

FLUCTUATIONS POUR DES ÉQUATIONS DE BOLTZMANN SCALAIRES

RENÉ FERLAND

1. **Introduction.** Kac [22] a montré, pour sa caricature d'un gaz de Boltzmann, que la solution de l'équation de Boltzmann généralisée correspondante peut être obtenue comme limite d'une suite de lois empiriques induites par des processus markoviens $\{X^n\}_{n=2}^\infty$. Pour un entier n donné, le processus $(X^n(t))_{t \geq 0}$ décrit le comportement d'un gaz à n molécules où des collisions binaires ont lieu à des instants imprévisibles. Ce processus est gouverné par un générateur G_n qui est défini à l'aide de l'opérateur de collision apparaissant dans la version de Kac de l'équation de Boltzmann.

Le problème des fluctuations consiste à décrire comment ces lois empiriques fluctuent autour de leur limite. Kac [23,28] a posé ce problème pour sa caricature et c'est Tanaka [35] et Uchiyama [38] qui en ont fait un traitement rigoureux. Nous nous proposons dans cet article de mener à bien une étude analogue pour des équations de Boltzmann généralisées scalaires [1,19,41].

2. **Équations de Boltzmann scalaires.** Etant données une probabilité de transition Q sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ et μ une probabilité sur \mathbb{R}_+ , on appelle *équation de Boltzmann scalaire* associée à Q avec donnée initiale μ , l'équation différentielle suivante:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle u(t), \phi \rangle &= \left\langle u(t) \otimes u(t), \int_0^\infty \{ \phi(s) - \phi(x) \} Q(x, y; ds) \right\rangle \\ u(0) &= \mu \end{aligned}$$

où $\langle u(t), \phi \rangle$ désigne l'intégrale de la fonction continue bornée ϕ par rapport à la probabilité $u(t)$. Une telle équation décrit typiquement l'évolution temporelle de la loi de l'énergie d'une particule dans un bain de particules du même type [1]. A ce titre, on suppose (comme le fait Hoare [19]) que a) $Q(x, y; [0, x + y]) = 1$ et b) $Q(x, y; B) = Q(y, x; T_{xy}^{-1}(B))$ où $T_{xy}(s) = x + y - s$ ce qui correspond à une propriété de conservation microlocale de l'énergie.

Les équations de Boltzmann scalaires ont évidemment des applications en physique statistique et en chimie physique mais on les rencontre aussi en génétique, en dynamique des populations et en économie. Elles sont présentes dans la littérature physique [3, 4, 6, 7, 8, 9, 32, 33, 37, 41] et statistique [24, 25, 29, 30, 31].

Received by the editors March 5, 1990; revised: June 4, 1990.

© Canadian Mathematical Society 1991.

3. **Description du problème des fluctuations.** On considère, pour chaque $n \geq 2$, un processus $(X^n(t))_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^n qui est markovien et dont le générateur G_n agit sur les fonctions continues bornées de n variables de la façon suivante :

$$G_n \phi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (Q^{ij} \phi - \phi)(x_1, \dots, x_n)$$

où

$$Q^{ij} \phi(x_1, \dots, x_n) = \int_0^\infty \phi^{ij}(x_1, \dots, x_n) Q(x_i, x_j; ds)$$

et ϕ^{ij} est la fonction obtenue en remplaçant la i -ième variable de ϕ par s et la j -ième par $x_i + x_j - s$.

Le processus $(X^n(t))_{t \geq 0}$ décrit l'évolution des énergies d'un système de n particules. Il s'agit d'un processus de sauts purs où chaque saut correspond à une "collision" entre deux particules au cours de laquelle a lieu un échange d'énergie gouverné par la probabilité de transition Q .

On peut supposer, sans perte de généralité, que tous ces processus sont définis sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et que les trajectoires de X^n sont dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^n)$ l'espace des fonctions de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+^n qui sont continues à droite et pourvues de limites à gauche. On note $u_n(t)$ la loi de $X^n(t)$ et on fait l'hypothèse que $u_n(0)$ est symétrique en ce sens que

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^n \phi_j(x_j) u_n(0; dx_1, \dots, dx_n) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \prod_{j=1}^n \phi_j(x_{\sigma(j)}) u_n(0; dx_1, \dots, dx_n)$$

quelque soient les fonctions continues bornées ϕ_j et la permutation σ des entiers 1 jusqu'à n .

