ANNEAU DE FRACTIONS D'UN J-ANNEAU

M. DJABALI

Introduction. Nous nous proposons d'étudier une question posée par L. Lesieur et R. Croisot **(12)**. Un G-anneau possède un anneau de fractions à gauche semi-simple qui est son enveloppe injective. Un J-anneau possède-t-il un anneau de fractions qui soit un sous-anneau de son enveloppe injective? Nous donnerons plusieurs exemples de J-anneaux qui ne possèdent pas d'anneau de fractions. Cependant nous donnerons une réponse positive dans un certain nombre de cas.

Faisant suite à un premier paragraphe consacré à un rappel de résultats connus, un deuxième paragraphe présentera des résultats généraux sur les J-anneaux dont le principal est l'existence d'un idéal nilpotent maximum appelé Radical. Dans un troisième paragraphe nous introduirons une condition appelée F.1 nécessaire pour qu'un J-anneau possède un anneau de fractions et nous montrerons qu'elle est suffisante pour certains types de J-anneaux et en particulier pour un J-anneau de dimension 2. Dans un quatrième paragraphe nous étudierons des J-anneaux qui généralisent d'une certaine manière les anneaux ètudiés par A. W. Goldie **(5)**. De tels anneaux vérifieront une condition appelée F.2. Parmi ces anneaux nous considérerons dans un dernier pargraphe ceux qui vérifient une condition appelée F.3 et nous montrerons qu'ils possèdent un anneau de fractions artinien.

1. Rappels. Dans ce paragraphe nous rappelons quelques définitions et propriétés qui sont exposées principalement dans **(5; 11; 12)**.

Soit A un anneau.

Définition 1.1. Un A-module M non nul est dit de dimension finie si on ne peut trouver une infinité de sous-modules non nuls de M dont la somme soit directe.

On a la propriété suivante (cf. A. W. Goldie **5**).

PROPRIÉTÉ 1.1. *Si M est un A-module de dimension finie, il existe un entier positif n tel que toute somme directe de sous-modules non nuls de M possède au plus n composantes.*

Définition 1.2. L'entier n est appelé dimension de M.

Définition 1.3. Un A-module est dit irréductible s'il est de dimension 1. Alors deux sous-modules non nuls ont une intersection non nulle.

Reçu le 26 août 1966.

https://doi.org/10.4153/CJM-1968-018-3 Published online by Cambridge University Press

PROPRIÉTÉ 1.2. *Pour que M soit de dimension n, il faut et il suffit qu'il existe une somme directe de n sous-modules irréductibles essentielle dans M* (**5**; **12**).

PROPRIÉTÉ 1.3. *Si M est de dimension finie, tout sous-module non nul M' de M est de dimension finie inférieure ou égale à celle de M. La dimension de M' est égale à celle de M si, et seulement si, M est extension essentielle de M'.*

PROPRIÉTÉ 1.4. *Pour que M soit de dimension finie égale à n, il faut et il suffit que son enveloppe injective soit somme directe de n sous-modules injectifs indécomposables.*

Nous allons maintenant définir un sous-module fermé de M.

Définition 1.5. Un sous-module N du A-module M est dit fermé dans M si N est la seule extension essentielle de N dans M.

En particulier, O et M peuvent être considérés comme fermés dans M.

PROPRIÉTÉ 1.5. *Supposons que le sous-module singulier $J(M)$ de M soit nul. Alors si N est un sous-module de M, il existe une extension essentielle maximum $\bar{N}$ de N dans M.*

De plus $\bar{N}$ est le plus petit sous-module fermé contenant N (cf. **11**).

Définition 1.5. On appele $\bar{N}$ la fermeture de N.

Supposons que $J(M) = 0$. Alors on a les trois propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 1.6. *Une intersection de sous-modules fermés de M est un sous-module fermé.*

PROPRIÉTÉ 1.7. *Si N est de dimension finie, $\bar{N}$ a même dimension que N.*

Cela découle de la propriété 1.3.

PROPRIÉTÉ 1.8. *Soit X un sous-module irréductible. Pour que $X \subset \bar{N}$, il faut et il suffit que $X \cap N \neq 0$.*

PROPRIÉTÉ 1.9. *Si N_1 et N_2 sont deux sous-modules fermés de dimension finie tels que $N_1 \subset N_2$, $N_1 = N_2$ si, et seulement si, N_1 et N_2 ont même dimension.*

PROPRIÉTÉ 1.10. *Pour que M soit de dimension finie, il faut et il suffit que les sous-modules fermés de M vérifient la condition maximale, ou la condition minimale.*

Plus précisément si M est de dimension n, toute suite croissante de sous-modules fermés non nuls a au plus n éléments distincts.

COROLLAIRE. *Tout module noethérien ou artinien est de dimension finie.*

2. Définition et propriétés générales d'un *J*-anneau. La notion de J-anneau a été introduite par L. Lesieur et R. Croisot (**8**).

Soit A un anneau. Nous ferons usage des conditions suivantes susceptibles d'être vérifiées par A :

(1l) A est de dimension finie comme A-module à gauche.

(2l) Les annulateurs à gauche des sous-ensembles de A vérifient la condition maximale.

(2'l) Les annulateurs à gauche des éléments de A vérifient la condition maximale.

(3l) Pour tout $x \in A$, $x \neq 0$, l'idéal à gauche $(0 \cdot . x)$, annulateur à gauche de x, n'est pas essentiel dans A.

(3'l) Pour tout $x \in A$, $(0 \cdot . x)$ est fermé comme A-module à gauche.[1]

Définition 2.1. On appelle J-anneau (anneau de Johnson) un anneau unitaire qui vérifie les conditions (1l) et (3l).

Définition 2.2. On appelle G-anneau (anneau de Goldie) un J-anneau semi-premier.

L. Lesieur et R. Croisot ont établi les propriétés suivantes, qui ont été établies également et independamment par Johnson et Wong et par Johnson.

PROPRIÉTÉ 2.1. *Dans un J-anneau, les trois affirmations suivantes sont équivalentes* **(10, 12)**:

(1) *b est un élément régulier,*

(2) *b n'est pas diviseur de 0 à droite* $(0 \cdot . b = 0)$,

(3) *l'idéal Ab est essentiel dans A.*

PROPRIÉTÉ 2.2. *Dans un J-anneau A de dimension n, pour tout $a \in A$, $a \neq 0$,* $\dim Aa + \dim(0 \cdot . a) = n$.

PROPRIÉTÉ 2.3. *Dans un J-anneau A, tout annulateur à gauche est un A-module à gauche fermé* **(7; 12)**.

En effet si S est un sous-ensemble de A $0 \cdot . S = \bigcap (0 \cdot . x)$, $\quad x \in S$, *et la condition* (3'l) *est vérifiée.*

COROLLAIRE 1. *Dans un J-anneau la condition* (2'l) *est vérifiée.*

Cela résulte de la propriété 1.10.

COROLLAIRE 2. *Dans un J-anneau A de dimension n, toute suite croissante d'annulateurs à gauche non nuls a au plus $n - 1$ éléments distincts.*

En effet tout annulateur à gauche non nul est de dimension au plus égale à $n - 1$: c'est un module fermé et il suffit d'appliquer la propriété 1.9.

THÉORÈME 2.1 (L. Lesieur et R. Croisot et Johnson **(8; 12)**. *L'enveloppe injective d'un J-anneau est un anneau semi-simple.*

Les J-anneaux seront donc des sous-anneaux d'anneaux semi-simples.

[1]Si (3l) est vérifiée, (3'l) l'est aussi. Les conditions sont équivalentes si A est unitaire.

En particulier un J-anneau de dimension 1 est un anneau de Öre : il a pour enveloppe injective son corps des fractions.

Nous allons maintenant donner d'autres résultats. *Dans la suite le terme idéal sans autre précision voudra dire idéal à gauche. Nous considérerons un idéal comme un module à gauche.*

PROPRIÉTÉ 2.4. *Dans un J-anneau de dimension n, tout demi-groupe multiplicatif nilpotent est de puissance n^e nulle.*

Soit S un demi-groupe multiplicatif nilpotent tel que $S^p \neq 0$, $S^{p+1} = 0$. Supposons $p \geqslant n$. On a $(0 \cdot .S) \subset (0 \cdot .S^2) \dots$. En appliquant le corollaire 2 de la propriété 2.3, on voit qu'il existe un entier i, $i \leqslant n-1$, tel que $0 \cdot .S^i = 0 \cdot .S^{i+1}$.

