M. Itô
Nagoya Math. J.
Vol. 57 (1975), 127–152

SUR L'UNICITÉ DU CÔNE CONVEXE DIVISIBLE CONSTITUÉ PAR DE NOYAUX DE CONVOLUTION DE DIRICHLET

MASAYUKI ITÔ

§ 1. Introduction

Dans toute la suite $\boldsymbol{R}^n$ désignera l'espace euclidien à dimension n $(\geqq 1)$. Pour un point $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\boldsymbol{R}^n$, on notera $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$. La coordonnée sphérique dans $\boldsymbol{R}^n$ s'écrira (r, σ). $\boldsymbol{R}^+$ désignera l'ensemble $\{t \in \boldsymbol{R}^1 ; t \geqq 0\}$.

Rappelons qu'un noyau de convolution N sur $\boldsymbol{R}^n$ est une mesure (de Radon) positive dans $\boldsymbol{R}^n$ dans la théorie du potentiel. Pour une mesure réelle μ dans $\boldsymbol{R}^n$, $N * \mu$ s'appelle le N-potentiel de μ dès que cette convolution est définie au sens des mesures. Dans la théorie du potentiel, le noyau de convolution de Hunt posséde les propriétés définitives, qui s'appelle souvent un "bon noyau".

Soit N_0 un noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}^n$. Dans l'article précédent [7], on définit un cône convexe de Riesz $C_R(N_0)$ relatif au noyau N_0. Cela est, par définition, un cône convexe vaguement fermé de vertex 0, formé par de noyaux de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ et vérifiant les deux conditions suivantes:

(a) $C_R(N_0) - \{0\}$ est formé par de noyaux de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}^n$.

(b) $C_R(N_0) \ni N_0$ et à tout l'élément $N \neq 0$ de $C_R(N_0)$, on peut associer un autre élément $N' \neq 0$ de $C_R(N_0)$ tel que $N * N' = N_0$.

Dès maintenant on dira qu'un cône convexe de Riesz relatif au noyau N_0 est un cône convexe divisible relatif au noyau N_0.

On a obtenu que, dans [6], il existe un seul cône convexe divisible relatif au noyau newtonien G sur $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 3)$ constitué par de noyaux de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ invariants par rotations. Voici un problème si la condition "invariance par rotations" peut être évitée.

Received April 17, 1974.

Soit L un opérateur différentiel elliptique et auto-adjoint d'ordre $\leqq 2$ à coéfficients constants. On supposera toujours qu'il existe le noyau de convolution G_L sur $\boldsymbol{R}^n$ s'annulant à l'infini[1] tel que $LG_L = -\varepsilon$ (au sens des distributions), où ε est la mesure de Dirac à l'origine. On désignera par $(G_{L,p})_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau G_L.

Le but de cette note est d'énoncer qu'un cône convexe divisible $C_R(G_L)$ relatif au noyau G_L formé par 0 et de noyaux de convolution de Dirichlet sur $\boldsymbol{R}^n$ est uniquement déterminé et que l'on a

$$C_R(G_L) = \left\{ c\varepsilon + \int G_{L,p} d\nu(p)\,;\, c \in \boldsymbol{R}^+ \quad \text{et} \quad \nu \in M^+(\boldsymbol{R}^+) \right.$$
$$\left. \text{avec} \quad \int_1^\infty \frac{1}{p} d\nu(p) < \infty \right\},$$

où $M^+(\boldsymbol{R}^+)$ est la totalité des mesures positives sur $\boldsymbol{R}^+$.

§ 2. Préliminaires

Commençons d'abord avec la définition d'un noyau de convolution de Dirichlet sur $\boldsymbol{R}^n$. Un noyau de convolution N sur $\boldsymbol{R}^n$ est, par définition, un noyau de convolution de Dirichlet si la transformée de Fourier $\hat{N}$ de N est une fonction dans $\boldsymbol{R}^n$ et si $1/\hat{N}$ est une fonction définie-négative et à valeurs réelles (cf. [1]). Une fonction complexe et continue ψ dans $\boldsymbol{R}^n$ est, par définition, définie-négative si l'on a : (1) $\psi(0) \geqq 0$, $\psi(-x) = \overline{\psi(x)}$ ($\forall x \in \boldsymbol{R}^n$). (2) Quels que soient m, $(x^i)_{i=1}^m$ et $(\rho_i)_{i=1}^m$ un entier > 0, une famille de points de $\boldsymbol{R}^n$ et une famille de nombres complexes avec $\sum_{i=1}^m \rho_i = 0$, $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi(x^i - x^j)\rho_i \bar{\rho}_j \leqq 0$ (cf. [1]).

On rappelle que, d'après le théorème de Levy-Khinchine, une fonction définie-négative ψ sur $\boldsymbol{R}^n$ à valeurs réelles est de la forme

$$\psi(x) = c + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i x_j + \int (1 - \exp(-2\pi\sqrt{-1}\, x\cdot y)) d\mu(y)$$

pour tout $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\boldsymbol{R}^n$, où c est une constante $\geqq 0$, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ est une forme quadratique symétrique $\geqq 0$ à coéfficients réels, $x\cdot y$ est le produit scalaire de x et y dans $\boldsymbol{R}^n$ et où μ est une mesure positive en dehors de l'origine avec $\int \frac{|x|^2}{1+|x|^2} d\mu(x) < \infty$ (cf. par exemple, [1]).

[1] Cela signifie que, quelle que soit f une fonction finie et continue à support compact, $G_L * f(x)$ tend vers 0 avec $|x| \to \infty$.

D'après [2], on connaît la remarque suivante:

Remarque 1. Soit N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$. Alors pour que N soit un noyau de convolution de Dirichlet, il faut et il suffit que N soit symétrique par rapport à l'origine et que N soit un noyau de convolution de Hunt.

On rappelle qu'un noyau de convolution de Hunt N sur $\boldsymbol{R}^n$ est, par définition, de la forme $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$, où $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est une semi-groupe vaguement continue de mesures positives dans $\boldsymbol{R}^n$ avec $\alpha_0 = \varepsilon$.

PROPOSITION 1. *Soit N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$. Alors pour qu'il existe la résolvante $(N_p)_{p \geqq 0}$ associée au noyau N, il faut et il suffit que N soit un noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}^n$ ou bien* 0.

Cela est obtenu dans [5]. Rappelons que $(N_p)_{p \geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau N si, pour tous $p \geqq 0$, $q > 0$, $N_p - N_q = (q-p) N_p * N_q$ (Équation résolvante) et si $\lim_{p \downarrow 0} N_p = N_0 = N$ (vaguement).

Pour une fonction définie-négative ψ sur $\boldsymbol{R}^n$ à valeurs réelles, il existe une distribution u dans $\boldsymbol{R}^n$ symétrique par rapport à l'origine et à croissance lente, et une seule telle que $\hat{u} = -\psi$ (cf. par exemple, [3]).

PROPOSITION 2 (cf. [3]). *Soit u une distribution dans $\boldsymbol{R}^n$ à croissance lente. Pour que la transformée de Fourier $-\hat{u}$ de $-u$ soit égale à une fonction définie-négative sur $\boldsymbol{R}^n$ à valeurs réelles, il faut et il suffit que u soit symétrique par rapport à l'origine et que, quelle que soit φ de $C_K^\infty = C_K^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, $u(\varphi) \leqq 0$ dès que φ est réelle et $\varphi(0) = \max_{x \in \boldsymbol{R}^n} \varphi(x)$.*

On note ici $C_K^\infty = C_K^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ l'espace de (LF) usuel des fonctions infiniment dérivables dans $\boldsymbol{R}^n$ à valeurs complexes et à support compact. Une telle distribution u s'appelle un laplacien généralisé symétrique sur $\boldsymbol{R}^n$.

En le généralisant, on dit qu'une distribution u dans $\boldsymbol{R}^n$ est conditionnellement positive si, quelle que soit φ de C_K^∞, $u(\varphi) \geqq 0$ dès que $\varphi \geqq 0$ et le support de φ, $\operatorname{supp}(\varphi)$, est contenu en dehors de l'origine. Pour un entier $k \geqq 1$, θ^k désignera l'idéal de C_K^∞ formé par de fonctions qui s'annulent ainsi que leurs dérivées d'ordre $< k$ à l'origine. On dit qu'une distribution u dans $\boldsymbol{R}^n$ est k-conditionnellement positive si, pour toute φ de θ^k, $u(|\varphi|^2) \geqq 0$.

PROPOSITION 3 (cf. [3]). *Une distribution u dans $\boldsymbol{R}^n$ est conditionnellement positive si et seulement s'il existe un entier $k \geqq 1$ tel que u*

soit k-conditionnellement positive.

Cela est un résultat immédiat du fait que toute la distribution est localement d'ordre fini. Pour discuter une généralisation du théorème de Bochner, on définit une distribution k-conditionnellement de type positif, d'après C. S. Herz [3]. Pour un entier $k \geqq 1$, on désigne par $\hat{\theta}^k$ l'ensemble des fonctions φ de C_K^∞ telle que $\int x^\alpha \varphi(x)dx = 0$ pour tout le multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i < k$. On dit qu'une distribution u dans $\boldsymbol{R}^n$ est k-conditionnellement de type positif si, quelle que soit φ de $\hat{\theta}^k$, $u * \varphi * \tilde{\varphi}(0) \geqq 0$, où $\tilde{\varphi}(x) = \overline{\varphi(-x)}$.

