathrm{e}(\lambda/x) - \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} x^s\check{\Phi}_0(\lambda,s)\,\mathrm{d}s\Big| = O\Big(\frac{(\log T)(1+|\lambda|)x^\kappa}{T\log x}\Big) \tag{2.8}$$

et lorsque $x = 1$, on a

$$\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\check{\Phi}_0(\lambda,s)\,\mathrm{d}s \ll 1+\frac{(\log T)(1+|\lambda|)}{T} \ll 1+|\lambda|. \tag{2.9}$$

Lorsque $T|\log x| \geq 1$ l'estimation voulue découle de (2.7) et (2.8). Si $\mathrm{e}^{-1/T} < x < \mathrm{e}^{1/T}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}x^s\check{\Phi}_0(\lambda,s)\,\mathrm{d}s &= \frac{x^\kappa}{2\pi}\int_{-T}^{T}\check{\Phi}_0(\lambda,\kappa+i\tau)\,\mathrm{d}\tau\\&\quad+\frac{x^\kappa}{2\pi}\int_{-T}^{T}(x^{i\tau}-1)\check{\Phi}_0(\lambda,\kappa+i\tau)\,\mathrm{d}\tau\\&\ll (1+|\lambda|)x^\kappa\end{aligned}$$

grâce à la majoration (2.9) et au lemme 2.4. Cela implique

$$\Big|\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)\,\mathrm{e}(\lambda/x) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}x^s\check{\Phi}_0(\lambda,s)\,\mathrm{d}s\Big| \ll (1+|\lambda|)x^\kappa,$$

ce qui fournit l'estimation voulue pour $T|\log x| < 1$.

Remarque Un traitement plus fin de I_1 permet d'obtenir dans le cas $x = 1$

$$\Big|\frac{\mathrm{e}(\lambda)}{2} - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\check{\Phi}_0(\lambda,s)\,\mathrm{d}s\Big| \ll \frac{(\log T)(1+|\lambda|)}{T},$$

mais cela ne sera pas utilisé ici.

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

Démonstration du lemme 2.2 Une application du lemme 2.3 avec x remplacé par x/n et λ par ηx permet d'écrire sous les hypothèses de l'énoncé,

$$\sum_{n\in S(x,y)} a_n\,\mathrm{e}(n\eta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s,y)x^s\check{\Phi}_0(\eta x,s)\,\mathrm{d}s + O\Big((\log T)(1+|\eta x|)x^\kappa \sum_{P(n)\le y}\frac{|a_n|n^{-\kappa}}{1+T|\log(x/n)|}\Big).$$

De même que dans [FT91, preuve du théorème 4], on sépare la somme dans le terme d'erreur selon la taille de $|\log(n/x)|$. Les entiers $n\in\,]x-x/\sqrt{T},x+x/\sqrt{T}[$ contribuent d'une quantité

$$\ll (\log T)(1+|\eta x|)\sum_{\substack{P(n)\le y\\ x-x/\sqrt{T}<n\le x+x/\sqrt{T}}}|a_n|$$

qui est de l'ordre du terme d'erreur annoncé grâce aux hypothèses sur (a_n) ainsi que la majoration $\Psi(x,y)\le x^\kappa\zeta(\kappa,y)$. La contribution des entiers

$$n\notin\,\Big]x-\frac{x}{\sqrt{T}},x+\frac{x}{\sqrt{T}}\Big[$$

est

$$\ll (\log T)(1+|\eta x|)\frac{x^\kappa}{\sqrt{T}}\sum_{P(n)\le y}|a_n|n^{-\kappa}$$

qui est à nouveau de l'ordre du terme d'erreur annoncé.

On montre enfin le résultat suivant, qui assure que dans le cadre des propositions 2.11 et 2.13 *infra*, les hypothèses du lemme 2.2 sont vérifiées avec $\kappa=\alpha$.

Lemme 2.5 *Soient $q\ge 1$ un entier y-friable, et q_1 un diviseur de q. Soit χ_1 un caractère primitif modulo q_1 et pour tout $r\ge 1$, χ_r le caractère modulo q_1r associé à χ_1. On note $r_1:=q/q_1$ et on pose pour tout $n\ge 1$,*

$$a_n := \frac{\tau(\chi_1)\mu\big(\frac{r_1}{(r_1,n)}\big)\chi_1\big(\frac{r_1}{(r_1,n)}\big)\chi_{\frac{r_1}{(r_1,n)}}\big(\frac{n}{(r_1,n)}\big)}{\phi(q_1)\phi\big(\frac{r_1}{(r_1,n)}\big)}.$$

Alors lorsque $\kappa\in[1/2,1]$, $2\le y\le x$ et $2\le T\le x$, on a uniformément

$$\sum_{P(n)\le y}|a_n|n^{-\kappa} \ll \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\phi(q)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{1-\kappa}\zeta(\kappa,y),$$

$$\sum_{\substack{P(n)\le y\\ |n-x|<x/\sqrt{T}}}|a_n| \ll \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\phi(q)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{1-\alpha}\frac{\Psi(x,y)}{T^{\alpha/2}}.$$

Preuve On a, en écrivant $(n,r_1)=r_1/d$ et $n=mr_1/d$,

$$\begin{aligned}\sum_{P(n)\le y}|a_n|n^{-\kappa}&=\frac{\sqrt{q_1}}{\phi(q_1)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{-\kappa}\sum_{\substack{d\mid r_1\\(d,q_1)=1}}\frac{\mu^2(d)d^\kappa}{\phi(d)}\sum_{\substack{P(m)\le y\\(m,q_1d)=1}}m^{-\kappa}\\&=\frac{\sqrt{q_1}}{\phi(q_1)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{-\kappa}\zeta(\kappa,y)\prod_{p\mid q_1}(1-p^{-\kappa})\prod_{\substack{p\mid q/q_1\\p\nmid q_1}}\Big(1+\frac{p^\kappa-1}{p-1}\Big)\\&\le\frac{\sqrt{q_1}}{\phi(q)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{1-\kappa}\zeta(\kappa,y)2^{\omega(q/q_1)}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, avec les mêmes notations, on a

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{P(n)\le y\\|n-x|\le x/\sqrt{T}}}|a_n|\\&\quad=\frac{\sqrt{q_1}}{\phi(q_1)}\sum_{\substack{d\mid r_1\\(d,q_1)=1}}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}\sum_{\substack{P(m)\le y\\|mr_1/d-x|\le x/\sqrt{T}\\(m,q_1d)=1}}1\\&\quad\le\frac{\sqrt{q_1}}{\phi(q_1)}\sum_{\substack{d\mid r_1\\(d,q_1)=1}}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}\Big(\Psi\big(xd(1+1/\sqrt{T})/r_1,y\big)-\Psi\big(xd(1-1/\sqrt{T})/r_1,y\big)\Big)\\&\quad\le2\frac{\sqrt{q_1}}{\phi(q_1)}\sum_{\substack{d\mid r_1\\(d,q_1)=1}}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)}\Psi\big(xd/(r_1\sqrt{T}),y\big)\end{aligned}$$

d'après [Hil85, théorème 4]. La majoration (2.4) a lieu avec d remplacé par $\sqrt{T}r_1/d$ et ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{P(n)\le y\\|\frac{n}{x}-1|\le1/\sqrt{T}}}|a_n|&\ll\frac{\sqrt{q_1}\Psi(x,y)}{\phi(q_1)T^{\alpha/2}}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{-\alpha}\sum_{\substack{d\mid r_1\\(d,q_1)=1}}\frac{\mu^2(d)d^\alpha}{\phi(d)}\\&=\frac{\sqrt{q_1}\Psi(x,y)}{\phi(q_1)T^{\alpha/2}}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{-\alpha}\prod_{\substack{p\mid q/q_1\\p\nmid q_1}}\Big(1+\frac{p^\alpha}{p-1}\Big)\\&\le\frac{\sqrt{q_1}\Psi(x,y)}{\phi(q)T^{\alpha/2}}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{1-\alpha}2^{\omega(q/q_1)}\end{aligned}$$

qui est bien la majoration voulue.

2.3 Estimation de $L(s,\chi;y)$ dans la bande critique

Une application du lemme 2.2 fournit lorsque $z\notin\mathbf{N}$

$$\Psi_0(z,y;\chi,\gamma)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty}L(s,\chi;y)z^s\check{\Phi}_0(\gamma x,s)\,\mathrm{d}s$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

où l'intégrale converge en valeur principale. Le lemme suivant, repris pour l'essentiel de [Har12b, lemme 1], fournit un contrôle sur les variations de $L(s,\chi;y)$. La qualité de cette estimation est étroitement liée à notre connaissance d'une région sans zéro pour $L(s,\chi)$.

Dans cette section et les suivantes, c_1 et c_2 désignent toujours des constantes absolues positives, c_1 étant choisie typiquement grande et c_2 typiquement petite.

Lemme 2.6 *Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que lorsque χ est un caractère primitif de module $q > 1$, $\varepsilon \in]0,1/2]$, $H \geq 4$ et lorsque la fonction $L(s,\chi)$ n'a pas de zéro dans la région*

$$\{s \in \mathbf{C} \mid \sigma \in]0,\varepsilon] \cup [1-\varepsilon,1], \tau \in [-H,H]\}, \tag{2.10}$$

alors pour tout $y \geq (qH)^{c_1}$ et tout $s \in \mathbf{C}$ avec $\sigma \in [0,1[$ et $|\tau| \leq H/2$, on ait

$$\sum_{n\leq y} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s} = O\Big(\frac{y^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\Big\{y^{-c_2\varepsilon} + \frac{\log^2(qyH)}{H}\Big\} + \log(qH) + \frac{1}{\varepsilon}\Big). \tag{2.11}$$

Si χ est réel et si $L(s,\chi)$ a dans la région (2.10) un unique zéro β, qui est réel, alors

(2.12)
$$\sum_{n\leq y} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s} = -\frac{y^{\beta-s}-1}{\beta-s} + O\Big(\frac{y^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\Big\{y^{-c_2\varepsilon} + \frac{\log^2(qyH)}{H}\Big\} + \log(qH) + \frac{1}{\varepsilon}\Big).$$

Enfin, si la fonction ζ n'a pas de zéro dans la région (2.10) et $y \geq H^{c_1}$, alors

$$\sum_{n\leq y} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{y^{1-s}-1}{1-s} + O\Big(\frac{y^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\Big\{y^{-c_2\varepsilon} + \frac{\log^2(yH)}{H}\Big\} + \log H + \frac{1}{\varepsilon}\Big), \tag{2.13}$$

Preuve L'estimation (2.11) découle d'un cas particulier de [Har12b, lemme 1]. L'estimation (2.13) est à rapprocher de [HT86, lemme 8]. Les cas complèmentaires n'apportent pas de difficulté essentielle. Par souci de complétude on en reprend ici la démonstration, qui suit celle de Harper [Har12b, lemme 1]. Afin d'unifier les calculs dans les différents cas, on se donne χ un caractère primitif de module $q \geq 1$ qui peut être le caractère trivial, et suivant les cas :

- lorsque $\chi = \mathbf{1}$, on note $\theta(\chi) := -1$ et $\beta_\chi := 1$,
- sinon, si $L(s,\chi)$ ne s'annule pas dans la région (2.10), on pose $\theta(\chi) := 0$,
- enfin, si χ est réel et si $L(s,\chi)$ s'annule une seule fois dans la région (2.10) en $s = \beta$, on pose $\theta(\chi) := 1$ et $\beta_\chi := \beta$.

La quantité β_χ n'interviendra pas dans les calculs lorsque $\theta(\chi) = 0$. On note

$$S_s(y) := \sum_{n\leq y} \Lambda(n)\chi(n)n^{-s}.$$

La majoration triviale $S_s(y) \ll \frac{y^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$ montre que l'on peut supposer $\varepsilon \geq 1/\log y$. D'autre part, sans perte de généralité on suppose que s n'est pas un zéro de $L(s,\chi)$ et est différent de 0.

On note $F(s,\chi) := L(s,\chi)(s-\beta_\chi)^{-\theta(\chi)}$ et on rappelle les faits suivants, énoncés dans [DM00, chapitres 15 et 16] :

- F est une fonction entière de s dont les seuls zéros sont d'une part les zéros triviaux, qui sont des entiers négatifs ou nuls, et les zéros non triviaux, de parties réelles dans $[0,1]$,
- le nombre de zéros $\rho = \beta + i\gamma$ de F avec $\beta \in [0,1]$ et $|\gamma| \le T$ vaut
$$\frac{T}{\pi}\log\Big(\frac{qT}{2\pi}\Big) - \frac{T}{\pi} + O\big(\log(qT)\big).$$

Enfin, si χ est non trivial et $\chi(-1) = 1$, on pose $\alpha(\chi) = 1$, et $\alpha(\chi) = 0$ dans tous les autres cas. Ainsi, $\alpha(\chi) = 1$ si et seulement si $L(0,\chi) = 0$. Une formule de Perron [Ten08, corollaire II.2.4] ainsi que des estimations classiques concernant la densité verticale des zéros de $L(s,\chi)$ (voir par exemple [DM00, chapitres 17 et 19]) fournissent

$$S_s(y) = -\sum_{\substack{\rho \\ |\mathfrak{Im}(\rho)-\tau|\le H/2}} \frac{y^{\rho-s}}{\rho-s} - \theta(\chi)\frac{y^{\beta_\chi - s}-1}{\beta_\chi - s} + \alpha(\chi)\frac{y^{-s}}{s} - \frac{F'}{F}(s,\chi) + O\Big(y^{-\sigma} + \frac{y^{1-\sigma}\log^2(qyH)}{H}\Big) \tag{2.14}$$

où ρ dans la première somme désigne un zéro non trivial de $F(s,\chi)$. Puisque $\log y \gg 1$ quitte à supposer $c_1 \ge 2$, on a
$$\frac{y^{1-\sigma}\log^2(qyH)}{H} \ll \frac{y^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\frac{\log^2(qyH)}{H}$$
qui est admissible.