La loi empirique de X^n au temps t est par définition

$$\alpha_t^n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{X_j^n(t)}.$$

Comme corollaire d'un résultat très général de Tanaka [34], on sait que si α_0^n converge en loi vers μ quand $n \uparrow \infty$ alors α_t^n converge en loi vers $u(t)$ pour tout $t > 0$ avec $(u(t))_{t \geq 0}$ la solution de (2.1). C'est la soit-disante *propagation du chaos* [22,34] et dans ce contexte $(u(t))_{t \geq 0}$ porte souvent le nom de *limite de McKean-Vlasov* [5,17]. Ce résultat est une sorte de loi faible des grands nombres la quelle constitue une approximation du premier ordre dans la théorie des probabilités. L'approximation du second ordre correspond au théorème de la limite centrale et suggère que les *fluctuations* $\eta_t^n = \sqrt{n}(\alpha_t^n - u(t))$ devraient également converger en loi.

Pour la caricature de Kac, le problème a été résolu complètement par Uchiyama [38] et nous allons montrer que l'approche adoptée par ce dernier s'applique avec succès aux cas des équations de Boltzmann scalaires lorsque la probabilité de transition Q s'écrit sous forme intégrale:

$$Q(x, y; B) = \int_0^1 \int_0^1 \chi_B(z_1 x + z_2 y) \nu(dz_1, dz_2)$$

avec ν une probabilité sur $[0, 1] \times [0, 1]$ (χ_B est la fonction indicatrice de B). Pour des raisons techniques, on fait de plus l'hypothèse suivante sur ν :

$$\nu(\{0\} \times [0, 1]) = \nu(\{1\} \times [0, 1]) = 0.$$

REMARQUE 1. La version continue des modèles $p - q$ de Fitcher et Hoare [16] fournissent des exemples de probabilités de transition qui s'écrivent sous forme intégrale.

REMARQUE 2. Rappelons que l'équation de Boltzmann pour la caricature de Kac concerne l'évolution de la vitesse d'une particule et non celle de son énergie. Mais il est possible (voir [12]) d'écrire une équation différentielle du type (2.1) pour la loi de l'énergie en prenant comme cas particulier de probabilité de transition Q :

$$Q(x, y; B) = \frac{1}{\pi} \int_0^{x+y} \frac{1}{s^{1/2}(x+y-s)^{1/2}} \chi_B(s) ds.$$

Cette probabilité de transition s'écrit sous forme intégrale en prenant pour ν une loi Beta($\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$) concentrée sur la diagonale de $[0, 1] \times [0, 1]$.

REMARQUE 3. A la section précédente nous avons supposé que $Q(x, y; B) = Q(y, x; T_{xy}^{-1}(B))$. Mais si en plus, Q s'écrit sous forme intégrale, la probabilité ν doit nécessairement satisfaire la relation

$$\nu(dz_1, dz_2) = \nu(d(1 - z_1), d(1 - z_2)).$$

Nous utiliserons tacitement cette égalité par la suite.

NOTATIONS. Dans toute la suite nous posons $\chi_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$ et nous dénotons par \mathcal{S} l'ensemble des fonctions (réelles) lisses à décroissance rapide.

Dans cet article, nous étudions la convergence en loi des processus de fluctuations $(\eta_t^n)_{t \geq 0}$ et sous les hypothèses (H1) et (H2) ci-dessous, nous démontrons que les probabilités induites par ces processus, sur un espace adéquat de trajectoires, convergent étroitement. Notre démarche est analogue à celle de Uchiyama [38]. Il s'agit d'abord d'obtenir la compacité relative de la suite des lois induites par $\{\eta^n\}_{n=2}^\infty$ grâce à l'hypothèse

$$(H1) \text{ Il existe } \gamma \geq 0 \text{ tel que } \sup_n \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \{ \mathbf{E}[|\langle \eta_0^n, \chi_\lambda \rangle|^2] (1 + |\lambda|)^{-2\gamma} \} < \infty$$

Ensuite on caractérise les points limites de la suite par un problème de martingale et afin de montrer que celui-ci est bien posé on utilise l'hypothèse (H2) suivante :

$$(H2) \text{ La suite } \langle \eta_0^n, \phi \rangle \text{ converge en loi quelque soit la fonction } \phi \in \mathcal{S}$$

Ainsi il n'y a qu'un point limite vers lequel la suite des lois doit nécessairement converger.

REMARQUE. Les hypothèses (H1) et (H2) concernent la loi de η_0^n laquelle dépend en fait de la loi $u_n(0)$ de $X^n(0)$. Bien sûr, il existe des suites $\{u_n(0)\}_{n=2}^\infty$ qui satisfont (H1) et (H2). Le cas $u_n(0) = \mu^{\otimes n}$ (où μ a un deuxième moment fini) en fournit des exemples.

