Can. J. Math., Vol. XXXIII, No. , 61981, pp. 1328–1330

UNE REMARQUE SUR UNE CLASSE D'ALGEBRES DE DIRICHLET FAIBLES* DE FONCTIONS ANALYTIQUES

MICHEL SAVOYANT

Soit K un compact du plan complexe $\mathbf{C}$, d'intérieur $\mathring{K}$ non vide et connexe. $A(K)$ désigne l'algèbre uniforme des fonctions continues sur $\mathring{K}$ et analytiques dans $\mathring{K}$. Pour chaque $z \in \mathring{K}$, on note λ_z la mesure harmonique sur la frontière $\partial\mathring{K}$ de $\mathring{K}$ du point z, et on pose $\lambda = \lambda_{z_0}$, z_0 étant un point fixé de $\mathring{K}$. On dit que $A(K)$ est une algèbre de Dirichlet faible* sur ∂K si $A(K) + \overline{A(K)}$ ($\overline{}$ désigne le conjugué) est faiblement* dense dans $L^\infty(\lambda)$ (la topologie faible* sur $L^\infty(\lambda)$ est la topologie faible pour la dualité entre $L^1(\lambda)$ et $L^\infty(\lambda)$); vu les inégalités de Harnack pour les fonctions harmoniques cette propriété est indépendante de la mesure harmonique du point z_0 fixé dans $\mathring{K}$. Si l'ensemble des parties réelles des fonctions de $A(K)$ est uniformément dense dans $C_R(\partial K)$, les fonctions continues réelles sur ∂K, on dit que $A(K)$ est une algèbre de Dirichlet sur ∂K. On démontre le théorème suivant:

THEOREME. *$A(K)$ est une algèbre de Dirichlet faible* sur ∂K si et seulement si $A(K)$ est une algèbre de Dirichlet sur ∂K.*

Quelques notations: $H^\infty(\lambda)$ est l'adhérence faible* de $A(K)$ dans $L^\infty(\lambda)$; si f est une fonction complexe bornée, $\|f\|$ est la borne supérieure de $|f|$ sur son domaine de définition; $H^\infty(\mathring{K})$ est l'algèbre de Banach des fonctions holomorphes bornées sur $\mathring{K}$ et $L(\mathring{K})$ désignera la sous-algèbre des fonctions de $H^\infty(\mathring{K})$ qui sont limites ponctuelles d'une suite bornée de $A(K)$.

La démonstration de la partie non triviale du théorème repose essentiellement sur la propriété de "log modularité" des algèbres de Dirichlet faible* [**8**] et du théorème suivant dû à A. M. Davie ([**3**], p. 128):

THEOREME. *Soit $f \in L(\mathring{K})$. Alors il existe une suite $(f_n) \subset A(K)$ telle que:*

$$\sup_n \|f_n\| \leqq \|f\| \text{ et } f_n \to f \text{ simplement dans } \mathring{K}.$$

Donc $L(\mathring{K})$ est une sous-algèbre fermée de $H^\infty(\mathring{K})$. L'application T définie pour chaque $f \in H^\infty(\lambda)$ par $T(f) = \tilde{f}$ où $\tilde{f}(z) = \int f d\lambda_z$, $z \in \mathring{K}$, est un homomorphisme continu de l'algèbre $H^\infty(\lambda)$ dans l'algèbre $H^\infty(\mathring{K})$ ([**4**], p. 226). On a le corollaire suivant du théorème de A. M. Davie:

Reçu le 20 mai 1980.

COROLLAIRE. *L'application T définit un isomorphisme isométrique de $H^\infty(\lambda)$ sur $L(\mathring{K})$.*

Preuve. T est injective d'après le Lemme 1.2 de [**1**]. Notons

$$S = \{ f \in H^\infty(\lambda) : \exists \ (f_n) \subset A(K), f_n \rightarrow f \text{ faiblement*}\};$$

on montre que S est faiblement* fermé et pour cela il suffit de montrer, d'après le théorème de Krein-Schmulian, que $S \cap B$ l'est, où B est la seule unité de $L^\infty(\lambda)$. Soit f faiblement* adhérent à $S \cap B$; puisque la topologie faible* restreinte à $S \cap B$ est métrisable, il existe une suite $(f_n) \subset S \cap B$ qui converge faiblement* vers f et donc $(\tilde{f}_n)$ converge simplement vers $\tilde{f}$ et $\|\tilde{f}_n\| \leqq 1$. D'après le théorème de A. M. Davie on peut construire une suite $(g_n) \subset A(K)$ telle que $\|g_n\| \leqq 1$ et $g_n \rightarrow \tilde{f}$ simplement dans $\mathring{K}$; une sous-suite de (g_n) converge faiblement* dans $H^\infty(\lambda)$, vers f d'après l'injectivité de T. Ainsi S est faiblement* fermé et donc $S = H^\infty(\lambda)$.