Or $S^{p+1} = S^{p-i} S^{i+1}$. Mais alors $S^{p-i} \subset (0 \cdot .S^{i+1})$ et donc $S^{p-i} \subset (0 \cdot .S^i)$. On voit que $S^p = 0$ et on arrive à une contradiction. Donc $p < n$.

THÉORÈME 2.2. *Dans un J-anneau, tout nil demigroupe multiplicatif est nilpotent.*

La condition (21) est vérifiée. Alors on sait que tout nil demi-groupe engendré par un nombre fini d'éléments est nilpotent (voir par exemple **6**, p. 129).

Soit S un nil demi-groupe. Si n est la dimension de A, considérons n éléments quelconques de S, $a_1, a_2, \dots, a_n$. Le demi-groupe engendré par les a_i est un nil demi-groupe : il est donc nilpotent et donc de puissance n^e nulle. On en déduit que le produit $a_1 a_2 \dots a_n$ est nul et donc que $S^n = 0$. En particulier tout nil idéal est nilpotent. C'est pourquoi nous pouvons utiliser la définition suivante.

Définition 2.3. On appelle radical d'un J-anneau l'idéal somme des idéaux nilpotents. C'est un idéal bilatère nilpotent.

Dans la suite[2] nous l'appellerons R.

PROPRIÉTÉ 2.5. *Soient I un idéal d'un J'anneau A et b un élément régulier. Alors Ib a même dimension que I.*

Ce résultat peut se déduire de résultats établis dans **(12)** qui montrent que l'enveloppe injective de Ib est isomorphe à celle de I. De façon plus élémentaire on établit facilement que si I et X sont deux idéaux de A, et si I est extension essentielle de X, Ib est extension essentielle de Xb. Alors si X est un idéal irréductible, il en est de même pour Xb. Enfin s'il existe dans I une somme directe de p idéaux irréductibles $X_1, X_2, \dots, X_p$, essentielle dans I, alors les idéaux $X_i b$ sont irréductibles, leur somme est directe et essentielle dans Ib. Le résultat se déduit de la propriété 1.2.

PROPRIÉTÉ 2.6. *Soient I un idéal d'un J-anneau A et b un élément régulier. Alors*

$$0 \cdot .bI = 0 \cdot .I.$$

[2]On peut remarquer que R est en général distinct du radical de Jacobson.

On a d'abord $bI \subset I$ *et donc* $(0\cdot .I) \subset (0\cdot .bI)$.

D'autre part si $\lambda \in (0\cdot .bI)$, $\lambda bI = 0$ *et donc* $\lambda b \in (0\cdot .I)$. *On peut écrire les inclusions*

$$(0\cdot .bI)b \subset (0\cdot .I) \subset (0\cdot .bI).$$

$(0\cdot .bI)b$ *a même dimension que* $(0\cdot .bI)$. *Donc* $(0\cdot .I)$ *et* $(0\cdot .bI)$ *ont même dimension* (prop. 1.3) *et comme ce sont des idéaux fermés on voit d'après la propriété* 1.9. *que* $0\cdot .I = 0\cdot .bI$.

PROPRIÉTÉ 2.7. *Si b est régulier*[3], $R\cdot .b = R$.

R est un idéal bilatère. Donc $R \subset (R\cdot .b)$.

Réciproquement supposons que $\lambda b \in R$. Alors $(A\lambda b)^n = 0$, ce qu'on peut écrire

$$(A\lambda b)^{n-2}(A\lambda b)\,.\,(A\lambda b) = 0.$$

Comme b est régulier, on voit que

$$(A\lambda b)^{n-2}(A\lambda b)(A\lambda) = 0 \quad \text{et donc} \quad (A\lambda b)^{n-2}A\lambda \subset (0\cdot .bA\lambda).$$

Mais d'après 2.6 :

$$0\cdot .bA\lambda = 0\cdot .A\lambda.$$

Donc $(A\lambda b)^{n-2}(A\lambda)^2 = 0$. On procède ainsi de proche en proche et on voit que $(A\lambda)^n = 0$ et donc que $\lambda \in R$.

PROPRIÉTÉ 2.8. *Si b est régulier*[4], $R\cdot .b = R$.

On a encore $R \subset (R.\cdot b)$.

Soit alors λ tel que $b.\lambda \in R$. On en déduit que $(Ab\lambda)^n = 0$ ou que $(Ab\lambda)^{n-1}(Ab\lambda) = 0$. Mais l'idéal $(Ab\lambda)^{n-1}Ab$ est contenu dans l'idéal $(Ab\lambda)^{n-1}A$ et ces idéaux ont même dimension (prop. 2.5). Donc $(Ab\lambda)^{n-1}A$ est extension essentielle de $(Ab\lambda)^{n-1}Ab$ (prop. 1.3). Mais $(0\cdot .\lambda)$ est un idéal fermé. Contenant $(Ab\lambda)^{n-1}Ab$, il contient toute extension essentielle de $(Ab)^{n-1}Ab$ (prop. 1.5). Donc

$$(Ab\lambda)^{n-1}A \subset (0\cdot .\lambda) \quad \text{et} \quad (Ab\lambda)^{n-1}A\lambda = 0.$$

En continuant ainsi de proche en proche on voit que $(A\lambda)^n = 0$ et donc que $\lambda \in R$. Soit ϕ l'homomorphisme canonique de A sur A/R. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.3. *Si*[5] *b est un élément régulier d'un J-anneau A*, $\phi(b)$ *est un élément régulier de* A/R.

Dans la suite nous utiliserons aussi les propriétés suivantes.

---

[3]Rappelons que $R\cdot .b = \{\lambda \in A, \lambda b \in R\}$.

[4]Rappelons que $R.\cdot b = \{\lambda \in A, b\lambda \in R\}$.

[5]Rappelons que si S est un sous-ensemble de A, $0.\cdot S = \{\lambda \in A, S\lambda = 0\}$. Si S est un idéal à droite, $0.\cdot S$ est un idéal bilatère.

PROPRIÉTÉ 2.9. *Soit R^p une puissance de R. Si X est un idéal tel que $X \cap R^p = 0$, alors $X \subset (0 \,.\, \cdot R^p)$. De plus si $X \subset R$, $X \subset (0 \,.\, \cdot R^{p-1})$.*

En effet $R^p X \subset X \cap R^p$ et si $X \subset R$, $R^{p-1}X \subset X \cap R^p$.

PROPRIÉTÉ 2.10. *Soit X un idéal irréductible tel que $X \cap R^p \neq 0$, $X \cap R^{p+1} = 0$ Alors*

$$X \cap R = X \cap (0 \,.\, \cdot R^p).$$

D'après la propriété précédente $X \cap R \subset (0 \,.\, \cdot R^p)$. Réciproquement soit $Y = X \cap (0 \,.\, \cdot R^p) . R^p Y = 0$. Comme $0 \cdot . Y$ est un idéal fermé, on peut écrire $\overline{R^p} Y = 0$. Mais d'après la propriété 1.8, $X \subset \overline{R^p}$. Donc $XY = 0$ et alors $Y^2 = 0$. On a bien $Y \subset R$.

3. Anneau de fractions d'un *J*-anneau. Rappelons le problème. Soit B l'ensemble des éléments réguliers de A. Il s'agit de plonger A dans un anneau $F(A)$ dont les éléments s'écrivent sous la forme $b^{-1}a$, où $b \in B$ et $a \in A$. Pour ceci, il faut et il suffit que pour tout couple b, a avec $b \in B$ et $a \in A$, il existe un couple b', a', avec $b' \in B$ et $a' \in A$ tel que $b'a = a'b$. En particulier pour tout couple d'éléments réguliers b_1 et b_2, il existe un couple d'éléments réguliers b'_1 et b'_2 tels que $b'_1 b_1 = b'_2 b_2$. C'est pourquoi nous sommes amenés à faire intervenir la condition suivante, nécessaire pour que A possède un anneau de fractions.