4. Inégalités préliminaires. Le propos de cette section est de démontrer le Lemme 4.1 ci-dessous qui est le résultat crucial sur lequel s’articule tout ce qui suit. Introduisons quelques notations. Pour $\phi \in C_b(\mathbb{R}_+)$ et $0 \leq z_1, z_2 \leq 1$, notons $\varepsilon^{z_1, z_2} \phi$ la fonction de deux variables définie par

$$\varepsilon^{z_1, z_2} \phi(x, y) = \phi(z_1x + z_2y) + \phi((1 - z_1)x + (1 - z_2)y) - \phi(x) - \phi(y)$$

et posons $\pi^{z_1, z_2} \phi(x) = \varepsilon^{z_1, z_2} \phi(x, x)$. Pour $k = 1, 2$ nous définissons

$$\Lambda_k \phi(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \{ \varepsilon^{z_1, z_2} \phi(x, y) \}^k \nu(dz_1, dz_2)$$

et $\Gamma_k \phi(x) = \Lambda_k \phi(x, x)$. Nous aurons aussi besoin des deux variables aléatoires suivantes :

$$\mathcal{A}_t^n(\phi) = \langle \eta_t^n \otimes u(t), \Lambda_1 \phi \rangle + \frac{1}{2\sqrt{n}} \{ \langle \eta_t^n \otimes \eta_t^n, \Lambda_1 \phi \rangle - \langle \alpha_t^n, \Gamma_1 \phi \rangle \}$$

et

$$Q_t^n(\phi) = \frac{1}{2} \{ \langle \alpha_t^n \otimes \alpha_t^n, \Lambda_2 \phi \rangle - \frac{1}{n} \langle \alpha_t^n, \Gamma_2 \phi \rangle \}.$$

REMARQUE. Les variables $\mathcal{A}_t^n(\phi)$ et $Q_t^n(\phi)$ apparaissent dans l’écriture des générateurs infinitésimaux du processus $(\eta_t^n)_{t \geq 0}$ et peuvent être utilisées formellement (comme le fait Uchiyama [38]) pour décrire les générateurs du processus limite des fluctuations.

LEMME 4.1. *Supposons que (H1) soit vraie, alors il existe une fonction non décroissante K_t telle que pour tout $t \geq 0$:*

$$\sup_n \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{ \mathbf{E}[|\langle \eta_t^n, \chi_\lambda \rangle|^2] (1 + |\lambda|)^{-2\gamma} \} < K_t.$$

DÉMONSTRATION. Quelque soit $\phi \in C_b(\mathbb{R})$ définissons les processus

$$M_t = \langle \eta_t^n, \phi \rangle - \int_0^t \mathcal{A}_s^n(\phi) ds$$

$$S_t = M_t^2 - \int_0^t Q_s^n(\phi) ds.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[|\langle \eta_t^n, \phi \rangle|^2] &= \mathbf{E}\left[\left(M_t + \int_0^t \mathcal{A}_s^n(\phi) ds \right)^2 \right] \\ &\leq 2\mathbf{E}[M_t^2] + 2\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t \mathcal{A}_s^n(\phi) ds \right)^2 \right] \\ &= 2\mathbf{E}[S_t] + 2\mathbf{E}\left[\int_0^t Q_s^n(\phi) ds \right] + 2\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t \mathcal{A}_s^n(\phi) ds \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Puisque $(\eta_t^n)_{t \geq 0}$ est markovien, $(S_t)_{t \geq 0}$ est une martingale [10,38] et on a que

$$\mathbf{E}[S_t] = \mathbf{E}[S_0] = \mathbf{E}[M_0^2] = \mathbf{E}[|\langle \eta_0^n, \phi \rangle|^2].$$

De plus, par l'inégalité de Hölder, on voit que

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t \mathcal{A}_s^n(\phi) ds\right)^2\right] \leq 2t \int_0^t \mathbf{E}\left[(\mathcal{A}_s^n(\phi))^2\right] ds.$$

Finalement, $(\varepsilon^{z_1, z_2} \phi)^2$ étant borné supérieurement par $16\|\phi\|_\infty^2$ on peut majorer $Q_s^n(\phi)$ par $8\|\phi\|_\infty^2$. En conséquence, on a que

$$(4.1) \quad \mathbf{E}[|\langle \eta_t^n, \phi \rangle|^2] \leq 2\mathbf{E}[|\langle \eta_0^n, \phi \rangle|^2] + 16\|\phi\|_\infty^2 t + 2t \int_0^t \mathbf{E}\left[(\mathcal{A}_s^n(\phi))^2\right] ds.$$