PROPOSITION 4 (cf. [3]). *Soit k un entier $\geqq 1$. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents:*

(1) *v est une distribution k-conditionnellement de type positif.*

(2) *$v = \hat{u}$, où u est une distribution k-conditionnellement positive dans $\boldsymbol{R}^n$ à croissance lente.*

On connaît, d'après C. S. Herz [3], que tout l'élément de $\hat{\theta}^k$ est de la forme explicite suivante:

PROPOSITION 5. *$\hat{\theta}^k$ est un idéal de convolution de C_K^∞ et*

$$\hat{\theta}^k = \left\{ \sum_{|\alpha|=k} D^\alpha g_\alpha \,;\, \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \colon \textit{multi-indice},\ g_\alpha \in C_K^\infty \right\},$$

où

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

D'après les présentes propositions, on obtient le corollaire suivant:

COROLLAIRE 1. *Soient ψ une fonction continue au sens large dans $\boldsymbol{R}^n$ et k un entier $\geqq 1$. Si $v = \psi(x)dx$ est une distribution k-conditionnellement de type positif dans $\boldsymbol{R}^n$, alors $v_1 = \psi(x, 0, \cdots, 0)dx$ est aussi une distribution k-conditionnellement de type positif dans $\boldsymbol{R}^1$ dès que v_1 définit une distribution dans $\boldsymbol{R}^1$.*

En effet, $\hat{\theta}^k$ étant un idéal de convolution de C_K^∞, on obtient que, pour toute φ de C_K^∞, la distribution $v_\varphi = \psi * \varphi * \tilde{\varphi}(x)dx$ est aussi une distribution k-conditionnellement de type positif. Posons $\psi_{1,\varphi}(x) = \psi * \varphi * \tilde{\varphi}\,(x, 0, \cdots, 0)$ dans $\boldsymbol{R}^1$. On a, pour toute f de C_K^∞,

$$0 \leqq v_\varphi * \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} f\right) * \left(\widetilde{\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} f}\right)(0) = (-1)^k \left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x_1^{2k}} \psi * \varphi * \tilde{\varphi}\right) * f * \tilde{f}(0) \,.$$

Donc la fonction $(-1)^k(\partial^{2k}/\partial x_1^{2k})\psi * \varphi * \tilde{\varphi}$ est de type positif dans $\boldsymbol{R}^n$, et par suite $(-1)^k(\partial^{2k}/\partial x^{2k})\psi_{1,\varphi}$ est aussi une fonction de type positif dans $\boldsymbol{R}^1$, car

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x_1^{2k}} \psi * \varphi * \tilde{\varphi}(x, 0, \cdots, 0) = \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} \psi_{1,\varphi}(x)$$

dans $\boldsymbol{R}^1$. La fonction φ étant quelconque, la distribution $(-1)^k(d^{2k}/dx^{2k})v_1$ est de type positif dans $\boldsymbol{R}^1$, et par suite, d'après la proposition 5, on a, pour toute f de $\hat{\theta}^k(\boldsymbol{R}^1)$, $v_1 * f * \tilde{f}(0) \geqq 0$, d'où v_1 est k-conditionnellement de type positif dans $\boldsymbol{R}^1$.

Rappelons ensuite le théorème de Bernstein (cf. par exemple, [8]).

PROPOSITION 6. *Soit φ une fonction infiniment dérivable dans* $(0, +\infty)$ *à valeurs réelles. Alors pour que φ soit complètement monotone; c'est-à-dire, pour tout l'entier $m \geqq 0$, $(-1)^m(d^m/dt^m)\varphi \geqq 0$ dans* $(0, +\infty)$, *il faut et il suffit que φ soit de la forme $\varphi(t) = \int \exp(-ts)d\nu(s)$ dans* $(0, +\infty)$, *où ν est une mesure positive sur $\boldsymbol{R}^+$.*

Dans ce cas, ν est uniquement déterminée, d'après l'injectivité de la transformation de Laplace. D'après la proposition 6, on obtient le corollaire suivant:

COROLLAIRE 2. *Soient a une constante $\geqq 0$ et κ une mesure positive sur $\boldsymbol{R}^+$. Alors pour que, pour tout l'entier $m \geqq 0$, $\{-(d/dt - a)\}^m\kappa \geqq 0$ au sens des distributions dans* $(0, +\infty)$, *où $\{-(d/dt) - a\}^0\kappa = \kappa$, il faut et il suffit que κ soit de la forme*

$$\kappa = c\varepsilon + \left(\int_a^\infty \exp(-pt)d\nu(t)\right)dt \,,$$

où c est une constante $\geqq 0$ et où ν est une mesure positive sur $\boldsymbol{R}^+$ portée par $[a, +\infty)$.

En effet, la condition est évidemment suffisante. On montrera son inverse. Il existe une constante $c > 0$ et une fonction infiniment dérivable $\varphi \geqq 0$ dans $(0, +\infty)$ avec $\int_0^1 \varphi(t)dt < +\infty$ telles que $\kappa = c\varepsilon + \varphi(t)dt$. On a, pour tout l'entier $m \geqq 0, \{-(d/dt) - a\}^m\varphi(t) \geqq 0$ dans $(0, +\infty)$. Il est

https://doi.org/10.1017/S0027763000016603 Published online by Cambridge University Press

facilement montré, par récurrence pour k, que pour tous les entier $m \geqq 0, k \geqq 0$ et pour tout b avec $0 \leqq b \leqq a, \{-(d/dt) - b\}^k \{-(d/dt) - a\}^m \varphi(t) \geqq 0$ dans $(0, +\infty)$, d'après

$$\left(-\frac{d}{dt} - b\right)^{k+1}\left(-\frac{d}{dt} - a\right)^m \varphi = \left(-\frac{d}{dt} - b\right)^k\left(-\frac{d}{dt} - a\right)^{m+1} \varphi$$
$$+ (a - b)\left(-\frac{d}{dt} - b\right)^k\left(-\frac{d}{dt} - a\right)^m \varphi .$$

Donc, d'après la proposition 6, il existe une mesure positive ν dans $\boldsymbol{R}^+$ telle que l'on ait $\varphi(t) = \int \exp(-pt) d\nu(p)$ dans $(0, +\infty)$. On a ensuite $\{-(d/dt) - a\}\varphi(t) = \int \exp(-pt)(p - a) d\nu(p)$, et donc $(p - a) d\nu(p)$ doit être une mesure positive sur $\boldsymbol{R}^+$, d'où ν est portée par $[a, +\infty)$.

Dans ce cas, c et ν sont aussi uniquement déterminées.

§ 3. Notre théorème principal

On préparera d'abord quelque lemmes suivants.

LEMME 1. *Soit ψ une fonction définie-négative dans $\boldsymbol{R}^1$ à valeurs réelles. Pour que, pour tout l'entier $m \geqq 0, (-1)^{m+1} |t|^{2m} \psi(t) dt$ soit conditionnellement de type positif dans $\boldsymbol{R}^1$, il faut et il suffit que*

$$\psi(t) = c_1 + c_2 t^2 + \int \left(1 - \frac{p}{p + 4\pi^2 t^2}\right) d\alpha(p) ,$$

où c_i $(i = 1, 2)$ est une constante $\geqq 0$ et où α est une mesure positive dans $(0, +\infty)$.

De la même manière que ci-dessous et d'après le corollaire 2, le lemme suivant a lieu.

LEMME 1′. *Soient ψ la même que ci-dessus et a une constante $\geqq 0$. Alors pour que, pour tout l'entier $m \geqq 0, (-1)^{m+1}(|t|^2 + a)^m \psi(t) dt$ soit conditionnellement de type positif, il faut et il suffit que ψ soit de la même forme que dans le lemme 1, où $c_1 \geqq c_2\sqrt{a}$ et ν est portée par $[\sqrt{a}, \infty)$.*

En général, on dit qu'une distribution v dans $\boldsymbol{R}^n$ est conditionnellement de type positif s'il existe un entier $k \geqq 1$ telle que v soit k-conditionnellement de type positif.

https://doi.org/10.1017/S0027763000016603 Published online by Cambridge University Press

Démonstration du lemme 1. Montrons d'abord que la condition est nécessaire. D'après le théorème de Levy-Khinchine, ψ est de la forme

$$\psi(t) = c_1 + c_2 t^2 + \int (1 - \exp(-2\pi\sqrt{-1}ts))d\mu(s)$$

dans $\boldsymbol{R}^1$, où c_i $(i = 1, 2)$ est une constante $\geqq 0$ et où μ est une mesure positive en dehors de l'origine symétrique par rapport à l'origine avec $\int \frac{|t|^2}{1+|t|^2} d\mu(t) < +\infty$. Soit u le laplacien généralisé symétrique sur $\boldsymbol{R}^1$ tel que $\hat{u} = -\psi$. Alors $u = \mu$ en dehors de l'origine. D'après notre hypothèse et la proposition 4, pour tout l'entier $m \geqq 0$, la distribution $(d^{2m}/dt^{2m})u$ est conditionnellement positive dans $\boldsymbol{R}^1$, et par suite $d^{2m}u/dt^{2m} \geqq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine. Donc il existe une fonction infiniment dérivable φ dans $(0, +\infty)$ telle que $\mu = \varphi(|t|)dt$ en dehors de l'origine et pour tout l'entier $m \geqq 0$, $(d^{2m}/dt^{2m})\varphi(t) \geqq 0$ dans $(0, +\infty)$. D'après $\int_1^\infty \varphi(t)dt = \int_1^\infty d\mu < +\infty$ et $\frac{d^2}{dt^2}\varphi \geqq 0$ dans $(0, +\infty)$, on a $(d/dt)\varphi \leqq 0$ dans $(0, +\infty)$, et par suite $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$. Donc, pour toute $f \geqq 0$ de $C_K^\infty(\boldsymbol{R}^1)$ et pour tout l'entier $m \geqq 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} \int \left(\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}\varphi\right)(t-s)f(s)ds = \lim_{t\to+\infty} \int \varphi(t-s)\left(\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}f\right)(s)ds = 0 .$$

D'après cette égalité et $(d^{2(m+1)}/dt^{2(m+1)})\varphi \geqq 0$ dans $(0, +\infty)$, on a $(d^{2m+1}/dt^{2m+1})\varphi \leqq 0$ dans $(0, +\infty)$. En utilisant la proposition 6, il existe une mesure positive ν sur $\boldsymbol{R}^+$ telle que l'on ait

$$\varphi(t) = \int \exp(-ts)d\nu(s) \quad \text{dans} \quad (0, +\infty) .$$

D'après $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$, on a $\nu(\{0\}) = 0$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= c_1 + c_2 t^2 + \iint (1 - \exp(-2\pi\sqrt{-1}ts)) \int \exp(-|s|\,p)d\nu(p)ds \\
&= c_1 + c_2 t^2 + \iint (1 - \exp(-2\pi\sqrt{-1}ts)) \exp(-p\,|s|)ds d\nu(p) \\
&= c_1 + c_2 t^2 + \int \Big(\int_0^\infty (1 - \exp(-2\pi\sqrt{-1}ts)) \exp(-ps)ds \\
&\qquad + \int_{-\infty}^0 (1 - \exp(2\pi\sqrt{-1}ts)) \exp(ps)ds \Big) d\nu(p)
\end{aligned}$$

$$= c_1 + c_2t^2 + \int\Big(\frac{2}{p} - \frac{2p}{p^2 + 4\pi^2t^2}\Big)d\nu(p)$$
$$= c_1 + c_2t^2 + \int\Big(1 - \frac{p}{p + 4\pi^2t^2}\Big)d\alpha(p) \,,$$

où α est une mesure positive dans $(0, +\infty)$ définie par $\int f d\alpha = \int f(t^2)\frac{2}{t}d\nu(t)$ pour toute la fonction finie et continue f dans $(0, +\infty)$ à support compact.

