Canad. J. Math. Vol. **55** (6), 2003 pp. 1121–1133

Classification des représentations tempérées d'un groupe p-adique

Karem Bettaïeb

Résumé. Soit G le groupe des points définis sur un corps p-adique d'un groupe réductif connexe. A l'aide des caractères virtuels supertempérés de G, on prouve (conjectures de Clozel) que toute représentation irréductible tempérée de G est irréductiblement induite d'une essentielle d'un sous-groupe de Lévi de G.

1 Introduction

Soit G l'ensemble des points rationnels d'un groupe algébrique réductif connexe p-adique de caractéristique 0. Notons $\mathcal{V}(G)$ l'ensemble des *caractères virtuels tempérés* de G, c'est-à-dire que $\mathcal{V}(G)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies des caractères des représentations irréductibles tempérées de G. On dit que l'élément $\Theta \in \mathcal{V}(G)$ est *un caractère virtuel supertempéré* [9], [11], s'il satisfait à la condition suivante.

Pour tout sous-groupe de Cartan T de G et pour toute constante positive n, on a:

$$\sup_{t\in T'} |D_G(t)|^{1/2} |\Theta(t)| \big(1 + \sigma_*(t) \big)^n < \infty$$

où D_G est le facteur discriminant usuel, σ_* estime la croissance sur G/A_G, $T' = T \cap G'$ où G' est l'ensemble des éléments $x \in G$ tels que $D_G(x) \neq 0$.

Notons $\mathcal{V}_{\mathrm{st}}(G)$, le sous-espace vectoriel des éléments supertempérés de $\mathcal{V}(G)$. On sait que le caractère d'une représentation irréductible tempérée π est supertempéré si et seulement si π appartient à la série discrète [11].

Comme résultat préliminaire, et à l'aide des travaux de J. Arthur [1] et R. Herb [11], on démontre que tout élément de $\mathcal{V}(G)$ s'écrit comme combinaison linéaire finie d'induites de caractères virtuels supertempérés (théorème 4). Soient $\Theta_i \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(L_i)$, où L_i ($i = 1, 2$) sont deux sous-groupes de Lévi de G. On note $i_{G,L_i}(\Theta_i)$ le caractère induit de Θ_i. Par analogie avec les caractères cuspidaux, on démontre que $i_{G,L_1}(\Theta_1) = i_{G,L_2}(\Theta_2)$ si et seulement s'il existe $t \in G$ tel que $L_1 = tL_2t^{-1}$ et $\Theta_1 = t\Theta_2$ (proposition 6). Ce résultat nous permettra de déduire (corollaire 7) qu'à chaque élément $\Theta \in \mathcal{V}(G)$ correspond, modulo la conjugaison par G, une famille finie unique $\{(L_i, \Theta_i)\}_{1\leq i\leq p}$, où $\Theta_i \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(L_i)$ et L_i sous-groupes de Lévi de G tel que:

$$\Theta = \sum_{1\leq i\leq p} i_{G,L_i}(\Theta_i).$$

Reçu par la rédaction le 9 janvier, 2002; revu le 27 décembre, 2002.
Classification (AMS) par sujet: 22E.

Notons $P_t = M_tN_t$ le sous-groupe parabolique de G correspondant à l'élément semi-simple t de G [6] et G_c, « *la partie compacte* » de G, constituée des éléments semi-simples t de G tel que $P_t = G$.

Comme propriété des caractères virtuels supertempérés, on montre que pour tout $\Theta \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(G)$ et f une fonction dans l'espace de Schwartz $\mathcal{C}(G)$, de G:

$$\langle \Theta, f \rangle := \int_G \Theta(x) f(x)\, dx = \int_{G_c} \Theta(x) f(x)\, dx.$$

« *La trace compacte* » de $\Theta \in \mathcal{V}(G)$ est définie par:

$$\langle \Theta, f \rangle_{G,c} := \int_{G_c} \Theta(x) f(x)\, dx \quad f \in \mathcal{C}(G).$$

L. Clozel [4] a montré que la trace d'une représentation admissible de longueur finie se décompose en somme de trace compacte des modules de Jacquet normalisée. Par analogie, on démontre qu'étant donné $\Theta \in \mathcal{V}(G)$ et $f \in \mathcal{C}(G)$, il existe une famille finie $\{(L_i, \Theta_i)\}_{1 \le i \le p}$ de caractères virtuels supertempérés de G, unique modulo la conjugaison par G, telle que:

$$\langle \Theta, f \rangle = \sum_{1 \le i \le p} \langle \Theta_i, f_{Q_i} \rangle_{L_i, c}$$

où $f_{Q_i} \in \mathcal{C}(L_i)$ est le terme constant de f le long d'un sous-groupe parabolique Q_i ayant pour sous-groupe de Lévi L_i (corollaire 11). Cette égalité montre, en particulier, que la trace d'une représentation tempérée irréductible se décompose en somme finie de « trace compacte ».

