Plücker's First Equation.

A curve and its first polar meet in general in $n(n-1)$ points; hence $n(n-1)$ tangents can in general be drawn from a given point to the curve. But in each double point of K^n two of the points of intersection of K^n and P^{n-1} coincide; and, moreover, this point is no longer a point of contact in the usual sense; hence, for every double point of K^n two of the possible tangents from P disappear. Similarly, for every cusp three points of contact disappear. Hence we get Plücker's first equation for a curve which does not contain singularities of a higher order:—$k = n(n-1) - 2d - 3s$ (k being the "class" of the curve, d the number of its nodes, and s of its cusps).

Dual Treatment of Curves as Envelopes.

Again, we might prove that a curve K^n could equally be developed as an envelope by means of ranges and point-involutions, and we could then dualize all the results obtained. For example, in Plücker's equation n becomes k, d becomes t (the number of double tangents), and s becomes w (the number of points of inflection), and we get $n = k(k-1) - 2t - 3w$.

The above may serve as illustrations of the application of Dr Kötter's methods to the theory of curves.

Eighth Meeting, June 14*th*, 1889.

George A. Gibson, Esq., M.A., President, in the Chair.

Sur une propriété projective des sections coniques.

Par M. Paul Aubert.

Théorème.—*On considère tous les cercles σ passant par deux points fixes, dont l'un c est sur la circonférence d'un cercle donné s, et l'autre d sur une droite donnée l. Chacun des cercles σ rencontre la droite l en un second point d′, et la circonférence s en un second point c′: La droite c′d′ passe par un point fixe i de la circonférence s, quel que soit le cercle σ considéré.*

https://doi.org/10.1017/S0013091500030376 Published online by Cambridge University Press

Nous pouvons en effet définir tous les cercles σ au moyen d'un troisième point qui décrirait la circonférence s. Or, quelle que soit la position c' de ce point, la droite indéfinie $c'd'$ forme avec cc' un angle qui, compté à partir de cc' dans un sens déterminé, celui des aiguilles d'une montre par exemple a toujours la même valeur : c'est l'angle cdd' si le point d est extérieur au cercle s, c'est son supplément si le point d est intérieur à ce cercle. D'ailleurs le sommet c' de cet angle est sur la circonférence s, et son côté $c'c$ passe par un point fixe de cette circonférence. Donc l'autre côté $c'd'$ rencontre bien la circonférence en un point fixe i.

Si l'on mène par le point où la droite cd rencontre la circonférence s une parallèle a la droite l, elle passera manifestement par le point i, car on peut considérer la droite indéfinie cd comme la circonférence de rayon infini à laquelle correspond un point d' infiniment eloigné sur la droite l; gi est donc une position particulière de la droite mobile $c'd'$.

Cela posé, soumettons la figure à une transformation projective. Le cercle s deviendra une conique S; les cercles σ donneront le faisceau des coniques Σ passant par quatre points fixes A, B, C, D dont les trois premiers sont sur la conique S, la droite AB provenant de la droite de l'infini de la première figure. La droite l donnera une droite L passant par le point D. La propriété démontrée précédemment étant projective subsistera : *la droite* C'D' *qui joint le second point d' intersection de chaque conique* Σ *avec la droite* L *au quatrième point commun aux deux coniques* S *et* Σ *coupera la conique* S *en un point fixe* I.

Voyons ce que devient la construction qui donnait le point i. A la droite gi parallèle à l correspondra une droite rencontrant L sur la droite AB. Il suffira donc de joindre le point d' intersection de L avec AB au point G où la droite CD coupe la conique S, pour obtenir le point I de cette conique.

Actuellement, rien ne distingue le point C des points A et B. On pourrait par une nouvelle transformation homographique projeter la conique S suivant un cercle, en rejetant à l' infini soit AB, soit BC, soit CA. Si chaque fois on détermine la position du point i sur chaque circonférence comme on l'a indiqué plus haut, puis qu'on fasse la transformation inverse, on obtiendra nécessairement le même point I de la conique S, au moyen des constructions transformées. On est ainsi conduit au résultat suivant :

https://doi.org/10.1017/S0013091500030376 Published online by Cambridge University Press

On donne trois points A, B, C *sur une conique* S, *et un point* D *sur une droite* L. *Soient* α, β, γ *les points d'intersection des droites* BC, CA *et* AB *avec la droite* L, *et* A′, B′, C′ *les seconds points de rencontre des droites* AD, BD, CD *avec la conique* S. *Les trois droites* αA′, βB′, γC′ *se coupent en un même point* I *situé sur la conique* S.