Définition 3.1. On dira qu'un anneau A vérifie la condition F.1 si pour tout couple d'éléments réguliers b_1 et b_2, l'idéal $Ab_1 \cap Ab_2$ contient un élément régulier.

Dans la suite nous appellerons $B(A)$ le sous-anneau de A engendré par les éléments réguliers. Il est immédiat que $B(A)$ est constitué par toutes les sommes d'un nombre fini d'éléments réguliers. En particulier $B(A)$ contient le radical car si $\beta \in R$, $1 - \beta$ est inversible et donc régulier.

PROPRIÉTÉ 3.1. *Si A vérifie la condition* F.1, *pour tout couple b, a, avec $b \in B$ et $a \in B(A)$ il existe $b' \in B$ tel que $b'a \in Ab$.*

Cela est vrai si a est lui-même régulier. Prenons comme hypothèse de récurrence que cela est vrai si a est somme de p éléments réguliers. Supposons que a soit somme de $p + 1$ éléments réguliers. On peut écrire $a = a'_1 + b_1$, avec $b_1 \in B$. Il existe donc $b'_1 \in B$ tel que $b'_1 a_1 \in Ab$ et alors on peut ècrire $b'_1 a = b'_1 a_1 + b'_1 b_1$. Mais $b'_1 b_1 \in B$ et donc il existe $b'_2 \in B$ tel que $b'_2(b'_1 b_1) \in Ab$. On voit alors que si on pose $b'_2 b'_1 = b'$, on a $b'a \in Ab$.

COROLLAIRE. *Si A vérifie la condition* F.1 *et s'il existe un élément régulier b_1 tel que $b_1 a$ ou ab_1 appartienne à $B(A)$, alors pour tout $b \in B$, il existe $b' \in B$ tel que $b'a \in Ab$.*

Si $b_1 a \in B(A)$, on sait qu'il existe $b'_1 \in B$ tel que $b'_1 (b_1 a) \in Ab$. On posera $b' = b'_1 b_1$. Si $ab_1 \in B(A)$, il existe $b' \in B$ tel que $b'(ab_1) \in A(bb_1)$ et

https://doi.org/10.4153/CJM-1968-018-3 Published online by Cambridge University Press

alors $b'a \in Ab$. Dans la suite nous appellerons U l'ensemble des éléments d'un J-anneau qui engendrent un idéal irréductible.

PROPRIÉTÉ 3.2. *Soit $u \in U$. Pour tout $a \in A$, si ua (si au) n'est pas nul, alors ua (alors au) appartient à U.*

Remarquons d'abord que pour qu'un élément appartienne à U, il faut et il suffit que son annulateur à gauche soit maximal. Cela résulte des propriétés 2.2 et 2.3 (voir aussi **5**). Or $0 \cdot . u \subset 0 \cdot . ua$. Si $ua \neq 0$, $0 \cdot . u = 0 \cdot . ua$ puisque $0 \cdot . u$ est maximal. Alors $ua \in U$. Maintenant si $au \neq 0$, $A(au) \subset Au$ et donc l'idéal $A(au)$ est irréductible.

PROPRIÉTÉ 3.3. *Si $U(A)$ est le sous-anneau de A engendré par les éléments de U, $U(A)$ est constitué par toutes les sommes d'un nombre fini d'éléments de U et c'est un idéal bilatère.*

PROPRIÉTÉ 3.4. *Soit $u \in U$. Alors, ou bien $1 - u$ est régulier, ou bien u est idempotent.*

Soit $\lambda \in A$ tel que $\lambda(1 - u) = 0$. Alors $\lambda \in Au$. Donc si $0 \cdot . (1 - u)$ n'est pas nul, $Au \cap 0 \cdot . (1 - u) \neq 0$. Mais comme $0 \cdot . (1 - u)$ est fermé, $Au \subset 0 \cdot . (1 - u)$ (prop. 1.8). Donc $u \in 0 \cdot . (1 - u)$ et u est bien idempotent.

PROPRIÉTÉ 3.5. *Supposons qu'un J-anneau A vérifie la condition* F.1. *Si $u \in U$, pour tout $b \in B$, il existe $b' \in B$ tel que $b'u \in Ab$.*

Cela est vrai si u n'est pas idempotent car d'après ce qui précède $u \in B(A)$ Cela est encore vrai s'il existe un élément régulier b_1 tel que $b_1 u$ ou ub_1 ne soit pas idempotent car $b_1 u$ et ub_1 appartiennent à U (prop. 3.2) et on appliquera alors le corollaire de la propriété 3.1. Supposons donc que le produit de u par tout élément régulier soit un élément idempotent. Soit $b \in B$. Nous allons montrer que $b_1 = 1 - ub + bu$ est régulier. Montrons d'abord que $A(1 - ub) \cap Abu = 0$. En effet si $\lambda(1 - ub) = \mu bu$, on peut écrire en multipliant à droite par u

$$\lambda(u - ubu) = \mu bu^2.$$

Mais par hypothèse $u^2 = u$ et $ubub = ub$, donc $ubu = u$. On voit que

$$\mu bu = \lambda(1 - ub) = 0.$$

D'autre part $0 \cdot . b_1 = [0 \cdot . (1 - ub)] \cap (0 \cdot . bu)$. En effet si $\lambda b_1 = 0$, $\lambda(1 - ub) + \lambda bu = 0$ et on vient de voir que

$$\lambda(1 - ub) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda bu = 0.$$

On en déduit que $\lambda bu = \lambda ub^2 u = 0$. Or d'après notre hypothèse ub^2 est idempotent. Alors $ub^2 ub^2 = ub^2$, c'est-à-dire que $ub^2 u = u$, On en déduit que $\lambda u = 0$, donc que $\lambda = 0$. Comme $0 \cdot . b_1 = 0$, b_1 est régulier (prop. 2.1). Mais si b_1 est régulier, $bu - ub \in B(A)$. Alors il existe $b'_1 \in B$ tel que

$$b'_1(bu - ub) \in Ab$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1968-018-3 Published online by Cambridge University Press

(prop. 3.1). Donc si on pose $b' = b'_1 b$,

$$b'u \in Ab.$$

Propriété 3.6. *Si un J-anneau A vérifie la condition* F.1. *pour tout* $a \in U(A)$ *et tout* $b \in B$, *il existe* $b' \in B$ *tel que* $b'a \in Ab$.

Corollaire. *S'il existe* $b_1 \in B$ *tel que* $b_1 a$ *ou* ab_1 *appartienne à* $U(A)$, *alors pour tout* $b \in B$. *il existe* $b' \in B$ *tel que* $b'a \in Ab$.

La démonstration est analogue à celle effectuée pour $B(A)$.

Théorème 3.1. *Pour qu'un J-anneau de dimension* 2 *possède un anneau de fractions, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition* F.1.

En effet soit $a \in A$, $a \neq 0$. L'idéal Aa est, soit de dimension 2, soit de dimension 1. Dans le premier cas a est régulier (prop. 2.1) et dans le second a appartient à U. Nous ne sommes pas en mesure de dire si la condition F.1 est suffisante pour un J-anneau quelconque. Cependant voici deux cas particuliers où elle l'est.

Théorème 3.2. *Soit A un J-anneau dans lequel* $U(A)$ *contient un élément régulier. Alors A possède un anneau de fractions si, et seulement si, la condition* F.1 *est vérifiée.*

Il existe $b_1 \in B$ tel que $b_1 \in U(A)$. Comme $U(A)$ est un idéal bilatère, pour tout $a \in A$, $b_1 a \in U(A)$ et le théorème découle du corollaire de la propriété 3.6.

Théorème 3.3. *Soit A un J-anneau de dimension n, Si pour tout entier* p, $0 < p \leqslant n$, $p.1$ *est un élément régulier, A possède un anneau de fractions si, et seulement si, la condition* F.1 *est vérifiée.*

Nous allons en effet montrer que $A = B(A)$. Soit $a \in A$. Posons

$$l_p(a) = 0 \cdot .[a + p.1], \qquad 0 \leqslant p \leqslant n.$$

On a $l_0(a) \cap l_1(a) = 0$ car si $\lambda a = 0$ et $\lambda(a+1) = 0$, λ doit être nul. Supposons que la somme $\sum_{p-1}$ des idéaux $l_0(a), l_1(a), \ldots, l_{p-1}(a)$ soit directe. Nous allons montrer que $\sum_p = l_0(a) + \ldots + l_p(a)$ est encore une somme directe.