Notons $\Pi(G)$, l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles *tempérées* de G. Une représentation dans $\Pi(G)$ est dite *elliptique* si son caractère est non nul sur l'ensemble régulier elliptique de G. Notons par $\Pi_{\mathrm{ell}}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations elliptiques de G. De même, une représentation irréductible tempérée de G est dite *essentielle* (ou limite de série discrète [5]) si elle n'est pas proprement irréductiblement induite par induction parabolique. Notons $\Pi_{\mathrm{ess}}(G)$ l'ensemble (des classes d'équivalence) des représentations essentielles de G. On sait que $\Pi_{\mathrm{ell}}(G) \subset \Pi_{\mathrm{ess}}(G)$ et que si $G = \mathrm{SO}(n)$ alors $\Pi_{\mathrm{ess}}(G)$ contient strictement $\Pi_{\mathrm{ell}}(G)$ [10].

On se donne (M, σ) une paire discrète de G, c'est-à-dire que M est un sous-groupe de Lévi de G et σ une représentation irréductible de M, de carré intégrable modulo la composante déployée A_M du centre de M. Notons $i_{G,M}(\sigma)$ la classe de la représentation induite $\mathcal{I}nd_{P=MN}(\sigma)$ et $\Re_\sigma := \Re_\sigma^G$ le $\Re$-groupe correspondant. C'est un groupe fini ayant la propriété que l'algèbre commutante de $i_{G,M}(\sigma)$ est isomorphe à $\mathbb{C}[\Re_\sigma]_{\eta_\sigma}$ l'algèbre du groupe $\Re_\sigma$ tordue par un cocycle η_σ (voir [1, Section 2]). Notons $\mathfrak{a}_M$ (resp. $\mathfrak{a}_G$), l'algèbre de Lie réelle de la composante déployée de M (resp. G). Pour tout $r \in \Re_\sigma$, posons:

$$\mathfrak{a}_M^r := \{H \in \mathfrak{a}_M, rH = H\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma} := \bigcap_{r \in \Re_\sigma} \mathfrak{a}_M^r.$$

On dit que le groupe $\Re_\sigma$ est *essentiel* si $\mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma} = \mathfrak{a}_G$.

Comme conséquence du corollaire 7, on démontre qu'une composante irréductible de $i_{G,M}(\sigma)$ est essentielle si et seulement si le groupe $\Re_\sigma$ est essentiel. Ainsi, on aura démontré la conjecture de Clozel [5]: si π est essentielle alors toutes les reliées à π le sont aussi (une représentation irréductible tempérée π_2 de G est dite *reliée* à π_1 si π_1 et π_2 proviennent d'une même paire discrète (M, σ) de G, [12]).

Cette classification des représentations irréductibles essentielles de G, nous permet de montrer une autre conjecture de Clozel [5]: toute représentation irréductible π de G est irréductiblement induite d'une essentielle. De plus, si $\pi = i_{G,L_1}(\delta_1) = i_{G,L_2}(\delta_2)$, $\delta_i \in \Pi_{\mathrm{ess}}(L_i)$ et L_i sous-groupes de Lévi de G, alors il existe $t \in G$ tel que $L_1 = tL_2t^{-1}$ et $\delta_1 = t\delta_2$.

2 L'espace des caractères virtuels $\mathcal{V}(G)$

Dans ce paragraphe on montre que tout caractère virtuel tempéré s'écrit comme combinaison linéaire d'induites de caractères virtuels supertempérés.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique connexe réductif défini sur un corps local non archimédien F de caractéristique 0. Notons $G(F)$ l'ensemble des points F-rationnels de $\mathbf{G}$. Dans la suite on notera $G := G(F)$.

Pour la suite, on fixe une composante de Lévi F-rationnelle M_0 d'un certain sous-groupe parabolique minimal P_0 de $\mathbf{G}$ défini sur F. On pose $W_0^G := N_G(M_0)/M_0$ où $N_G(M_0)$ est le normalisateur de M_0 dans G.

Par définition, un groupe de Lévi M de G est un sous-groupe algébrique de G contenant la composante de Lévi M_0 d'un certain sous-groupe parabolique minimal P_0 défini sur F.

Si M est un sous-groupe de Lévi de G de composante déployée A_M, soit $\mathcal{L}(M)$ l'ensemble des sous-groupes de Lévi de G contenant M et $\mathcal{L}_0(M) = \{L \in \mathcal{L}(M) \mid L \neq G\}$. Si L est un autre sous-groupe de Lévi de G, on note par $\mathcal{L}^L(M)$ l'ensemble des sous-groupes de Lévi de L contenant M.

Si $M = M_0$, on écrit $\mathcal{L} := \mathcal{L}(M_0)$, $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_0(M_0)$ et $A_0 := A_{M_0}$.