Supposons réciproquement que, avec deux constantes $c_1 \geqq 0$, $c_2 \geqq 0$ et une mesure positive α dans $(0, +\infty)$, $\psi(t) = c_1 + c_2t^2 + \int\Big(1 - \frac{p}{p + 4\pi^2t^2}\Big)d\alpha(p)$. Evidemment $\Big(c_1 + c_2t^2 + \int_{1/m}^{m}\Big(1 - \frac{p}{p + 4\pi^2t^2}\Big)d\alpha(p)\Big)dt$ converge vers $\psi(t)dt$ au sens des distributions dans $\boldsymbol{R}^1$ avec $m \to +\infty$. Donc on peut supposer que α est à support compact, et par suite

$$\psi(t) = c_0 + c_2t^2 - \int \frac{p}{p + 4\pi^2t^2}d\alpha(p) \,,$$

où $c_0 = c_1 + \int d\alpha$. Donc il est évident que la distribution $-\psi dt$ est 1-conditionnellement de type posititif dans $\boldsymbol{R}^1$. Soit u le laplacien généralisé symétrique sur $\boldsymbol{R}^1$ tel que $\hat{u} = -\psi$. On a, pour tout l'entier $m \geqq 1$,

$$\widehat{\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}u}(t) = (-1)^{m+1}(4\pi^2t^2)^m\psi(t)$$
$$= (-1)^{m+1}(4\pi^2t^2)^m(c_0 + c_2t^2) + \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m+1-i}(4\pi^2t^2)^{m-i}\int p^i d\alpha(p)$$
$$+ \int \frac{p^{m+1}}{p + 4\pi^2t^2}d\alpha(p) \,,$$

et donc, avec le noyau de convolution G_p sur $\boldsymbol{R}^1$ tel que $\widehat{G_p} = 1/(p + 4\pi^2t^2)$ $(\forall p > 0)$,

$$\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}u = c_2\frac{d^{2(m+1)}}{dt^{2(m+1)}}\varepsilon - c_0\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}\varepsilon - \sum_{i=1}^{m}\Big(\int p^i d\alpha(p)\Big)\frac{d^{2(m-i)}}{dt^{2(m-i)}}\varepsilon$$
$$+ \int p^{m+1}G_p d\alpha(p) \,.$$

Par conséquent, $(d^{2m}/dt^{2m})u$ est conditionnellement positive (précisément, $(m+1)$-conditionnellement positive) dans $\boldsymbol{R}^1$. D'après la proposition 4, la distribution $(-1)^{m+1}t^{2m}\psi(t)dt$ est conditionnellement de type positif dans $\boldsymbol{R}^1$. La démonstration est ainsi complète.

Le lemme suivant résultera du lemme 1 et du corollaire 1. On désigne par $S_{1,0}$ la sphère d'unité de centre 0 et par $M^+((0,+\infty))$ la totalité des mesures positives dans $(0,+\infty)$.

LEMME 2. *Soit ψ une fonction définie-négative dans $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqq 1)$ à valeurs réelles. Si, pour tout l'entier $m \geqq 0$, la distribution $(-1)^{m+1}|x|^{2m}\psi(x)dx$ dans $\boldsymbol{R}^n$ est conditionnellement de type positif, alors il existe une constante $c \geqq 0$, une fonction non-négative, finie et continue $q(\sigma)$ sur $S_{1,0}$ et une famille $(\alpha_\sigma)_{\sigma\in S_{1,0}}$ dans $M^+((0,+\infty))$ telles que*

$$\psi(x) = \psi(r,\sigma) = c + q(\sigma)r^2 + \int\left(1 - \frac{p}{p+4\pi^2r^2}\right)d\alpha_\sigma(p) .$$

En effet, pour tout σ de $S_{1,0}$, ψ_σ désigne la fonction obtenue de ψ par la rotation de σ. Alors ψ_σ est aussi définie-négative et à valeurs réelles. Pour tout l'entier $k \geqq 1$, $\hat{\theta}^k$ étant invariant par rotations, la distribution $(-1)^{m+1}|x|^{2m}\psi_\sigma(x)dx$ dans $\boldsymbol{R}^n$ est aussi conditionnellement de type positif. Posons $\psi_{\sigma,1}(t) = \psi_\sigma(t,0,\cdots,0)$ sur $\boldsymbol{R}^1$; alors $\psi_{\sigma,1}$ est définie-négative dans $\boldsymbol{R}^1$. D'après le corollaire 1, pour tout l'entier $m \geqq 0$, $(-1)^{m+1}t^{2m}\psi_{\sigma,1}(t)dt$ est une distribution conditionnellement de type positif dans $\boldsymbol{R}^1$, et alors, d'après le présent lemme 1, il existe deux constantes $c_{1,\sigma} \geqq 0$, $c_{2,\sigma} \geqq 0$ et une mesure positive α'_σ dans $(0,+\infty)$ telles que

$$\psi_{\sigma,1}(t) = c_{1,\sigma} + c_{2,\sigma}t^2 + \int\left(1 - \frac{p}{p+4\pi^2r^2}\right)d\alpha'_\sigma(p) .$$

D'après $\psi_{\sigma,1}(0) = \psi(0)$, $c_{1,\sigma}$ ne dépend pas de σ, et donc on pose $c = c_{1,\sigma}$. Par conséquent, il existe une fonction non-négative $q(\sigma)$ sur $S_{1,0}$ et une famille $(\alpha_\sigma)_{\sigma\in S_{1,0}}$ dans $M^+((0,+\infty))$ telles que

$$\psi(r,\sigma) = c + q(\sigma)r^2 + \int\left(1 - \frac{p}{p+4\pi^2r^2}\right)d\alpha_\sigma(p) .$$

Rappelons le théorème de Levy-Khinchine et le lemme 1; alors on a, pour tout σ de $S_{1,0}$,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^2}\int\left(1 - \frac{p}{p+4\pi^2r^2}\right)d\alpha_\sigma(p) = 0 ,$$

et donc, en utilisant encore le théorème de Levy-Khinchine, il existe une mesure positive μ dans $\boldsymbol{R}^n - \{0\}$ telle que

$$\int \frac{|x|^2}{1+|x|^2} d\mu(x) < \infty \quad \text{et} \quad \int (1 - \exp(-2\pi\sqrt{-1}x\cdot y)) d\mu(y)$$
$$= \int \Big(1 - \frac{p}{p + 4\pi^2 r^2}\Big) d\alpha_\sigma(p) ,$$

où $x = (r, \sigma)$. Donc la fonction $\int \Big(1 - \frac{p}{p+4\pi^2 r^2}\Big) d\alpha_\sigma(p)$ de (r, σ) est finie et continue dans $\boldsymbol{R}^n$, et par suite la continuité de q en résulte.

LEMME 3. *Soient L un opérateur différentiel elliptique et auto-adjoint d'ordre $\leqq 2$ à coéfficients constants et G_L le noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ s'annulant à l'infini tel que $LG_L = -\varepsilon$.*[2] *Soit N un noyau de convolution $\neq 0$ sur $\boldsymbol{R}^n$ symétrique par rapport à l'origine et s'annulant à l'infini. Alors pour que la distribution LN soit conditionnellement positive, il faut et il suffit qu'il existe un noyau de convolution de Dirichlet N_1 sur $\boldsymbol{R}^n$ tel que $N * N_1 = G_L$. Dans ce cas, N_1 est uniquement déterminé.*

Remarque 2. Soient k un entier avec $1 \leqq k \leqq n$ et $L = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i} - a$; supposons qu'il existe un noyau de convolution G_L sur $\boldsymbol{R}^n$ s'annulant à l'infini tel que $LG_L = -\varepsilon$. Soit ensuite N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ s'annulant à l'infini. Si LN est conditionnellement positive, alors $\operatorname{supp}(N) \subset \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n ; x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}$.

En effet, on connaît bien $\operatorname{supp}(G_L) \subset \{x = (x_1, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0) \in \boldsymbol{R}^n\}$. Pour une fonction finite et continue $f \geqq 0$ dans $\boldsymbol{R}^n$ à support compact, $G_L * f(x) > 0$ dans $\{x \in \boldsymbol{R}^n ; f(x) > 0\}$, car $\operatorname{supp}(G_L) \ni 0$. Donc, pour toute la fonction finie et continue $g \geqq 0$ dans $\boldsymbol{R}^n$ à support contenu dans $\{x \in \boldsymbol{R}^n ; f(x) > 0\}$, il existe une constante $a_g > 0$ telle que $N * g(x) \leqq a_g G_L * f(x)$ sur $\operatorname{supp}(g)$. $N * g$ étant L-sous-harmonique en dehors de $\operatorname{supp}(g)$ et ayant $\lim_{|x|\to\infty} N * g(x) = 0$, $N * g(x) \leqq a_g G_L * f(x)$ dans $\boldsymbol{R}^n$. La fonction g étant quelconque, on a $\operatorname{supp}(N * f) \subset \operatorname{supp}(G_L * f)$, d'où $\operatorname{supp}(N) \subset \operatorname{supp}(G_L)$.

Montrons le lemme 3. S'il existe un noyau de convolution de Dirichlet N_1 sur $\boldsymbol{R}^n$ tel que $N * N_1 = G_L$, alors $(LN) * N_1 = -\varepsilon$, et par suite LN est un laplacien généralisé symétrique sur $\boldsymbol{R}^n$, d'où la condition est suffisante.

[2] Il est bien connu que G_L est uniquement déterminé.

On obtient, en même temps, l'unicité de N_1. Supposons réciproquement que LN est conditionnellement positive. Si L est constant, alors notre énoncé est évident. Donc, d'après la remarque 2 et en utilisant une certaine transformation linéaire de $\boldsymbol{R}^n$ à lui-même on peut supposer que L est uniformément elliptique. N est absolument continu (par rapport à la mesure de Lebesgue) en dehors de l'origine. Rapplons le lemme suivant, qui est obtenu pour un noyau d'un cadre plus large dans [4].