On suppose dans un premier temps $1-\sigma \le \varepsilon/2$. Alors
$$S_s(y) + \theta(\chi)\frac{y^{\beta_\chi - s}-1}{\beta_\chi - s} \ll \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ |\gamma|\le H}} \frac{y^{\beta-\sigma}}{|\rho-s|} + \Big|\frac{F'}{F}(s,\chi)\Big| + 1 + \frac{y^{1-\sigma}\log^2(qyH)}{H}. \tag{2.15}$$

On a
$$\frac{F'}{F}(s,\chi) \ll \Big|\frac{F'}{F}(1+\varepsilon+i\tau,\chi)\Big| + \varepsilon \max_{\sigma\le\kappa\le 1+\varepsilon}\Big|\Big(\frac{F'}{F}\Big)'(\kappa+i\tau,\chi)\Big|.$$
En dérivant une formule explicite pour $L'/L(s,\chi)$ (voir par exemple [DM00, chapitre 12, formule (17)]), on obtient
$$\Big(\frac{F'}{F}\Big)'(\kappa+i\tau,\chi) = -\sum_{\rho}\frac{1}{(\kappa+i\tau-\rho)^2} - \sum_{\substack{m\in\mathbf{Z}, m\le 0 \\ L(m,\chi)=0}} \frac{1}{(\kappa+i\tau-m)^2}$$
où, dans la première somme, ρ désigne un zéro non trivial de $L(s,\chi)$, sauf éventuellement β_χ. On a $\kappa \gg 1$, la seconde somme est donc $O(1)$. Dans la première somme sur $\rho = \beta + i\gamma$,

- la contribution de ceux vérifiant $|\gamma| > H$ est
$$\ll \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma|>H}} \frac{1}{|\gamma|^2} \ll \frac{\log(qH)}{H}$$
grâce par exemple à [DM00, formules (1) des chapitres 15 et 16],

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

- la contribution de ceux vérifiant $|\gamma| \leq H$ et $|\tau - \gamma| > 1$ est $O\big(\log(qH)\big)$ grâce à [DM00, formules (3) des chapitres 15 et 16],
- la contribution de ceux vérifiant $|\tau - \gamma| \leq 1$ est

$$\ll \sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-\tau|\leq 1}} \frac{1}{|1+\varepsilon+i\tau-\rho|^2} \leq \frac{1}{\varepsilon}\,\mathfrak{Re}\Big(\sum_{\substack{\rho \\ |\gamma-\tau|\leq 1}} \frac{1}{1+\varepsilon+i\tau-\rho}\Big) \ll \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\log(qH)}{\varepsilon}$$

en suivant les mêmes calculs que Harper [Har12a, démonstration du lemme 3] et en notant que dans le cas $\theta(\chi) \neq 0$, on a $1/(1+\varepsilon+i\tau-\beta_\chi) \ll 1/\varepsilon$.

On obtient donc $F'/F(s,\chi) \ll \varepsilon^{-1} + \log(qH)$. Il reste à majorer la somme sur ρ du membre de droite de (2.15). On utilise pour cela la majoration suivante, qui découle de [Hux74, formule (1.1)] et [Jut77, formule (1.8)],

$$\text{card}\Big\{\rho = \beta + i\gamma \in \mathbf{C} \;\Big|\; \prod_{r\leq q}\prod_{\chi' (\mathrm{mod}\ r)} L(\rho,\chi') = 0, \beta \geq 1-\delta, |\gamma| \leq H\Big\} \ll (qH)^{c_3\delta} \tag{2.16}$$

pour une certaine constante $c_3 > 0$, uniformément pour $\delta \in [0,1/2]$; ici χ' parcourt les caractères primitifs modulo r. On a ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ |\gamma|\leq H}} \frac{y^{\beta-\sigma}}{|\rho-s|} &\ll \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ \beta\leq 1/2, |\gamma|\leq H}} \frac{y^{1/2-\sigma}}{1+|\gamma-\tau|} + \sum_{k=1}^{\lfloor 1/(2\varepsilon)\rfloor} \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ k\varepsilon\leq 1-\beta<(k+1)\varepsilon \\ |\gamma|\leq H}} \frac{y^{1-\sigma-k\varepsilon}}{\varepsilon} \\ &\ll y^{1/2-\sigma}\log^2(qH) + \frac{y^{1-\sigma-c_2\varepsilon}}{\varepsilon}\end{aligned}$$

pour une certaine constante $c_2 > 0$, quitte à supposer $c_1 > c_3$. Le second terme est majoré par $O\big(y^{-c_2\varepsilon}\frac{y^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\big)$ grâce aux hypothèses $1-\sigma \leq \varepsilon/2$ et $\varepsilon \log y \geq 1$, ce qui fournit la majoration annoncée.

On considère maintenant le cas $1-\sigma > \varepsilon/2$. On a par une intégration par parties

$$S_s(y) = S_s(\sqrt{y}) + S_{i\tau}(y)y^{-\sigma} - S_{i\tau}(\sqrt{y})y^{-\sigma/2} + \sigma\int_{\sqrt{y}}^{y} S_{i\tau}(t)t^{-\sigma-1}\,\mathrm{d}t. \tag{2.17}$$

Soit $t \in [\sqrt{y}, y]$; on a $t \geq (qH)^{c_1/2}$. Il est nécessaire de distinguer le cas $\theta(\chi) = 1$ car alors $F(1-\beta_\chi,\chi) = 0$. On note donc

$$\mathbf{1}_{\theta=1} := \begin{cases} 1 & \text{si } \theta(\chi) = 1, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

On suppose également sans perte de généralité que $\tau \neq 0$. Il découle de la formule (2.14) avec s et y remplacés respectivement par $i\tau$ et t que

$$\begin{aligned}
S_{i\tau}(t) + \theta(\chi)\frac{t^{\beta_\chi - i\tau} - 1}{\beta_\chi - i\tau} \\
&\ll \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\ \rho\neq 1-\beta_\chi\\ |\gamma|\leq H}} \frac{t^{\beta}}{|\rho - i\tau|} + \Big|\alpha(\chi)\frac{t^{-i\tau}}{i\tau} - \frac{F'}{F}(i\tau,\chi) - \mathbf{1}_{\theta=1}\frac{t^{1-\beta_\chi - i\tau}}{1-\beta_\chi - i\tau}\Big| \\
&\quad + 1 + \frac{t\log^2(qtH)}{H}
\end{aligned}$$

où dans la somme sur ρ la condition $\rho \neq 1-\beta_\chi$ n'est à prendre en compte que lorsque $\theta(\chi) = 1$. D'après [MV06, formules (10.27), (12.9) et théorème 11.4], on a

$$\begin{aligned}
\Big|\alpha(\chi)\frac{t^{-i\tau}}{i\tau} &- \frac{F'}{F}(i\tau,\chi) - \mathbf{1}_{\theta=1}\frac{t^{1-\beta_\chi - i\tau}}{1-\beta_\chi - i\tau}\Big| \\
&\leq \Big|\frac{L'}{L}(1-i\tau,\overline{\chi}) - \frac{\mathbf{1}_{\theta=1}}{1-i\tau-\beta_\chi}\Big| + \Big|\mathbf{1}_{\theta=1}\frac{t^{1-i\tau-\beta_\chi}-1}{1-i\tau-\beta_\chi}\Big| \\
&\quad + \Big|\alpha(\chi)\frac{t^{-i\tau}-1}{i\tau}\Big| + O\big(\log(qH)\big) \\
&\ll \log(qyH) + \sqrt{t}\log t.
\end{aligned}$$

Enfin, pour tout $\rho = \beta + i\gamma$ zéro non trivial de $F(s,\chi)$, sauf éventuellement $1-\beta_\chi$, on a $\beta \geq \varepsilon$, ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\ \rho\neq 1-\beta_\chi\\ |\gamma|\leq H}} \frac{t^{\beta}}{|\rho - i\tau|} &\ll \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\ |\gamma|\leq H\\ \beta\leq 1/4}} \frac{t^{1/4}}{\varepsilon + |\gamma-\tau|} + \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\ |\gamma|\leq H\\ 1/4<\beta<1/2}} \frac{t^{1/2}}{1+|\gamma-\tau|} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\lfloor 1/(2\varepsilon)\rfloor} \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\ |\gamma|\leq H\\ k\varepsilon\leq 1-\beta<(k+1)\varepsilon}} t^{1-k\varepsilon} \\
&\ll \sqrt{t}\log^2(qH) + t\Big(\frac{(qH)^{c_3}}{t}\Big)^{\varepsilon} \ll t^{1-c_2\varepsilon}
\end{aligned}$$

en supposant $c_1 > 2c_3$ et quitte à réduire la valeur de c_2, et où l'on a de nouveau utilisé la formule (2.16) ainsi que des résultats classiques sur la densité des zéros de $L(s,\chi)$ [DM00, formules (1) des chapitres 15 et 16]. On a donc

$$S_{i\tau}(t) + \theta(\chi)\frac{t^{\beta_\chi - i\tau} - 1}{\beta_\chi - i\tau} \ll t^{1-c_2\varepsilon} + \log(qyH) + \frac{t\log^2(qyH)}{H}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

et ainsi, en reportant dans (2.17),

$$\begin{aligned}S_s(y) + \theta(\chi)\frac{y^{\beta_\chi - s} - 1}{\beta_\chi - s}&\\ \ll \Big|\theta(\chi)\frac{y^{(\beta_\chi - s)/2} - 1}{\beta_\chi - s}\Big| &+ \frac{y^{(1-\sigma)/2} - 1}{1-\sigma} + \frac{y^{1-\sigma-c_2\varepsilon} - y^{(1-\sigma-c_2\varepsilon)/2}}{1-\sigma-c_2\varepsilon}\\ &+ y^{-\sigma/2}\log(qyH) + \frac{(y^{1-\sigma} - y^{(1-\sigma)/2})\log^2(qyH)}{(1-\sigma)H}.\end{aligned}$$

Dans le membre de droite, le premier terme est dominé par le deuxième. Puisque de plus on a $1-\sigma > \varepsilon/2$, donc $1-\sigma > \log y$, on obtient

$$S_s(y) + \theta(\chi)\frac{y^{\beta_\chi - s} - 1}{\beta_\chi - s} \ll y^{-c_2\varepsilon/2}\frac{y^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \frac{y^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}\frac{\log^2(qyH)}{H} + \log(qyH)$$

qui est la majoration annoncée.

Remarque Ainsi qu'il est observé dans la remarque qui suit le lemme 2 de [Har12b], dans la démonstration qui précède, la majoration (2.16) en conjonction avec l'hypothèse $y \geq (qH)^{c_1}$, remplace avantageusement les résultats classiques sur la densité verticale des zéros des fonctions L [DM00, chapitres 17 et 19]. L'utilisation de ceux-ci induirait un facteur supplémentaire $\log^2(qyH)$ dans le premier terme d'erreur de chacune des estimations (2.11), (2.12) et (2.13) et rendrait celles-ci triviales lorsque $\varepsilon = O\big((\log\log qyH)/\log y\big)$. Des valeurs permises pour ε dépendent le choix des paramètres ε et T dans les propositions 2.9, 2.11 et 2.13 *infra*, qui influent sur le domaine de validité en Q ainsi que la qualité des termes d'erreur.

Lemme 2.7 *Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ positives, c_2 pouvant être fixée arbitrairement petite, telles que pour tous réels x, y, T supérieurs à 4, $\varepsilon > 0$ et tout entier $q \geq 2$, sous les conditions :*

- $(\log x)^{c_1} \leq y \leq x$,
- $qT \leq y^{c_2}$,
- $\varepsilon \log y \geq 1/c_2$,
- $T \geq y^{c_1\varepsilon}(\log x)^2$,

et pour tout caractère χ de module q tel que la fonction $L(s,\chi)$ ne s'annule pas pour $\sigma \geq 1-\varepsilon$ et $|\tau| \leq 2T$, la majoration

$$\frac{L(\sigma + i\tau, \chi; y)}{L(\sigma' + i\tau, \chi; y)} \ll x^{(\sigma'-\sigma)/2}$$

soit valable lorsque $(\sigma, \sigma', |\tau|) \in [\alpha - c_2\varepsilon, \alpha]^2 \times [0, T]$ et $\sigma \leq \sigma'$.

En particulier, cette majoration est valable avec $\varepsilon = b/\log QT$ pour tout $Q \geq 2$ vérifiant $QT \leq y^{c_2}$, lorsque χ est un caractère de module $q \leq Q$ qui n'est pas Q-exceptionnel. De plus, elle est également valable lorsque χ est Q-exceptionnel et l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

$$|\tau| \geq \max\{1, y^{\beta-\sigma}\} \quad \text{ou } \beta \leq 1 - \sqrt{c_2}/\log QT.$$

D'autre part, sous les conditions :

- $(\log x)^{c_1} \le y \le x$,
- $y^{c_1(\log T)^{-2/3}(\log\log T)^{-1/3}}(\log x)^2 \le T \le y^{c_2}$,

la majoration

$$\frac{\zeta(\sigma+i\tau,y)}{\zeta(\alpha+i\tau,y)} \ll x^{(\alpha-\sigma)/2}$$

est valable lorsque $(\sigma,|\tau|) \in [\alpha - c_2(\log T)^{-2/3}(\log\log T)^{-1/3}, \alpha] \times [y^{1-\alpha}, T]$.

Preuve Afin d'unifier les calculs dans les différents cas, on se donne un caractère χ, qui est soit non principal et de module $q \ge 2$, soit le caractère trivial auquel cas l'on pose $q := 1$, et on note suivant les cas :

- si $\chi = \mathbf{1}$, on pose $\beta_\chi := 1$, $\sigma' = \alpha$ et $\varepsilon = b(\log T)^{-2/3}(\log\log T)^{-1/3}$,
- si χ est un caractère Q-exceptionnel, on pose $\beta_\chi := \beta$ et $\varepsilon = b/\log QT$.

Ainsi $L(s,\chi)$ est une fonction qui n'a pas de zéro ni de pôle pour $\sigma \ge 1-\varepsilon$ et $|\tau| \le 2T$, sauf éventuellement en $s = \beta_\chi$. Dans le cas $\chi = \mathbf{1}$, ceci découle de la région sans zéro de Vinogradov–Korobov [MV06, formule (6.24)] quitte à réduire la valeur de b. Quitte à choisir c_1 suffisamment grande et c_2 suffisamment petite on a $\sigma' \ge \sigma \ge 1/2$. On note χ^* le caractère primitif associé à χ et q^* son module ; on a pour tout $s \in \mathbf{C}$,

$$L(s,\chi;y) = \prod_{p|q}\big(1-\chi^*(p)p^{-s}\big)L(s,\chi^*;y).$$

Lorsque $q = 1$ et $\chi = \mathbf{1}$, le produit sur p est vide, et dans les autres cas, sa dérivée logarithmique par rapport à s est $\ll \sum_{p|q}(\log p)/(1-p^{-\mathfrak{Re}(s)}) \ll \log q$ lorsque $\mathfrak{Re}(s) \ge 1/2$. On a donc dans tous les cas

$$\frac{L(\sigma+i\tau,\chi;y)}{L(\sigma'+i\tau,\chi;y)} = \exp\Big\{-\int_\sigma^{\sigma'}\frac{L'}{L}(\kappa+i\tau,\chi^*;y)\,\mathrm{d}\kappa + O(\varepsilon\log q)\Big\}$$

avec, pour tout $\kappa \in [\sigma,\sigma']$,

$$-\frac{L'}{L}(\kappa+i\tau,\chi^*;y) = \sum_{P(n)\le y}\frac{\Lambda(n)\chi^*(n)}{n^{\kappa+i\tau}} = \sum_{n\le y}\frac{\Lambda(n)\chi^*(n)}{n^{\kappa+i\tau}} + O(1).$$

Le lemme 2.6 s'applique avec $H = 2T$. Lorsque χ est non exceptionnel, le lemme 2.6 fournit

$$\begin{aligned}\sum_{n\le y}\frac{\Lambda(n)\chi^*(n)}{n^{\kappa+i\tau}} &\ll \frac{y^{1-\kappa-c_3\varepsilon}}{1-\kappa} + \frac{y^{1-\kappa}\log^2(qyT)}{(1-\kappa)T} + \log(qT)\\ &\ll \frac{y^{1-\alpha-c_3\varepsilon/2}}{1-\alpha} + \log(qT)\end{aligned}$$

pour une certaine constante $c_3 > 0$, quitte à supposer c_1 suffisamment grande et c_2 suffisamment petite. Si χ est exceptionnel ou $\chi = \mathbf{1}$, on a

$$\sum_{n\le y}\frac{\Lambda(n)\chi^*(n)}{n^{\kappa+i\tau}} \ll \frac{y^{1-\alpha-c_3\varepsilon/2}}{1-\alpha} + \log(qT) + \Big|\frac{y^{\beta_\chi-\kappa-i\tau}-1}{\beta_\chi-\kappa-i\tau}\Big|.$$

Lorsque $|\tau| \ge y^{\beta_\chi-\sigma}$, le dernier terme du membre de droite est borné, tandis que lorsque χ est Q-exceptionnel et $\beta \le 1-\sqrt{c_2}/\log QT$, ce terme est

$$O\Big(\frac{y^{1-\kappa-\sqrt{c_2}\varepsilon/b}}{(1-\kappa)}\Big).$$

Ainsi dans tous les cas, quitte à réduire la valeur de c_2, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\le y}\frac{\Lambda(n)\chi^*(n)}{n^{\kappa+i\tau}} &\ll \frac{y^{1-\alpha-\sqrt{c_2}\varepsilon/b}}{1-\alpha}+\log(QT)\\ &\ll \begin{cases}\Big(\mathrm{e}^{-\sqrt{c_2}\varepsilon\log y/b}+\frac{\log(QT)}{\log x}\Big)\log x & \text{si } \chi\ne\mathbf{1}\\ \Big(\mathrm{e}^{-c_2^{-1/6}(\log y)^{1/3}/(\log\log y)^{1/3}}+\frac{\log(QT)}{\log x}\Big)\log x & \text{si } \chi=\mathbf{1}\end{cases}\end{aligned}$$

grâce à [Ten08, formule (III.5.74)]. Quitte à supposer c_1 suffisamment grande et c_2 suffisamment petite, on en déduit

$$\Big|\sum_{P(n)\le y}\frac{\Lambda(n)\chi^*(n)}{n^{\kappa+i\tau}}\Big| \le \frac{\log x}{2}+O(1)$$

donc $L(\sigma+i\tau,\chi;y)/L(\sigma'+i\tau,\chi;y)=O(x^{(\sigma'-\sigma)/2})$.