Soit π représentation admissible de G, notons par $\mathcal{A}(\pi)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies des coefficients matriciels de π et $\mathcal{A}(G) = \bigcup_\pi \mathcal{A}(\pi)$, la réunion étant prise sur toutes les représentations admissibles de G. On sait que [13, 3.1], $\mathcal{A}(G)$ s'écrit comme somme directe sur $\Xi(A_G)$ des $\mathcal{A}(G)_\chi$, où $\Xi(A_G)$ est l'ensemble des quasi-caractères de A_G et $\mathcal{A}(G)_\chi = \{f \in \mathcal{A}(G) \mid f(xz) = \chi(z).f(x)$ pour tout $x \in G, z \in A_G\}$. Pour tous sous-groupes paraboliques $P = MN$ de G et $f \in \mathcal{A}(G)$, il existe une fonction $f_P \in \mathcal{A}(M)$ [13, 2.6], appelée *terme constant* de f le long de P.

Soient maintenant (π, V) une représentation admissible de G et $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Supposons que $\Theta := \Theta_\pi$ est le caractère de π. Par analogie, on définit le terme constant Θ_P de Θ le long de P. Notons par $\overline{P} = M\overline{N}$ le sous-groupe parabolique opposé de P, $V(\overline{N}) := \langle \pi(\overline{n})v - v, \overline{n} \in \overline{N}, v \in V\rangle$ et $V_{\overline{N}} := V/V(\overline{N})$.

Soit $p\colon V \to V_{\overline{N}}$ la projection canonique. Pour tous $m \in M$ et $v \in V$, on définit:

$$\pi_{\overline{N}}(m)p(v) = \delta_{\overline{P}}(m)^{-1/2} p\big(\pi(m)v\big)\,.$$

La représentation $(\pi_{\overline{N}}, V_{\overline{N}})$ est appelée module de Jacquet normalisé de (π, V) qui correspond à $\overline{P}$; on sait que c'est une représentation admissible de longueur finie de M [13, 2.3.6]. On pose $\Theta_P := r_{\overline{P},G}(\Theta_\pi) = \Theta_{\pi_{\overline{N}}}$ le caractère de $\pi_{\overline{N}}$. On appelle Θ_P le *terme constant* de $\Theta = \Theta_\pi$ le long de P.

Soient $f \in \mathcal{A}(G)$ et $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G. Suivant [13, 3.1], on a: $f_P = \sum_{\chi \in \Xi(A_M)} f_{P,\chi}$ où $f_{P,\chi} \in \mathcal{A}(M)_\chi$. On pose:

$$X_f(P, A_M) := \{\chi : f_{P,\chi} \neq 0\} \quad \text{et} \quad X_\pi(P, A_M) = \bigcup_{f \in \mathcal{A}(\pi)} X_f(P, A_M).$$

D'après [13, 3.3.1], le module de Jacquet normalisée se décompose sous forme de sous-espaces:

$$V_{\overline{N}} = \sum_{\chi \in X_\pi(P, A_M)} V_{\overline{N},\chi}.$$

Par conséquent:

$$\Theta_P = \Theta_{\pi_{\overline{N}}} = \sum_{\chi \in X_\pi(P, A_M)} \Theta_{P,\chi}$$

où $\Theta_{P,\chi}$ est le caractère de la restriction de $\pi_{\overline{N}}$ sur $V_{\overline{N},\chi}$.

Notons $\Pi(G)$, l'ensemble de classes d'équivalence des représentations irréductibles tempérées de G. Si $\pi \in \Pi(G)$, $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G et $\hat{A}_M$ le dual unitaire de A_M, on pose $X_\pi^w(P, A_M) := X_\pi(P, A_M) \cap \hat{A}_M$. D'après [13, 5.4.1.3], le quotient maximal tempéré de $\pi_{\overline{N}}$ est:

$$(V_{\overline{N}})^w = \sum_{\chi \in X_\pi^w(P, A_M)} V_{\overline{N},\chi}.$$

Soit $\Theta = \Theta_\pi$ le caractère de π, posons $\Theta_P^w := \Theta_{(V_{\overline{N}})^w}$ le caractère de $(V_{\overline{N}})^w$. On appelle Θ_P^w le *terme constant faible* de $\Theta = \Theta_\pi$ le long de P.

Comme conclusion, on vient de définir pour tout sous-groupe parabolique $P = MN$ de G et $\pi \in \Pi(G)$, le terme constant $(\Theta_\pi)_P$ et le terme constant faible $(\Theta_\pi)_P^w$ de Θ_π le long du sous-groupe parabolique P.

On dit que Θ est *un caractère virtuel* de G et nous écrivons $\Theta \in \mathcal{V}(G)$, s'il existe un nombre fini, $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k \in \Pi(G)$ et $c_i \in \mathbb{C}$ tels que:

$$\Theta := \sum_{1 \leq i \leq k} c_i \Theta_{\pi_i}.$$

Ce qui nous permet de définir le terme constant Θ_P et le terme constant faible Θ_P^w de Θ le long d'un sous-groupe parabolique $P = MN$ de G par:

$$\Theta_P = \sum_{1 \leq i \leq k} c_i (\Theta_{\pi_i})_P \quad \text{et} \quad \Theta_P^w = \sum_{1 \leq i \leq k} c_i (\Theta_{\pi_i})_P^w.$$

Un élément $x \in G$ est dit *régulier* si $D_G(x) \neq 0$ où D_G est le facteur discriminant standard défini dans [13, 4.7]. Notons G' l'ensemble des éléments réguliers de G. Si T est un sous-groupe de Cartan de G, on note $T' := T \cap G'$.