En effet soit $\mu \in l_p(a) \cap \sum_{p+1}$. On pourra écrire

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_{p-1} \quad \text{avec} \quad \mu_i \in l_i(a)$$

et on devra avoir $\mu(a + \mathrm{p}.1) = 0$. On en déduit que

$$p\mu_0 + (p-1)\mu_1 + \ldots + \mu_{p-1} = 0.$$

$\sum_{p-1}$ étant une somme directe on doit avoir

$$p\mu_0 = 0, \quad (p-1)\mu_1 = 0, \ldots, \mu_{p-1} = 0.$$

Mais par hypothèse $1, 2.1, \ldots, p.1$ sont des éléments réguliers. Donc

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = 0, \quad \ldots, \quad \mu_{p-1} = 0.$$

Alors $\mu = 0$. On voit donc par récurrence sur p que la somme des $(n + 1)$ idéaux $l_p(a)$, $0 \leqslant p \leqslant n$ est directe. Comme A est de dimension n, l'un des idéaux $l_p(a)$ doit être nul, c'est-à-dire que l'un des éléments $a + \mathrm{p}.1$ est régulier. On voit bien que $a \in B(A)$.

Les hypothèses[6] du théorème sont par exemple vérifiées si A est un sous-anneau de l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans un corps de caractéristique nulle ou supérieure à n. Nous avons besoin dans la suite d'un certain nombre de résultats dont la démonstration n'offre aucune difficulté (voir exemple **11**).

PROPRIÉTÉ 3.7. *Soit A un J-anneau qui possède un anneau de fractions $F(A)$.*

(1) *Si X est un idéal de A, l'idéal engendré par X dans $F(A)$ est $F(X) = F(A).X$ et tout élément de $F(X)$ s'écrit sous la forme $b^{-1}x$, avec $b \in B$ et $x \in X$.*

(2) *Si X et Y sont deux idéaux de A tels que $X \cap Y = 0$, alors*

$$F(X) \cap F(Y) = 0.$$

(3) *$F(X)$ est un A-module à gauche extension essentielle de X. Comme A-module et comme $F(A)$-module, il a même dimension que X. En particulier $F(A)$ peut-être considéré comme un sous-anneau de l'enveloppe injective de A.*

(4) *Si Y est un idéal de $F(A)$, $X = Y \cap A$ est un idéal de A et l'on a*

$$Y = F(A).X.$$

THÉORÈME 3.4 (Talintyre). *Soit A un J-anneau qui possède un anneau de fractions $F(A)$. Si R est le radical de A, $F(A)$ possède un idéal nilpotent maximum $F(R)$ tel que*

$$F(R) = R.F(A) = F(A).R$$

et

$$R = F(R) \cap A.$$

De plus pour tout entier p: $[F(R)]^p = F(A).R^p$.

Il suffit de reprendre la démonstration effectuée dans **(14)** où l'on n'étudie pas le même type d'anneau mais où les hypothèses utilisées sont d'une part

[6]Par contre si ces hypothèses ne sont pas vérifiées on peut avoir $A \neq B(A)$. Considérons par exemple le corps K ayant deux éléments 0 et 1. Posons alors $A = K \times K$. A est un J-anneau de dimension 2. Le seul élément régulier est l'unité $(1, 1)$. L'anneau $B(A)$ a deux éléments $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Il est distinct de A.

l'existence dans un anneau A d'un idéal nilpotent maximum et d'autre part le fait que si b est régulier dans A, $\lambda b \in R \Leftrightarrow \lambda \in R$ (voir notre propriété 2.7).

COROLLAIRE. *A/R est isomorphe à un sous-anneau de $F(A)/F(R)$.*

Appelons Φ l'application canonique de $F(A)$ sur $F(A)/F(R)$. La restriction de Φ à A est un homomorphisme dont le noyau est $F(R) \cap A = R$. Dans la suite pour tout $a \in A$, nous identifierons l'élément $\phi(a)$ de A/R avec l'élément $\Phi(a)$ de $F(A)/F(R)$.

4. Anneau de fractions d'un *J*-anneau qui vérifie la condition F.2. Dans ce paragraphe nous nous proposons d'étudier les J-anneaux qui généralisent d'une certaine manière les anneaux étudiés par A. W. Goldie **(5)**.

Définition 4.1. On dit qu'un J-anneau vérifie la condition F.2 s'il existe une somme directe d'idéaux irréductibles qui contient un élément régulier.

Si (X_i), $1 \leqslant i \leqslant n$ est la famille de ces idéaux il existe $b_0 \in B$ tel que

$$b_0 = \sum_1^n u_i, \qquad u_i \in X_i.$$

Remarquons que $b_0 \in U(A)$. En appliquant le théoréme 3.2 nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 4.1. *Un J-anneau qui vérifie la condition* F.2 *a un anneau de fraction si et seulement s'il vérifie la condition* F.1.

Les résultats obtenus par A. W. Goldie reposent essentiellement sur deux propriétés que nous allons énoncer sous une forme un peu plus générale que dans **(5)**.

PROPRIÉTÉ 4.1. *Soit A un J-anneau dont le radical ne contient aucun idéal non nul fermé. Alors A vérifie la condition* F.2.

Il suffit de reprendre la démonstration de **(5)** en considérant à chaque fois des idéaux irréductibles fermés. Remarquons qu'alors A est un anneau potent au sens de R. E. Johnson **(9)**.

COROLLAIRE 1. *Un G-anneau vérifie la condition* F.2.

COROLLAIRE 2. *Un J-anneau de dimension* 2 *vérifie la condition* F2, *si, et seulement si, non radical est, ou bien nul, ou bien non nul et en même temps non fermé.*

La démonstration[7] n'offre aucune difficulté.

PROPRIÉTÉ 4.2. *Supposons que dans un J-anneau A la somme des idéaux* X_i *soit directe et contienne un élément régulier. Si* Y *est un idéal tel que pour tout* i, $Y \cap X_i \not\subset R$ *alors* Y *contient un élément régulier.*

Il suffit de reprendre la démonstration de **(5)**.

THÉORÈME 4.2 (Goldie). *Pour qu'un anneau possède un anneau de fractions semi-simple, il faut et il suffit que ce soit un anneau semi-premier qui vérifie les conditions* (1.1) *et* (2'1).

COROLLAIRE. *Pour qu'un anneau unitaire possède un anneau de fractions semi-simple, il faut et il suffit que ce soit un G-anneau.*

PROPRIÉTÉ 4.3. *Supposons que la somme des idéaux irréductibles* X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ *soit directe et contienne un élément régulier. Alors aucun des* X_i *n'est contenu dans* R. *De plus pour tout entier* p *tel que* $R^p \neq 0$, *le nombre des* X_i *tels que* $X_i \cap R^p \neq 0$ *est égal à la dimension de* R^p.