Le lemme suivant traite de la situation où le zéro exceptionnel existe. La démonstration est analogue à celle de [Ten90, lemme 1].

Lemme 2.8 *Il existe des constantes c_1, c_2 strictement positives telles que pour tous réels Q, T supérieurs à 2 et x et y assez grands avec :*

- $(\log x)^{c_1} \le y \le x$,
- $QT \le y^{c_2/(\log\log\log x)}$,
- $T \ge y^{c_1/\log(QT)}(\log x)^2$,

si le zéro exceptionnel β existe et vérifie $1-\beta \le \sqrt{c_2}/\log QT$, alors pour tout τ avec $|\tau| \le T/2$ on ait

$$L(\alpha+i\tau+\beta-1,\chi_1;y) \ll \zeta(\alpha,y)H(u)^{-\delta}.$$

Preuve Quitte à choisir c_1 suffisamment grande, on suppose $\alpha \ge 2/3$. Alors on a

$$\begin{aligned}L(\alpha+i\tau+\beta-1,\chi_1;y) &= \zeta(\alpha,y)\exp\Big\{\sum_{p\le y}\log\Big(\frac{1-p^{-\alpha}}{1-\chi_1(p)p^{1-\beta-\alpha-i\tau}}\Big)\Big\}\\ &= \zeta(\alpha,y)\exp\Big\{-\sum_{p\le y}\frac{1-\chi_1(p)p^{1-\beta-i\tau}}{p^\alpha}+O(1)\Big\}\end{aligned}$$

le logarithme étant pris en détermination principale. La somme sur p s'écrit

$$\sum_{p\le y}\frac{1-\chi_1(p)p^{1-\beta}\cos(\tau\log p)}{p^\alpha} = S_1+S_2+O(1) \tag{2.18}$$

où S_1 représente la contribution des $p \le y_0 := (2QT)^{c_1}$ et S_2 résulte d'une intégration par parties :

$$S_1 := \sum_{p \le y_0} \frac{1 - \chi_1(p) p^{1-\beta} \cos(\tau \log p)}{p^\alpha},$$
$$S_2 := \frac{S(y)}{\log y} - \frac{S(y_0)}{\log y_0} + \int_{y_0}^{y} \frac{S(z)\,\mathrm{d}z}{z(\log z)^2},$$
$$\text{où} \quad S(z) := \sum_{n \le z} \Lambda(n) \frac{1 - \chi_1(n) n^{1-\beta} \cos(\tau \log n)}{n^\alpha}.$$

La somme S_1 est majorée comme suit :

(2.19)
$$S_1 \ll (QT)^{c_1(2-\beta-\alpha)} \sum_{p \le y_0} \frac{1}{p} \ll \big(\log(u+1)\big)^2 u^{c_1 c_2/\log\log\log x} = o\big(u/\log(u+1)^2\big)$$

lorsque $u \to \infty$, où on a utilisé $y^{1-\alpha} \asymp u \log(u+1)$ [HT86, lemme 3]. Afin d'estimer la quantité S_2, on applique le lemme 2.6 deux fois avec $\varepsilon = b/\log QT$, $H = 2T$, y (dans l'énoncé de ce lemme) remplacé par $z \in [y_0, y]$, et $s \in \{\alpha, \alpha + \beta - 1\}$. On obtient pour une certaine constante $c_3 > 0$

$$\text{(2.20)} \quad \sum_{n \le z} \frac{\Lambda(n)}{n^\alpha} = \frac{z^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} + O\Big(\frac{z^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \Big\{ z^{-c_3 \varepsilon} + \frac{\log^2(QzT)}{T} \Big\} + \log(QT) \Big)$$

$$\text{(2.21)} \quad \sum_{n \le z} \frac{\Lambda(n)\chi_1(n)}{n^{\alpha + i\tau + \beta - 1}} = -\frac{z^{1-\alpha-i\tau} - 1}{1 - \alpha - i\tau} + O\Big(\frac{z^{2-\alpha-\beta} - 1}{2 - \alpha - \beta} \Big\{ z^{-c_3\varepsilon} + \frac{\log^2(QzT)}{T} \Big\} + \log(QT) \Big).$$

Quitte à choisir c_1 suffisament grande, dans les termes d'erreur, le deuxième terme $\log^2(QzT)/T$ est dominé par le premier $z^{-c_3\varepsilon}$. D'autre part, quitte à supposer c_2 suffisament petite, on a $1 - \beta \le c_3\varepsilon/2$, on en déduit

$$\frac{z^{2-\alpha-\beta} - 1}{2 - \alpha - \beta} \le z^{c_3\varepsilon/2} \frac{z^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha}.$$

Ainsi les estimations (2.20) et (2.21) fournissent, en intégrant de nouveau par parties les termes principaux,

$$\text{(2.22)} \quad S_2 = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathfrak{Re}\{z^{-\alpha} + z^{-\alpha - i\tau}\}\,\mathrm{d}z}{\log z} + O(R),$$
$$R := 1 + \frac{y^{-c_3\varepsilon/2}(y^{1-\alpha} - 1)}{(1-\alpha)\log y} + \frac{y_0^{-c_3\varepsilon/2}(y_0^{1-\alpha} - 1)}{(1-\alpha)\log y_0} + \int_{y_0}^{y} \frac{z^{-c_3\varepsilon/2}(z^{1-\alpha} - 1)\,\mathrm{d}z}{(1-\alpha) z (\log z)^2}.$$

Le numérateur $\mathfrak{Re}\{z^{-\alpha} + z^{-\alpha-i\tau}\}$ du terme principal est positif ou nul, on a donc

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathfrak{Re}\{z^{-\alpha} + z^{-\alpha-i\tau}\}\,\mathrm{d}z}{\log z} \ge \frac{1}{\log y} \bigg(\mathfrak{Re}\Big\{ \frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{y^{1-\alpha-i\tau}}{1-\alpha-i\tau} \Big\} + O\Big(\frac{y_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big) \bigg).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

On a $y_0^{1-\alpha}/(1-\alpha) \ll u^{c_2/\log\log\log x}\log y$, ainsi que

$$\mathfrak{Re}\Big\{\frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{y^{1-\alpha-i\tau}}{1-\alpha-i\tau}\Big\} \gg \frac{\log x}{\big(\log(u+1)\big)^2}$$

grâce aux calculs de Hildebrand et Tenenbaum [HT86, lemme 8], ce qui fournit

$$\int_{y_0}^{y}\frac{\mathfrak{Re}\{z^{-\alpha}+z^{-\alpha-i\tau}\}\,\mathrm{d}z}{\log z} \gg \frac{u}{\big(\log(u+1)\big)^2}. \tag{2.23}$$

D'autre part, on a d'après les hypothèses $y^{-c_3\varepsilon/2} \le (\log\log x)^{-c_3 b/(2c_2)}$. Ainsi, quitte à réduire la valeur de c_2 en fonction de c_3, on a

$$y^{-c_3\varepsilon/2}\frac{y^{1-\alpha}-1}{(1-\alpha)\log y} \ll \frac{u}{(\log\log x)^3}.$$

Par ailleurs, on a de même que précédemment

$$\frac{y_0^{1-\alpha}-1}{(1-\alpha)\log y_0} \le y_0^{1-\alpha} \ll u^{c_2/\log\log\log x}\log(u+1).$$

En utilisant la majoration élémentaire

$$\int_a^b\frac{z^{\gamma-1}\,\mathrm{d}z}{(\log z)^2} \ll \frac{a^\gamma}{\log a}+\gamma+\frac{b^\gamma}{\gamma(\log b)^2}, \quad 0<\gamma, 1<a\le b,$$

ainsi qu'une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{\sqrt{y}}\frac{z^{-c_3\varepsilon/2}(z^{1-\alpha}-1)}{z(1-\alpha)(\log z)^2}\,\mathrm{d}z &\le \frac{y_0^{1-\alpha}-1}{(1-\alpha)\log y_0}-2\frac{y^{(1-\alpha)/2}-1}{(1-\alpha)\log y}+\int_{y_0}^{\sqrt{y}}\frac{z^{-\alpha}\,\mathrm{d}z}{\log z}\\ &\ll \sqrt{\frac{u}{\log(u+1)}},\\ \int_{\sqrt{y}}^{y}\frac{z^{-c_3\varepsilon/2}(z^{1-\alpha}-1)\,\mathrm{d}z}{(1-\alpha)z(\log z)^2}&\\ \le y^{-c_3\varepsilon/4}\Big\{2\frac{y^{(1-\alpha)/2}-1}{(1-\alpha)\log y}&-\frac{y^{1-\alpha}-1}{(1-\alpha)\log y}+\int_{\sqrt{y}}^{y}\frac{z^{-\alpha}\,\mathrm{d}z}{\log z}\Big\}.\end{aligned}$$

Le terme entre accolades est $O(u)$ tandis qu'à supposer c_2 suffisamment petite en fonction de c_3, le facteur $y^{-c_3\varepsilon/4}$ est $O\big(1/(\log\log x)^3\big)$, d'où l'on déduit

$$R \ll 1+\frac{u}{(\log\log x)^3}. \tag{2.24}$$

En insérant les formules (2.22), (2.23), (2.24) et (2.19) dans la définition (2.18), on obtient pour un certain $\delta>0$

$$L(\alpha+i\tau+\beta-1,\chi_1;y) \ll \zeta(\alpha,y)\exp\Big\{-\delta\frac{u}{\big(\log(u+1)\big)^2}\Big\}$$

qui est la majoration annoncée.

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

2.4 Caractères non principaux, non exceptionnels

On s'intéresse au cas des caractères non principaux et non associés à l'éventuel caractère exceptionnel χ_1. Soit χ un tel caractère, de module q. On rappelle que $\Psi_0(z, y; \chi, \gamma)$ est la fonction définie par (2.6).

Proposition 2.9 *Il existe des constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que pour tous réels $x, y, \gamma, \varepsilon$ et T avec $4 \le T \le y^{c_2}$ et $\varepsilon > 0$, lorsque q et un entier avec $2 \le q \le y^{c_2}$ et χ un caractère de module q, non principal et tel que la fonction $L(s, \chi)$ ne s'annule pas dans la région*

$$\{s \in \mathbf{C} \mid \sigma > 1 - \varepsilon, |\tau| \le T\}$$

et lorsque $2 \le (\log x)^{c_1} \le y \le x$, et $z \in [x^{2/3}, x]$ on ait

$$\Psi_0(z, y; \chi, \gamma) \ll z^\alpha \zeta(\alpha, y)(1 + |\gamma| z)\big((\log T) x^{-c_2 \varepsilon} + T^{-c_2} \big).$$

En particulier, pour tout Q avec $2 \le Q \le y^{c_2}$, ceci est valable pour touts les caractères de module inférieurs à Q qui sont non principaux et non Q-exceptionnels, avec $\varepsilon = b/\log QT$. De plus la même majoration est valable lorsque χ est Q-exceptionnel mais $\beta \le 1 - \sqrt{c_2}/\log QT$.

Remarque Lorsque $\gamma = 0$, ce résultat est un cas particulier de [Har12b, théorème 3].

Preuve La condition sur (x, y) assure que les hypothèses du lemme 2.2 sont vérifiées pour la suite $a_n = \mathrm{e}(n\gamma)\chi(n)$ avec M absolu. On a de plus $\alpha \ge 1/2$ quitte à supposer c_1 assez grande. Le choix $\kappa = \alpha(x, y)$ fournit pour une certaine constante $c_3 > 0$

$$\Psi_0(z, y; \chi, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha - iT}^{\alpha + iT} L(s, \chi; y) z^s \check{\Phi}_0(\gamma z, s) \, \mathrm{d}s + O\big(z^\alpha \zeta(\alpha, y)(1 + |\gamma| z) T^{-c_3} \big).$$

On modifie le contour pour intégrer sur la ligne brisée passant par les points

$$\alpha - iT, \quad \alpha - c_4\varepsilon - iT, \quad \alpha - c_4\varepsilon + iT, \quad \alpha + iT,$$

où c_4 est une constante absolue choisie plus petite que la constante c_2 du lemme 2.7. Soit I_1 la contribution des deux segments horizontaux et I_2 la contribution du segment vertical. Les lemmes 2.4 et 2.7 s'appliquent ici dans tous les cas envisagés dans l'énoncé. On a ainsi

$$\begin{aligned} I_1 &\ll z^\alpha \zeta(\alpha, y) \frac{(1 + |\gamma| z)}{T} \int_0^{c_4 \varepsilon} \Big(\frac{\sqrt{x}}{z} \Big)^\kappa \, \mathrm{d}\kappa \\ &\ll z^\alpha \zeta(\alpha, y) \frac{(1 + |\gamma| z)}{T}, \\ I_2 &\ll z^\alpha \zeta(\alpha, y)(1 + |\gamma| z)(\log T) \Big(\frac{\sqrt{x}}{z} \Big)^{c_4 \varepsilon} \\ &\ll z^\alpha \zeta(\alpha, y)(1 + |\gamma| z)(\log T) x^{-c_4 \varepsilon / 6}. \end{aligned}$$

On obtient la majoration annoncée en regroupant ces deux estimations.