En appliquant (4.1) à la partie réelle et la partie imaginaire de χ_λ et en observant que $\mathcal{A}_t^n(\phi)$ est linéaire en ϕ on voit que

$$\mathbf{E}[|\langle \eta_t^n, \chi_\lambda \rangle|^2] \leq 2\mathbf{E}[|\langle \eta_0^n, \chi_\lambda \rangle|^2] + 32t + 2t \int_0^t \mathbf{E}\left[(\mathcal{A}_s^n(\chi_\lambda))^2\right] ds.$$

Posons $y^n(t) = \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \{ \mathbf{E}[|\langle \eta_t^n, \chi_\lambda \rangle|^2] (1 + |\lambda|)^{-2\gamma} \}$ et admettons pour le moment qu'on dispose de la majoration suivante :

$$(4.2) \quad \sup_{\lambda \in \mathbf{R}} \{ \mathbf{E}\left[(\mathcal{A}_s^n(\chi_\lambda))^2\right] (1 + |\lambda|)^{-2\gamma} \} \leq (2 \cdot 3^2 + 16)y^n(s) + \frac{16}{n}$$

alors

$$\begin{aligned} y^n(t) &\leq 32t + 2y^n(0) + 2t \int_0^t \{ (2 \cdot 3^2 + 16)y^n(s) + \frac{16}{n} \} ds \\ &\leq 32t + 32t^2 + 2y^n(0) + 68t \int_0^t y^n(s) ds. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall montre alors que $y^n(t) \leq (2y^n(0) + 32t + 32t^2) \exp(68t^2)$ ce qui mène à la conclusion cherchée. Il suffit donc de prouver (4.2). De la définition de $\mathcal{A}_t^n(\phi)$ on trouve que $\mathbf{E}\left[(\mathcal{A}_t^n(\chi_\lambda))^2\right]$ est bornée par

$$2\mathbf{E}[|\langle \eta_t^n \otimes u(t), \Lambda_1 \chi_\lambda \rangle|^2] + \frac{1}{n}\mathbf{E}[|\langle \eta_t^n \otimes \eta_t^n, \Lambda_1 \chi_\lambda \rangle|^2] + \frac{1}{n}\mathbf{E}[|\langle \alpha_t^n, \Gamma_1 \chi_\lambda \rangle|^2].$$

Cherchons à majorer chaque terme. Considérons d'abord le deuxième. Puisque $\langle \eta_t^n, 1 \rangle = 0$ il vient que $|\langle \eta_t^n \otimes \eta_t^n, \varepsilon^{z_1, z_2} \chi_\lambda \rangle|^2$ est majoré par

$$2|\langle \eta_t^n, \chi_{\lambda z_1} \rangle \langle \eta_t^n, \chi_{\lambda z_2} \rangle|^2 + 2|\langle \eta_t^n, \chi_{\lambda(1-z_1)} \rangle \langle \eta_t^n, \chi_{\lambda(1-z_2)} \rangle|^2$$

et comme $|\langle \eta_t^n, \chi_\lambda \rangle| \leq 2\sqrt{n}$ on a

$$|\langle \eta_t^n \otimes \eta_t^n, \varepsilon^{z_1, z_2} \chi_\lambda \rangle|^2 \leq 8n|\langle \eta_t^n, \chi_{\lambda z_1} \rangle|^2 + 8n|\langle \eta_t^n, \chi_{\lambda(1-z_1)} \rangle|^2.$$

Cela entraîne que pour tout $0 \leq z_1, z_2 \leq 1$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ on a

$$\mathbf{E}[|\langle \eta_t \otimes \eta_t^n, \chi_\lambda \rangle|^2] (1 + |\lambda|)^{-2\gamma} \leq 16ny^n(t)$$

et par suite

$$\frac{1}{n}\mathbf{E}[|\langle \eta_t^n \otimes \eta_t^n, \Lambda_1 \chi_\lambda \rangle|^2] (1 + |\lambda|)^{-2\gamma} \leq 16y^n(t).$$

Pour le premier terme on a

$$|\langle \eta_t^n \otimes u(t), \varepsilon^{z_1, z_2} \chi_\lambda \rangle|^2 \leq 3\{|\langle \eta_t^n, \chi_{\lambda z_1} \rangle|^2 + |\langle \eta_t^n, \chi_{\lambda(1-z_1)} \rangle|^2 + |\langle \eta_t^n, \chi_\lambda \rangle|^2\}$$

qui entraîne

$$\mathbf{E}\left[|\langle \eta_t^n \otimes u(t), \varepsilon^{z_1, z_2} \chi_\lambda \rangle|^2\right](1 + |\lambda|)^{-2\gamma} \leq 3^2 y^n(t)$$

et donc

$$2\mathbf{E}\left[|\langle \eta_t^n \otimes u(t), \Lambda_1 \chi_\lambda \rangle|^2\right](1 + |\lambda|)^{-2\gamma} \leq 2 \cdot 3^2 y^n(t).$$