Nous voyons ainsi qu' à un système de quatre points définis, comme nous l'avons fait, par rapport à une conique S, et à une droite L, correspond un point I parfaitement determiné de la conique. Si donc inversement au lieu de se donner la droite L, on se donne le point I, la droite L sera parfaitement déterminée, et passera par les quatre points α, β, γ et D.

On pent donc énoncer le théorème suivant:

Théorème: *Par un point* D *du plan d'une conique, on mène trois sécantes* AA′, BB′, CC′, *et l'on prend un point* I *sur la courbe. Si l'on prolonge chacun des côtés du triangle* ABC *jusqu' à son intersection avec la droite qui joint le point* I *à la deuxième extrémité de la sécante aboutissant au sommet opposé, on obtient trois points, situés sur une ligne droite qui passe par le point* D.

Ce théorème conduit à de nombreuses conséquences. Tout d'abord il donne une construction par points d'une conique définie par cinq points, cette construction déterminant chaque fois deux nouveaux points de la courbe.

Considérons par exemple la conique définie par les cinq points I, A, B, A′, B′; joignons AA′ et BB′ qui se coupent au point D, puis menons par le point I une droite quelconque IC, elle rencontre la courbe en un second point inconnu C. Soit γ le point d'intersection de IC avec A′B′: la droite Dγ est la droite L. Si donc nous prolongeons IA et IB jusqu'aux points α et β où ces droites rencontrent L, il suffira de joindre αB′ et βA′ pour obtenir à leur intersection le point C′; le point C sera par suite sur la droite C′D.

On a ainsi autant de couples de points que l'on veut.

Il est facile d'avoir la tangente à la conique en l'un des cinq points donnés. Pour cela, il suffit d'imaginer que deux points de la courbe sont confondus en ce point, que nous désignerons pour cette raison par (A′, B′). Associons lui l'un des autres points donnés, où nous supposerons aussi deux points confondus, soit (A, B). Les droites (A, B) (A′, B′) et CC′ se coupent en D; I (A, B) et C′ (A′, B′) se coupent au point (α, β). La droite L est déterminée par les point D et (α, β). Si l'on joint le point γ, où IC rencontre cette droite, au point (A′, B′) on obtient la tangente à la conique en ce point.

Avant de signaler d'autres applications, remarquons que le théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit à une conique est une conséquence directe du théorème précédent. Considérons en effet l'hexagone inscrit dont les sommets consécutifs sont A′, C′, C, I, B, B′. Les côtés opposés se coupent aux points D, β et γ situés sur la droite L.

Il est assez naturel de chercher si, inversement, le théorème de Pascal pourrait conduirè au théorème que nous venons d'établir.

Les travaux de Plücker, Cayley, Kirkman et autres géomètres contemporains ont établi un très grand nombre de résultats relatifs aux hexagones obtenus en joignant de toutes les manières possibles six points d'une conique, et en construisant les droites de Pascal correspondantes. La plupart sont enoncés dans une note qui termine l'ouvrage de Salmon sur les sections coniques. Mais toutes ces recherches ont pour point de départ la figure formée par *six points déterminés de la courbe* et six seulement. Nous n'y voyons pas de conséquences, au moins immédiates, relatives à ce septième point de la conique, dont l'introduction constitue en quelque sorte le caractère du théorème précédent.

Toutefois, il est facile d'obtenir ce théoréme par l'application répétée du théorème de Pascal à différents hexagones ayant pour sommets six des septs points considerés. Voici l'une des manières les plus simples d'y arriver : considérons les trois hexagones

(1) IA′ABCC′
(2) IB′BCAA′
(3) IC′CABB′

ayant un sommet commun I, chacun des autres se déduisant de ceux de l'hexagone précédent par une permutation circulaire effectuée sur les lettres. Les trois Pascals correspondants sont, en prenant la notation connue

$$\frac{\left\{\begin{matrix} IA' & A'A & AB \\ BC & CC' & IC' \end{matrix}\right\}}{\alpha \quad D \quad \gamma} \qquad \frac{\left\{\begin{matrix} IB' & B'B & BC \\ CA & AA' & IA' \end{matrix}\right\}}{\beta \quad D \quad \alpha} \qquad \frac{\left\{\begin{matrix} IC' & C'C & CA \\ AB & BB' & IB' \end{matrix}\right\}}{\gamma \quad D \quad \beta}$$

Chacune des trois droites a deux points communs avec chacune des deux autres ; elles coïncident donc—les quatres points α, β, γ, D sont donc en ligne droite.

https://doi.org/10.1017/S0013091500030376 Published online by Cambridge University Press

Reprenons maintenant le raisonnement qui nous a conduit du théorème primitif au théorème de Pascal; il va nous permettre de donner à celui-ci une extension remarquable.