Nous appellerons n_p la dimension de R^p. Nous supposerons que pour $1 \leqslant i \leqslant m_p, X_i \cap R^p \neq 0$. Nous allons montrer que $m_p = n_p$. Pour $1 \leqslant i \leqslant m_p$,

---

[7]On peut remarquer que pour un J-anneau de dimension supérieure à 2, la condition F.2 peut être vérifiée même si le radical contient des idéaux fermés non nuls. Soit par exemple A l'anneau des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} p(x, y] & q[x, y] & r[x, y] \\ 0 & s[x] & t[x, y] \\ 0 & 0 & u[x, y] \end{bmatrix}$$

où $s \in K[x]$ et p, q, r, t et u appartiennent à $K[x, y]$, K étant un corps commutatif. On voit que A est somme directe des trois idéaux

$$I_1 = \left\{\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}, \quad I_2 = \left\{\begin{bmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}, \quad I_3 = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}\right\}$$

et que I_1, I_2 et I_3 sont irréductibles. R est l'ensemble des matrices pour lesquelles les coefficients p, s et u sont nuls. On voit que l'idéal engendré par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est fermé. Remarquons que nous avons précisément là un exemple de J-anneau qui n'a pas d'anneau de fractions. Il suffit de considérer

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b est régulier. Il n'existe aucun élément régulier b' tel que $b'a \in Ab$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1968-018-3 Published online by Cambridge University Press

$X_i \subset R^p$ (prop. 1.8). De plus pour $m_p < i$, $R^p X_i = 0$ (prop. 2.9). Par hypothèse il existe $b_0 \in B$ tel que

$$b_0 = \sum_1^n u_i, \qquad u_i \in X_i.$$

Or

$$R^p b_0 \subset \sum_1^{m_p} R^p u_i \subset \sum_1^{m_p} X_i.$$

L'idéal $\sum_1^{m_p} X_i$ est de dimension m_p (prop. 1.2). Donc $\dim(R^p b_0) \leqslant m_p$ (prop. 1.3). Mais $\dim(R^p b_0) = \dim R^p$ (prop. 2.5) et on en déduit que $n_p \leqslant m_p$. D'autre part

$$\sum_1^{m_p} X_i \subset \overline{\overline{R^p}}$$

et donc $m_p \leqslant \dim(\overline{R^p})$. Mais on sait que $\dim \overline{R^p} = \dim R^p$ (prop. 1.7). D'où $m_p \leqslant n_p$. On a bien $m_p = n_p$. Supposons maintenant qu'il existe i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$, tel que $X_{i_0} \subset R$. Alors il existe un entier p tel que $R^p \cap X_{i_0} \neq 0$,

$$R^{p+1} \cap X_{i_0} = 0.$$

On voit que $1 \leqslant i_0 \leqslant n_p$. On sait d'autre part que $R^p X_{i_0} = 0$ (prop. 2.10). Alors

$$R^p b_0 \subset \sum_{i=1}^{n_p} X_i \quad \text{avec} \quad i \neq i_0.$$

Cela est incompatible avec le fait que $R^p b_0$ est de dimension exactement égale à n_p.

Corollaire. *R^p a une intersection nulle avec l'idéal $Y = \sum_i X_i$, $n_p < i \leqslant n$.*

Posons $Z = \sum X_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. On a vu que Z avait même dimension que R^p. Or Z est contenu dans R^p : c'est donc un idéal essentiel dans R^p. Si on avait $Y \cap R^p \neq 0$, on devrait avoir $Y \cap Z \neq 0$, ce qui est impossible, car la somme des idéaux X_i est directe.

Propriété 4.4. *Soit $\phi(X)$ un idéal essentiel dans A/R. Si la condition* F.2 *est vérifiée, il existe un élément régulier b tel que $\phi(b) \in \phi(X)$.*

Si la somme des idéaux X_i est directe et contient un élément régulier, on vient de voir que $\phi(X_i) \neq 0$ pour tout i. Donc $\phi(X) \cap \phi(X_i) \neq 0$, c'est-à-dire que $X \cap X_i \not\subset R$. Le résultat découle de la propriété 4.2.

Corollaire. *A/R vérifie la condition* (3.1) *lorsque A vérifie la condition* F.2. *En effet, un annulateur à gauche essentiel dans A/R devrait contenir un élément de la forme $\phi(b)$, avec $b \in B$. Mais ceci est impossible car $\phi(b)$ est régulier* (Th. 2.3).

Propriété 4.5. *Si un J-anneau A vérifie les conditions* F.1 *et* F.2, *A/R est de dimension finie égale à celle de A.*

Avec les mêmes notations que précédemment nous allons montrer successivement que les idéaux $\phi(X_i)$ sont irréductibles, que leur somme est directe et nous en déduirons le résultat. Considérons deux éléments non nuls de $\phi(X_i)$ que nous écrirons $\phi(u)$ et $\phi(u')$, avec u et u' appartenant à X_i et n'appartenant pas à R. Posons

$$X = Au + \textstyle\sum_j X_j \quad \text{et} \quad X' = Au' + \sum_j X_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad j \neq i.$$

La propriété 4.2 nous montre qu'il existe deux éléments réguliers b et b' appartenant respectivement à X et X'. On peut écrire

$$b = \lambda u + \textstyle\sum_j u_j, \quad b' = \lambda' u' + \sum_j u_j'$$

avec u_j et u'_j appartenant à X_j pour $j \neq i$. Mais la condition F.1 étant satisfaite, il existe deux éléments réguliers b_1 et b'_1 tels que $b_1 b = b'_1 b'$. On peut écrire, la somme des idéaux X_i étant directe, $b_1 u_j = b'_1 u'_j$ pour $j \neq i$ et $b_1 \lambda u = b'_1 \lambda' u'$.

D'autre part, d'après la propr été 4.3, λu et $\lambda' u'$ n'appartiennent pas à R. D'après la propriété 2.8 il en est de même pour $b_1 \lambda u$. On voit bien alors que $\phi(Au) \cap \phi(Au') \neq 0$. L'idéal $\phi(X_i)$ est irréductible. Montrons maintenant que la somme des idéaux $\phi(X_i)$ est directe. Supposons que

$$\textstyle\sum \phi(u_i) = 0, \qquad u_i \in X_i.$$

On a donc

$$\textstyle\sum u_i = \beta, \qquad \beta \in R.$$

Reprenons les mêmes notations que dans la démonstration de 4.3. Soit i_0 un indice quelconque compris entre 1 et n.

Si $Au_{i_0} \cap R = 0$, le corollaire de la propriété 4.3 montre que $u_{i_0} = 0$. Maintenant si $Au_{i_0} \cap R \neq 0$, il existe un entier p tel que $Au_{i_0} \cap R^p \neq 0$, $Au_{i_0} \cap R^{p+1} = 0$. Alors $n_{p+1} < i_0 \leqslant n_p$. Or $R^p\beta \subset R^{p+1}$ et on peut écrire

$$R^p\beta \subset \textstyle\sum_j R^p u_j + \sum_i R^p u_i \qquad \text{avec} \quad 1 \leqslant j \leqslant n_{p+1} \quad \text{et} \quad n_{p+1} < i \leqslant n.$$

En appliquant le corollaire de (4.3) on voit que $\sum_i R^p u_i = 0$. En particulier $R^p u_{i_0} = 0$. En appliquant cette fois-ci la propriété 2.10 on voit que $u_{i_0} \in R$ et donc $\phi(u_{i_0}) = 0$. Nous pouvons dire que l'idéal $\sum \phi(X_i)$ est de dimension n. Maintenant soit $\phi(I\alpha)$ une famille d'idéaux de A/R dont la somme est directe. Par hypothèse il existe un élément régulier b_0 qui appartient à $\sum X_i$. Alors on voit que les idéaux $\phi(I\alpha)\phi(b_0)$ sont contenus dans $\sum \phi(X_i)$ et que leur somme est directe. Il en existe donc au plus n qui ne sont pas nuls et comme $\phi(I\alpha)\phi(b_0)$ n'est nul que si $\phi(I\alpha)$ est nul, on voit que la famille des $\phi(I\alpha)$ a au plus n éléments non nulls. Donc A/R est de dimension finie au plus égale à n et comme il contient l'idéal $\sum \phi(X_i)$ qui est de dimension égale à n, on en déduit que A/R est de dimension égale à n.

THÉORÈME 4.3. *Si un J-anneau A vérifie les conditions* F.1 *et* F.2, *A/R est un G-anneau.*

https://doi.org/10.4153/CJM-1968-018-3 Published online by Cambridge University Press

En effet A/R est semi-premier, il vérifie la condition (3.1) et il est de dimension finie.[8]

PROPRIÉTÉ 4.6. *Soit A un J-anneau qui vérifie les conditions* F.1 *et* F.2. *Un élément de A/R est régulier si et seulement s'il est de la forme $\phi(b)$, avec $b \in B$.*

Soit $\phi(r)$ un élément régulier de A/R. Alors l'idéal $(A/R)\phi(r)$ est essentiel dans A/R (prop. 2.1), donc il contient un élément de la forme $\phi(b)$, avec $b \in B$ (prop. 4.4). On peut écrire

$$b = r'r + \beta, \qquad \text{avec} \quad \beta \in R.$$

Montrons d'abord que r' est régulier dans A. En effet si $\lambda r' = 0$, on voit que $\lambda b = \lambda\beta$, ce qu'on peut écrire dans $F(A)$: $\lambda = \lambda(\beta b^{-1})$.