Un élément $x \in G$ est dit *elliptique* si son centralisateur est compact modulo la composante déployée A_G de G. Notons G_{ell} l'ensemble des éléments réguliers elliptiques de G. Si $\Theta \in \mathcal{V}(G)$, on note Θ^e la restriction de Θ à l'ensemble régulier elliptique de G.

Définition 1 **(Harish-Chandra [9])** On dit que $\Theta \in \mathcal{V}(G)$ est un caractère virtuel supertempéré si, pour tout sous-groupe de Cartan T de G et n une constante positive, on a:

$$\sup_{t \in T'} |D_G(t)|^{1/2} \, |\Theta(t)| \big(1 + \sigma_*(t) \big)^n < \infty$$

où σ_* estime la croissance sur G/A_G, (voir [13, 4.1]).

Notons $\mathcal{V}_{\mathrm{st}}(G)$, le sous-ensemble de $\mathcal{V}(G)$ formé par les caractères virtuels supertempérés.

Théorème 2 **(R. Herb [11])**

(1) *Le caractère $\Theta \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(G)$ si et seulement si $\Theta_P^w = 0$ pour tout sous-groupe parabolique propre P de G.*
(2) *Soit $\Theta \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(G)$, si $\Theta^e = 0$ alors $\Theta = 0$.*
(3) *Soient $P_1 = MN_1$ et $P_2 = MN_2$ deux sous-groupes paraboliques de G, alors pour tout $\Theta \in \mathcal{V}(G)$, on a: $\Theta_{P_1} = \Theta_{P_2}$.*

On dit que (M, σ) est une *paire discrète* de G si $M \in \mathcal{L}$ et $\sigma \in \prod_2(M)$ où $\prod_2(M)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme des séries discrètes de M. Soit (M, σ) une telle paire, notons $W(M) := W^G(M) = N_G(M)/M$, le groupe de Weyl de (G, A_M), $i_{G,M}(\sigma)$ la classe de la représentation induite $\mathcal{I}nd_{P=MN}(\sigma)$ et $\mathfrak{R}_\sigma := \mathfrak{R}_\sigma^G$, le $\mathfrak{R}_\sigma$-groupe correspondant. Soit $\tilde{\mathfrak{R}}_\sigma := \tilde{\mathfrak{R}}_\sigma^G$ l'extension centrale du $\mathfrak{R}_\sigma$-groupe comme dans [1, Section 2]:

$$1 \to Z_\sigma \to \tilde{\mathfrak{R}}_\sigma \to \mathfrak{R}_\sigma \to 1.$$

Il existe un caractère central χ_σ de Z_σ tel que l'ensemble $\Pi_\sigma(G)$ des constituants irréductibles de $i_{G,M}(\sigma)$ soit paramétré par l'ensemble $\Pi(\tilde{\mathfrak{R}}_\sigma, \chi_\sigma)$ des classes d'équivalence des représentations irréductibles ρ de $\tilde{\mathfrak{R}}_\sigma$ ayant χ_σ comme Z_σ-caractère central [1, Section 2].

La paramétrisation de $\Pi_\sigma(G)$ nous permet de classifier l'ensemble $\Pi(G)$, qui est réunion disjointe des W_0^G-paires discrètes (M, σ) des ensembles $\Pi_\sigma(G)$, [8] et [1, Section 1].

Un triplet (M, σ, r) est appelé *triplet virtuel* de G si (M, σ) est une paire discrète de G et $r \in \tilde{\mathfrak{R}}_\sigma$. À chaque triplet virtuel de G, J. Arthur [1, Section 2] fait correspondre une distribution-caractère $\Theta^G(M, \sigma, r) := \Theta(M, \sigma, r)$ appelée caractère virtuel de G qui se décompose sous la forme:

$$\Theta(M, \sigma, r) = \sum_{\pi \in \Pi_\sigma(G)} \theta_{\rho_\pi^\vee}(r) \Theta_\pi \tag{1}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2003-044-9 Published online by Cambridge University Press

où $\theta_{\rho_\pi^\vee}$ est le caractère de la contragrédiente de $\rho_\pi \in \Pi(\tilde{\Re}_\sigma, \chi_\sigma)$ associée à $\pi \in \Pi_\sigma(G)$. De plus, on a:

$$\Theta^G(wM, w\sigma, wrw^{-1}) = \Theta^G(M, \sigma, r) \quad \forall w \in W_0^G.$$

En inversant (1) on aura, pour tout $\pi \in \Pi_\sigma(G)$:

$$\Theta_\pi = |\tilde{\Re}_\sigma|^{-1} \sum_{r\in\tilde{\Re}_\sigma} \theta_{\rho_\pi}(r)\Theta^G(M, \sigma, r)$$

ou encore, [1, Section 6]:

$$\Theta_\pi = |\Re_\sigma|^{-1} \sum_{r\in\Re_\sigma} \theta_{\rho_\pi}(r)\Theta^G(M, \sigma, r). \tag{2}$$