LEMME 4. *Soit N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ symétrique par rapport à l'origine et absolument continu en dehors de l'origine. Alors, pour une constante $c > 0$, une fonction non-négative, mesurable et localement bornée u dans $\boldsymbol{R}^n$ et pour un compact K dans $\boldsymbol{R}^n$, il existe une fonction non-négative, mesurable et bornée $f_{c,u,K}$ dans $\boldsymbol{R}^n$ portée par K telle que l'on ait $Nf_{c,u,K} + cf_{c,u,K} \geqq u$ presque partout (noté p.p.) sur K et $Nf_{c,u,K} + cf_{c,u,K} = u$ p.p. sur $\{x \in \boldsymbol{R}^n ; f_{c,u,K}(x) > 0\}$.*

On note ici $Nf_{c,u,K}$ la densité de la mesure $N * (f_{c,u,K}dx)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Continuons la démonstration du lemme 3. Soient φ une fonction non-négative, finie et continue dans $\boldsymbol{R}^n$ à support compact telle que $\int \varphi dx = 1$ et $B_{m,0}$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon m; posons $\varphi_m(x) = m^n \varphi(mx)$. Pour trois entiers $j > 0$, $k > 0$, $m > 0$ et pour un nombre $p > 0$, on désigne par $f_{j,k,m,p}$ la fonction obtenue dans le lemme 4 pour le noyau de convolution $N + pG_L$ sur $\boldsymbol{R}^n$, $c = 1/k$, $u = G_L * \varphi_m$ et pour $K = \overline{B_{j,0}}$. On peut écrire $N = a\varepsilon + K(x)dx$, où a et K sont respectivement une constante non-négative et une fonction non-négative et localement sommable dans $\boldsymbol{R}^n$. On a

$$K * f_{j,k,m,p} \leqq G_L * \varphi_m - pG_L * f_{j,k,m,p} \ \text{p.p. sur} \ \{x \in \boldsymbol{R}^n ; f_{j,k,m,p}(x) > 0\} .$$

D'après la continuité de $K * f_{j,k,m,p}$, la présente inégalité a lieu partout sur le support $\operatorname{supp}(f_{j,k,m,p}dx)$. Ayant $\lim_{|x| \to \infty} K * f_{j,k,m,p}(x) = 0$ et $K * f_{j,k,m,p}$ étant L-sous-harmonique en dehors de $\operatorname{supp}(f_{j,k,m,p}dx)$, on a

$$K * f_{j,k,m,p} \leqq G_L * \varphi_m - pG_L * f_{j,k,m,p} \quad \text{sur} \quad \boldsymbol{R}^n ,$$

et par suite

$$(N + pG_L)f_{j,k,m,p} + \frac{1}{k} f_{j,k,m,p} \leqq G_L * \varphi_m \quad \text{p.p. sur} \quad \boldsymbol{R}^n ,$$

$$(N + pG_L)f_{j,k,m,p} + \frac{1}{k}f_{j,k,m,p} = G_L * \varphi_m \quad p.p. \text{ sur } \overline{B_{j,0}} .$$

En faisant $m \to +\infty$ et ensuite $k \to +\infty$, on obtient qu'il existe une mesure positive $\mu_{j,p}$ dans $\boldsymbol{R}^n$ portée par $\overline{B_{j,0}}$ telle que, au sens des mesures,

$$(N + pG_L) * \mu_{j,p} \leqq G_L \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{R}^n ,$$
$$(N + pG_L) * \mu_{j,p} = G_L \quad \text{dans} \quad B_{j,0} .$$

D'après $pG_L * \mu_{j,p} \leqq G_L$, on a $p\int d\mu_{j,p} \leqq 1$. Soit $N_p^{(1)}$ un point vaguement adhérent de $(\mu_{j,p})_{j=1}^{\infty}$ lorsque $j \to \infty$; alors, d'après l'hypothèse que $N + pG_L$ s'annule à l'infini, on a

$$(N + pG_L) * N_p^{(1)} = G_L \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{R}^n .$$

On a aussi $p\int dN_p^{(1)} \leqq 1$. On obtient ainsi une famille $(N_p^{(1)})_{p>0}$ de noyaux de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ symétriques par rapport à l'origine. On a, pour tous $p > 0$ et $q > 0$,

$$\begin{aligned} G_L * N_p^{(1)} &= (N + qG_L) * N_q^{(1)} * N_p^{(1)} = (N + pG_L) * N_p^{(1)} * N_q^{(1)} \\ &\quad + (q - p)G_L * N_p^{(1)} * N_q^{(1)} = G_L * N_q^{(1)} + (q - p)G_L * N_p^{(1)} * N_q^{(1)} , \end{aligned}$$

et donc

$$N_p^{(1)} = N_q^{(1)} + (q - p)N_p^{(1)} * N_q^{(1)} .$$

Ayant $N \neq 0$ et $(N_p^{(1)})_{p>0}$ étant croissante avec $p \downarrow 0$, on obtient que $N_1 = \lim_{p \downarrow 0} N_p^{(1)}$ définit un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ symétrique par rapport à l'origine et que $(N_p^{(1)})_{p>0}$ est la résolvante associée au noyau N_1, où $N_0^{(1)} = N_1$. D'après $N_1 \neq 0$, N_1 est un noyau de convolution de Dirichlet sur $\boldsymbol{R}^n$ (cf. la remarque 1 et la proposition 1). On a évidemment $N * N_1 \leqq G_L$ dans $\boldsymbol{R}^n$. Soient m un entier positif et ν_m la mesure positive dans $\boldsymbol{R}^n$ portée par $S_{m,0}$ telle que $G_L * \nu_m = G_L$ sur $CB_{m,0}$. Alors la famille $(N * N_p^{(1)} * (\varepsilon - \nu_m))_{p>0}$ converge vaguement vers $G_L * (\varepsilon - \nu_m)$ dans $\boldsymbol{R}^n$ avec $p \to 0$. Ayant supp $(N * (\varepsilon - \nu)^+) \subset \overline{B_{m,0}}$, on obtient

$$G_L \geqq N * N_1 \geqq N * N_1 * (\varepsilon - \nu_m) \geqq G_L * (\varepsilon - \nu_m)$$

dans $\boldsymbol{R}^n$. En faisant $m \to \infty$, on arrive à l'égalité $N * N_1 = G_L$, d'où la condition est nécessaire.

On note $D_L(\boldsymbol{R}^n)$ l'ensemble formé par tous les noyaux de convolution de Dirichlet N sur $\boldsymbol{R}^n$ tels que LN soit conditionnellement positive.

https://doi.org/10.1017/S0027763000016603 Published online by Cambridge University Press

COROLLAIRE 3. *À tout l'élément* N *de* $D_L(\boldsymbol{R}^n)$, *on peut associer uniquement un autre élément* N' *de* $D_L(\boldsymbol{R}^n)$ *tel que* $N * N' = G_L$.

De la même manière que pour le laplacien ordinaire (cf. [6]), on dit que, pour un opérateur elliptique différentiel et auto-adjoint L d'ordre $\leqq 2$ à coéfficients constants, un noyau de convolution N sur $\boldsymbol{R}^n$ est complètement L-sous-harmonique si, pour tout l'entier $m \geqq 0$, $L^m N$ est conditionnellement positive, où $L^0 N = N$, $L^1 = L$ et $L^m = L^{m-1}L$ ($\forall m \geqq 2$).

LEMME 5. *Soient* N *un noyau de convolution sur* $\boldsymbol{R}^n$ *symétrique par rapport à l'origine et s'annulant à l'infini, et* a *une constante* $\geqq 0$. *On suppose que si* $n = 1, 2$, *alors* $a > 0$. *Si* N *est complètement* $(\Delta - a)$-*sous-harmonique, où* Δ *est le laplacien ordinaire sur* $\boldsymbol{R}^n$, *alors il existe une constante* $c \geqq 0$ *et une famille* $(\alpha_\sigma)_{\sigma \in S_{1,0}}$ *dans* $M^+(\boldsymbol{R}^+)$ *telles que*

$$\hat{N}(x) = \hat{N}(r, \sigma) = c + \int \frac{1}{p + 4\pi^2 r^2} d\alpha_\sigma(p) .$$

Dans ce cas, la famille $(\alpha_\sigma)_{\sigma \in S_{1,0}}$ *est unique et, pour tout* σ *de* $S_{1,0}$, supp $(\alpha_\sigma) \subset [a, \infty)$.

En effet, soient b une constante avec $0 \leqq b \leqq a$ et k un entier $\geqq 0$. Si, pour tout l'entier $m \geqq 0$, $(\Delta - a)^m(\Delta - b)^k N$ est conditionnellement positive, alors, d'après

$$(\Delta - a)^m(\Delta - b)^{k+1}N = (a - b)(\Delta - a)^m(\Delta - b)^k N + (\Delta - a)^{m+1}(\Delta - b)^k N ,$$

$(\Delta - a)^m(\Delta - b)^{k+1}N$ l'est aussi. Donc, pour tous les entiers $m \geqq 0$, $k \geqq 0$ et pour tout b avec $0 \leqq b \leqq a$, $(\Delta - a)^m(\Delta - b)^k N$ est aussi conditionnellement positive. Soit b une constante telle que $0 \leqq b \leqq a$ ou bien $0 < b \leqq a$ d'accord avec $n \geqq 3$ ou bien $n = 1, 2$. D'après l'existence du noyau de convolution s'annulant à l'infini G_b sur $\boldsymbol{R}^n$ avec $(\Delta - b)G_b = -\varepsilon$ et le lemme 3, il existe une fonction définie-négative ψ_b dans $\boldsymbol{R}^n$ telle que $\hat{N}(x) = \psi_b(x)/(4\pi^2 |x|^2 + b)$. Pour $n = 1, 2$, en faisant $b \to 0$, on obtient aussi qu'il existe une fonction définie-négative ψ_0 dans $\boldsymbol{R}^n$ à valeurs réelles telle que $\hat{N}(x) = \psi_0(x)/4\pi^2 |x|^2$. D'après la proposition 4, pour tout l'entier $m \geqq 0$, $(-1)^m |x|^{2m} \hat{N}(x)dx$ est conditionnellement de type positif, et par suite $(-1)^{m+1} |x|^{2m} \psi_0(x)dx$ l'est aussi. D'après le lemme 2, il existe une constante $c_1 \geqq 0$, une fonction finie et continue $q(\sigma) \geqq 0$ sur $S_{1,0}$ et une famille $(\alpha'_\sigma)_{\sigma \in S_{1,0}}$ dans $M^+(0, \infty)$ telles que

$$\psi_0(x) = \psi(r, \sigma) = c_1 + q(\sigma)r^2 + \int \left(1 - \frac{p}{p + 4\pi^2 r^2}\right) d\alpha'_\sigma(p) .$$