Dans la somme du membre de droite de (2.5), la contribution des caractères principaux s'écrit, après interversion des sommes,

$$V(x,y;q,\eta) := \sum_{n\in S(x,y)} \frac{\mu\big(q/(q,n)\big)}{\phi\big(q/(q,n)\big)} \mathrm{e}(n\eta)$$

et celle, lorsque $\nu(q)=1$, des caractères associés à χ_1 s'écrit $\chi_1(a)W(x,y;q,\eta)$ où

$$W(x,y;q,\eta) := \frac{\tau(\chi_1)}{\phi(q_1)} \sum_{r|q/q_1} \frac{\mu(r)\chi_1(r)}{\phi(r)} \sum_{m\in S(xq_1r/q,y)} \mathrm{e}\Big(\frac{mq}{q_1 r}\eta\Big)\chi_r(m).$$

On rappelle que T_1 est défini en (1.4).

Proposition 2.10 *Il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telles que pour tous réels x, y et ϑ et tous entiers $q, Q \geq 1$, lorsque $(\log x)^{c_1} \leq y \leq x$, $q \leq y^{c_2}$, $Q \leq T_1^{c_2}$ et $\vartheta = a/q + \eta$ avec $(a,q)=1$, on ait*

$$E(x,y;\vartheta) = V(x,y;q,\eta) + \nu(q)\chi_1(a)W(x,y;q,\eta) + O\big(\Psi(x,y)(1+|\eta|x)(y^{-c_2}+Q^{-c_2})\big) \tag{2.25}$$

où χ_1 désigne le caractère primitif Q-exceptionnel.

Preuve La preuve que l'on propose ici reprend la structure des calculs de la section 3.3 de [Har12b]. Les caractères de modules inférieurs à Q sont traités grâce à la proposition 2.9. Pour les caractères de modules supérieurs, lorsque la fonction L a ses zéros de petite partie réelle, la proposition 2.9 permet encore de conclure. Cela ne concerne pas tous les caractères de modules supérieurs à Q, mais la majoration de Huxley et Jutila (2.16) permet de dire que les caractères restants sont en proportion suffisament peu nombreux pour que leur contribution, même majorée trivialement, soit bien contrôlée.

Soient c_1' et c_2' les constantes de la proposition 2.9. On suppose $c_1 \geq c_1'$ et $c_2 \leq c_2'$. Il s'agit de majorer

$$\sum_{d|q} \frac{1}{\phi(q/d)} \sideset{}{'}\sum_{\chi \pmod{q/d}} \chi(a)\tau(\overline{\chi})\Psi_0(x/d,y;\chi,\eta d) \tag{2.26}$$

où la somme $\sum'$ porte sur les caractères non principaux et non Q-exceptionnels. Lorsqu'un tel caractère est lui-même de module $q/d \leq Q$, la proposition 2.9 s'applique avec $z = x/d$ et $\gamma = \eta d$, $T = T_1$ et $\varepsilon = b/\log QT$ et fournit

$$\Psi_0(x/d,y;\chi,\eta d) \ll x^\alpha \zeta(\alpha,y) d^{-\alpha}(1+|\eta|x)\big(y^{-c_3} + \mathcal{L}^{-c_3} + (\log x)^{1/2}x^{-c_3/\log Q}\big)$$

pour une certaine constante $c_3 > 0$. On sépare la somme sur d dans (2.26) selon si $q/d \leq Q$ ou pas. La contribution des $d|q$ avec $d \geq q/Q$ est certainement

$$\begin{aligned}&\ll \Psi(x,y)(\log x)(1+|\eta|x)\big(y^{-c_3} + \mathcal{L}^{-c_3} + (\log x)^{1/2}x^{-c_3/\log Q}\big) \sum_{r|q,\ r\leq Q} \sqrt{r}(q/r)^{-\alpha}\\ &\ll \Psi(x,y)(1+|\eta|x)(y^{-c_2}+\mathcal{L}^{-c_2})\end{aligned}$$

en majorant trivialement la somme sur r par $O(\min\{q,Q\}^{3/2})$, quitte à réduire la valeur de c_2 et augmenter la valeur de c_1 afin d'avoir $\alpha \geq 2/3$ et pour absorber le facteur $\log x$. La dernière inégalité fait usage de l'hypothèse $Q \leq T_1^{c_2}$, quitte à supposer $c_2 < 1$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

Il reste à majorer la contribution à l'expression (2.26) des $d|q$ avec $d < q/Q$, autrement dit des caractères de modules $r|q$ avec $Q < r \le y^{c_2}$. Soit χ un tel caractère et c_3' la constante apparaissant en exposant dans la formule (2.16). On pose $c_3 = 2/c_2'$ et $c_4 = 1/\big(10(c_3+1)c_3'\big)$. Quitte à diminuer la valeur de c_2, on a $r^{c_3} \le y^{c_2'}$. Lorsque $L(s,\chi)$ ne s'annule pas pour $\sigma \ge 1 - c_4$ et $|\tau| \le r^{c_3}$, on a pour $(\log x)^{c_1} \le y \le x$ et $d|q$ la majoration

$$\Psi_0(x/d, y; \chi, \eta d) \ll \Psi(x,y)(1+|\eta|x)\big(x^{-c_2' c_4/2} + (\log x) r^{-2}\big).$$

La contribution de tous ces caractères à la somme (2.26) est donc

$$\ll \Psi(x,y)(1+|\eta|x)\big(x^{-c_2} + (\log x) Q^{-1/2}\big).$$

Pour tout $r \ge 2$, notons N_r le nombre de caractères de module r tel que la fonction $L(s,\chi)$ s'annule au moins une fois pour $\sigma \ge 1 - c_4$ et $|\tau| \le r^{c_3}$. La majoration (2.16) fournit $\sum_{r \le R} N_r \ll R^{1/10}$. Pour un tel caractère, on a $\tau(\overline{\chi})/\phi(r) \ll r^{-1/3}$. La majoration triviale $|\Psi(x/d, y; \chi, \eta d)| \le \Psi(x,y)$ montre que la contribution de tous ces caractères à la somme (2.26) est

$$\ll \Psi(x,y) \sum_{Q < r \le y^{c_2}} \frac{N_r}{r^{1/3}} \ll \Psi(x,y)(Q^{-c_2/5} + y^{-c_2/5})$$

ce qui fournit la conclusion souhaitée.

Remarque Il est possible de montrer que cette estimation est valable pour $q \le x^{c_2}$, *cf.* [Har12b, lemme 2]. Cela n'a cependant pas d'utilité pour les applications que l'on envisage ici.

2.5 Caractères principaux par la méthode du col

On note pour tout $s = \sigma + i\tau$ avec $\sigma > 0$ et tout entier q qui est y-friable

$$\zeta(s, q; y) := \sum_{P(n) \le y} \frac{\mu\big(q/(n,q)\big)}{\phi\big(q/(n,q)\big)} n^{-s} = \frac{q^{1-s}}{\phi(q)} \prod_{p|q} (1 - p^{s-1}) \zeta(s, y).$$

Pour $\sigma \le 1$, le facteur devant $\zeta(s,y)$ est $\ll 2^{\omega(q)} q^{1-\sigma}/\phi(q)$. On montre une première estimation de $V(x, y; q, \eta)$ par la méthode du col. Par rapport à celle de la proposition 2.12, qui sera montrée dans la section suivante, elle a l'avantage d'être valide sous des conditions moins restrictives sur q et η, au détriment du terme d'erreur.

Proposition 2.11 *Il existe des constantes c_1 et c_2 positives telles que pour tout (x,y) avec $(\log x)^{c_1} \le y \le \exp\{(\log x)/(\log\log x)^4\}$, tout entier $q \in S(x^{1/4}, y)$ et tout $\eta \in \mathbf{R}$*

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

vérifiant $|\eta|x \le x^{1/4}$, *on ait*

(2.27)

$$V(x,y;q,\eta) = \frac{\alpha q^{1-\alpha}}{\phi(q)} \prod_{p|q}(1-p^{\alpha-1})\check{\Phi}_0(\eta x,\alpha)\Psi(x,y) + O\Big(\frac{2^{\omega(q)}q^{1-\alpha}\Psi(x,y)}{\phi(q)(1+|\eta|x)^{\alpha}}\frac{(\log q)^2\log(2+|\eta|x)^3}{u}\Big) + O\Big(\frac{2^{\omega(q)}q^{1-\alpha}\Psi(x,y)}{\phi(q)}(1+|\eta|x)(y^{-c_2}+\mathrm{e}^{-c_2(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}})\Big).$$

Remarque En particulier, lorsque $|\eta|x \le \min\{y^{c_2/2}, \mathrm{e}^{c_2(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}/2}\}$, on a

$$V(x,y;q,\eta) \ll \frac{2^{\omega(q)}q^{1-\alpha}\Psi(x,y)(\log q)^2\big(\log(2+|\eta|x)\big)^3}{\phi(q)(1+|\eta|x)^{\alpha}}. \tag{2.28}$$

Démonstration de la proposition 2.11 Soit T un réel supérieur à 4. La série de Dirichlet $\zeta(s,q;y)$ est absolument convergente pour $\sigma > 0$, donc les lemmes 2.5 (avec $q_1 = 1$) et 2.2 s'appliquent et fournissent

$$V(x,y;q,\eta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT}\zeta(s,q;y)x^s\check{\Phi}_0(\eta x,s)\,\mathrm{d}s + O\Big(\frac{2^{\omega(q)}q^{1-\alpha}\Psi(x,y)}{\phi(q)}\frac{(1+|\eta|x)\log x\log T}{T^{\alpha/2}}\Big).$$

On note $\varepsilon := c_3(\log T)^{-2/3}(\log\log T)^{-1/3}$ pour un certain réel $c_3 > 0$ fixé plus petit que la constante c_2 du lemme 2.7, et on choisit $T = \min\{y^{c_2}, \mathrm{e}^{(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}}\}$. Alors les hypothèses du lemme 2.7 sont satisfaites quitte à choisir c_1 assez grande et c_2 assez petite. D'autre part, quitte à augmenter la valeur de c_1 et diminuer celle de c_2, on suppose que $\alpha - c_2\varepsilon \ge 1/2$. On intégre suivant le chemin $\bigcup_{i=1}^7 \mathcal{C}_j$, où

(i) $\mathcal{C}_1$ est le segment $[\alpha - iT, \alpha-\varepsilon-iT]$,
(ii) $\mathcal{C}_2$ est le segment $[\alpha-\varepsilon-iT, \alpha-\varepsilon-iy^{1-\alpha+\varepsilon}]$,
(iii) $\mathcal{C}_3$ est le chemin reliant le point $\alpha-\varepsilon-iy^{1-\alpha+\varepsilon}$ au point $\alpha - iy^{1-\alpha}$ en suivant la courbe $\tau = y^{1-\sigma}$,
(iv) $\mathcal{C}_4$ est le segment $[\alpha - iy^{1-\alpha}, \alpha+iy^{1-\alpha}]$,
(v) $\mathcal{C}_5$ est le chemin reliant le point $\alpha+iy^{1-\alpha}$ au point $\alpha-\varepsilon+iy^{1-\alpha+\varepsilon}$ en suivant la courbe $\tau = -y^{1-\sigma}$,
(vi) $\mathcal{C}_6$ est le segment $[\alpha-\varepsilon+iy^{1-\alpha+\varepsilon}, \alpha-\varepsilon+iT]$,
(vii) $\mathcal{C}_7$ est le segment $[\alpha-\varepsilon+iT, \alpha+iT]$.

Pour $j \in \{1,\dots,7\}$ on note I_j la contribution du chemin $\mathcal{C}_j$:

$$I_j = I_j(\eta) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_j}\zeta(s,q;y)x^s\check{\Phi}_0(\eta x,s)\,\mathrm{d}s.$$

La contribution du segment $\mathcal{C}_7$ est, grâce aux lemmes 2.7 et 2.4,

$$I_7 \ll \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha}\frac{2^{\omega(q)}q^{1-\sigma}}{\phi(q)}\zeta(\alpha,y)x^{\sigma}\frac{1+|\eta|x}{T}\,\mathrm{d}\sigma \ll \frac{2^{\omega(q)}q^{1-\alpha}\Psi(x,y)}{\phi(q)}\frac{(1+|\eta|x)\log x}{T}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

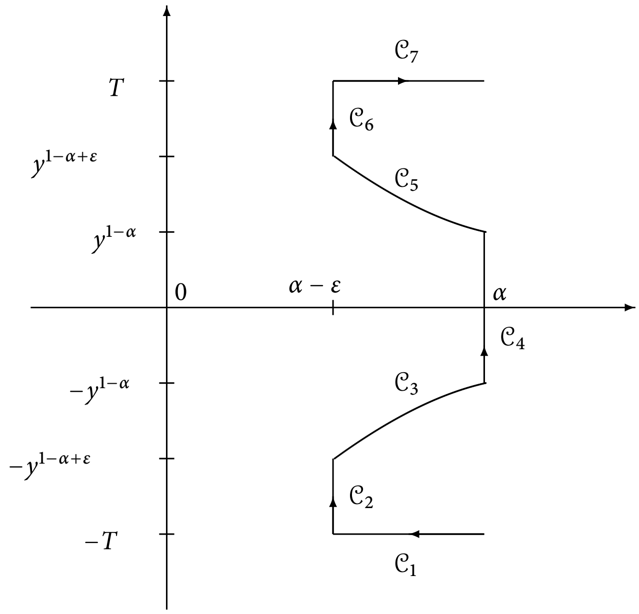

Figure 1

Sur le segment $\mathcal{C}_6$ on a $|\tau| \geq y^{1-\sigma}$. Le lemme 2.7 est donc encore applicable et on a

$$\begin{aligned} I_6 &\ll \frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha+\varepsilon}}{\phi(q)} x^{\alpha-\varepsilon/2} \zeta(\alpha, y)(1+|\eta|x) \log T \\ &\ll \frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha} \Psi(x, y)}{\phi(q)} \frac{(1+|\eta|x) \log T \log x}{x^{\varepsilon/4}}. \end{aligned}$$

Sur le segment $\mathcal{C}_5$, le traitement est analogue. On a

$$I_5 \ll \frac{2^{\omega(q)}}{\phi(q)} \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} q^{1-\sigma} |\zeta(\sigma + iy^{1-\sigma}, y) \check{\Phi}_0(\eta x, \sigma + iy^{1-\sigma})| (\log y) x^{\sigma} y^{1-\sigma} \, \mathrm{d}\sigma.$$

Pour tout $\kappa \in [0, \varepsilon]$, on a pour un certain $\delta > 0$

$$\begin{gathered} \zeta(\alpha - \kappa + iy^{1-\alpha+\kappa}, y) \ll \zeta(\alpha, y) H(u)^{-\delta} \\ \check{\Phi}_0(\eta x, \alpha - \kappa + iy^{1-\alpha+\kappa}) \ll y^{1-\alpha+\kappa} \log(2+|\eta|x)/(1+|\eta|x)^{\alpha-\kappa} \end{gathered}$$

où la première inégalité est conséquence du lemme 2.7 et de [HT86, lemme 8]. Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} I_5 &\ll \frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha} x^{\alpha} \zeta(\alpha, y)(\log x)(\log y) y^{2(1-\alpha)}}{\phi(q)(1+|\eta|x)^{\alpha} H(u)^{\delta}} \int_0^{\varepsilon} \Big(\frac{y^2 q(1+|\eta|x)}{x} \Big)^{\kappa} \, \mathrm{d}\kappa \\ &\ll \frac{2^{\omega(q)} q^{1-\alpha} \Psi(x, y)}{(1+|\eta|x)^{\alpha} \phi(q) H(u)^{\delta/2}} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité $(\log x)(\log y)y^{2(1-\alpha)} \ll H(u)^{\delta/2}$ qui découle de nos hypothèses sur (x, y).