Notons $\mathfrak{a}_M$ (resp. $\mathfrak{a}_G$), l'algèbre de Lie réelle de la composante déployée de M (resp. G). Le groupe $\Re_\sigma$ agit sur $\mathfrak{a}_M$. Pour $r \in \Re_\sigma$, posons:

$$\mathfrak{a}_M^r := \{H \in \mathfrak{a}_M : rH = H\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma} := \bigcap_{r\in\Re_\sigma} \mathfrak{a}_M^r,$$

$$\Re_{\sigma,\mathrm{reg}} := \Re^G_{\sigma,\mathrm{reg}} = \{r \in \Re_\sigma : \mathfrak{a}_M^r = \mathfrak{a}_G\}$$

$$\mathcal{L}(\Re_\sigma) := \mathcal{L}^G(\Re_\sigma) = \{S \in \mathcal{L}(M) : \mathfrak{a}_S = \mathfrak{a}_M^r \text{ pour un } r \in \Re_\sigma\}.$$

On dit que le $\Re$-groupe $\Re_\sigma$ est *essentiel* si $\mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma} = \mathfrak{a}_G$. Soit $L \in \mathcal{L}(M)$, on dit que *L satisfait la condition de compatibilité d'Arthur* si $\mathfrak{a}_L \cap \overline{\mathfrak{a}}_\sigma^+$ contient un sous-ensemble ouvert de $\mathfrak{a}_L$, où $\mathfrak{a}_\sigma^+$ est la chambre positive correspondante à l'ensemble des racines positives qui annulent la densité de Plancherel [1, Section 2]. Notons $\mathcal{L}_A(M)$ l'ensemble des $L \in \mathcal{L}(M)$ qui satisfait cette condition.

Lemme 3 *Soit (M, σ) une paire discrète de G. Alors:*

(1) *Le groupe de réductibilité de $i_{S,M}(\sigma)$ est $\Re_\sigma^S := \Re_\sigma \cap W^S(M)$ pour tout $S \in \mathcal{L}(\Re_\sigma)$.*
(2) *Le groupe $\Re_\sigma$ est une réunion disjointe des ensembles $\Re^S_{\sigma,\mathrm{reg}}$, $S \in \mathcal{L}(\Re_\sigma)$.*

Preuve D'après J. Arthur [1, Section 2], si $L \in \mathcal{L}_A(M)$, alors on peut identifier le $\Re$-groupe de $i_{L,M}(\sigma)$ à $\Re_\sigma \cap W^L(M)$. Par définition, chaque $S \in \mathcal{L}(\Re_\sigma)$ satisfait cette condition de compatibilité; d'où (1). La (2) est claire. ■

Soit $\tau \in \Pi(L)$, $L \in \mathcal{L}$. Le caractère de la représentation induite $i_{G,L}(\tau)$ sera noté $i_{G,L}(\Theta_\tau)$. Il vérifie l'identité (voir [1, Section 5]):

$$i_{G,L}(\Theta_\tau)(f) = \Theta_\tau(f_Q), \quad f \in \mathcal{C}(G),$$

où f_Q est le terme constant de f le long d'un parabolique quelconque, $Q = LN_Q$ de G. On note souvent:

$$\Theta_\tau(f_L) := \Theta_\tau(f_Q) = i_{G,L}(\Theta_\tau)(f), \quad f \in \mathcal{C}(G).$$

Dans [1, Section 3], Arthur a montré que les caractères $\Theta^G(M,\sigma,r)$ des W_0^G-triplets virtuels (M,σ,r) de G forment une base de l'espace $\mathcal{V}(G)$. On se propose, dans la suite, de munir l'espace $\mathcal{V}(G)$ d'une autre base faisant intervenir les caractères virtuels supertempérés.

Théorème 4 *Tout élément dans $\mathcal{V}(G)$ s'écrit comme combinaison linéaire finie d'induites de caractères virtuels supertempérés.*

Preuve Soit $\Theta \in \mathcal{V}(G)$. Par définition, il existe $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k \in \Pi(G)$ et $c_i \in \mathbb{C}$ tel que: $\Theta = \sum_{1\le i\le k} c_i \Theta_{\pi_i}$. Le théorème sera démontré si on montre que le caractère Θ_π, $\pi \in \Pi(G)$ s'écrit comme combinaison linéaire finie d'induites de caractères virtuels supertempérés. En effet, soit $\pi \in \Pi(G)$. On sait que, modulo la conjugaison par W_0^G, il existe une paire discrète unique (M,σ) de G telle que $\pi \in \Pi_\sigma(G)$. Or, l'égalité (2) nous donne l'expression de son caractère:

$$\Theta_\pi = |\mathfrak{R}_\sigma|^{-1} \sum_{r\in\mathfrak{R}_\sigma} \theta_{\rho_\pi}(r)\Theta^G(M,\sigma,r)$$

$$\Theta_\pi = \sum_{S\in\mathcal{L}(\mathfrak{R}_\sigma)} |\mathfrak{R}^S_{\sigma,\mathrm{reg}}|^{-1} \sum_{r\in\mathfrak{R}^S_{\sigma,\mathrm{reg}}} \theta_{\rho_\pi}(r)\Theta^G(M,\sigma,r) \tag{3}$$