Mais βb^{-1} appartient à $F(R)$ (th. 3.4). Il est donc nilpotent et on en déduit que $\lambda = 0$. Donc $0 \cdot .r' = 0$ et r' est régulier dans A. Alors r' est inversible dans $F(A)$ et on peut écrire : $r'^{-1}b = r + r'^{-1}\beta$. Montrons que $0 \cdot .r = 0$. En effet, si $\lambda r = 0$, $\lambda r'^{-1} = \lambda r'^{-1}\beta$, soit :

$$\lambda = \lambda(r'^{-1}\beta b^{-4}r').$$

On a encore $r'^{-1}\beta b^{-1}r' \in F(R)$ et pour les mêmes raisons $\lambda = 0$.

Quant à la réciproque[9] elle se déduit du théoréme 2.3.

---

[8]Remarquons que nous pouvons en déduire une nouvelle démonstration du fait que A possède un anneau de fractions. En effet, soient $b \in B$ et $a \in A$. Si $a \in R$, on a vu que $a \in B(A)$ et on applique la propriété 3.1. Supposons que $a \notin R$. Comme A/R est un G-anneau et que $\phi(b)$ est régulier dans A/R on sait que l'idéal $[(A/R)\phi(b) \cdot .\phi(a)]$ est essentiel dans A/R (voir exemple **5**). Donc d'après la propriété 4.4 il existe $b'_1 \in B$ tel que

$$\phi(b'_1) \in [(A/R)\phi(b) \cdot .\phi(a)].$$

On peut écrire

$$b'_1 a = a'_1 b + \beta, \qquad \beta \in R.$$

Mais alors il existe $b'_2 \in B$ tel que $b'_2 \beta \in Ab$. Donc si on pose $b' = b'_2 b'_1$ on voit que $b'_a a \in Ab$ et $b' \in B$.

[9]Remarquons que si la condition F.2 n'est pas vérifiée, la propriété 4.7 n'est plus vraie, que A possède un anneau de fractions ou non. Par exemple pour un J-anneau de dimension 2, dont le radical est fermé et non nul, A/R est un anneau sans diviseurs de 0. Donnons deux exemples :

Premier exemple : A est l'anneau des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} p[x] & q[x] \\ 0 & p[0] \end{bmatrix}$$

où p et q appartiennent à $K[x]$, K étant un corps commutatif. C'est un J-anneau de dimension 2. R est l'ensemble des matrices dont le coefficient p est nul. Il est fermé. Le quotient A/R est un anneau d'intégrité. On voit facilement que A a un anneau de fractions.

Deuxième exemple : A est l'anneau des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} p[x, y] & q[x, y] \\ 0 & p[y, 0] \end{bmatrix}$$

où p et q apparteinnent à $K[x, y]$, K étant un corps commutatif. Cet anneau n'a pas d'anneau de fractions. Il suffit de considérer

$$b = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propriété 4.7. *Si un J-anneau A vérifie les conditions* F.1 *et* F.2, A/R *possède un anneau de fractions isomorphe à* $F(A)/F(R)$.

En considérant A/R comme plongé dans $F(A)/F(R)$ (corollaire du théorème 3.4) on voit que tout élément de $F(A)/F(R)$ s'écrit sous la forme $[\Phi(b)]^{-1}\Phi(a)$, où $\Phi(b)$ est régulier dans A/R. Réciproquement tout élément régulier de A/R est de la forme $\Phi(b)$, où b appartient à B : il est donc inversible dans $F(A)/F(R)$.

Corollaire. $F(A)/F(R)$ *est un anneau semi-simple.*

Cela découle du théorème 4.2.

Propriété 48. *Soit A un J-anneau dont le radical est de carré nul. Si A vérifie les conditions* F.1 *et* F.2, *il possède un anneau de fractions artinien.*

Il suffit de montrer que $F(A)$ contient une suite de Jordan–Hölder. Nous savons déjà que $F(A)/F(R)$ est un anneau semi-simple. De plus $[F(R)]^2 = 0$ (th. 3.4). Donc $F(R)$ est un $F(A)/F(R)$ module à gauche. C'est un $F(A)/F(R)$ module semi-simple et donc aussi un $F(A)$-module semi-simple. On voit que $F(R)$ est somme directe d'idéaux minimaux. Mais de plus $F(R)$ est de dimension finie car $F(A)$ est de dimension finie (prop. 3.7). Donc $F(R)$ est somme directe d'un nombre fini d'idéaux minimaux et il contient une suite de Jordan–Hölder.

5. Anneau de fractions d'un *J*-anneau qui vérifie les conditions F.2 **et** F.3. Il est difficile de verifier dans la pratique si la condition F.1 est vérifiée. C'est pourquoi nous allons démontrer directement l'existence d'un anneau de fractions dans le cas où la condition F.2 et une nouvelle condition F.3 sont vérifiées. Dans la suite nous appellerons A_p l'anneau $A/(0 . \cdot R^p)$ et ψ_p l'application canonique de A sur A_p. On a évidemment

$$0 . \cdot R \subset 0 . \cdot R^2 \subset \ldots$$

et à partir d'un certain entier s, $R^s = 0$, $R^{s+1} = 0, \ldots$ et

$$A_s = A_{s+1} = \ldots = 0.$$

Définition 5.1. On dira qu'un J-anneau A vérifie la condition F.3 si pour tout entier p, l'anneau A_p est, lorsqu'il n'est pas nul, de dimension finie.

Propriété 5.1. *Un J-anneau noethérien vérifie la condition* F.3.

En effet A_p est un anneau noethérien.

La suite de notre étude reposera sur la propriété suivante :

Propriété 5.2. *Soit A un J-anneau qui vérifie la condition* F.2. *Soit* $a \in A$ *tel que* $a \in (0 . \cdot R^{p+1})$. *Si* Y *est un idéal de* A *tel que* $[\psi_p(Y) \cdot . \psi_p(a)]$ *soit un idéal essentiel dans* A_p, *alors il existe un élément régulier* b *de* A *tel que*

$$\psi_p(b) \in [\psi_p(Y) \cdot . \psi_p(a)].$$

Précisons les hypothèses : a est annulé par R^{p+1}. Si a est annulé par R, c'est alors l'anneau A lui-même qui jouera le rôle de A_p et notre hypothèse sera que $Y\cdot .a$ est essentiel dans A et notre conclusion que $b \in Y\cdot .a$. La condition F.2 étant vérifiée, il existe une somme directe d'idéaux irréductibles X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ qui contient un élément régulier Supposons $R^{p+1} \neq 0$ et $p \neq 0$. Nous écrirons encore, pour $1 \leqslant i \leqslant n_{p+1}$ $X_i \cap R^{p+1} \neq 0$, pour $n_{p+1} < i \leqslant n_p$ $X_i \cap R^{p+1} = 0$ et $X_i \cap R^p \neq 0$ et enfin pour $n_p < i$, $X_i \cap R^p = 0$. Si $R^{p+1}a = 0$, $\overline{R^{p+1}}.a = 0$. Donc pour $1 \leqslant i \leqslant n_{p+1}$ $X_i\, a = 0$ et donc $X_i\, a \subset Y$ (voir les propriétés 2.3 et 1.8). Pour $n_p < i$, $X_i \subset (0.\cdot R^p)$ et donc $X_i\, a \subset (0.\cdot R^p)$. Soit alors i_0 l'indice tel que $n_{p+1} < i_0 \leqslant n_p$. On sait que $X_{i_0} \not\subset (0.\cdot R^p)$ et donc $\psi_p(X_{i_0}) \neq 0$. C'est-à-dire que

$$\psi_p(X_{i_0}) \cap [\psi_p(Y)\cdot .\psi_p(a)] \neq 0.$$

Donc il existe un idéal Z_{i_0} contenu dans X_{i_0} et tel que

$$Z_{i_0} \subset Y + (0.\cdot R^p) \quad \text{et} \quad Z_{i_0} \not\subset (0.\cdot R^p).$$

Mais alors $Z_{i_0} \not\subset R$ (prop. 2.10). Posons alors

$$Z = \textstyle\sum_j X_j + \sum_i Y_i + \sum_k X_k, \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant j \leqslant n_{p+1}, \quad n_{p+1} < i \leqslant n_p, \quad n_p < k.$$

D'après la propriété (4.10) Z continent un élément régulier b et l'on a bien $ba \in Y_p + (0.\cdot R^p)$ ou $\psi_p(b)\psi_p(a) \in \psi_p(Y)$. Maintenant si $R^{p+1} = 0$, on n'aura que deux groupes d'indices à considérer : pour $1 \leqslant i \leqslant n_p$, $X_i \cap R^p \neq 0$ et pour $n_p < i$, $X_i \cap R^p = 0$.