Nous avons fait abstraction ici de la droite AA′ qui joint le point D au sommet de l'hexagone compris entre B′ et C′. Mais rien ne distingue, au point de vue projectif, ce sommet du sommet I compris entre B et C. Si donc on mène la droite DI, qui rencontre la conique en un second point I′, la droite IA′ et la droite BC iront aussi se couper sur la droite $D\alpha\beta\gamma$.

Remarquons maintenant que le point D peut simplement être défini comme le point de rencontre de deux côtés opposés de l'hexagone inscrit à la conique. On peut donc appliquer sans modification le résultat précédent aux deux autres points β et C, ce qui donnera quatre nouveaux points situés sur la droite L. En résumé nous obtenons neuf points en ligne droite, parmi lesquels se trouvent les trois points du théorème de Pascal, et l'on peut énoncer:

Si l'on inscrit un hexagone à une conique, les côtés opposés se coupent deux à deux en trois points en ligne droite. La droite qui joint le point de concours de deux côtés à l'un des deux sommets non situés sur ces côtés rencontre la courbe en un autre point. Si l'on joint ce point au sommet opposé au premier, la droite qui joint les deux sommets voisins de celui-ci rencontre la précédente en un point de la droite de Pascal. On obtient ainsi trois systèmes de trois points situés sur cette droite.

Il suffit de particulariser les conditions du théorème précédent pour en déduire l'énoncé d'autant de propriétés particulières.

Considérons par exemple une parabole, deux cordes parallèles à la tangente au sommet, AA′ et BB′; si l'on mène les droites $B\beta$, $A\alpha$ parallèle à l'axe $S\gamma$, elles rencontrent respectivement les cordes A′S, B′S en des points β et α situés sur la perpendiculaire à l'axe au point d'intersection γ de celui-ci avec la corde B′A′.

Prenons maintenant une hyperbole, et supposons que le point I du théorème soit à l'infini sur la courbe ainsi que le point A, le point D étant lui-même infiniment éloigné dans une direction déterminée; la droite AI devient une asymptote de la courbe, et AA′ est rejetée à l'infini. On est alors conduit à la propriété suivante: Soient deux sécantes parallèles rencontrant l'hyperbole aux points BB′ et CC′. Les cordes BC et B′C′ rencontrent les asymptotes de la courbes en des points situés deux à deux sur deux droites parallèles aux sécantes données. Chacune de ces droites passe aussi par un des points d'intersection des parallèles aux asymptotes menées par les extrémités de chacune des cordes CB′ et BC′.

On peut appliquer cette propriété à la construction des hyperboles.

La méthode de transformation des figures par polaires réciproques permet de déduire des théorèmes précédents autant de théorèmes corrélatifs sur les tangentes aux coniques.

Note on the regular solids.

By Professor STEGGALL.

The usual methods of proving the existence of regular polyhedra, as given in Wilson and in Todhunter, appear to most students somewhat difficult. It seemed worth while trying, therefore, whether a simpler or more direct proof could not be obtained. The following note shows how this may be done.

The problem is to distribute p points uniformly on a sphere. Suppose that they are arranged in n-sided polygons, and that each angle is $2\pi/m$, then the number of polygons $=pm/n$, and their total area is $pm(2n\pi/m+2\pi-n\pi)/n=4\pi$, the radius of the sphere being unity.

Hence $$\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1=\frac{4}{pm}$$

of which the only admissible solutions are $m=n=3$; $m=3$, $n=4$ or 5; $m=4$ or 5, $n=3$; giving all the five figures.

A certain cubic connected with the triangle.

By Professor STEGGALL.

In examining some of the lines that occur in connection with the recent geometry of the triangle, the cubic whose equation in trilinear co-ordinates is

$$a bc(\beta^2-\gamma^2)+\beta ca(\gamma^2-a^2)+\gamma ab(a^2-\beta^2)=0$$