La fonction $\psi_0(x)/|x|^2$ étant de type positif, pour tout l'entier $m \geqq 0$, $\psi_0(mx)/m^2|x|^2$ l'est aussi. Faisant $m \to \infty$, on obtient que la fonction $q(\sigma)$ de (r, σ) est de type positif, d'où $q(\sigma)$ est constante $\geqq 0$. Posons $c = q(\sigma)/4\pi^2$ et $\alpha_\sigma = c_1 \varepsilon + \alpha'_\sigma$; alors $\alpha_\sigma \in M^+(\boldsymbol{R}^+)$ et

$$\hat{N}(x) = \hat{N}(r, \sigma) = c + \int \frac{1}{p + 4\pi^2 r^2} d\alpha_\sigma(p) .$$

Voyons l'unicité de $(\alpha_\sigma)_{\sigma \in S_{1,0}}$. Soient c' une constante $\geqq 0$ et $(\alpha'_\sigma)_{\sigma \in S_{1,0}}$ une famille de $M^+(\boldsymbol{R}^+)$ telles que $\hat{N}(r, \sigma) = c' + \int \frac{1}{p + 4\pi^2 r^2} d\alpha'_\sigma(p)$. En faisant $r \to +\infty$, on obtient $c = c'$. Ayant, pour tout σ de $S_{1,0}$,

$$\int \frac{1}{p + 4\pi^2 r^2} d\alpha_\sigma(p) = \int_0^\infty \int \exp(-4\pi^2 r^2 t) \exp(-pt) d\alpha_\sigma(p) dt$$

et

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int \exp(-4\pi^2 r^2 t) \exp(-pt) d\alpha_\sigma(p) dt \\ &\qquad = \int_0^\infty \int \exp(-4\pi^2 r^2 t) \exp(-pt) d\alpha'_\sigma(p) dt , \end{aligned}$$

on obtient, d'après l'injectivité de la transformation de Laplace,

$$\int \exp(-pt) d\alpha_\sigma(p) = \int \exp(-pt) d\alpha'_\sigma(p)$$

dans $(0, \infty)$, et encore, de la même manière, $\alpha_\sigma = \alpha'_\sigma$.

Voyons finalement $\operatorname{supp}(\alpha_\sigma) \subset [a, \infty)$. Pour tout l'entier $m \geqq 0$, la distribution $(-1)^{m+1}|x|^{2m} \psi_a(x) dx$ étant conditionnellement de type positif et ayant

$$\begin{aligned} \psi_a(r, \sigma) &= (4\pi^2 r^2 + a)\hat{N}(r, \sigma) \\ &= c(4\pi^2 r^2 + a) + \int \left(1 - \frac{p - a}{p + 4\pi^2 r^2}\right) d\alpha_\sigma(p) , \end{aligned}$$

on obtient, d'après le lemme 2 et la présente unicité, $(p - a) d\alpha_\sigma(p)$ est une mesure positive, d'où $\operatorname{supp}(\alpha_\sigma) \subset [a, \infty)$.

D'après les présents lemmes, on obtient la proposition suivante:

PROPOSITION 7. *Soit L un opérateur différentiel elliptique d'ordre*

https://doi.org/10.1017/S0027763000016603 Published online by Cambridge University Press

$\leqq 2$ à coéfficients constants et supposons qu'il existe le noyau de convolution G_L sur $\boldsymbol{R}^n$ s'annulant à l'infini avec $LG_L = -\varepsilon$. Soit N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ symétrique par rapport à l'origine et s'annulant à l'infini. Alors pour que N soit complètement L-sous-harmonique et que, pour tout l'entier $m \geqq 0$, il existe une constante $c_m > 0$ telle que $L^m N \leqq c_m G_L$ au sens des distributions en dehors de l'origine, il faut et il suffit que N soit de la forme

$$N = c\varepsilon + \int G_{L,p} d\nu(p) ,$$

où c est une constante $\geqq 0$ et où ν est une mesure positive sur $\boldsymbol{R}^+$ telle que, quel que soit m un entier $\geqq 0$, $\int p^m d\nu(p) < +\infty$.

On rappelle que $(G_{L,p})_{p \geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau G_L.

Démonstration. Pour tout $p > 0$ et pour tout l'entier $m \geqq 0$, on a $L^m G_{L,p} = p^m G_{L,p} \leqq p^m G_{L,p}$ en dehors de l'origine, et donc il en résulte immédiatement que la condition est suffisante.

Montrons que la condition est nécessaire. De la même manière que dans le lemme 3, on peut supposer que L est uniformément elliptique. D'après une certaine transformation linéaire de $\boldsymbol{R}^m$ à lui-même, on peut supposer $L = \Delta - a$, où a est une constante $\geqq 0$ d'après l'existence de G_L. D'après $L^m N \leqq c_m G_L$ en dehors de l'origine, il existe un noyau de convolution $N^{(m)}$ sur $\boldsymbol{R}^n$ tel que, quelle que soit une fonction φ finite et continue dans $\boldsymbol{R}^n$ à support compact, $\int \varphi dN^{(m)} = \int_{|x|>0} \varphi(x) d(L^m N)(x)$. Pour tout l'entier $m \geqq 0$, $N^{(m)}$ est symétrique par rapport à l'origine et complètement L-sous-harmonique. $N^{(m)}$ s'annulant à l'infini et $LN^{(m)}$ étant un laplacien généralisé symétrique sur $\boldsymbol{R}^n$, on obtient d'après le lemme 3 et théorème de Levy-Khinchine,

$$\int_{|x|>0} \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} d(LN^{(m)})(x) < +\infty .$$

Donc, pour tout l'entier $m \geqq 1$, $\int dN^{(m)} < \infty$. $-\widehat{LN}$ étant définie-négative et à valeurs réelles, et pour tout l'entier $m \geqq 1$, la fonction $\hat{N}(mx)$ de x étant de type positif, il existe deux constantes $c_1 \geqq 0$ et $c_2 \geqq 0$ telles que

https://doi.org/10.1017/S0027763000016603 Published online by Cambridge University Press

$$-\widehat{LN}(x) = c_1 + c_2|x|^2 + \int dN^{(1)} - \widehat{N^{(1)}}(x)\,.$$

D'autre part, d'après le lemme 4, il existe uniquement une constante $c \geqq 0$ et une famille $(\alpha_\sigma)_{\sigma \in S_{1,0}}$ de mesures positives sur $\boldsymbol{R}^+$ portées par $[a, \infty)$ telles que

$$\hat{N}(r, \sigma) = c + \int \frac{1}{p + 4\pi^2 r^2} d\alpha_\sigma(p)\,.$$

Soit α'_σ la mesure obtenue de α_σ par la translation de $-a$. On a alors

$$\begin{aligned}
\widehat{LN}(r, \sigma) &= -(4\pi^2 r^2 + a)\hat{N}(r, \sigma) \\
&= -c(4\pi^2 r^2 + a) + \int \Big(\frac{p - a}{p + 4\pi^2 r^2} - 1\Big) d\alpha_\sigma(p) \\
&= -c(4\pi^2 r^2 + a) + \int \Big(\frac{p}{p + a + 4\pi^2 r^2} - 1\Big) d\alpha'_\sigma(p)\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\int d\alpha'_\rho < +\infty$ et

$$\widehat{N^{(1)}}(r, \sigma) = \int \frac{p}{p + a + 4\pi^2 r^2} d\alpha'_\sigma(p)\,.$$

Par récurrence, on obtient que, pour tout l'entier $m \geqq 1$,

$$\widehat{N^{(m)}}(r, \sigma) = \int \frac{p^m}{p + a + 4\pi^2 r^2} d\alpha'_\sigma(p)\,.$$

Remarquons ici que $\widehat{N^{(m)}}$ est finie et continue à l'origine; alors on a, pour tout σ de $S_{1,0}$, $\int \frac{p^m}{p + a} d\alpha'_\sigma(p) < +\infty$ et $\int \frac{p^m}{p + a} d\alpha'_\sigma(p)$ ne dépend pas de σ. Par conséquent, pour tout $t \geqq 0$, l'intégrale $\int \exp(-pt) \frac{p}{p + a} d\alpha'_\sigma(p)$ est finie et ne dépend pas de σ. D'après l'injectivité de la transformation de Laplace, la restriction de α'_σ dans $(0, \infty)$ ne dépend pas de σ. En utilisant encore le lemme 4, il existe une mesure ν' sur $\boldsymbol{R}^+$ avec $\nu'(\{0\}) = 0$ et une fonction finie continue $q(\sigma) \geqq 0$ sur $S_{1,0}$ telles que

$$\hat{N}(r, \sigma) = c + \frac{q(\sigma)}{a + 4\pi^2 r^2} + \int \frac{1}{p + a + 4\pi^2 r^2} d\nu'(p)\,.$$

En appliquant le théorème de Levy-Khinchine à la fonction définie-négative $-\widehat{LN}(x)$, on obtient que $q(\sigma)$ est constante. En posant $\nu = q(\sigma)\varepsilon + \nu'$, on obtient $\hat{N}(x) = c + \int \frac{1}{p + a + 4\pi^2 |x|^2} d\nu(p)$, d'où

$$N = c\varepsilon + \int G_{L,p} d\nu \ .$$

La démonstration est ainsi complète.

Soient L et G_L les mêmes que ci-dessus. On note $\tilde{C}_{R,b}(G_L)$ la totalité des noyaux de convolution complètement L-sous-harmoniques N sur $\boldsymbol{R}^n$ symétriques par rapport à l'origine tels que, pour tout l'entier $m \geqq 0$, il existe une constante $c_m > 0$ vérifiant $L^m N \leqq c_m G_L$ en dehors de l'origine. Posons $\tilde{C}_R(G_L) = \overline{\tilde{C}_{R,b}(G_L)}$, où l'adhérence est au sens de la topologie vague.