d'après le lemme 3. Par ailleurs, pour $r \in \tilde{\mathfrak{R}}^S_{\sigma,\mathrm{reg}}$, le triplet (M,σ,r) est un triplet de S et si $r \in \tilde{\mathfrak{R}}^S_{\sigma,\mathrm{reg}}$ on a:

$$\begin{aligned}\Theta^G(M,\sigma,r) &= \sum_{\tau\in\Pi_\sigma(S)} \theta_{\rho_\tau^\vee}(r) i_{G,S}(\Theta_\tau)\\ &= i_{G,S}\Big[\sum_{\tau\in\Pi_\sigma(S)} \theta_{\rho_\tau^\vee}(r)\Theta_\tau\Big]\\ &= i_{G,S}[\Theta^S(M,\sigma,r)].\end{aligned}$$

Par conséquent, l'égalité (3) est équivalente à:

$$\begin{aligned}\Theta_\pi &= \sum_{S\in\mathcal{L}(\mathfrak{R}_\sigma)} |\mathfrak{R}^S_{\sigma,\mathrm{reg}}|^{-1} \sum_{r\in\mathfrak{R}^S_{\sigma,\mathrm{reg}}} \theta_{\rho_\pi}(r) i_{G,S}\big(\Theta^S(M,\sigma,r)\big)\\ &= \sum_{S\in\mathcal{L}(\mathfrak{R}_\sigma)} i_{G,S}\Big[|\mathfrak{R}^S_{\sigma,\mathrm{reg}}|^{-1} \sum_{r\in\mathfrak{R}^S_{\sigma,\mathrm{reg}}} \theta_{\rho_\pi}(r)\Theta^S(M,\sigma,r)\Big]\\ &= \sum_{S\in\mathcal{L}(\mathfrak{R}_\sigma)} i_{G,S}(\Theta_{\pi,S})\end{aligned} \tag{4}$$

où:

$$\Theta_{\pi,S} := |\mathfrak{R}^S_{\sigma,\mathrm{reg}}|^{-1} \sum_{r\in\mathfrak{R}^S_{\sigma,\mathrm{reg}}} \theta_{\rho_\pi}(r)\Theta^S(M,\sigma,r).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2003-044-9 Published online by Cambridge University Press

Or, si $r \in \Re^{S}_{\sigma,\mathrm{reg}}$, le caractère virtuel $\Theta^{S}(M,\sigma,r)$ est dans $\mathcal{V}_{\mathrm{st}}(S)$ [11, théorème 3.1]. Donc $\Theta_{\pi,S} \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(S)$. Comme $\Re_{\sigma}$ est fini, les $S \in \mathcal{L}(\Re_{\sigma})$ sont en nombre fini. Ceci montre que le caractère d'une représentation irréductible tempérée de G est une combinaison linéaire finie d'induites de caractères virtuels supertempérés. D'où le théorème. ■

Soit $\Theta \in \mathcal{V}(L)$, $L \in \mathcal{L}$, il existe $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_q \in \Pi(L)$ et $c_i \in \mathbb{C}$ tels que: $\Theta = \sum_{1\le i\le q} c_i \Theta_{\tau_i}$. Si $t \in W_0^G$, on note $t\Theta_{\tau_i}$ le caractère de la représentation $t\tau_i \in \Pi(tL)$ et donc:

$$t\Theta := \sum_{1\le i\le q} t\Theta_{\tau_i} \in \mathcal{V}(tL).$$

D'autre part, étant donné que le terme constant Θ_R et le terme constant faible Θ_R^w de Θ le long du sous-groupe parabolique $R = MN_R$ de L dépend seulement de M d'après le théorème 2 (voir aussi [11, p. 154 et (3.3)], on pose: $r_{M,L}(\Theta) = \Theta_M := \Theta_R$ et $\Theta_M^w := \Theta_R^w$.

Si $S \in \mathcal{L}$, considérons l'ensemble:

$$W^{L,S} = \{t \in W_0^G; t(L\cap P_0) \subset P_0 \text{ et } t^{-1}(S\cap P_0) \subset P_0\}.$$

D'après [2, 2.12], [11, (3.3)], on a pour tout $\Theta \in \mathcal{V}(L)$:

$$\left(i_{G,L}(\Theta)\right)_S = \sum_{t\in W^{L,S}} i_{S,S_t}[(t\Theta)_{S_t}] \tag{5}$$

où $S_t = S \cap tL$.

Définition 5

(1) On dit que (L,Θ) est une paire supertempérée de G si $L \in \mathcal{L}$ et $\Theta \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(L)$.
(2) Soient (L_i,Θ_i), $i = 1,2$, deux paires supertempérées de G. On dit que (L_1,Θ_1) et (L_2,Θ_2) sont conjuguées sous G s'il existe $t \in W_0^G$ tel que $tL_1t^{-1} = L_2$ et $t\Theta_1 = \Theta_2$.