Sur le segment $\mathcal{C}_4$, le traitement est identique à celui des segments $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_5$ dans la preuve de la proposition 3.5 de [Dra12]. On reprend ici les étapes principales. La contribution des s vérifiant $1/\log y \le |\tau| \le y^{1-\alpha}$ est

$$\ll \frac{2^{\omega(q)}q^{1-\alpha}x^{\alpha}}{\phi(q)} \int_{1/\log y}^{y^{1-\alpha}} |\zeta(\alpha+i\tau)\check{\Phi}_0(\eta x, \alpha+i\tau)| \,\mathrm{d}\tau \ll \frac{2^{\omega(q)}q^{1-\alpha}\Psi(x,y)}{\phi(q)(1+|\eta|x)^{\alpha}H(u)^{\delta/2}}$$

où l'on a utilisé les lemmes 2.4 et [HT86, lemme 8]. On pose $T_0 := u^{-1/3}(\log y)^{-1}$. La contribution à I_4 des s vérifiant $T_0 \le |\tau| \le 1/\log y$ est

$$\begin{aligned} &\ll \frac{2^{\omega(q)}q^{1-\alpha}\log(2+|\eta|x)}{\phi(q)(1+|\eta|x)^{\alpha}} \int_{T_0}^{1/\log y} |\zeta(\alpha+i\tau)|x^{\alpha}\,\mathrm{d}\tau \\ &\ll \frac{2^{\omega(q)}q^{1-\alpha}\Psi(x,y)\log(2+|\eta|x)}{\phi(q)(1+|\eta|x)^{\alpha}u} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les calculs de la démonstration du lemme 11 de [HT86] pour évaluer l'intégrale. Lorsque $|\tau| \le T_0$, et quitte à changer la valeur de c_1 afin d'avoir $\alpha \ge 1/2$, on a pour $s = \alpha + i\tau$ l'estimation

$$\int_0^1 \mathrm{e}(\lambda t)(\log t)^k t^{s-1}\,\mathrm{d}t \ll_k \frac{\log(2+|\lambda|)^{k+1}}{(1+|\lambda|)^{\alpha}}, \quad k \in \{0,1,2\}.$$

Cela se montre par en intégrant par partie de façon similaire aux calculs du lemme 2.4. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{sq^{1-s}}{\phi(q)} \prod_{p|q}(1-p^{s-1})\check{\Phi}_0(\eta x, s) = \frac{\alpha q^{1-\alpha}}{\phi(q)} \prod_{p|q}(1-p^{\alpha-1})\check{\Phi}_0(\eta x, \alpha) \\ + \lambda\tau + O\Big(\frac{2^{\omega(q)}q^{1-\alpha}(\log q)^2\big(\log(2+|\eta|x)\big)^3}{\phi(q)(1+|\eta|x)^{\alpha}}\tau^2\Big) \end{aligned}$$

où le coefficient λ dépend au plus de x, y, q et η et vérifie

$$\lambda \ll \frac{2^{\omega(q)}q^{1-\alpha}\log q\big(\log(2+|\eta|x)\big)^2}{\phi(q)(1+|\eta|x)^{\alpha}}.$$

Le reste des calculs sont identiques à ceux de [Dra12, proposition 3.5] : en reportant ce développement dans l'intégrale puis en développant le terme complémentaire $x^s\zeta(s,y)/s$ de la même façon que dans [HT86, lemme 11], on obtient finalement

$$\begin{aligned} I_4 = \frac{\alpha q^{1-\alpha}}{\phi(q)} \prod_{p|q}(1-p^{\alpha-1})\check{\Phi}_0(\eta x, \alpha)\Psi(x,y) \\ + O\Big(\frac{2^{\omega(q)}q^{1-\alpha}\Psi(x,y)}{\phi(q)(1+|\eta|x)^{\alpha}} \frac{(\log q)^2\big(\log(2+|\eta|x)\big)^3}{u}\Big). \end{aligned}$$

Pour $j \in \{1,2,3\}$ on a $I_j(\eta) = \overline{I_{8-j}(-\eta)}$ et on se ramène aux calculs précédents. L'estimation voulue suit en regroupant toutes les contributions puisque l'on a toujours $\varepsilon \log x \gg \log T$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

2.6 Caractères principaux par la transformée de Laplace

Une autre façon d'évaluer $V(x,y;q,\eta)$ consiste à utiliser une estimation de De Bruijn [DB51] précisée par Saias [Sai89] et utilisée dans [dlBG12]. On rappelle la définition (1.9).

Proposition 2.12 *Pour tout $\varepsilon>0$ fixé, lorsque $(x,y)\in(H_\varepsilon)$ avec $y\le\sqrt{x}$, et $q\in\mathbf{N}$ et $\eta\in\mathbf{R}$ avec $q\le\mathcal{Y}_\varepsilon$ et $|\eta|\le\mathcal{Y}_\varepsilon/x$, on a*

$$V(x,y;q,\eta)=\widetilde{V}(x,y;q,\eta)+O_\varepsilon\Big(\frac{2^{\omega(q)}\Psi(x,y)}{\phi(q)\mathcal{Y}_\varepsilon}\Big).$$

Preuve Cette proposition généralise des calculs faits dans [dlBG12, théorème 4.2]. La différence vient du fait que l'on calcule uniquement la contribution des caractères principaux, pour lesquels on dispose de la région sans zéro de ζ de Vinogradov–Korobov, plus étendue que la région de Siegel–Walfisz pour les fonctions L. Notons $Q:=x/\mathcal{Y}_\varepsilon$. Les mêmes calculs que [dlBG12, lemme 3.2] montrent que

$$\begin{aligned}V(x,y;q,\eta)&=\sum_{k|q}\frac{\mu(q/k)k}{\phi(q)}\sum_{m\in S(x/k,y)}\mathrm{e}(mk\eta)\\&=\sum_{k|q}\frac{\mu(q/k)k}{\phi(q)}\int_Q^x\mathrm{e}(t\eta)\,\mathrm{d}\{\Psi(t/k,y)\}+O_\varepsilon\Big(\frac{2^{\omega(q)}\Psi(x,y)}{\phi(q)\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\Big)\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'estimation (2.4) et le fait que $\mathcal{Y}_\varepsilon^{2\alpha-1}\gg_\varepsilon\mathcal{Y}_{2\varepsilon}$ sous notre hypothèse sur (x,y). L'estimation (1.8) fournit, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int_Q^x\mathrm{e}(t\eta)\,\mathrm{d}\{\Psi(t/k,y)\}&-\int_Q^x\mathrm{e}(t\eta)\,\mathrm{d}\{\Lambda(t/k,y)\}\\&=\int_Q^x\mathrm{e}(t\eta)\,\mathrm{d}\big\{O\big(\Psi(t/k,y)\mathcal{Y}_{\varepsilon/2}^{-1}\big)\big\}\\&\ll(1+|\eta|x)\frac{\Psi(x/k,y)}{\mathcal{Y}_{\varepsilon/2}}\ll_\varepsilon\frac{\Psi(x/k,y)}{\mathcal{Y}_\varepsilon}.\end{aligned}$$

Notant $V_q(x,y):=\sum_{k|q}\mu(q/k)k/\phi(q)\Lambda(x/k,y)$, on en déduit

$$V(x,y;q,\eta)=\int_Q^x\mathrm{e}(t\eta)\,\mathrm{d}\,V_q(t,y)+O_\varepsilon\Big(\frac{2^{\omega(q)}\Psi(x,y)}{\phi(q)\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\Big).$$

En utilisant (1.10), on réécrit cela sous la forme

$$\begin{aligned}V(x,y;q,\eta)=\sum_{k|q}\frac{\mu(q/k)k}{\phi(q)}&\Big\{\int_{Q/k}^{x/k}\mathrm{e}(kt\eta)\lambda(t,y)\,\mathrm{d}t+\int_{Q/k}^{x/k}\mathrm{e}(kt\eta)t\,\mathrm{d}\Big(\frac{\{t\}}{t}\Big)\Big\}\\&+O\Big(\frac{2^{\omega(q)}\Psi(x,y)}{\phi(q)\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\Big).\end{aligned}$$

En intégrant par parties, on a d'une part

$$\sum_{k|q}\frac{\mu(q/k)k}{\phi(q)}\int_{Q/k}^{x/k}\mathrm{e}(kt\eta)t\,\mathrm{d}\Big(\frac{\{t\}}{t}\Big)\ll\frac{2^{\omega(q)}q\mathcal{Y}_\varepsilon}{\phi(q)}\ll\frac{2^{\omega(q)}\Psi(x,y)}{\phi(q)\mathcal{Y}_\varepsilon},$$

et d'autre part, en utilisant $\int_0^t \mathrm{e}(v\eta)\,\mathrm{d}v = E(t,t;\eta) + O(1)$,

$$\int_{Q/k}^{x/k} \mathrm{e}(kt\eta)\lambda(t,y)\,\mathrm{d}t$$
$$= E\Big(\frac{x}{k},\frac{x}{k};k\eta\Big)\lambda\Big(\frac{x}{k},y\Big) - \int_{Q/k}^{x/k} E(t,t;k\eta)\lambda'(t,y)\,\mathrm{d}t + O\big(yu + \Psi(Q/k,y)\big).$$

Les hypothèses faites sur x et y assurent que $yu\mathcal{Y}_0 \ll \Psi(x,y)$ et $\mathcal{Y}_\varepsilon^{2\alpha-1} \gg \mathcal{Y}_{2\varepsilon}$, le terme d'erreur est donc $O\big(\Psi(x,y)/(k\mathcal{Y}_{2\varepsilon})\big)$. On a de plus la majoration

$$\lambda'(t,y) \ll \frac{\Psi(t,y)\log(u+1)}{t^2\log y}, \qquad y \le t \le x. \tag{2.29}$$

qui se déduit par différentiation de [dlBG12, formule (2.2)] en utilisant par exemple l'estimation [dlB99, formule (30)]. Cela implique

$$\int_1^{Q/k} E(t,t;k\eta)\lambda'(t,y)\,\mathrm{d}t \ll \Psi(x/\mathcal{Y}_{\varepsilon/4},y)\log x + \frac{\Psi\big(x/(k\mathcal{Y}_\varepsilon),y\big)}{x/\mathcal{Y}_{\varepsilon/4}}$$

en séparant l'intégrale en $x/\mathcal{Y}_{\varepsilon/4}$. Les hypothèses sur x et y impliquent alors que chacun de ces termes est $\ll \Psi(x,y)/(k\mathcal{Y}_{2\varepsilon})$. On a enfin

$$\begin{aligned} &E(x/k,x/k;k\eta)\lambda(x/k,y) - \int_1^{x/k} E(t,t;k\eta)\lambda'(t,y)\,\mathrm{d}t \\ &\quad= \sum_{n\le x/k} \mathrm{e}(kn\eta)\lambda(n,y) + \frac{y}{\log y}\sum_{y<n\le x/k}\Big(\frac{\{x/(ky)\}}{x/k} - \frac{\{n/y\}}{n}\Big) \\ &\quad= \sum_{n\le x/k} \mathrm{e}(kn\eta)\lambda(n,y) + O(yu). \end{aligned} \tag{2.30}$$

De même que précédemment, le terme d'erreur est $O\big(\Psi(x,y)/(k\mathcal{Y}_{2\varepsilon})\big)$. On obtient donc

$$\begin{aligned} V(x,y;q,\eta) &= \sum_{k\mid q}\frac{\mu(q/k)k}{\phi(q)}\sum_{n\le x/k}\mathrm{e}(kn\eta)\lambda(n,y) + O\Big(\frac{2^{\omega(q)}\Psi(x,y)}{\phi(q)\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\Big) \\ &= \widetilde{V}(x,y;q,\eta) + O\Big(\frac{2^{\omega(q)}\Psi(x,y)}{\phi(q)\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\Big) \end{aligned}$$

qui est l'estimation voulue, ε pouvant être pris arbitrairement petit.

2.7 Caractères exceptionnels

Soit Q un entier supérieur à 2. On se place dans le cas de l'existence du zéro de Siegel. Soit $q \le Q$ avec $\nu(q) = 1$ et $P(q) \le y$. On définit

$$\begin{aligned} LW(s,q;y) &:= \frac{\tau(\chi_1)}{\phi(q_1)}\sum_{r\mid(q/q_1)}\frac{\mu(r)\chi_1(r)}{\phi(r)}\Big(\frac{q_1 r}{q}\Big)^s L(s,\chi_r;y) \\ &= \Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{1-s}\frac{\tau(\chi_1)}{\phi(q)}\prod_{\substack{p\mid q/q_1\\ p\nmid q_1}}\big(1-\chi_1(p)p^{s-1}\big)L(s,\chi_1;y). \end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

Pour $\sigma \leq 1$, le facteur devant $L(s,\chi_1;y)$ est $\ll (q/q_1)^{1-\sigma}2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}/\phi(q)$.

Proposition 2.13 *Il existe des constantes c_1 et c_2 positives telles que pour tout (x,y) avec $(\log x)^{c_1} \leq y \leq \exp\{(\log x)/(\log\log x)^4\}$, tout $Q \leq y^{c_2/\log\log\log x}$, tout caractère χ de module $q \leq Q$, qui est Q-exceptionnel, et tout $\eta \in \mathbf{R}$ vérifiant $|\eta|x \leq x^{1/4}$, la quantité $W(x,y;q,\eta)$ soit un grand O de*

(2.31)
$$\frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}\Psi(x,y)}{\phi(q)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{1-\alpha}\Big(\frac{1}{(1+|\eta|x)^{\alpha+\beta-1}x^{1-\beta}H(u)^{\delta}}+(1+|\eta|x)R(x,y,Q)\Big)$$

où $R(x,y,Q) = y^{-c_2/\log\log\log x} + \mathcal{L}^{-c_2} + (\log x)^{3/2}x^{-c_2/\log Q}$.

Remarque La contrainte sur Q n'est pas limitante dans les applications que l'on envisage. L'approche adoptée dans [Sou08, lemme 5.2], permet d'obtenir une majoration moins forte mais qui est valable lorsque Q est de l'ordre d'une petite puissance de y. Cela n'est pas étudié ici.