PROPRIÉTÉ 5.3. *Si b est régulier dans A, $\psi_p(b)$ est régulier dans A_p.*

En effet si $\psi_p(\lambda)\psi_p(b) = 0$, $\lambda b \in (0.\cdot R^p)$, d'où $R^p\lambda b = 0$. Comme b est régulier, $R^p\lambda = 0$ d'où $\lambda \in (0.\cdot R^p)$ et $\psi_p(\lambda) = 0$. Maintenant si $\psi_p(b)\psi_p(\lambda) = 0$, $R^p b\lambda = 0$. Un raisonnement déjà effectué montre que, $R^p b$ étant essentiel dans R^p, $R^p\lambda = 0$.

THÉORÈME 5.1. *Un J-anneau qui vérifie les conditions* F.2 *et* F.3 *possède un anneau de fractions artinien.*

Soit $b \in B$ et soit $a \in A$. Il existe un entier p tel que $a \in (0.\cdot R^{p+1})$. Considérons alors l'anneau A_p (A si $a \in 0.\cdot R$). $\psi_p(b)$ est régulier dans A_p. Comme par hypothèse A_p est de dimension finie l'idéal $A_p\, \psi_p(b)$ est essentiel dans A_p et alors il en est de même pour l'idéal $[A_p\, \psi_p(b)\cdot .\psi_p(a)]$ (voir par exemple **(11)**). Donc d'après la propriété 5.2 il existe un élément régulier b'_1 de A tel que

$$b'_1\, a \in Ab + 0.\cdot R^p.$$

En particulier si $a \in 0.\cdot R$ l'inclusion se réduit à

$$b'_1\, a \in Ab.$$

Raisonnons par récurrence sur p. Supposons que pour tout élément a_1 de $0 . \cdot R^p$ il existe un élément régulier b''_1 tel que $b''_1 a_1 \in Ab$. Supposons que a appartienne à $0 . \cdot R^p$. D'après ce qu'on vient de voir il existe $b'_1 \in B$ tel que l'on puisse écrire l'égalité :

$$b'_1 a = a'_1 b + a_1 \qquad \text{avec} \quad a_1 \in 0 . \cdot R^p.$$

Mais il existe $b''_1 \in B$ tel que $b''_1 a_1 \in Ab$. Posons $b' = b''_1 b'_1$. On voit que

$$b'a \in Ab.$$

On voit bien que pour tout $a \in A$, il existe $b' \in B$ tel que $b'a \in Ab$. Il existe bien un anneau de fractions $F(A)$. Montrons maintenant que $F(A)$ est artinien. Soit Z_K une suite décroissante d'idéaux de $F(A)$. Posons $Y_K = Z_K \cap A$. On a vu que $Z_K = F(A) Y_K$. Il existe un entier p tel que pour tout K, $Y_K \subset (0 . \cdot R^{p+1})$. Dans l'anneau A_p (A si $Y_K \subset 0 . \cdot R$) les idéaux $\psi_p(Y_K)$ forment une suite décroissante. Comme A_p est de dimension finie, les dimensions des $\psi_p(Y_K)$ forment une suite décroissante d'entiers et alors il existe un entier K_0 tel que pour $K \geqslant K_0$

$$\dim \psi_p(Y_K) = \dim \psi_p(Y_{K+1}).$$

Mais alors pour $K \geqslant K_0$, $\psi_p(Y_K)$ est extension essentielle de $\psi_p(Y_{K+1})$ (prop. 1.3) et on voit facilement que cela revient à dire que pour tout élément $\psi_p(a)$ de $\psi_p(Y_K)$, l'idéal $|\psi_p(Y_{K+1}) \cdot . \psi_p(a)|$ est essentiel dans A_p. Alors la propriété 5.2 s'applique et on voit qu'il existe $b_1 B$ tel que

$$b_1 a \in Y_{K+1} + (0 . \cdot R^p).$$

Si la suite Y_K est contenue dans $(0 . \cdot R)$ l'inclusion se réduit à

$$b_1 a \in Y_{K+1}$$

soit encore $a \in F(A) Y_{K+1}$. On voit alors que pour $K \geqslant K_0$,

$$F(A) Y_K = F(A) Y_{K+1}.$$

Nous allons encore faire un raisonnement par récurrence sur p. Supposons donc que si des idéaux de $0 . \cdot R^p$ forment une suite décroissante, ils engendrent dans $F(A)$ des idéaux qui à partir d'un certain rang sont tous égaux. Considérons la suite décroissante d'idéaux Y_K de $0 . \cdot R^{p+1}$. On a vu qu'il existait un entier K_0 tel que si $K \geqslant K_0$, pour tout $a \in Y_K$, il existait $b_1 \in B$ tel que $b_1 a \in Y_{K+1} + (0 . \cdot R^p)$. Posons $Y'_K = Y_K \cap (0 . \cdot R^p)$. L'inclusion précédente peut s'écrire

$$b_1 a \in Y_{K+1} + Y'_K.$$

Par hypothèse de récurrence il existe un entier K_1, que l'on peut supposer supérieur ou égal à K_0, et tel que pour $K \geqslant K_1$,

$$F(A) Y'_K = F(A) Y'_{K+1}.$$

On voit alors facilement que pour $K \geqslant K_1$,

$$F(A)\,Y_K = F(A)\,Y_{K+1}.$$

Exemple. Soit L un anneau d'intégrité. Considérons l'anneau A des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

à coefficients dans L.

On voit que A est un J-anneau de dimension 3, somme directe de 3 idéaux irréductibles. La condition F.2 est vérifiée. Le radical R est l'ensemble des matrices de A pour lesquelles les coefficients a, d, et f sont nuls. Les éléments de R^2 ont des coefficients nuls excepté c. Enfin $R^3 = 0$. On voit que

$$A_2 = A/(0\,.\cdot R^2)$$

est isomorphe à L. Or un anneau d'intégrité est irréductible $A_1 = A/(0\,.\cdot R)$ est isomorphe à l'anneau des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

on voit que A_1 est un annueau de dimension 2. La condition F.3 est donc satisfaite. On voit que A possède un anneau de fractions qui est l'anneau des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ 0 & \bar{d} & \bar{e} \\ 0 & 0 & \bar{f} \end{bmatrix}$$

où les coefficients appartiennent au corps des fractions de A. $F(A)$ est bien un anneau artinien.