Proposition 6 *Soient (L_1,Θ_1) et (L_2,Θ_2) deux paires supertempérées de G. Alors, $i_{G,L_1}(\Theta_1) = i_{G,L_2}(\Theta_2)$ si et seulement si les paires (L_1,Θ_1) et (L_2,Θ_2) sont conjuguées sous G.*

Preuve La démonstration est analogue à celle de théorème 4 de [7] sur les caractères d'induites cuspidales. En effet pour tout $l_1 \in (L_1)_{\mathrm{ell}}$, on a:

$$[i_{G,L_1}(\Theta_1)]_{L_1}(l_1) = [i_{G,L_2}(\Theta_2)]_{L_1}(l_1). \tag{6}$$

En utilisant le théorème 2, l'expression (5) et le fait $t\Theta_1 = \Theta_1$ pour tout $t \in W^{L_1,L_1}$ tel que $tL_1 = L_1$ [11, théorème 3.1], l'expression (6) est équivalente à:

$$|t \in W^{L_1,L_1} : tL_1 = L_1|\Theta_1(l_1) = \sum_{\{t\in W^{L_2,L_1} : tL_1 = L_2\}} (t\Theta_2)(l_1) \quad l_1 \in (L_1)_{\mathrm{ell}}.$$

Si L_1 et L_2 ne sont pas conjugués, on aura $\Theta_1 = 0$ car elle est nulle sur $(L_1)_{\mathrm{ell}}$ d'après le théorème 2. Contradiction. D'où L_1 et L_2 sont conjugués. Supposons que $L_2 = sL_1$ pour un certain $s \in W_0^G$; pour tout $l_1 \in (L_1)_{\mathrm{ell}}$, l'égalité (6) est équivalente à:

$$|t \in W^{L_1,L_1} : tL_1 = L_1|(\Theta_1)(l_1) = |t \in W^{L_1,L_1} : tL_1 = L_1|(s^{-1}\Theta_2)(l_1)$$

ce qui implique, en utilisant de nouveau le théorème 2, que $\Theta_2 = s\Theta_1$.

La réciproque est claire. ■

Corollaire 7 *Soit $\Theta \in \mathcal{V}(G)$, il existe, modulo la conjugaison par W_0^G, une famille finie $\{(L_i, \Theta_i)\}_{1 \le i \le k}$ de paires supertempérées de G, non conjuguées deux à deux, tel que:*

$$\Theta = \sum_{1 \le i \le k} i_{G,L_i}(\Theta_i).$$

Preuve Se déduit de la proposition 6 et du théorème 4. ■

Soient $\pi \in \Pi(G)$ et (L, Θ) une paire supertempérée de G. On écrit $\Theta_\pi \hookrightarrow i_{G,L}(\Theta)$ si Θ_π apparaît dans la décomposition de $i_{G,L}(\Theta)$.

Théorème 8 *Soient (L_i, Θ_i), $i = 1, 2$, deux paires supertempérées de G et $\pi \in \Pi(G)$. Si Θ_π apparaît dans la décomposition de $i_{G,L_1}(\Theta_1)$ et $i_{G,L_2}(\Theta_2)$ alors il existe $t \in W_0^G$ tel que $tL_1 = L_2$. De plus $t\Theta_1$ apparaît dans la décomposition de Θ_2.*

Preuve Si $\Theta_\pi \hookrightarrow i_{G,L_2}(\Theta_2)$ alors, il est clair que $w\Theta_2 \hookrightarrow r_{L_2,G}(\Theta_\pi)$, pour un certain $w \in W_0^{L_2}$. Ainsi:

$$w\Theta_2 \hookrightarrow r_{L_2,G}(\Theta_\pi) \hookrightarrow r_{L_2,G} \circ i_{G,L_1}(\Theta_1)$$

En appliquant l'expression (5), on retrouve qu'il existe $t \in W_0^G$ vérifiant $tL_1 \subset L_2$ tel que: $w\Theta_2 \hookrightarrow i_{L_2,tL_1}(t\Theta_1)$, or ceci implique que $t\Theta_1 \hookrightarrow r_{tL_1,L_2}(w\Theta_2) = r_{tL_1,L_2}(\Theta_2)$. Comme $\Theta_2 \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(L_2)$, on déduit qu'ils existent $t \in W_0^G$ tel que $tL_1 = L_2$ et $t\Theta_1 \hookrightarrow \Theta_2$. Mais ceci implique que $t\Theta_1$ apparaît dans la décomposition de Θ_2. ■

***Corollaire 9* (Harish-Chandra [9])** *Soient (M_1, σ_1) et (M_2, σ_2) deux paires discrètes de G. Si $\Pi_{\sigma_1}(G)$ et $\Pi_{\sigma_2}(G)$ possèdent un constituant en commun alors il existe $t \in W_0^G$ tel que $tM_1 = M_2$ et $t\sigma_1 = \sigma_2$. Réciproquement s'il existe $t \in W_0^G$ tel que $tM_1 = M_2$ et $t\sigma_1 = \sigma_2$ alors $\Pi_{\sigma_1}(G) = \Pi_{\sigma_2}(G)$.*

Preuve Comme $\Theta_\sigma \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(G)$ si et seulement si $\sigma \in \Pi_2(G)$, [11, corollaire 2.6], le résultat se déduit du théorème 8. La réciproque est claire. ■

Terminons ce paragraphe par un résultat sur les traces compactes.