Preuve On pose $T := \min\{y^{c_2/\log\log\log x},\mathcal{L}\}$ et $\varepsilon = c_3/\log QT$, c_2 étant choisie suffisamment petite pour que les hypothèses du lemme 2.8 vis-à-vis de T et Q soient vérifiées, et c_3 étant choisie plus petite que la constante c_2 du lemme 2.8. Lorsque $\beta \leq 1-\sqrt{c_2}/\log QT$, la proposition 2.9 s'applique et on obtient, de la même façon qu'à la proposition 2.10,

$$\begin{aligned}
&W(x,y;q,\eta)\\
&\quad= \frac{\tau(\chi_1)}{\phi(q_1)}\sum_{r|(q/q_1)}\frac{\mu(\frac{q}{q_1r})\chi_1(\frac{q}{q_1r})}{\phi(\frac{q}{q_1r})}\Psi_0(x/r,y;\chi_{q/(q_1r)},r\eta)\\
&\quad\ll \Psi(x,y)(1+|\eta|x)\big(y^{-c_2}+\mathcal{L}^{c_2}+(\log x)^{3/2}x^{-c_2/\log Q}\big)\\
&\qquad\qquad\times\frac{\sqrt{q_1}}{\phi(q_1)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{-\alpha}\sum_{r|(q/q_1)}\frac{\mu^2(r)}{\phi(r)}\\
&\quad\ll \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\phi(q)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{1-\alpha}\Psi(x,y)(1+|\eta|x)R
\end{aligned}$$

qui est de l'ordre de la majoration annoncée. On suppose maintenant $1-\beta \leq \sqrt{c_2}/\log QT$. De même qu'à la proposition 2.11, par les lemmes 2.5 et 2.2, on a

$$\begin{aligned}
W(x,y;q,\eta) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} LW(s,q;y)x^s\check{\Phi}_0(\eta x,s)\,\mathrm{d}s\\
&\quad+O\Big(\frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\phi(q)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{1-\alpha}\Psi(x,y)\frac{\log x\log T}{T^{\alpha/2}}\Big)
\end{aligned}$$

On déforme le contour pour suivre le chemin $\bigcup_{i=1}^{7}\mathcal{C}'_i$, où

(i) $\mathcal{C}'_1$ est le segment $[\alpha-iT,\alpha+\beta-1-\varepsilon-iT]$,
(ii) $\mathcal{C}'_2$ est le segment $[\alpha+\beta-1-\varepsilon-iT,\alpha+\beta-1-\varepsilon-iy^{1-\alpha+\varepsilon}]$,
(iii) $\mathcal{C}'_3$ est le chemin reliant le point $\alpha+\beta-1-\varepsilon-iy^{1-\alpha+\varepsilon}$ au point $\alpha+\beta-1-iy^{1-\alpha}$ suivant la courbe $\tau = y^{\beta-\sigma}$,
(iv) $\mathcal{C}'_4$ est le segment $[\alpha+\beta-1-iy^{1-\alpha},\alpha+\beta-1+iy^{1-\alpha}]$,

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

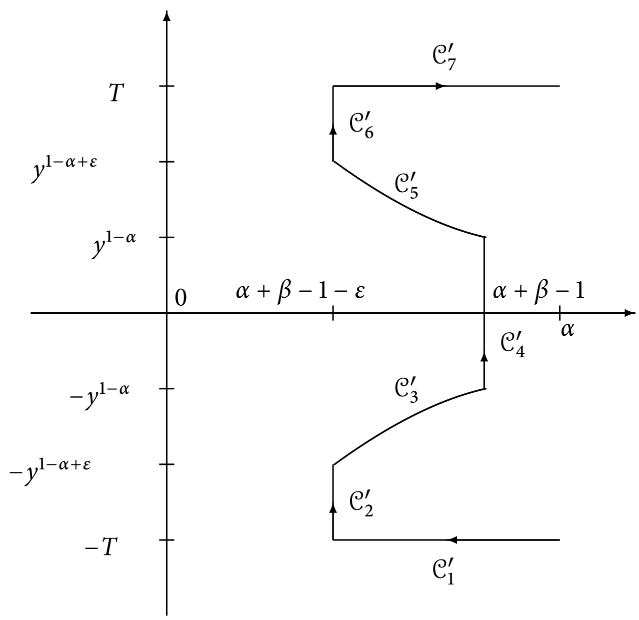

Figure 2

(v) $\mathcal{C}_5'$ est le chemin reliant le point $\alpha+\beta-1+iy^{1-\alpha}$ au point $\alpha+\beta-1-\varepsilon+iy^{1-\alpha+\varepsilon}$ suivant la courbe $\tau=-y^{\beta-\sigma}$,

(vi) $\mathcal{C}_6'$ est le segment $[\alpha+\beta-1-\varepsilon+iy^{1-\alpha+\varepsilon}, \alpha+\beta-1-\varepsilon+iT]$,

(vii) $\mathcal{C}_7'$ est le segment $[\alpha+\beta-1-\varepsilon+iT, \alpha+iT]$.

Pour $j\in\{1,\dots,7\}$, on note I_j' la contribution du chemin $\mathcal{C}_j'$:

$$I_j' = I_j'(\eta) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}_j'} LW(s,q;y)x^s\check{\Phi}_0(\eta x,s)\,\mathrm{d}s.$$

De la même façon que dans la démonstration de la proposition 2.11, on a

$$\begin{aligned}I_7' &\ll \int_{\alpha+\beta-1-\varepsilon}^{\alpha}\frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\phi(q)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{1-\sigma}\frac{\zeta(\alpha,y)x^{(\alpha-\sigma)/2}x^{\sigma}(1+|\eta|x)}{T}\,\mathrm{d}\sigma\\ &\ll \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\phi(q)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{1-\alpha}\frac{\Psi(x,y)(1+|\eta|x)\log x}{T}.\end{aligned}$$

Sur le segment $\mathcal{C}_6'$, on a encore $|\tau|\ge y^{\beta-\sigma}$, d'où par le lemme 2.7,

$$\begin{aligned}I_6' &\ll \int_{y^{1-\alpha+\varepsilon}}^{T}\frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\phi(q)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{2-\alpha-\beta+\varepsilon}\frac{\zeta(\alpha,y)x^{(\beta-1)/2-\varepsilon/2}x^{\alpha}(1+|\eta|x)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\\ &\ll \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\phi(q)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{1-\alpha}\frac{\Psi(x,y)(1+|\eta|x)\log x\log T}{x^{\varepsilon/4}}\end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

quitte à supposer c_2 petite, afin d'avoir $q/q_1 \le x^{1/4}$.

Sur le chemin $\mathcal{C}_5'$, les lemmes 2.7 et 2.8 permettent d'écrire pour un certain $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}|L(\sigma+i\tau,\chi_1;y)| &\ll |L(\alpha+\beta-1+i\tau,\chi_1;y)|x^{(\alpha+\beta-1-\sigma)/2}\\ &\ll \zeta(\alpha,y)x^{(\alpha+\beta-1-\sigma)/2}H(u)^{-\delta}.\end{aligned}$$

En remarquant que $\varepsilon \log q \ll 1$, on obtient

$$\begin{aligned}I_5' \ll \int_{\alpha+\beta-1-\varepsilon}^{\alpha+\beta-1} &\frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\phi(q)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{1-\sigma}\zeta(\alpha,y)x^{(\alpha+\beta-1+\sigma)/2}\\ &\qquad H(u)^{-\delta}\frac{(\log y)y^{2(\beta-\sigma)}\log(2+|\eta|x)}{(1+|\eta|x)^{\sigma}}\,\mathrm{d}\sigma\\ &\ll \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\phi(q)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{1-\alpha}\frac{\Psi(x,y)}{(1+|\eta|x)^{\alpha+\beta-1}x^{1-\beta}H(u)^{\delta/2}}\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'hypothèse $\log y \le (\log x)/(\log\log x)^4$ sous la forme

$$(\log x)H(u)^{-\eta} \ll_\eta 1$$

pour tout $\eta > 0$.

Sur $\mathcal{C}_4'$ les calculs sont similaires : par le lemme 2.8 on a

$$\begin{aligned}I_4' &\ll \int_0^{y^{1-\alpha}} \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\phi(q)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{2-\alpha-\beta}\zeta(\alpha,y)H(u)^{-\delta}x^{\alpha+\beta-1}\frac{(1+|\tau|)\log(2+|\eta|x)}{(1+|\eta|x)^{\alpha+\beta-1}}\,\mathrm{d}\tau\\ &\ll \frac{2^{\omega(q/q_1)}\sqrt{q_1}}{\phi(q)}\Big(\frac{q}{q_1}\Big)^{1-\alpha}\frac{\Psi(x,y)}{(1+|\eta|x)^{\alpha+\beta-1}x^{1-\beta}H(u)^{\delta/2}}\end{aligned}$$

ce qui est de l'ordre de grandeur souhaité.

Pour $j \in \{1,2,3\}$, le caractère χ_1 étant réel, la même remarque qu'à la démonstration de la proposition 2.11 est valable : on a $I_j'(\eta) = \overline{I_{8-j}'(-\eta)}$ et les majorations qui concernent I_{8-j}' s'appliquent.

En regroupant les différentes contributions et en observant que

$$\frac{1}{T^{\alpha/2}} + \frac{1}{T} + \frac{\log x \log T}{x^{\varepsilon/8}} \ll R$$

quitte à réduire la valeur de c_2, on obtient la majoration annoncée.

2.8 Démonstration des théorèmes 1.2 et 1.3

On pose $Q = \lceil T_2^{c_2}\rceil$, en observant que $\log x/\log Q \gg \log\mathcal{L}$ lorsque $c_2 \le 1$. Quitte à supposer c_1 suffisamment grande et c_2 suffisamment petite, x, y et Q vérifient les hypothèses des propositions 2.10, 2.11, et 2.13. Le terme d'erreur provenant de l'estimation (2.25) est $\ll (1+|\eta|x)\Psi(x,y)(y^{-c_3/\log\log\log x} + \mathcal{L}^{-c_3}) \ll \Psi(x,y)T_2^{-c_2}$ pour

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

une certaine constante c_3. Le terme d'erreur provenant de l'estimation (2.27) est

$$\ll \frac{2^{\omega(q)}q^{1-\alpha}\Psi(x,y)}{\phi(q)}$$
$$\Big(\frac{(\log q)^2\big(\log(2+|\eta|x)\big)^3}{(1+|\eta|x)^{\alpha}u}+(1+|\eta|x)\big(y^{-c_3}+\mathrm{e}^{-c_3(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}}\big)\Big)$$
$$\ll \frac{2^{\omega(q)}q^{1-\alpha}\Psi(x,y)}{\phi(q)(1+|\eta|x)^{\alpha}}\frac{(\log q)^2\big(\log(2+|\eta|x)\big)^3}{u}+\frac{\Psi(x,y)}{T_1^{c_2}}.$$

Enfin, la quantité R intervenant dans (2.31) est $\ll T_2^{-c_2}$. Ceci implique l'estimation (1.6).

Si on suppose de plus que $(x,y)\in(H_\varepsilon)$, $q\le \mathcal{Y}_\varepsilon$ et $|\eta|x\le \mathcal{Y}_\varepsilon/q$ pour un certain $\varepsilon>0$, alors en évaluant $V(x,y;q,\eta)$ par la proposition 2.12 plutôt que 2.11, on obtient l'estimation (1.11).

3 En norme L^2

On s'intéresse ici à l'obtention d'une majoration pour le deuxième moment de $V(x,y;q,\eta)$ et $W(x,y;q,\eta)$. Lorsque $2\le y\le x$, on a

$$\int_0^1 |E(x,y;\vartheta)|^2\,\mathrm{d}\,\vartheta=\Psi(x,y).$$

Le lemme qui suit est une majoration de même ordre de grandeur pour les normes L^2 sur les arcs majeurs de $V(x,y;q,\eta)$ et $W(x,y;q,\eta)$, qui sont les termes principaux apparaissant dans l'estimation (2.25). Ces calculs sont analogues de ceux réalisés dans [dlBG12, section 5.2].

Proposition 3.1 *Lorsque $2\le y\le x$, $Q\ge 2$ et $R\le x$, on a*

$$\sum_{q\le R}\phi(q)\int_{-1/(qQ)}^{1/(qQ)}|V(x,y;q,\eta)|^2\,\mathrm{d}\,\eta\ll R^{1-\alpha}(\log x)^5\Psi(x,y)$$
$$\sum_{q\le R}\phi(q)\nu(q)\int_{-1/(qQ)}^{1/(qQ)}|W(x,y;q,\eta)|^2\,\mathrm{d}\,\eta\ll \frac{q_1^2}{\phi(q_1)^2}R^{1-\alpha}(\log x)^5\Psi(x,y).$$

On note que $q_1/\phi(q_1)\ll\log\log q_1$.

Preuve Soit q avec $\nu(q)=1$. On note pour simplifier $r_1:=q/q_1$. On a

$$\begin{aligned}W(x,y;q,\eta)&=\frac{\tau(\chi_1)}{\phi(q_1)}\sum_{r\mid r_1}\frac{\mu(r)\chi_1(r)}{\phi(r)}\sum_{m\in S(xr/r_1,y)}\mathrm{e}\Big(\frac{mr_1}{r}\eta\Big)\chi_r(m)\\&=\frac{\tau(\chi_1)}{\phi(q_1)}\sum_{r'\mid r_1}\sum_{m\in S(x/r',y)}\frac{\mu(\frac{r_1}{r'})\chi_1(\frac{r_1}{r'})\chi_{\frac{r_1}{r'}}(m)}{\phi(\frac{r_1}{r'})}\mathrm{e}(mr'\eta)\\&=\frac{\tau(\chi_1)}{\phi(q_1)}\sum_{n\in S(x,y)}\sum_{r'\mid(r_1,n)}\mathrm{e}(n\eta)\frac{\mu(\frac{r_1}{r'})\chi_1(\frac{r_1}{r'})\chi_{\frac{r_1}{r'}}(\frac{n}{r'})}{\phi(\frac{r_1}{r'})}.\end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

Notons temporairement $w_{r'}(n) := \mu(r_1/r')\chi_1(r_1/r')\chi_{r_1/r'}(n/r')/\phi(r_1/r')$. La présence du terme en $\chi_{r_1/r'}$ annule $w_{r'}(n)$ sauf si $(n/r', q/r') = 1$ soit $r' = (q,n)$. En particulier, lorsque $r' < (r_1, n)$ on a $w_{r'}(n) = 0$ et on obtient

$$W(x,y;q,\eta) = \frac{\tau(\chi_1)}{\phi(q_1)} \sum_{n\in S(x,y)} \mathrm{e}(n\eta) w_{(r_1,n)}(n).$$

On a donc

$$\begin{aligned} I &:= \sum_{\substack{q\le R\\ q_1|q}} \phi(q) \int_{-1/(qQ)}^{1/(qQ)} |W(x,y;q,\eta)|^2 \,\mathrm{d}\eta \\ &= \frac{\tau(\chi_1)^2}{\phi(q_1)^2} \sum_{\substack{q\le R\\ q_1|q}} \phi(q) \Big(\sum_{n\in S(x,y)} \frac{2}{qQ} w_{(r_1,n)}(n)^2 \\ &\qquad + \sum_{\substack{n,m\in S(x,y)\\ m\ne n}} \frac{\sin\big(\frac{2\pi(m-n)}{qQ}\big)}{\pi(m-n)} w_{(r_1,n)}(n) w_{(r_1,m)}(m) \Big). \end{aligned}$$

On a $\sin\big(2\pi(m-n)/(qQ)\big)/\big(\pi(m-n)\big) \ll 1/(qQ+|m-n|)$. La majoration $w_{r'}(n) \ll 1/\phi(r_1/r')$ fournit donc

$$\begin{aligned} I &\ll \frac{q_1}{\phi(q_1)^2} \sum_{\substack{q\le R\\ q_1|q}} \phi(q) \sum_{n\in S(x,y)} \frac{1}{\phi\big(\frac{r_1}{(r_1,n)}\big)} \\ &\qquad \times \Big(\frac{1}{qQ} \sum_{n\le m\le n+qQ} \frac{1}{\phi\big(\frac{r_1}{(r_1,m)}\big)} + \sum_{n+qQ<m\le x} \frac{1}{(m-n)\phi\big(\frac{r_1}{(r_1,m)}\big)} \Big). \end{aligned}$$