Corollaire 4. *Soit N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$. Alors pour que N appartienne à $\tilde{C}_R(G_L)$, il faut et il suffit que N soit de la forme*

$$N = c\varepsilon + \int G_{L,p} d\nu(p) \ ,$$

où c est une constante $\geqq 0$ et $\nu \in M^+(\boldsymbol{R}^+)$, et tout l'élément de $\tilde{C}_R(G_L)$ est un noyau de convolution de Dirichlet sur $\boldsymbol{R}^n$ ou bien 0.

Démonstration. On connaît déjà que si, pour $c \in \boldsymbol{R}^+$ et $\nu \in M^+(\boldsymbol{R}^+)$, $N = c\varepsilon + \int G_{L,p} d\nu(p)$, alors N est un noyau de convolution de Dirichlet sur $\boldsymbol{R}^n$ ou bien 0 (cf. par exemple, [5]), et donc il suffit de voir la première partie. La condition est évidemment suffisante, et on montrera seulement que la condition est nécessaire. Voyons d'abord que tout l'élément N de $\tilde{C}_R(G_L)$ s'annule à l'infini. On choisit une suite $(N_m)_{m=1}^{\infty}$ de $\tilde{C}_{R,b}(G_L)$ qui converge vaguement vers N avec $m \to \infty$. Soit f une fonction $\geqq 0$, finie et continue dans $\boldsymbol{R}^n$ à support compact; alors il existe une fonction finie et continue $g \geqq 0$ dans $\boldsymbol{R}^n$ à support compact telle que $N * f < G_L * g$ sur supp(f). La suite $(N_m * f)_{m=1}^{\infty}$ converge uniformément vers $N * f$ sur tout compact, et donc il existe un entier $m_0 \geqq 1$ tel que, quel que soit $m \geqq m_0$, $N_m * f \leqq G_L * g$ sur supp (f). $N_m * f$ étant L-sous-harmonique en dehors de supp (f) et ayant $\lim_{|x| \to \infty} N_m * f(x) = 0$, on obtient $N_m * f \leqq G_L * g$ sur $\boldsymbol{R}^n$. En faisant $m \to \infty$, on arrive à $N * f \leqq G_L * g$ sur $\boldsymbol{R}^n$, d'où N s'annule à l'infini. De la même manière que dans le lemme 3, on peut supposer $L = \varDelta - a$, où $a \in \boldsymbol{R}^+$. Alors tout l'élément N de $\tilde{C}_R(G)$ est invariant par rotations et pour tout l'entier $m \geqq 0$, $L^m N$

est conditionnellement positive. D'après le lemme 4, il existe une mesure positive ν' sur $\boldsymbol{R}^+$ portée par $[a, \infty)$ et une constante $c \geqq 0$ telle que $\hat{N}(x) = c + \int \frac{1}{p + 4\pi^2 |x|^2} d\nu'(p)$. Soit ν la mesure obtenue de ν' par la translation de $-a$; alors on a

$$N = c\varepsilon + \int G_{L,p} d\nu(p) ,$$

d'où le corollaire 4.

Nous ne connaissons pas maintenant si $\tilde{C}_R(G_L)$ est égal à la totalité des noyaux de convolution complètement L-sous-harmoniques dans $\boldsymbol{R}^n$ symétriques par rapport à l'origine et s'annulant à l'infini.

D'après le corollaire 4 et une proposition générale obtenue dans [6], on obtient le corollaire suivant:

COROLLAIRE 5. *Soient L et G_L les mêmes que ci-dessus. Alors $\tilde{C}_R(G_L)$ est un cône convexe vaguement fermé de vertex 0, $\tilde{C}_R(G_L) \ni G_L$ et, pour tout l'élément $N \neq 0$ de $\tilde{C}_R(G_L)$, il existe un autre élément $N' \neq 0$ de $\tilde{C}_R(G_L)$, et un seul tel que $N * N' = G_L$.*

On notera, pour un entier $m \geqq 1$, $(\boldsymbol{R}^m)^+ = \{\tilde{p} = (p_1, \cdots, p_m)\,; p_i \in \boldsymbol{R}^+ (i = 1, 2, \cdots, m)\}$. On supposera toujours que L et G_L sont les mêmes que ci-dessus. Soient N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ et $(N_{\tilde{p}})_{\tilde{p} \in \bigcup_{m \geqq 1} (\boldsymbol{R}^m)^+}$ une famille de noyaux de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$. On dira que cette famille sera une classe divisible associée au noyau N relativement au noyau G_L si $N_0 = N$, $(N_p)_{p \geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau N et si, pour tout l'entier $m \geqq 1$, $N_{(p_1, \cdots, p_m)} * N_{(p_1, \cdots, p_m, 0)} = G_L$ et $(N_{(p_1, \cdots, p_m, p)})_{p \geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau $N_{(p_1, \cdots, p_m)}$. Il est évident que pour un noyau de convolution N sur $\boldsymbol{R}^n$, une classe divisible associée au noyau N relativement au noyau G_L est unique lorsqu'elle existe.

Rappelons encore la définition d'un cône convexe divisible $C_R(G_L)$ relatif au noyau G_L. Cela est, par définition, un cône convexe vaguement fermé de vertex 0 formé par de noyaux de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ et vérifiant les deux conditions suivantes:

(a) $C_R(G_L) - \{0\}$ est formé par de noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}^n$.

(b) $G_L \in C_R(G_L)$ et pour tout $N \neq 0$ de $C_R(G_L)$, le noyau de convolution dual N' de N relativement au noyau G_L appartient à $C_R(G_L)$.

Lorsque, pour un noyau de convolution N sur $\boldsymbol{R}^n$, il existe un seul noyau de convolution N' sur $\boldsymbol{R}^n$ vérifiant $N * N' = G_L$, N' s'appelle le noyau de convolution dual de N relativement au noyau G_L.

Remarque 3. Soient L et G_L les mêmes que ci-dessus, et $C_R(G_L)$ un cône convexe divisible relatif au noyau G_L. Alors, pour tout $N \neq 0$ de $C_R(G_L)$, il existe la classe divisible associée au noyau N relativement au noyau G_L.

En effet, il est déjà connu que, pour un noyau de convolution N appartenant à $C_R(G_L)$, la résolvante associée au noyau N est aussi contenue dans $C_R(G_L)$ (cf. [7]). En utilisant la condition (b) et par récurrence, on obtient facilement la remarque 3.

Remarque 4. Soit N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ et supposons qu'il existe la classe divisible $(N_{\tilde{p}})_{\tilde{p} \in \bigcup_{m \geqq 1} (\boldsymbol{R}^m)^+}$ associée au noyau N relativement au noyau G_L. Alors, pour tout l'entier $m \geqq 1$ et pout $\tilde{p} = (p_1, \cdots, p_m)$ de $(\boldsymbol{R}^m)^+$, en posant, pour $\tilde{q} = (q_1, \cdots, q_k)$ de $\bigcup_{k \geqq 1} (\boldsymbol{R}^k)^+$,

$$N_{\tilde{q}}^{(\tilde{p})} = N_{(p_1, \cdots, p_{m-1}, p_m + q_1, q_2, \cdots, q_k)} ,$$

$(N_{\tilde{q}}^{(\tilde{p})})_{\tilde{q} \in \bigcup_{k \geqq 1} (\boldsymbol{R}^k)^+}$ est la classe divisible associée au noyau $N_{\tilde{p}}$ relativement au noyau G_L.

Soient N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ et $(N_{\tilde{p}})_{\tilde{p} \in \bigcup_{m \geqq 1} (\boldsymbol{R}^m)^+}$ la classe divisible associée au noyau N relativement au noyau G_L. Soit $(p_i)_{i=1}^m$ une famille de m nombres > 0. On dira qu'un noyau de convolution M sur $\boldsymbol{R}^n$ sera un noyau de convolution divisible défini par N et $(p_i)_{i=1}^m$ s'il existe une famille $(c_i)_{i=1}^{m-1}$ de constantes > 0 telle que

$$M = p_1 \cdots p_m N * N_{(0, p_1)} * \cdots * N_{(0, p_1, \cdots, p_m)} + \sum_{i=1}^{m-1} c_i N_{(0, p_1, \cdots, p_i)} * \cdots * N_{(0, p_1, \cdots, p_m)}$$

sur $\boldsymbol{R}^n$.

PROPOSITION 8. *Soient m un entier $\geqq 1$ et $(p_i)_{i-1}^m$ une famille de nombres > 0. Alors il existe une famille $(c_i)_{i=1}^{m-1}$ de constantes > 0 dépendant seulement $(p_i)_{i=1}^m$, et une seule telle que, pour tout G_L, tout le noyau de convolution N_0 sur $\boldsymbol{R}^n$ tel qu'il existe la classe divisible $(N_{\tilde{p}})_{\tilde{p} \in \bigcup_{m \geqq 1} (\boldsymbol{R}^m)^+}$ associée au noyau N_0 relativement au noyau G_L et pour tout l'entier k avec $0 \leqq k \leqq m-1$, $L^k M / p_1^2 \cdots p_k^2$ soit égal à un noyau de convolution divisible défini par $N_{(0, p_1, \cdots, p_k)}$ et $(p_i)_{i=k+1}^n$ en dehors de l'origine, où*

$$M = p_1 \cdots p_m N_0 * N_{(0,p_1)} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_m)} + \sum_{i=1}^{m-1} c_i N_{(0,p_1,\cdots,p_i)} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_m)}$$

et dans le cas où $k=0$, *on suppose que* $p_1^2 \cdots p_k^2$ *et* $(0, p_1, \cdots, p_k)$ *sont respectivement égals à* 1 *et* 0.