Finalement, pour le troisième, l'inégalité $|\langle \alpha_t^n, \pi^{z_1, z_2} \chi_\lambda \rangle|^2 \leq 16$ implique

$$\frac{1}{n} \mathbf{E}\left[|\langle \alpha_t^n, \Gamma_1 \chi_\lambda \rangle|^2\right](1 + |\lambda|)^{-2\gamma} \leq 16/n.$$

En combinant ces trois majorations, on obtient (4.2). ■

On sait que toute fonction $\phi \in \mathcal{S}$ peut s'écrire à l'aide de sa transformée de Fourier $\hat{\phi}$ par la formule :

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_\lambda(x) \hat{\phi}(\lambda) d\lambda.$$

Associons à cette transformée, la norme $|\hat{\phi}|_\gamma := \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\lambda|)^\gamma |\hat{\phi}(\lambda)| d\lambda$. En utilisant le Lemme 4.1 et sa démonstration on peut, sous la même hypothèse, démontrer les inégalités supplémentaires suivantes qui sont valables quelque soit $\phi \in \mathcal{S}$.

$$(4.3) \quad \sup_n \mathbf{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\langle \eta_t^n, \phi \rangle|^2\right] \leq C_T |\hat{\phi}|_\gamma^2;$$

$$(4.4) \quad \sup_n \mathbf{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\langle \eta_t^n \otimes \eta_t^n, \Lambda_1 \phi \rangle|\right] \leq C_T |\hat{\phi}|_{2\gamma};$$

$$(4.5) \quad \sup_n \mathbf{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\langle \eta_t^n \otimes u(t), \Lambda_1 \phi \rangle|\right] \leq C_T |\hat{\phi}|_\gamma;$$

$$(4.6) \quad \sup_n \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{E}\left[|\langle \eta_t^n \otimes \eta_t^n, \Lambda_2 \phi \rangle|\right] \leq C_T |\hat{\phi}|_\gamma^2, \quad 0 \leq t < T;$$

$$(4.7) \quad \sup_n \mathbf{E}\left[|\langle \eta_t^n \otimes u(t), \Lambda_2 \phi \rangle|\right] \leq C_T |\hat{\phi}|_\gamma^2, \quad 0 \leq t < T.$$

Dans ces inégalités, C_T désigne une constante qui ne dépend que de $T > 0$. On pourra consulter Uchiyama [38] ou Ferland [12] pour le détail des démonstrations.

5. Convergence des processus de fluctuations. Pour étudier la convergence en loi des processus de fluctuations, il est nécessaire de regarder η_t^n comme une distribution (réelle) tempérée car la limite en loi de $\{\eta^n\}_{n=2}^\infty$ a pour espace des états, non pas les mesures signées et bornées, mais plutôt un sous-espace hilbertien de \mathcal{S}' [35,38]. Afin de décrire ce sous-espace, introduisons les *fonctions d'Hermite*:

$$h_k(x) = (-1)^k (\sqrt{\pi} 2^k k!)^{-1/2} e^{x^2/2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}, \quad k \geq 0.$$

Il est bien connu que ces fonctions sont dans \mathcal{S} . Pour $p > 0$ on définit

$$\mathcal{S}'_p = \left\{ N \in \mathcal{S}' \mid \sum_{k \geq 0} |N(h_k)|^2 (2k+1)^{-2p} < \infty \right\}.$$

On voit sans peine que \mathcal{S}'_p est un sous-espace de \mathcal{S}' et que

$$\|N\|'_p = \left(\sum_{k \geq 0} |N(h_k)|^2 (2k+1)^{-2p} \right)^{1/2}$$

est une norme hilbertienne sur \mathcal{S}'_p . Lorsque l'ensemble des mesures signées bornées est muni de la topologie étroite, l'application

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{x_j}$$

est continue et puisque $t \mapsto u(t)$ est continue en t cela implique que $(\eta_t^n)_{t \geq 0}$ est un processus à valeurs mesures dont les trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche. Mais les mesures signées se plongent continûment dans \mathcal{S}' si ce dernier est muni de sa topologie faible. Les trajectoires de $(\eta_t^n)_{t \geq 0}$ peuvent donc être vues comme des éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}')$. Cependant, on sait que [18]

$$\|h_k\|_\infty \leq \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} (2k+1)^{1/4}$$

de sorte que pour $p > 3/4$, la fluctuation η_t^n est dans \mathcal{S}'_p . En fait, si (H1) est satisfaite, il est possible de choisir p assez grand pour que les trajectoires de $(\eta_t^n)_{t \geq 0}$ soient dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'_p)$ et que la suite des probabilités induites par les processus de fluctuations sur cet espace soit relativement compacte.