Le premier terme dans la parenthèse intérieure est

$$\le \frac{1}{qQ} \sum_{d|r_1} \sum_{\frac{n}{d}\le m'\le \frac{n+qQ}{d}} \frac{1}{\phi(r_1/d)} \le \frac{\tau(r_1)}{\phi(r_1)}.$$

Le second terme est

$$\begin{aligned} &\le \sum_{d|r_1} \frac{1}{\phi(r_1/d)} \sum_{\frac{n+qQ}{d}<m'\le\frac{x}{d}} \frac{1}{m'd-n} \\ &\le \sum_{d|r_1} \frac{1}{\phi(r_1/d)} \int_{\frac{n+qQ}{d}-1}^{\frac{x}{d}} \frac{1}{td-n}\,\mathrm{d}t \ll (\log x)\frac{\tau(r_1)}{\phi(r_1)}. \end{aligned}$$

En utilisant (2.4), on obtient donc, en utilisant $\Psi(x/d,y) \ll r_1^{1-\alpha}\Psi(x,y)/d$ $(d\le r_1)$,

$$\begin{aligned} I &\ll (\log x)\frac{q_1}{\phi(q_1)^2} \sum_{\substack{q\le R\\ q_1|q}} \frac{\phi(q)\tau(r_1)}{\phi(r_1)} \sum_{d|r_1} \sum_{\substack{n\in S(x,y)\\ d|n}} \frac{1}{\phi(r_1/d)} \\ &\ll (\log x)\frac{q_1}{\phi(q_1)^2}\Psi(x,y) \sum_{r_1\le R/q_1} \frac{\phi(q)\tau(r_1)^2 r_1^{1-\alpha}}{\phi(r_1)^2}. \end{aligned}$$

On a $\phi(q_1 r_1) \le q_1\phi(r_1)$, la somme en r_1 est donc

$$\ll R^{1-\alpha} q_1 (\log R)^4 \ll R^{1-\alpha} q_1 (\log x)^4,$$

et on obtient

$$I \ll \frac{q_1^2}{\phi(q_1)^2} R^{1-\alpha} (\log x)^5 \Psi(x,y).$$

On remarque que l'on n'a fait aucune hypothèse spécifique à χ_r et q_1 pour mener ce calcul. Le cas $q_1 = 1$, χ_r étant alors le caractère principal de module r, mène à la majoration

$$\sum_{q\le R} \phi(q) \int_{-1/(qQ)}^{1/(qQ)} |V(x,y;q,\eta)|^2 \,\mathrm{d}\eta \ll R^{1-\alpha}(\log x)^5 \Psi(x,y).$$

4 Application à un théorème de Daboussi

Démonstration du théorème 1.5 On suit la démonstration de [dlBT05a, théorème 1.5]. Le lecteur peut s'y référer pour les détails. On ne reprend ici que les étapes intermédiaires. Soit c la constante donnée par le théorème 1.1 et $Y\colon [2,\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction croissante telle que pour tout $x \ge 2$, on ait $\big(x, Y(x)\big) \in \mathcal{D}_c$. Soit ϑ un irrationnel et $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ une fonction multiplicative, on suppose

$$\sum_{n\in S(x,y)} |f(n)|^2 \le K_f \Psi(x,y), \qquad Y(x) \le y \le x,$$

pour un certain réel $K_f > 0$ dépendant au plus de f. On suppose $Y(x) \le y \le x$; en particulier $\alpha \ge 3/4$ pour x et y assez grands. On note

$$E_f(x,y;\vartheta) := \sum_{n\in S(x,y)} f(n)\,\mathrm{e}(n\vartheta).$$

Les calculs faits dans [dlBT05a, formule (8.6)], qui découlent d'une forme duale de l'inégalité de Turán–Kubilius [dlBT05a, théorème 1.2], montrent que pour tout $z \ge 2$,

$$E_f(x,y;\vartheta) = \frac{1}{L(z)} \sum_{\substack{p\le z\\ |f(p)|\le 2}} \sum_{m\in S(x/p,y)} f(p) f(m)\,\mathrm{e}(mp\vartheta) + O\Big(\frac{\sqrt{K_f}\,\Psi(x,y)}{\sqrt{L(z)}}\Big)$$

où l'on a noté

$$L(z) := \sum_{\substack{p\le z\\ |f(p)|\le 2}} \frac{1-p^{-\alpha}}{p^\alpha} \asymp \sum_{\substack{p\le z\\ |f(p)|\le 2}} \frac{1}{p^\alpha}.$$

On a également, d'après [Dab75, lemme 1], pour un certain réel $z_0 = z_0(f) \ge 2$ et tout $z \ge z_0$,

$$L(z) \gg \sum_{\substack{p\le z\\ |f(p)|\le 2}} \frac{1}{p} \gg \log\log z$$

grâce à l'hypothèse faite sur f. Toujours d'après les calculs faits dans [dlBT05a], par une inégalité de Cauchy–Schwarz, on a

(4.1)
$$\sum_{\substack{p\leq z\\ |f(p)|\leq 2}}\sum_{m\in S(x/p,y)} f(p)f(m)\,\mathrm{e}(mp\vartheta)$$
$$\ll\sqrt{K_f\Psi(x,y)}\Big(\sum_{\substack{p\leq z\\ |f(p)|\leq 2}}\Psi(x/p,y)+\sum_{\substack{p<q\leq z\\ |f(p)|,|f(q)|\leq 2}}\big|E\big(x/q,y;(p-q)\vartheta\big)\big|\Big)^{1/2}.$$

Le théorème 1.1 dans le cas $y\leq\exp\{(\log x)/(\log\log x)^4\}$, et par exemple [dlBT05a, théorème 1.5] dans le cas contraire impliquent que chaque terme de la seconde somme du membre de droite est $o_{\vartheta,p,q}\big(\Psi(x/q,y)\big)$ lorsque x et y tendent vers l'infini en vérifiant $Y(x)\leq y\leq x$. Le nombre de termes est borné par une fonction de z, par l'estimation (2.4), le membre de gauche de (4.1) est donc $\ll\sqrt{K_f}\Psi(x,y)\big(\sqrt{L(z)}+o_{\vartheta,z}(1)\big)$ pour tout $z\geq z_0$ fixé, ainsi

$$\limsup_{\substack{x,y\to\infty\\ Y(x)\leq y\leq x}}\frac{E_f(x,y;\vartheta)}{\sqrt{K_f}\Psi(x,y)}\ll\frac{1}{\sqrt{L(z)}}$$

et le résultat voulu suit en faisant tendre z vers l'infini.

5 Application aux sommes friables d'entiers friables

On rappelle que $N(x,y)$ a été défini en (1.13).

Démonstration du théorème 1.6 On a pour tous x et y avec $2\leq y\leq x$,

$$N(x,y)=\int_0^1 E(x,y;\vartheta)^2E(x,y;-\vartheta)\,\mathrm{d}\,\vartheta.$$

Soit $c>0$ et $(x,y)\in\mathcal{D}_c$. Lorsque $y\geq\exp\{(\log x)/(\log\log x)^4\}$, le résultat de La Bretèche et Granville [dlBG12, théorème 1.1] est valable, on suppose donc $y\leq\exp\{(\log x)/(\log\log x)^4\}$. On note $Q:=\lceil x/\mathcal{L}^{c_2}\rceil$, $R:=\lceil\mathcal{L}^{c_2}\rceil$, et on suppose c suffisamment grande et c_2 suffisamment petite pour que les hypothèses des propositions 2.10, 2.11 et 2.13 soient vérifiées pour x, y et R (dans le rôle de Q). Lorsque ϑ vérifie $q(\vartheta,Q)>R$, on a d'après le lemme 1.4,

$$E(x,y;\vartheta)\ll x\mathcal{L}^{-c_3}\ll\Psi(x,y)\mathcal{L}^{-c_3/2}$$

pour une certaine constante $c_3>0$, quitte à supposer $c>2/c_3$. La contribution des ϑ vérifiant $q(\vartheta,Q)>R$ est donc

$$\ll\frac{\Psi(x,y)}{\mathcal{L}^{c_3/2}}\int_0^1|E(x,y;\vartheta)|^2\,\mathrm{d}\,\vartheta=\frac{\Psi(x,y)^2}{\mathcal{L}^{c_3/2}}\ll\frac{\Psi(x,y)^3}{x\mathcal{L}^{c_3/4}}$$

quitte à supposer $c>4/c_3$. Lorsque $q=q(\vartheta,Q)\leq R$, on écrit $\vartheta=a/q+\eta$ avec $|\eta|\leq 1/(qQ)$. On remarque que $q(-\vartheta,Q)=q(\vartheta,Q)$. La proposition 2.9 assure l'existence de $c_4>0$ telle que

$$E(x,y;\vartheta)=V(x,y;q,\eta)+v(q)\chi_1(a)W(x,y;q,\eta)+O\big(\Psi(x,y)\mathcal{L}^{-c_4}\big).$$

Grâce à la proposition 3.1, on a

$$\frac{\Psi(x,y)}{\mathcal{L}^{c_4}}\sum_{q\le R}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\int_{-1/(qQ)}^{1/(qQ)}|V(x,y;q,\eta)+\nu(q)\chi_1(a)W(x,y;q,\eta)|^2\,\mathrm{d}\eta$$
$$=O\Big((\log\log x)^2(\log x)^3\Psi(x,y)^2\mathcal{L}^{-c_4}\Big)=O\Big(\frac{\Psi(x,y)^3}{x\mathcal{L}^{c_4/2}}\Big)$$

quitte à supposer $c>2/c_4$. En notant que l'on a $\chi_1(a)^2=1$ lorsque $(a,q)=1$, et que $\sum_{(a,q)=1}\chi_1(a)=0$, on obtient pour un certain réel $c_5>0$

$$N(x,y)=NV(x,y)+NW(x,y)+O\Big(\frac{\Psi(x,y)^3}{x\mathcal{L}^{c_5}}\Big)$$

avec

$$NV(x,y):=\sum_{q\le R}\phi(q)\int_{-1/(qQ)}^{1/(qQ)}V(x,y;q,\eta)^2V(x,y;q,-\eta)\,\mathrm{d}\eta$$
$$NW(x,y):=\sum_{q\le R}\nu(q)\phi(q)\int_{-1/(qQ)}^{1/(qQ)}\Big(2V(x,y;q,\eta)|W(x,y;q,\eta)|^2$$
$$+V(x,y;q,-\eta)W(x,y;q,\eta)^2\Big)\,\mathrm{d}\eta.$$

On considère l'intégrant de $NW(x,y)$. On applique les estimations (2.28) et (2.31) (avec R dans le rôle du paramètre Q de ces estimations), en remarquant que $(1+|\eta|x)^{2-\alpha-\beta}=O(1)$ et $q^{1-\alpha}=O(1)$. On obtient pour deux réels $\delta,c_6>0$ (c_6 ne dépendant pas de c_2),

$$V(x,y;q,\eta)\ll\frac{2^{\omega(q)}(\log x)^{5/2}\Psi(x,y)}{\phi(q)(1+|\eta|x)},$$
$$W(x,y;q,\eta)\ll\frac{2^{\omega(q)}\sqrt{q_1}\Psi(x,y)}{\phi(q)}\Big\{\frac{1}{(1+|\eta|x)x^{1-\beta}H(u)^{\delta}}+(1+|\eta|x)\mathcal{L}^{-c_6}\Big\}.$$

En intégrant par rapport à $\eta\in[-1/(qQ),1/(qQ)]$, on a

$$\int_{-1/(qQ)}^{1/(qQ)}|V(x,y;q,\eta)W(x,y;q,\eta)^2|\,\mathrm{d}\eta$$
$$\ll\frac{q_1 8^{\omega(q)}}{\phi(q)^3}\frac{(\log x)^{5/2}\Psi(x,y)^3}{x}\Big\{\frac{1}{x^{2-2\beta}H(u)^{2\delta}}+\Big(\frac{x}{qQ}\Big)^2\mathcal{L}^{-2c_6}\Big\}.$$

En sommant sur les entiers q multiples de q_1, puis en utilisant $x/Q\ll\mathcal{L}^{c_2}$, ainsi que le fait que $H(u)^{\delta}\gg(\log x)^{5/2}$, on obtient finalement pour un certain $c_7>0$

$$NW(x,y)\ll\frac{8^{\omega(q_1)}\Psi(x,y)^3}{q_1x}\Big(\frac{1}{H(u)^{\delta}x^{2-2\beta}}+\frac{1}{\mathcal{L}^{c_7}}\Big)\ll\frac{\Psi(x,y)\log u}{x\log y}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2014-036-5 Published online by Cambridge University Press

On fixe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $1/\mathcal{Y}_{2\varepsilon} \ll (\log u)/\log y$. Grâce à la majoration (2.28), on obtient

$$\begin{aligned} NV(x,y) = \sum_{q\le \mathcal{Y}_\varepsilon} \phi(q) \int_{-\mathcal{Y}_\varepsilon/(qx)}^{\mathcal{Y}_\varepsilon/(qx)} V(x,y;q,\eta)^2 V(x,y;q,-\eta)\,\mathrm{d}\eta \\ + O\Big(\sum_{q>\mathcal{Y}_\varepsilon} \frac{8^{\omega(q)}(\log q)^2\Psi(x,y)^3}{\phi(q)^2} \int_0^{1/(qQ)} \frac{\big(\log(2+|\eta|x)\big)^3\,\mathrm{d}\eta}{(1+|\eta|x)^3}\Big) \\ + O\Big(\sum_{q\ge 1} \frac{8^{\omega(q)}(\log q)^2\Psi(x,y)^3}{\phi(q)^2} \int_{\mathcal{Y}_\varepsilon/(qx)}^{\infty} \frac{\big(\log(2+|\eta|x)\big)^3\,\mathrm{d}\eta}{(1+|\eta|x)^3}\Big). \end{aligned}$$

Les termes d'erreur sont $\ll \Psi(x,y)^3/(x\mathcal{Y}_{2\varepsilon})$. La proposition 2.12 fournit alors, pour $q \le \mathcal{Y}_\varepsilon$ et $|\eta|x \le \mathcal{Y}_\varepsilon/(qx)$,

$$\begin{aligned} V(x,y;q,\eta)^2 V(x,y;q,-\eta) = \\ \widetilde{V}(x,y;q,\eta)^2 \widetilde{V}(x,y;q,-\eta) + O\Big(\frac{8^{\omega(q)}\Psi(x,y)^3}{\phi(q)^3(1+\eta|x)^2\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\Big), \end{aligned}$$

on obtient donc

$$NV(x,y) = \sum_{q\le \mathcal{Y}_\varepsilon} \phi(q) \int_{-\mathcal{Y}_\varepsilon/(qx)}^{\mathcal{Y}_\varepsilon/(qx)} \widetilde{V}(x,y;q,\eta)^2 \widetilde{V}(x,y;q,-\eta)\,\mathrm{d}\eta + O\Big(\frac{\Psi(x,y)^3}{x\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\Big).$$

On fait maintenant appel aux estimations suivantes, qui sont respectivement la formule (4.22) et le lemme 5.1 de [dlBG12].