Il est clair maintenant que $T(H_\infty(\lambda)) = \underline{L}(\mathring{K})$. T est donc un isomorphisme continu de deux algèbres uniformes, c'est une isométrie d'après le théorème du graphe fermé ([**4**], p. 227): ceci termine la démonstration du corollaire.

Preuve du théorème. Puisque $A(K) + \overline{A(K)}$ est faiblement* dense dans $L^\infty(\lambda)$, $H^\infty(\lambda)$ est une algèbre logmodulaire sur l'espace des idéaux maximaux de $L^\infty(\lambda)$ [**8**]. Soit P la part de Gleasen de $H^\infty(\lambda)$ qui contient $\mathring{K}$; il existe une bijection continue τ de $\Delta = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ sur P telle que $\hat{f} \circ \tau$ est analytique dans Δ pour chaque $f \in H^\infty(\lambda)$ ($\hat{f}$ étant la transformée de Gelfand de f); donc $P = \mathring{K}$ et $\mathring{K}$ est simplement connexe. De plus il existe $F \in H^\infty(\lambda)$ telle que $|F| = 1$ p.p. (λ) et $\tau^{-1} = \tilde{F}$ (pour toutes ces assertions cf par exemple [**6**] Théorèmes 7.2, 7.4, 7.7); si $g \in H^\infty(\mathring{K})$, alors en exprimant $g \circ \tau$ comme limite ponctuelle sur Δ d'une suite bornée de polynômes, on montre facilement ([**9**], § 8) que $\operatorname{Im} T = H^\infty(\mathring{K})$; $H^\infty(\lambda)$ est donc isométriquement isomorphe à $H^\infty(\mathring{K})$ et $H^\infty(\mathring{K}) = L(\mathring{K})$ d'après le corollaire ci-dessus, i.e., que chaque fonction de $H^\infty(\mathring{K})$ est limite ponctuelle d'une suite bornée de $A(K)$: ceci garantit que $A(K)$ est une algèbre de Dirichlet sur ∂K d'après un théorème de Gamelin et Garnett ([**5**], Corollary 3.2).

Remarques. Une autre façon de conclure est la suivante: puisque la transformation conforme τ^{-1} de $\mathring{K}$ sur Δ est limite ponctuelle d'une suite bornée de $A(K)$, on montre facilement que τ^* (la fonction définie presque partout sur $\partial\Delta$ donnant les valeurs radiales de τ) est injective sur un ensemble de pleine mesure; il s'ensuit d'après un théorème de A. M. Davie ([**2**], p. 351) que $A(K)$ est une algèbre de Dirichlet sur ∂K.

Si U est un ouvert connexe borné de $\mathbf{C}$ et $A(U)$ l'algèbre des fonctions continues sur $\bar{U}$, analytiques dans U, on a le théorème analogue suivant:

https://doi.org/10.4153/CJM-1981-101-4 Published online by Cambridge University Press

THEOREME. *Si $A(U)$ est une algèbre de Dirichlet faible* sur ∂U, alors $A(U)$ est une algèbre de Dirichlet (sur sa frontière de Chilov).*

La démonstration est similaire [**7**].

BIBLIOGRAPHIE

1. A. M. Davie, *Bounded approximation and Dirichlet sets*, J. Functional Analysis *6* (1970), 460–467.
2. ——— *Dirichlet algebras of analytic functions*, J. Functional Analysis *6* (1970), 348–356.
3. ——— *Bounded limits of analytic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. *32* (1972), 127–133.
4. T. W. Gamelin, *Uniform algebras* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969).
5. T. W. Gamelin and J. Garnett, *Pointwise bounded approximation and Dirichlet algebras*, J. Funct. Anal. *8* (1971), 360–404.
6. K. Hoffman, *Analytic functions and logmodular Banach algebras*, Acta. Math. *108* (1962), 271–317.
7. M. Savoyant, *Thèse de 3ème cycle*, Montpellier (1979).
8. Srinivasan and Ju-Kwei Wang, *Weak*-Dirichlet algebras*, Proc. Inter. Symp. on function algebras (Tulane Univ., 1965), Scott Foresman (1966), 216–249.
9. J. Wermer, *Seminar über funktionen algebren*, Lecture notes in Mathematics *1* (Springer-Verlag, Berlin, 1964).

Université des Sciences et Techniques du Languedoc,
Montpellier, Cédex, France