Pour le besoin des énoncés qui vont suivre, introduisons à nouveau quelques notations. On désigne par \mathcal{F}_t la tribu sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}')$ engendrée par les applications $N \mapsto \langle N_s, \phi \rangle$ pour $0 \leq s \leq t$, $\phi \in \mathcal{S}$ et $N \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}')$. On note \mathcal{F} la tribu engendrée par $\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ et par \mathbb{P}_n la probabilité induite par $(\eta_t^n)_{t \geq 0}$ sur $(\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'), \mathcal{F})$. Par ailleurs, $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'_p)$ est muni de la topologie de Skorohod associée à la norme $\|\cdot\|'_p$. Bien sûr, $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'_p)$ est le sous-espace de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'_p)$ composé des fonctions continues de \mathbb{R}_+ dans \mathcal{S}'_p . Pour simplifier l'écriture, la trace de la tribu \mathcal{F} (ou \mathcal{F}_t) sur ces espaces sera désignée par le même symbole.

Nous pouvons maintenant énoncer les principaux résultats de cet article. Nous en omettons les démonstrations car en examinant soigneusement le travail de Uchiyama [38] on se rend compte que, une fois obtenues les estimations (4.3) à (4.7), les démonstrations subséquentes de Uchiyama peuvent être essentiellement reprise pas à pas en modifiant de façon évidente l'écriture pour la probabilité de transition Q . Le premier théorème donne la compacité relative de $\{\mathbb{P}_n\}_{n=2}^\infty$. La démonstration repose sur un critère de tension (voir Holley et Stroock [18], Fernique [13] et Jakubowski [21]) et les inégalités (4.3), (4.4) et (4.5).

THÉORÈME 5.1. *Supposons que (H1) soit vraie et que $p > (3 + 2\gamma)/4$. Les probabilités \mathbb{P}_n sont alors concentrées sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'_p)$. De plus, la suite de leur restriction à cet espace est tendue et tout point limite est concentré sur $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'_p)$.*

Le théorème suivant montre que tout point limite de $\{\mathbb{P}_n\}_{n=2}^\infty$ est solution d'un problème de martingale. Notons $N_t : \mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'_p) \rightarrow \mathcal{S}'_p$, la fonction projection en t . Pour $\phi \in \mathcal{S}$ définissons sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'_p)$ une variable aléatoire $A_t(\phi)$ égale à $\langle N_t \otimes u(t), \Lambda_1 \phi \rangle$ lorsque N_t est une mesure signée bornée et égale à zéro sinon. Finalement posons $Q_t(\phi) = \frac{1}{2} \langle u(t) \otimes u(t), \Lambda_2 \phi \rangle$.

THÉORÈME 5.2. *Supposons que (H1) soit vraie. Alors tout point limite \mathbb{P} de $\{\mathbb{P}_n\}_{n=2}^\infty$ est une solution du problème de martingale suivant :*

$$(5.1) \quad \begin{cases} \text{Quelques soient } f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } \phi \in \mathcal{S}, \\ H_t^{f,\phi} = f(\langle N_t, \phi \rangle) - \int_0^t \{ A_s(\phi) f'(\langle N_s, \phi \rangle) + \frac{1}{2} Q_s(\phi) f''(\langle N_s, \phi \rangle) \} ds \\ \text{est une } (\mathbb{P}, \mathcal{F}_t)\text{-martingale.} \end{cases}$$

De plus, pour toute fonction $\phi \in \mathcal{S}$ et $T > 0$:

$$(5.2) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} E [|\langle N_t, \phi \rangle|] \leq C_T |\hat{\phi}|_\gamma$$

où E désigne l'espérance relativement à \mathbb{P} .

REMARQUE. La définition de $A_t(\phi)$ fait de $(A_t(\phi))_{t \geq 0}$ un processus progressivement mesurable. La fonction $t \mapsto A_t(\phi)$ est donc mesurable mais rien n'assure que $\int_0^t A_s(\phi) f'(\langle N_s, \phi \rangle) ds$ existe. Si $A_t(\phi)$ n'est pas intégrable sur $[0, t]$, on convient que l'intégrale précédente est égale à zéro.