Lemme 5.1 *Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque $(x,y) \in (H_\varepsilon)$, on a*

$$\widetilde{V}(x,y;q,\eta) \ll_\varepsilon \frac{\mathcal{Y}_\varepsilon^{2(1-\alpha)} u(\log u) 2^{\omega(q)}\Psi(x,y)}{\phi(q)|\eta|x}, \quad q \le \mathcal{Y}_\varepsilon, \eta \ne 0, \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n\le x\\ k|n}} \lambda\Big(\frac{n}{k},y\Big) \int_{-1/(2k)}^{1/(2k)} \mathrm{e}\big((n'-n)\eta\big)\,\mathrm{d}\eta \\ = \frac{\lambda(n'/k,y)}{k}\mathbf{1}_{[1,x]}(n') \\ + O_\varepsilon\Big(\frac{ky/(\log y)}{\min\{|x-n'|+1, |n'-k|+1, n'\}}\Big), \quad (n' \in \mathbf{N}, k \le \mathcal{Y}_\varepsilon). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Preuve D'après les calculs de la proposition 2.12 et en particulier l'estimation (2.30), on a pour tout diviseur k de q,

$$\begin{aligned} \sum_{n\le x/k} \mathrm{e}(nk\eta)\lambda(n,y) = E(x/k,x/k;k\eta)\lambda(x/k,y) - \int_{x/(k\mathcal{Y}_\varepsilon)}^{x} E(t,t;k\eta)\lambda'(t,y)\,\mathrm{d}t \\ + O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{k\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\Big) \\ \ll \frac{\mathcal{Y}_\varepsilon^{2-2\alpha} u\log u\Psi(x,y)}{k|\eta|x}. \end{aligned}$$

En reportant cette majoration dans (1.12), on obtient l'estimation (5.1).

En ce qui concerne l'estimation (5.2), on peut suivre la même preuve que celle de [dlBG12, lemme 5.1], en remarquant que les seules estimations utilisées sont $\lambda(t,y) \ll 1$ $(t, y \geq 2)$ ainsi que (2.29), toutes deux valables sous nos hypothèses.

L'estimation (5.1) fournit

$$NV(x,y) = \sum_{q\leq \mathcal{Y}_\varepsilon} \phi(q) \int_{-1/(2k_3)}^{1/(2k_3)} \widetilde{V}(x,y;q,\eta)^2 \widetilde{V}(x,y;q,-\eta)\,\mathrm{d}\eta$$
$$+ O\Big(\mathcal{Y}_\varepsilon^{4-6\alpha}(u\log u)^3 \sum_{q\leq \mathcal{Y}_\varepsilon} \frac{8^{\omega(q)}q^2}{\phi(q)^2}\frac{\Psi(x,y)^3}{x} + \frac{\Psi(x,y)^3}{x\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\Big).$$

Sous nos hypothèses sur x et y, on a $u = \mathcal{Y}_\varepsilon^{o(1)}$ et $\alpha = 1 + o(1)$ lorsque x et y tendent vers l'infini, le terme d'erreur est donc $O\big(\Psi(x,y)^3/(x\mathcal{Y}_{2\varepsilon})\big)$. En développant le terme $\widetilde{V}(x,y;q,-\eta)$, on écrit

$$NV(x,y) = \sum_{q\leq \mathcal{Y}_\varepsilon} \mathrm{nv}(x,y;q) + R(x,y) + O\Big(\frac{\Psi(x,y)^3}{x\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}\Big) \tag{5.3}$$

où l'on a posé, de même que dans [dlBG12],

$$\mathrm{nv}(x,y;q) = \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3\in\mathbf{N}\\ k_i\mid q}} \mu\Big(\frac{q}{k_1}\Big)\mu\Big(\frac{q}{k_2}\Big)\mu\Big(\frac{q}{k_3}\Big)\frac{k_1k_2}{\phi(q)^2}$$
$$\times \sum_{\substack{n_1,n_2\in\mathbf{N}\\ n_1+n_2\leq x\\ k_i\mid n_i}} \lambda\Big(\frac{n_1}{k_1},y\Big)\lambda\Big(\frac{n_2}{k_2},y\Big)\lambda\Big(\frac{n_1+n_2}{k_3},y\Big)$$

et la majoration (5.2) fournit

$$R(x,y) \ll \frac{y}{\log y}\sum_{q\leq \mathcal{Y}_\varepsilon}\frac{1}{\phi(q)^2}\sum_{k_1,k_2,k_3\mid q}\mu^2\Big(\frac{q}{k_1}\Big)\mu^2\Big(\frac{q}{k_2}\Big)\mu^2\Big(\frac{q}{k_3}\Big)k_1k_2k_3^2$$
$$\sum_{\substack{n_1\leq x\\ n_2\leq x\\ k_i\mid n_i}} \lambda\Big(\frac{n_1}{k_1},y\Big)\lambda\Big(\frac{n_2}{k_2},y\Big)\Big\{\frac{1}{|x-n_1-n_2|+1} + \frac{1}{|n_1+n_2-k_3|+1} + \frac{1}{n_1+n_2}\Big\}.$$

En majorant trivialement $\lambda(n_i/k_i, y)$ par $O(1)$, puis la somme sur (n_1, n_2) par $O(x\log x)$, on obtient

$$R(x,y) \ll xyu\mathcal{Y}_\varepsilon^6 \ll \frac{\Psi(x,y)}{x\mathcal{Y}_{2\varepsilon}}. \tag{5.4}$$

Lorsque $qy \leq n \leq x$, on a $\lambda(n/k,y) \ll (kx/n)^{1-\alpha}\rho(u)$. Par ailleurs,

$$\sum_{\substack{qy\leq n_i\leq x\\ k_i\mid n_i}} \big(n_1n_2(n_1+n_2)\big)^{\alpha-1} \leq \frac{1}{k_1k_2}\int_0^x\int_0^x \big(t_1t_2(t_1+t_2)\big)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1 \ll \frac{x^{3\alpha-1}}{k_1k_2}.$$

En utilisant $qyx \ll \Psi(x,y)^3/x$, on obtient

$$\mathrm{nv}(x,y;q) \ll 8^{\omega(q)}q^{3(1-\alpha)}\Psi(x,y)^3/\big(\phi(q)^2x\big).$$

La série de terme général $\mathrm{nv}(x,y;q)$ est donc convergente et on a

$$NV(x,y)=\sum_{q\geq 1}\mathrm{nv}(x,y;q)+O\Big(\frac{\Psi(x,y)^3}{xy_{2\varepsilon}}\Big).$$

En utilisant la notation de [dlBG12, lemme 5.5], on écrit

$$\sum_{q\geq 1}\mathrm{nv}(x,y;q)=\sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbf{N}^3}g(k_1,k_2,k_3)S(k_1,k_2,k_3) \tag{5.5}$$

où l'on a posé

$$S(k_1,k_2,k_3):=\sum_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathbf{N}^2\\ k_i\mid n_i\\ n_1+n_2\leq x}}\lambda\Big(\frac{n_1}{k_1},y\Big)\lambda\Big(\frac{n_2}{k_2},y\Big)\lambda\Big(\frac{n_1+n_2}{k_3},y\Big) \tag{5.6}$$

et où $g(k_1,k_2,k_3)$ vérifie

$$\sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbf{N}^3}\frac{g(k_1,k_2,k_3)}{k_1k_2}=1,\qquad \sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\mathbf{N}^3}\frac{|g(k_1,k_2,k_3)|(k_1k_2k_3)^{1/4}}{k_1k_2}\ll 1.$$

D'après ce qui précède, on a $S(k_1,k_2,k_3)\ll(k_1k_2k_3)^{1-\alpha}\Psi(x,y)^3/(k_1k_2x)$. Il en découle que dans la somme du membre de droite de (5.5), la contribution des triplets (k_1,k_2,k_3) avec $k_1k_2k_3\geq(\log y)^5$ est $O\big(\Psi(x,y)^3/(x\log y)\big)$. Étant donné un triplet (k_1,k_2,k_3) vérifiant $k_1k_2k_3\leq(\log y)^5$, dans le membre de droite de (5.6) :

- La contribution des (n_1,n_2) vérifiant $n_1\leq k_1y$ ou $n_2\leq k_2y$ est $O\big((\log y)^5yx\big)$, ce qui est largement $O\big(\Psi(x,y)^3/(x\log y)\big)$.
- La contribution des (n_1,n_2) vérifiant $k_2y\leq n_2\leq k_2x/(\log y)^6$ et $n_1\geq k_1y$ est

$$\begin{aligned}&\ll\frac{(k_1k_2k_3)^{1-\alpha}\Psi(x,y)^3}{x^{3\alpha}}\sum_{\substack{k_1y\leq n_1\leq x\\ k_2y\leq n_2\leq k_2x/(\log y)^6\\ k_i\mid n_i}}\big(n_1n_2(n_1+n_2)\big)^{\alpha-1}\\ &\ll\frac{(k_1k_2k_3)^{1-\alpha}\Psi(x,y)^3}{k_1k_2x(\log y)^{2\alpha}}\ll\frac{\Psi(x,y)^3}{k_1k_2x\log y}\end{aligned}$$

  puisque $\alpha=1+o(1)$ lorsque x et y tendent vers l'infini.
- La contribution des (n_1,n_2) vérifiant $k_1y\leq n_1\leq k_1x/(\log y)^6$ et $n_2\geq k_2y$ se majore de façon identique.
- Lorsque $n/k\geq x/(\log y)^6$, on a

$$\begin{aligned}\lambda\Big(\frac{n}{k},y\Big)&=\rho\Big(\frac{\log(n/k)}{\log y}\Big)\Big\{1+O\Big(\frac{\log u}{\log y}\Big)\Big\}\\ &=\rho(u)\Big\{1+O\Big(\frac{(\log u)\log(kx/n)}{\log y}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

  La contribution des (n_1,n_2) vérifiant $n_i/k_i\geq x/(\log y)^6$ vaut donc

$$\frac{\Psi(x,y)^3}{2x}\Big\{1+O\Big(\frac{(\log u)\log(k_1k_2k_3)}{\log y}\Big)\Big\}$$

  où l'on a utilisé la majoration $\sum_{x/(\log y)^6\leq m\leq x/k}\log(x/m)\ll x(\log k)/k$.

En regroupant les résultats, on obtient

$$\sum_{q\geq 1} \mathrm{nv}(x, y; q) = \frac{\Psi(x, y)^3}{2x}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log u}{\log y}\Big)\Big\}$$

et l'estimation (1.15) en découle en reportant cela avec (5.4) dans (5.3).

Remerciements L'auteur adresse ses vifs remerciements á son directeur de thèse Régis de la Bretèche pour sa patience et ses nombreux conseils, et à Adam Harper ainsi qu'au rapporteur anonyme pour des remarques qui ont beaucoup aidé à améliorer ce manuscrit.

References

[Dab75] H. Daboussi, *Fonctions multiplicatives presque périodiques B*. Astérisque **24–25**(1975), 321–324.

[DM00] H. Davenport, *Multiplicative number theory*. Graduate Texts in Math. **74**, Springer Verlag, New York, 2000.

[DB51] N. de Bruijn, *On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$*. Nederl. Akad. Wetensch **54**(1951), 50–60.

[dlB98] R. de la Bretèche, *Sommes d'exponentielles et entiers sans grand facteur premier*. Proc. London Math. Soc. **77**(1998), 39–78. http://dx.doi.org/10.1112/S0024611598000409

[dlB99] ———, *Sommes sans grand facteur premier*. Acta Arith. **88**(1999), 1–14.

[dlBG12] R. de la Bretèche et A. Granville, *Densité des friables*. Bulletin de la SMF (2012), à paraître.

[dlBT05a] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum, *Entiers friables: inégalité de Turán–Kubilius et applications*. Invent. Math. **159**(2005), 531–588. http://dx.doi.org/10.1007/s00222-004-0379-y

[dlBT05b] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum, *Propriétés statistiques des entiers friables.* Ramanujan J. **9**(2005), 139–202. http://dx.doi.org/10.1007/s11139-005-0832-6

[BHT82] Y. Dupain, R. R. Hall, et G. Tenenbaum, *Sur l'équirépartition modulo* 1 *de certaines fonctions de diviseurs*. J. London Math. Soc. **2**(1982), 397. http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s2-26.3.397

[Dra12] S. Drappeau, *Sur les solutions friables de l'équation $a + b = c$*. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 2012, à paraître. http://dx.doi.org/10.1017/S0305004112000643

[FT91] E. Fouvry et G. Tenenbaum, *Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques*. Proc. London Math. Soc. **3**(1991), 449–494. http://dx.doi.org/10.1112/plms/s3-63.3.449

[Gra08] A. Granville, *Smooth numbers: computational number theory and beyond*. Math. Sci. Res. Inst. Publ. **44**(2008), 267–323.

[Har12a] A. J. Harper, *On a paper of K. Soundararajan on smooth numbers in arithmetic progressions*. J. Number Theory **132**(2012), 182–199. http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2011.07.005

[Har12b] ———, *Bombieri–Vinogradov and Barban–Davenport-Halberstam type theorems for smooth numbers*. arxiv:1208.5992

[Hil85] A. Hildebrand, *Integers free of large prime divisors in short intervals*. Quart. J. Math. Oxford **36**(1985), 57–69. http://dx.doi.org/10.1093/qmath/36.1.57

[HT86] A. Hildebrand et G. Tenenbaum, *On integers free of large prime factors.* Trans. Amer. Math. Soc. **296**(1986), 265–290. http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-1986-0837811-1. http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-1986-0837811-1

[HT93] ———, *Integers without large prime factors.* J. Théor. Nombres Bordeaux **5**(1993), 411–484. http://dx.doi.org/10.5802/jtnb.101

[Hux74] M. N. Huxley, *Large values of Dirichlet polynomials (III)*. Acta Arith. **26**(1974), 435–444.

[Jut77] M. Jutila, *On Linnik's constant*. Math. Scand. **41**(1977), 45–62.

[LS12] J. C. Lagarias et K. Soundararajan, *Counting smooth solutions to the equation $a + b = c$*. Proc. London Math. Soc. **104**(2012), 770–798. http://dx.doi.org/10.1112/plms/pdr037

[MV06] H. L. Montgomery et R. C. Vaughn, *Multiplicative number theory I: Classical theory.* Cambridge Stud. Adv. Math. **97**, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[Ran38] R. A. Rankin, *The difference between consecutive prime numbers*. J. London Math. Soc. **1**(1938), 242–247. http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s1-13.4.242

[Sai89] E. Saias, *Sur le nombre des entiers sans grand facteur premier*. J. Number Theory **32**(1989), 78–99. http://dx.doi.org/10.1016/0022-314X(89)90099-1

[Sou08] K. Soundararajan, *The distribution of smooth numbers in arithmetic progressions*. In: Anatomy of Integers, CRM Proc. Lecture Notes **46**(2008), 115–128.

[Ten90] G. Tenenbaum, *Sur un probleme d'Erdös et Alladi*. Progr. Math. **91**(1990), 221–239.

[Ten08] ______, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. Troisième edition. Echelles, Berlin, 2008.

Université Paris Diderot - Paris 7, Institut de Mathématiques de Jussieu–Paris Rive Gauche, UMR 7586, Bâtiment Chevaleret, Bureau 7C08, 75205 Paris Cedex 13
courriel: drappeau@math.jussieu.fr sary.drappeau@gmail.com