Propriété 5.4. *La condition* F.3 *est nécessaire pour qu'un J-anneau A possède un anneau de fractions noethérien.*

Pour que A_p soit de dimension finie il suffit que les idéaux fermés de A_p vérifient la condition maximale (prop. 1.10). Soit donc $\psi_p(Y_K)$ une suite croissante d'idéaux fermés de A_p. On peut supposer que la suite Y_K est elle-même croissante. Si $F(A)$ est noethérien, il existe un entier K_0 tel que pour

$$K \geqslant K_0, \qquad F(A)\,Y_K = F(A)\,Y_{K+1}.$$

C'est-à-dire que $Y_{K+1} \subset F(A)\,Y_K$. Donc tout élément a de X_{K+1} se met sous la forme $a = b^{-1}a'$, avec $b \in B$, $a' \in Y_K$. Alors $ba = a'$. Soit alors $\psi_p(a)$ un élément non nul de $\psi_p(X_K)$. Dans ce cas $\psi_p(b)\psi_p(a)$ n'est pas nul (prop. 5.7). On voit que

$$A_p\,\psi_p(a) \cap \psi_p(X_K) \neq 0.$$

Donc $\psi_p(X_{K+1})$ est une extension essentielle de $\psi_p(X_K)$ et comme ce sont des idéaux fermés :

$$\psi_p(X_{K+1}) = \psi_p(X_K) \qquad \text{pour } K \geqslant K_0.$$

COROLLAIRE 1. *Soit A un J-anneau qui vérifie la condition* F.2. *S'il possède un anneau de fractions noethérien cet anneau est aussi artinien.*

COROLLAIRE 2. *Soit A un J-anneau qui vérifie la condition* F.2 *et dont le radical est de carré nul. A possède un anneau de fractions si et seulement s'il vérifie la condition* F.3.

Cela[10] découle de la propriété 4.8.

Ceci s'applique en particulier à un J-anneau de dimension 2. Donnons deux exemples :

Exemple 1. Considérons le J-anneau de dimension 2 étudié dans **(12)**. A est l'anneau des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} u & v \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

où u et v appartiennent au corps des rationnels et où $m \in Z$.

$A_1 = A/(0 \,.\cdot R)$ est isomorphe à Z : or Z est un anneau d'intégrité, donc un anneau irréductible. A possède un anneau de fractions.

Exemple 2. Dans **(11)**, L. Lesieur et R. Croisot donnent un exemple d'anneau L que l'on peut plonger dans un corps de fractions à gauche mais qui n'est pas de dimension finie comme L-module à droite. Soit alors L^0 l'anneau opposé à L. C'est un anneau que l'on peut plonger dans un corps K qui est son corps de fractions à droite. On considère A qui est l'anneau des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

avec $a \in K, b \in K$ et $c \in L^0$. A est un J-anneau de dimension 2. $A_1 = A/(0 \,.\cdot R)$ est isomorphe à L^0, la condition F.3 n'est pas vérifiée : A ne possède pas d'anneau de fractions.

[10]On remarque que la condition F.3 est vérifiée si A est noethérien. T. D. Talintyre **(14)** a montré que si un anneau noethérien A possèdait un anneau de fractions artinien la condition suivante était vérifiée :

F.4 : *Un élément est régulier modulo le radical de A si, seulement si, il l'est dans A.*

Ce résultat est à rapprocher de notre propriété 4.6. L. Small **(13)** a montré que réciproquement si un anneau noethérien vérifie la condition F.4, il possède un anneau de fractions et cet anneau est artinien. Aussi peut-on se demander si les conditions F.3 et F.4 ne sont pas nécessaires et suffisantes pour qu'un J-anneau possède un anneau de fractions artinien. Nous pouvons simplement dire que la réponse est positive pour un J-anneau de dimension 2.

6. Appendice. Dans toute notre étude nous n'avons considéré que des anneaux unitaires (cf. définition 2.1). Cependant moyennant quelques modifications la plupart de nos résultats peuvent s'étendre à un anneau non unitaire. Dans la suite A est un anneau qui vérifie les conditions (1l) et (3l) (voir paragraphe 2). Alors les propriétés 2.4, 2.5, 2.6 et le théorème 2.2 subsistent sans modifications, ni dans l'énoncé, ni dans la démonstration. Les propriétés 2.7, 2.8 et donc le théorème 2.3 sont encore vrais. Pour cela il suffit de remarquer que pour que l'idéal $Ax + Zx$ soit nilpotent, il faut et il suffit que l'idéal Ax le soit. Nous allons maintenant supposer que l'ensemble des éléments réguliers de A n'est pas vide. Soit donc $b_0 \in B$. Nous pouvons alors énoncer.

PROPRIÉTÉ 3.4′. *Soit $u \in U$. Alors ou bien $b_0 - ub_0$ est régulier, ou bien u est idempotent.*

La démonstration est tout à fait analogue à celle de la propriété 3.4.

PROPRIÉTÉ 3.5′. *Supposons que l'anneau A vérifie la condition* F.1. *Si $u \in U$, pour tout $b \in B$, il existe $b' \in B$ tel que $b'u \in Ab$.*

Comme dans 3.5 on se ramènera au cas où u, ainsi que le produit de u par tout élément régulier, est indempotent. On montrera alors que l'élément $b_1 = b_0 - b_0\,ub + b_0\,bu$ est régulier. Pour cela, on verra d'abord que $A(b_0 - b_0\,ub) \cap Ab_0\,bu = 0$. En effet si $\lambda(b_0 - b_0\,ub) = \mu b_0\,bu$, en multipliant l'égalité à droite par u on voit que $\lambda b_0(u - ubu) = \mu(b_0\,bu^2$. On en conclut que $\mu b_0\,bu = 0$. D'autre part $0\cdot .b_1 = [0\cdot .(b_0 - b_0\,ub] \cap [0\cdot .b_0\,bu]$ et si $\lambda(b_0 - b_0\,ub) = 0$, $\lambda b_0\,u = 0$ on en déduit que $\lambda b_0\,ub^2u = 0$ et $\lambda b_0 u = 0$. Donc $\lambda b_0 = 0$ ce qui entraîne que $\lambda = 0$. On en déduit alors sans modification le théorème 3.2.

Nous pouvons encore ènoncer

THÉORÈME 3.3′. *Supposons que A soit de dimension u. Si pour tout entier, p, $0 < p \leqslant n$, $p.b_0$ est régulier dans A, alors A possède un anneau de fractions si, et seulement si, la condition* F.1 *est vérifiée.*

On voit d'abord que si pour $a \in A$, $pa = 0$ avec $0 < p \leqslant n$, alors $a = 0$· En effet $(pa)b_0 = a(pb_0) = 0$. On en déduit comme pour le théorème 3.3 que l'un des éléments $a + pb_0$, $0 \leqslant p \leqslant n$, est régulier et donc que $A = B(A)$. Quant au reste de notre étude, il subsiste sans modifications.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Djabali, *Etude d'un J-anneau noethérien de dimension 2*, C. R. Acad. Sci., Paris, *258* (1964), 5309–5310.
2. ——— *Anneau de quotients d'un J-anneau*, C. R. Acad. Sci., Paris, *260* (1965), 1047–1048.
3. ——— *Anneau de fractions d'un J'anneau* (Séminaire Dubreil–Pisot : Algèbre et théorie des nombres, n° 8, 1964–65.
4. A. W. Goldie, *The structure of prime rings with maximum condition*, Proc. London Math. Soc., *10* (1960), 589–608.

5. ——— *Semi-prime rings with maximum condition,* Proc. London Math. Soc., *10* (1960)' 201–220.

6. N. Jacobson, *Structure of rings,* Amer. Math. Colloq. Publ. 37; Providence, American Mathematical Society, 1956).

7. R. E. Johnson, *Structure theory of faithful rings,* Trans. Amer. Math. Soc., *84* (1957), 537 et seq.

8. ——— *Quotient rings of rings with zero singular ideal,* Pacific J. Math., *11* (1961).

9. ——— *Potent rings,* Trans. Amer. Math. Soc., *119* (1965), 524–534.

10. R. E. Johnson and X. X. Wong, *Quasi-injective modules and irreducible rings,* J. London Math. Soc., *36* (1961), 266.

11. L. Lesieur et R. Croisot, *Sur les anneaux premiers noethériens a gauche,* Ann. Sci. École Norm. Sup., 3e série, *76* (1959), 161–183.

12. ——— *Coeur d'un module,* J. Math. Pures Appl., 9e série, *42* (1963), 367–407.

13. L. Small, *Orders in Artinian rings,* J. Algebra, *4* (1966), 13–41.

14. T. D. Talintyre, *Quotient rings of rings with maximum condition for right ideals,* J. London Math. Soc., Part 4, *38* (1963), 439–450.

15. ——— *Quotient rings with maximum condition on right ideals,* J. London Math. Soc., *41* (1966), 141–144.

Faculté des Sciences de Paris à Orsay,
21 Rue de Dantzig, Paris 15ième