Pour prouver le Théorème 5.2 on procède essentiellement comme suit. On écrit $H^{f,\phi}$ comme somme d'une martingale construite avec les générateurs de $(\eta_t^n)_{t \geq 0}$ et d'un "reste" R_n . On passe ensuite à la limite et on se sert des inégalités (4.3) à (4.7) pour à la fois préserver la propriété des martingales et contrôler R_n . Pour obtenir la convergence étroite de $\{\mathbb{P}_n\}_{n=2}^\infty$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'_p)$ il ne reste plus qu'à montrer que le problème des martingales est bien posé. On utilisera à cette fin le Théorème 5.5 dont la démonstration utilise un lemme au sujet des fonctionnelles $(W_t)_{t \geq 0}$ définies sur $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'_p)$ par

$$W_t(\phi) = \langle N_t - N_0, \phi \rangle - \int_0^t A_s(\phi) ds.$$

LEMME 5.3. *Soit $p > (3 + 2\gamma)/4$ et \mathbb{P} une probabilité sur $C(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}'_p)$ satisfaisant (5.1) et (5.2). Alors $(W_t)_{t \geq 0}$ jouit des propriétés suivantes.*

- a) *Quelque soit $\phi \in \mathcal{S}$, $(W_t(\phi))_{t \geq 0}$ est \mathcal{F}_t -adaptée et ses trajectoires sont continues \mathbb{P} -presque sûrement.*
- b) *Quelque soit $\phi \in \mathcal{S}$, $W_0(\phi) = 0$ et*

$$E \left[\exp\{iW_t(\phi) \mid \mathcal{F}_s\} \right] = \exp \left\{ iW_s(\phi) - \frac{1}{2} \int_s^t Q_r(\phi) dr \right\} \quad \mathbb{P} - \text{p. s.}$$

- c) *Quelques soient $\phi, \psi \in \mathcal{S}$ et $a, b \in \mathbb{R}$*

$$W_t(a\phi + b\psi) = aW_t(\phi) + bW_t(\psi) \quad \forall t \geq 0, \quad \mathbb{P} - \text{p. s.}$$

Pour des résultats connexes, on pourra consulter Fernique [13,14].

THÉORÈME 5.4. Soit $p > (3 + 2\gamma)/4$. Toute probabilité \mathbb{P} sur $C(\mathbb{R}_+, S'_p)$ satisfaisant (5.1) et (5.2) est uniquement déterminée par sa restriction sur \mathcal{F}_0 .

Le rôle de l'hypothèse (H2) est maintenant clair. Elle assure que tous les points limites de $\{\mathbb{P}_n\}_{n=2}^\infty$ ont la même restriction sur \mathcal{F}_0 . On a donc le théorème final suivant.

THÉORÈME 5.5. Supposons que (H1) et (H2) soient vraies et que $p > (3 + 2\gamma)/4$. Alors les probabilités \mathbb{P}_n convergent étroitement vers une probabilité \mathbb{P} concentrée sur $C(\mathbb{R}_+, S'_p)$, satisfaisant (5.2) et qui est l'unique solution du problème de martingale (5.1).