Montrons cette proposition par récurrence pour m. Il est évident que notre énoncé a lieu dans le cas où $m=1$. Supposons que dans le cas où $m = s$ $(\geqq 1)$, notre énoncé a lieu pour tout la famille de s nombres >0. Soit $(p_i)_{i=1}^{s+1}$ une famille de nombres >0. On désigne par $(c_i')_{i=1}^{s-1}$ la unique famille de constantes >0 obtenue pour $(p_i)_{i=2}^{s+1}$. Posons

$$M_s = p_2 \cdots p_{s+1} N_{(0,p_1)} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_{s+1})} + \sum_{i=1}^{s-1} c_i' N_{(0,p_1,\cdots,p_{i+1})} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_{s+1})} .$$

Alors M_s un noyau de convolution divisible défini par $N_{(0,p_1)}$ et $(p_i)_{i=2}^{s+1}$. Pour tout l'entier i avec $1 \leqq i \leqq s$, on a $N_{(0,p_1,\cdots,p_{i-1})} * N_{(0,p_1,\cdots,p_{i-1},0)} = G_L$. Donc $N_{(0,p_1,\cdots,p_{i-1},0)}$ s'annule à l'infini, et par suite on a $p_i \int dN_{(0,p_1,\cdots,p_i)} \leqq 1$ (cf. [6]). Par conséquent $\int dM_s < +\infty$, et par suite

$$M_{s+1} = \sum_{i=1}^{s-1} \frac{c_i p_1^2}{p_{i+1} \cdots p_{s+1}} G_L + p_1 G_L * (\varepsilon - p_1 M_s)$$

a un sens. Ayant, pour tout l'entier i avec $1 \leqq i \leqq s+1$,

$$\begin{aligned} G_L * (\varepsilon - p_i \cdots p_{s+1} & N_{(0,p_1,\cdots,p_i)} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_{s+1})}) \\ &= \sum_{k=0}^{s-i} p_{i+k+1} \cdots p_{s+1} (G_L * (\varepsilon - p_{i+k} N_{(0,p_1,\cdots,p_{i+k})})) * N_{(0,p_1,\cdots,p_{i+k+1})} \\ &\quad * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_{s+1})} + G_L * (\varepsilon - p_{s+1} N_{(0,p_1,\cdots,p_{s+1})}) \\ &= \sum_{k=0}^{s-i} p_{i+k+1} \cdots p_{s+1} N_{(0,p_1,\cdots,p_{i+k-1})} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_{s+1})} + N_{(0,p_1,\cdots,p_s)} \\ &\quad * N_{(0,p_1,\cdots,p_{s+1})} . \end{aligned}$$

on obtient qu'il existe une famille $(c_i)_{i=1}^{s}$ de constantes >0 dépendant seulement de $(p_i)_{i=1}^{s+1}$ telle que

$$\begin{aligned} M_{s+1} = p_1 \cdots p_{s+1} N_0 * N_{(0,p_1)} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_{s+1})} \\ + \sum_{i=1}^{s} c_i N_{(0,p_1,\cdots,p_i)} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_{s+1})} . \end{aligned}$$

On a $LM_{s+1} = p_1^2 M_s$ en dehors de l'origine. D'après notre hypothèse, pour tout l'entier k avec $0 \leqq k \leqq s$, $L^k M_{s+1}/p_1^2 \cdots p_k^2$ est égal à un noyau de convolution divisible défini par $N_{(0,p_1,\cdots,p_k)}$ et $(p_i)_{i=k+1}^{s+1}$ en dehors de 0.

Voyons finalement l'unicité de $(c_i)_{i=1}^s$. Soit $(\tilde{c}_i)_{i=1}^s$ une autre famille de constantes >0 qui vérifie les mêmes conditions que pour $(c_i)_{i=1}^s$. On désigne par M'_{s+1} le noyau de convolution divisible défini par N_0 et $(p_i)_{i=1}^{s+1}$ obtenu de $(\tilde{c}_i)_{i=1}^s$. D'après notre hypothèse, on obtient que, pour tout G_L et pour tout N_0, $LM_{s+1}=LM'_{s+1}$ en dehors de l'origine. D'autre part, on obtient que, pour tout l'entier i avec $0\leqq i\leqq s$,

$$N_{(0,p_1,\cdots,p_i)}*N_{(0,p_1,\cdots,p_{i+1})}=G_L*(\varepsilon-p_{i+1}N_{(0,p_1,\cdots,p_{i+1})})\ .$$

Donc il existe une constante c telle que $M_{s+1}-M'_{s+1}=cG_L$, et c ne dépand pas de G_L et de N_0, car d'après le corollaire 5, pour tout $p>0$, il existe la classe divisible associée au noyau $G_{L,p}$ relativement au noyau G_L. Par conséquent, $c=0$, et par suite $c_i=\tilde{c}_i$ $(i=1,2,\cdots,s)$, d'après le corollaire 5. La démonstration est ainsi complète.

Pour la famille $(c_i)_{i=1}^{m-1}$ obtenue ci-dessus, on note $c_j=c_j((p_i)_{i=1}^m)$ $(1\leqq j\leqq m-1)$. Le noyau de convolution M dans la présente proposition s'appellera le noyau de convolution divisible d'ordre m défini par N_0 et $(p_i)_{i=1}^m$.

Remarque 5. Soit $(p_i)_{i=1}^m$ une famille de nombres >0 et supposons que G_L, N_0 et $(N_{\tilde{p}})_{\tilde{p}\in\bigcup_{m\geqq1}(R^m)^+}$ sont les mêmes que ci-dessus. Pour le noyau de convolution divisible M d'ordre m défini par N_0 et $(p_i)_{i=1}^m$, et pour un entier k avec $D\leqq k\leqq m-1$, $L^kM/p_1^2\cdots p_k^2$ est aussi égal au noyau de convolution divisible d'ordre $m-k$ défini par $N_{(0,p_1,\cdots,p_k)}$ et $(p_i)_{i=k+1}^m$ en dehors de l'origine.

Cela résulte immédiatement de la proposition 8.

LEMME 6. *Soient G_L, N_0, $(N_{\tilde{p}})_{\tilde{p}\in\bigcup_{m\geqq1}(R^m)^+}$, m et $(p_i)_{i=1}^m$ les mêmes que ci-dessus. Alors on a*

$$\lim_{p_{m+1}\to\infty}\sum_{j=1}^m\frac{c_j((p_i)_{i=1}^{m+1})}{p_j\cdots p_{m+1}}=\sum_{j=1}^{m-1}\frac{c_j((p_i)_{i=1}^m)}{p_j\cdots p_m}$$

et, pour toute la fonction continue et bornée f dans $\boldsymbol{R}^n$,

$$\lim_{p_{m+1}\to\infty}\int fdM_{m+1}^{(2)}=\int fdM_m^{(2)}\ ,$$

où

https://doi.org/10.1017/S0027763000016603 Published online by Cambridge University Press

$$M^{(2)}_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} c_j((p_i)_{i=1}^{m+1}) N_{(0,p_1,\cdots,p_j)} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_{m+1})}$$

et

$$M^{(2)}_{m} = \sum_{j=1}^{m-1} c_j((p_i)_{i=1}^{m}) N_{(0,p_1,\cdots,p_j)} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_m)} .$$

En effet, d'après la proposition 1, on obtient que, pour tout $\tilde{p}$ de $\bigcup_{m\geqq 1}(\boldsymbol{R}^m)^+$, $N_{\tilde{p}}$ est un noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}^n$. $N_{\tilde{p}}$ s'annulant à l'infini (cf. la démonstration de la proposition 8), pour tout $\tilde{q} = (q_1, \cdots, q_m)$ de $\bigcup_{m\geqq 1}(\boldsymbol{R}^m)^+$ et pour tout $p > 0$, on a $p\int dN_{(q_1,\cdots,q_m,p)} \leqq 1$ et $pN_{(q_1,\cdots,q_m,p)}$ converge vaguement vers ε avec $p \to \infty$.

Par conséquent on peut montrer, par récurrence pour $m-k$, que pour tout l'entier k avec $0 \leqq k \leqq m-1$,

$$\lim_{p_{m+1}\to\infty} \sum_{j=1}^{m-k} \frac{c_j((p_i)_{i=k+1}^{m+1})}{p_{k+j}\cdots p_{m+1}} = \sum_{j=1}^{m-k-1} \frac{c_j((p_i)_{i=k+1}^{m})}{p_{k+j}\cdots p_m}$$

toute la fonction continue et bornée f dans $\boldsymbol{R}^n$,

$$\lim_{p_{m+1}\to\infty} \int f dM^{(2)}_{(0,p_1,\cdots,p_k),m-k+1} = \int f dM^{(2)}_{(0,p_1,\cdots,p_k),m-k} ,$$

où

$$M^{(2)}_{(0,p_1,\cdots,p_k),m-k+1} = \sum_{j=1}^{m-k} c_j((p_i)_{i=k+1}^{m+1}) N_{(0,p_1,\cdots,p_{k+j})} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_{m+1})}$$

et

$$M^{(2)}_{(0,p_1,\cdots,p_k),m-k} = \sum_{j=1}^{m-k-1} c_i((p_i)_{i=k+1}^{m}) N_{(0,p_1,\cdots,p_{k+j})} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_m)} .$$

Cela résulte facilement du fait que

$$M^{(2)}_{(0,p_1,\cdots,p_{m-1}),1} = 0 ,$$

$$M^{(2)}_{(0,p_1,\cdots,p_{m-1}),2} = p_m N_{(0,p_1,\cdots,p_m)} * N_{(0,p_1,\cdots,p_{m+1})}$$

et pour tout l'entier k avec $1 \leqq k \leqq m-1$,

$$\begin{aligned} p_k \cdots p_{m+1} & N_{(0,p_1,\cdots,p_{k-1})} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_{m+1})} + M^{(2)}_{(0,p_1,\cdots,p_{k-1}),m-k+2} \\ &= \sum_{j=1}^{m-k} \frac{c_j((p_i)_{i=k+1}^{m+1})p_k^2}{p_{k+j}\cdots p_{m+1}} G_L + p_k G_L * (\varepsilon - p_k \cdots p_{m+1} N_{(0,p_1,\cdots,p_k)} \\ &\quad * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_{m+1})} - p_k M^{(2)}_{(0,p_1,\cdots,p_k),m-k+1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_k \cdots p_m N_{(0,p_1,\cdots,p_{k-1})} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_m)} + M^{(2)}_{(0,p_1,\cdots,p_{k-1}),m-k+1} \\ = \sum_{j=1}^{m-k-1} \frac{c_j((p_i)^m_{i=k+1})p_k^2}{p_{k+j}\cdots p_m} G_L + p_k G_L * (\varepsilon - p_k \cdots p_m N_{(0,p_1,\cdots,p_k)} \\ * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_m)} - p_k M^{(2)}_{(0,p_1,\cdots,p_k),m-k}) , \end{aligned}$$

d'après la démonstration de la proposition 8.