REFERENCES

1. M. F. Barnsley and G. Turchetti, *A Study of Boltzmann energy equations*, Ann. Phys. **159**(1985), 1–61.
2. P. Billingsley, *Convergence of probability measures*. Wiley, New York, 1968.
3. A. V. Bobylev, *Exact solutions of the Boltzmann equation*, Soviet Phys. Dokl. **20**(1976), 822–824.
4. ———, *A class of invariant solutions of the Boltzmann equation*, Soviet Phys. Dokl. **21**(1976), 632–634.
5. W. Braun and K. Hepp, *The Vlasov dynamics and its fluctuations in the $1/N$ limit of interacting classical particles*, Commun. Math. Phys. **56**(1977), 101–113.
6. S. Chapman and T. G. Cowling, *The Mathematical theory of non-uniform gases*. Cambridge University Press, London, 1970.
7. J. J. Duderstadt and W. R. Martin, *Transport theory*. Wiley, New York, 1979.
8. M. H. Ernst, *Nonlinear model-Boltzmann equations and exact solutions*, Phys. Rep. **78**(1981), 1–171.
9. M. H. Ernst and E. M. Hendriks, *An exactly solvable non-linear Boltzmann equation*, Phys. Lett. A **70**(1979), 183–185.
10. S. N. Ethier and T. G. Kurtz, *Markov processes. Characterization and convergence*. Wiley, New York, 1986.
11. R. Ferland and G. Giroux, *Cutoff-type Boltzmann equations: Convergence of the solution*, Adv. in Appl. Math. **8**(1987), 98–107.
12. R. Ferland, *Équations de Boltzmann scalaires : convergence de la solution, fluctuations et propagation du chaos trajectorielle*. Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke, 1990.
13. X. Fernique, *Fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces lusiniens*, preprint.
14. ———, *Vecteurs aléatoires lusiniens et fonctions aléatoires lusiniennes*. Rapport de recherche no 67, Département de mathématiques et d'informatique, Université de Sherbrooke, 1989.
15. F. J. Fitcher, M. R. Hoare, E. M. Hendriks and M. H. Ernst, *Soluble Boltzmann equations for internal state and Maxwell models*, Phys. A **101**(1980), 185–204.
16. F. J. Fitcher and M. R. Hoare, *The p - q model Boltzmann equation*, Phys. A **122**(1983), 516–546.
17. J. Gärtner, *On the McKean-Vlasov limit for interacting diffusions*, Math. Nachr. **137**(1988), 197–248.
18. R. A. Holley and D. V. Stroock, *Generalized Ornstein-Uhlenbeck processes and infinite particle branching Brownian motion*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **14**(1978), 741–788.
19. M. H. Hoare, *Quadratic transport and soluble Boltzmann equation*, Adv. Chem. Phys. **56**(1984), 1–140.
20. L. G. H. Huxley and R. W. Crompton, *The Diffusion and drift of electrons in gases*. Wiley, New York, 1974.
21. A. Jakubowski, *On the Skorokhod topology*, Ann. Inst. Henri Poincaré **22**(1986), 263–285.
22. M. Kac, *Foundations of kinetic theory*, Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. (J. Neyman, ed.) **3**(1956), 171–197.
23. ———, *Some probabilistic aspects of the Boltzmann-equation*, Acta Phys. Austriaca Suppl. **10**(1973), 379–400.
24. H. Kesten, *Quadratic transformations: a model for population growth I*, Adv. in Appl. Probab. **2**(1970), 1–82.
25. ———, *Quadratic transformations: a model for population growth II*, Adv. in Appl. Probab. **2**(1970), 179–228.
26. M. Krook and T. T. Wu, *Formation of Maxwellian tails*, Phys. Rev. Lett. **36**(1976), 1107–1109.
27. ———, *Exact solutions of the Boltzmann equation*, Phys. Fluids **20**(1977), 1589–1595.

28. H. P. McKean, *Fluctuations in the kinetic theory of gases*, Comm. Pure Appl. Math. **28**(1975), 435–455.
29. P. A. P. Moran, *The Statistical processes of evolutionary theory*. Clarendon Press, Oxford, 1962.
30. S. Nishimura, *Random collision processes and their limiting distribution using the discrimination information*, J. Appl. Probab. **11**(1974), 266–280.
31. ———, *Random collision processes with transition probabilities belonging to the same type of distribution*, J. Appl. Probab. **11**(1974), 703–714.
32. C. C. Rankin and J. C. Light, *Relaxation of a gas of harmonic oscillators*, J. Chem. Phys. **46**(1967), 1305–1316.
33. K. E. Shuler, *Relaxation of an isolated ensemble of harmonic oscillators*, J. Chem. Phys. **32**(1960), 1692–1697.
34. H. Tanaka, *Propagation of chaos for certain purely discontinuous Markov processes with interaction*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **17**(1970), 253–272.
35. ———, *Fluctuation theory for Kac's one-dimensional model of Maxwellian molecules*, Sankhyā Ser. A **44**(1982), 23–26.
36. ———, *Some probabilistic problems in the spatially homogeneous Boltzmann equation*. Proc. of IFIP-ISI Conf. Theo. Appl. of Random Fields, Bangalore, 1982.
37. J. Tjon and T. T. Wu, *Numerical aspects of the approach to a Maxwellian distribution*, Phys. Rev. **A19**(1979), 883–888.
38. K. Uchiyama, *Fluctuations of Markovian systems in Kac's caricature of a Maxwellian gas*, J. Math. Soc. Japan **35**(1983), 477–499.
39. ———, *A fluctuation problem associated with the Boltzmann equation for a gas of molecules with a cutoff potential*, Japan. J. Math. **9**(1983), 27–53.
40. ———, *Fluctuations in population dynamics*. Lecture Notes in Biomath. **70**, Springer-Verlag, New York, 1986, 222–229.
41. T. T. Wu, *Kinetic equations of gases and plasmas*. Addison-Wesley, Reading, 1966.

*Université du Québec à Montréal
Montréal, Québec*