On montrera ici notre théorème principal.

THÉORÈME. *Soit L un opérateur différentiel elliptique et auto-adjoint d'ordre $\leqq 2$ sur $\boldsymbol{R}^n$ à coéfficients constants et supposons qu'il existe le noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ s'annulant à l'infini avec $LG_L = -\varepsilon$. Alors un cône convexe divisible relatif au noyau G_L formé par de noyaux de convolution symétriques par rapport à l'origine est uniquement déterminé, et cela est égal à*

$$\left\{c\varepsilon + \int G_{L,p} d\nu(p)\,;\, c \in \boldsymbol{R}^+ \quad \text{et} \quad \nu \in M^+(\boldsymbol{R}^+) \quad \text{avec} \quad \int_1^\infty \frac{1}{p} d\nu(p) < +\infty\right\} .$$

Démonstration. Soit $C_R(G_L)$ un cône convexe divisible quelconque relatif au noyau G_L constitué par de noyaux de convolution symétriques par rapport à l'origine. Pour la première partie du théorème, il suffit de voir $C_R(G_L) = \tilde{C}_R(G_L)$. D'après une proposition générale obtenue dans [6] et le corollaire 4, on a $C_R(G_L) \supset \tilde{C}_R(G_L)$. Donc il suffit de montrer que $\tilde{C}_{R,b}(G_L)$ est dense dans $C_R(G_L)$ pour la topologie vague. Soit N un noyau de convolution $\neq 0$ sur $\boldsymbol{R}^n$ appartenant à $C_R(G_L)$. Pour $N \in \overline{\tilde{C}_{R,b}(G_L)}$, il suffit de supposer $\int dN < +\infty$, car la résolvante associée au noyau N est aussi contenue dans $C_R(G_L)$. D'après la remarque 3, on désigne par $(N_{\bar{p}})_{\bar{p} \in \bigcup_{m \geqq 1} (\boldsymbol{R}^m)^+}$ la classe divisible associée au noyau N relativement au noyau G_L. Soit δ un nombre > 0 quelconque donné. Alors il existe une suite croissante $(p_m)_{m=1}^\infty$ de nombres > 0 telles que, en posant

$$M_m^{(1)} = p_1 \cdots p_m N * N_{(0,p_1)} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_m)} ,$$

on ait

$$0 \leqq \hat{N}(x) - \widehat{M_m^{(1)}}(x) \leqq \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)\delta \quad \text{sur} \quad \overline{B_{1,0}}$$

et pour tous les entiers $k \geqq 1$ et $s \geqq 1$,

$$\sum_{j=1}^{s-1} \frac{c_j((p_i)_{i=k+1}^{k+s})}{p_{k+j} \cdots p_{k+s}} \leqq \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\delta .$$

Rappelons le lemme 5 et que, pour tout $\tilde{q} = (q_1, \cdots, q_m)$, $\widehat{pN_{(q_1,\cdots,q_m,p)}}$ converge uniformément vers 1 sur tout compact de $\boldsymbol{R}^n$; alors il est facile de voir, par récurrence, l'existence de cette suite. Posons

$$M_m = M_m^{(1)} + M_m^{(2)} ,$$

où

$$M_m^{(2)} = \sum_{j=1}^{m-1} c_j((p_i)_{i=1}^m) N_{(0,p_1,\cdots,p_j)} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_m)} .$$

D'après la manière d'obtenir la famille $(c_j((p_i)_{i=1}^m))_{j=1}^{m-1}$ dans la proposition 8, on a, pour tout $m \geqq 2$,

$$M_m \leqq \left(\sum_{j=1}^{m-2} \frac{c_j((p_i)_{i=2}^m) p_1^2}{p_{j+1} \cdots p_m} + p_1\right) G_L \leqq p_1\left(1 + p_1\left(1 - \frac{1}{2^{m-2}}\right)\delta\right) G_L$$

dans $\boldsymbol{R}^n$, et on a immédiatement

$$M_1 = p_1 N * N_{(0,p_1)} = p_1 G_L * (\varepsilon - p_1 N_{(0,p_1)}) \leqq p_1 G_L$$

dans $\boldsymbol{R}^n$. D'autre part, d'après la remarque 5, pour tout l'entier k avec $1 \leqq k \leqq m-1$,

$$\begin{aligned} L^k M_m = p_1^2 \cdots p_k^2 (p_{k+1} \cdots p_m N_{(0,p_1,\cdots,p_k)} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_m)} \\ + \sum_{j=1}^{m-k-1} c_j((p_i)_{i=k+1}^m) N_{(0,p_1,\cdots,p_{k+j})} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_m)}) \end{aligned}$$

en dehors de l'origine. De la même manière que pour le noyau de convolution M_m, on a, pour tout l'entier k avec $1 \leqq k \leqq m-2$,

$$L^k M_m \leqq p_1^2 \cdots p_k^2 p_{k+1}\left(1 + p_{k+1}\left(1 - \frac{1}{2^{m-k-2}}\right)\delta\right) G_L$$

et

$$L^{m-1} M_m \leqq p_1^2 \cdots p_{m-1}^2 p_m G_L$$

en dehors de l'origine. Ayant $\int dN < +\infty$, et $N - M_m^{(1)}$ et $M_m^{(1)} - M_{m+1}^{(1)}$ étant de type positif, on obtient que $(M_m^{(1)})_{m=1}^\infty$ converge vaguement vers un noyau de convolution $M_\delta^{(1)}$ sur $\boldsymbol{R}^n$ avec $m \to \infty$ et que

$$\lim_{m\to\infty} \widehat{M_m^{(1)}}(x) = \widehat{M_\delta^{(1)}}(x) \quad \text{sur} \quad \boldsymbol{R}^n .$$

D'autre part, on a

$$\int dM_m^{(2)} \leqq \sum_{j=1}^{m-1} \frac{c_j((p_i)_{i=1}^m)}{p_j \cdots p_m} < \delta .$$

Donc on peut supposer que $(M_m^{(2)})_{m=1}^\infty$ converge vaguement vers un noyau de convolution $M_\delta^{(2)}$ avec $m \to \infty$. Posons $\tilde{N}_\delta = M_\delta^{(1)} + M_\delta^{(2)}$; alors on a

$$0 \leqq \tilde{N}_\delta \leqq (1 + p_1\delta)p_1 G_L \quad \text{dans} \quad \boldsymbol{R}^n$$

et, pour tout l'entier $k \geqq 1$,

$$0 \leqq L^k \tilde{N}_\delta \leqq (1 + p_{k+1}\delta)p_1^2 \cdots p_k^2 p_{k+1} G_L$$

en dehors de l'origine. Il existe un noyau de convolution M'_δ sur $\boldsymbol{R}^n$ symétrique par rapport à l'origine avec $\int dM'_\delta \leqq 1$ tel que $M_\delta^{(1)} = N * M'_\delta$. D'après les inégalités

$$0 \leqq \hat{N}(x) - \widehat{M_\delta^{(1)}}(x) \leqq \delta \quad \text{sur} \quad \overline{B_{1,0}}$$

et $\int dN < +\infty$, on obtient que $M_\delta^{(1)}$ converge vaguement vers N avec $\delta \to 0$. Ayant $\int dM_\delta^{(2)} \leqq \delta$, on obtient que $\tilde{N}_\delta$ converge vaguement vers N avec $\delta \to 0$, d'où $\tilde{C}_{R,b}(G_L)$ est dense dans $C_R(G_L)$.

Montrons finalement que, pour une mesure positive ν sur $\boldsymbol{R}^+$, $\int G_{L,p} d\nu(p)$ définit un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ si et seulement si $\int_1^\infty \frac{1}{p} d\nu(p) < +\infty$. En effet, pour une fonction finie et continue $f \geqq 0$ dans $\boldsymbol{R}^n$ à support compact telle que $f(0) > 0$,

$$0 < \inf_{p \geqq 1} p \int f dG_{L,p} \leqq \sup_{p \geqq 1} p \int f dG_{L,p} \leqq \max_{x \in \boldsymbol{R}^n} f(x) ,$$

car $G_{L,p}$ est de type positif et $(pG_{L,p})_{p>0}$ converge vaguement vers ε avec $p \to \infty$. Donc on a l'équivalence

$$\iint f dG_{L,p} d\nu(p) < +\infty \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{1}{p} d\nu(p) < +\infty .$$

La démonstration est ainsi complète.

Remarque 6. Soient L et G_L les mêmes que ci-dessus. De la même manière que ci-dessus, on peut montrer que, pour tout le cône convexe divisible $C_R(G_L)$ relatif au noyau G_L et pour tout le noyau de convolution N sur $\boldsymbol{R}^n$ appartenant à $C_R(G_L)$, $N + \check{N}$ appartient à $C_R(G_L)$ et cela est de la forme

$$N + \check{N} = c\varepsilon + \int G_{L,p} d\nu(p) ,$$

où $c \in \boldsymbol{R}^+$ et $\nu \in M^+(\boldsymbol{R}^+)$ avec $\int_1^\infty \frac{1}{p} d\nu(p) < +\infty$.

On note ici $\check{N}$ le noyau de convolution symétrisant avec N par rapport à l'origine.

RÉFÉRENCES

[1] A. Beurling et J. Deny: Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., **45** (1959), p. 208–215.

[2] G. Choquet et J. Deny: Aspects linéaires de la théorie du potentiel, Noyaux de composition satisfaisant au principe du balayage sur tout ouvert, C. R. Acad. Sc. Paris, **250** (1960), p. 4260–4262.

[3] C. S. Herz: Analyse harmonique à plusieurs variables, Sém. Math. d'Orsay, 1965/66.

[4] M. Itô: Sur les principes divers du maximum et le type positif, Nagoya Math. J., **44** (1971), 133–164.

[5] ——: Sur la famille sous-ordonnée au noyau de convolution de Hunt II, Nagoya Math. J., **53** (1974), p. 115–126.

[6] ——: Une caractérisation du principe de domination pour les noyaux de convolution, Nagoya Math. J., à paraître.

[7] ——: Sur les cônes convexes de Riesz et les noyaux de convolution complètement sous-harmoniques, Nagoya Math. J., **55** (1974), p. 111–144.

[8] D. Widder: The Laplace transform, Princeton Univ. Press, Princeton, 1948.

Université de Nagoya