Notons par $P_t = M_t N_t$ le sous-groupe parabolique de G correspondant à l'élément semi-simple t de G [6] et G_c l'ensemble des éléments semi-simples t de G tel que $P_t = G$. L'ensemble G_c est appelé « *la partie compacte* » de G.

Lemme 10 *Soit $\Theta \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(G)$. Si $t \notin G_c \cap G'$ alors $\Theta(t) = 0$.*

Preuve Pour tout $t \in G'$, on a [3]: $\Theta(t) = \Theta_{P_t}(t)$ où Θ_{P_t} est le terme constant de Θ le long de P_t. Si P_t est un sous-groupe parabolique propre de G, on aura $\Theta(t) = 0$ car $\Theta \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(G)$. Autrement dit, $\Theta(t)$ est nul sauf si $P_t = G$. D'où le lemme. ■

Soient $\Theta \in \mathcal{V}(G)$ et $f \in \mathcal{C}(G)$. La *trace compacte* de Θ est définit par:

$$\langle \Theta, f \rangle_{G,c} := \int_{G_c} \Theta(x) f(x)\, dx.$$

Remarquons que le lemme 10 implique que si $\Theta \in \mathcal{V}_{\mathrm{st}}(G)$ alors:

$$\langle \Theta, f \rangle = \langle \Theta, f \rangle_{G,c}, \quad f \in \mathcal{C}(G).$$

Corollaire 11 *Si $\Theta \in \mathcal{V}(G)$ alors il existe une famille finie de paires supertempérées $\{(L_i, \Theta_i)\}_{1 \le i \le p}$, de G, telle que*

$$\langle \Theta, f \rangle = \sum_{1 \le i \le p} \langle \Theta_i, f_{L_i} \rangle_{L_i,c} \quad f \in \mathcal{C}(G).$$

Preuve Soit $\Theta \in \mathcal{V}(G)$. Le corollaire 7 implique que, modulo conjugaison par W_0^G, il existe une famille finie $\{(L_i, \Theta_i)\}_{1 \le i \le p}$ telle que:

$$\langle \Theta, f \rangle = \sum_{1 \le i \le p} i_{G,L_i}(\Theta_i)(f), \quad f \in \mathcal{C}(G).$$

Or, pour tout $1 \le i \le p$, et tout Q_i sous-groupe parabolique de G ayant L_i comme composante de Lévi, on a:

$$\langle \Theta_i, f_{L_i} \rangle_{L_i,c} = \Theta_i(f_{L_i}) = \Theta_i(f_{Q_i}) = i_{G,L_i}(\Theta_i)(f)$$

où f_{Q_i} est le terme constant de f le long de Q_i, d'où le corollaire. ■

Le corollaire 11 est un résultat plus fin, dans le cas tempéré, que la proposition 1 de Clozel [4].

3 Classification de $\Pi(G)$

La classification de $\Pi_\sigma(G)$ à travers $\Pi(\tilde{\mathfrak{R}}_\sigma, \chi_\sigma)$ fait intervenir beaucoup de choix, pour cela on se propose de classifier, dans ce paragraphe, $\Pi(G)$ à travers les limites de séries discrètes. Cette classification a été énoncée par Clozel comme conjecture [5].

Définition 12 Une représentation dans $\Pi(G)$ est dite essentielle (ou limite de série discrète [5]) si elle n'est pas proprement irréductiblement induite par induction parabolique. Notons:

$$\Pi_{\mathrm{ess}}(G) := \{\pi \in \Pi(G) \mid \pi \text{ est essentielle}\}.$$

À l'aide de ce qui précède, $\Pi_{\mathrm{ess}}(G)$ est une réunion disjointe sur les W_0^G-paires discrètes (M,σ) des ensembles:

$$\Pi_{\sigma,\mathrm{ess}}(G) := \Pi_\sigma(G) \cap \Pi_{\mathrm{ess}}(G).$$

Le $\Re_\sigma$-groupe de $i_{G,M}(\sigma)$ est dit *essentiel* si $\mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma} = \mathfrak{a}_G$.

Théorème 13 *Soient (M,σ) une paire discrète de G et $\pi \in \Pi_\sigma(G)$. $\pi \in \Pi_{\sigma,\mathrm{ess}}(G)$ si et seulement si le groupe $\Re_\sigma$ est essentiel.*

Preuve Si le groupe $\Re_\sigma$ n'est pas essentiel, alors il existe $L \in \mathcal{L}_0(M)$ tel que $\mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma} = \mathfrak{a}_L$ et donc tout élément de $\Re_\sigma$ laisse invariant point par point $\mathfrak{a}_L$, or ceci signifie que $\Re_\sigma = \Re_\sigma^L$, car $\Re_\sigma^L = \Re_\sigma \cap W^L(M)$. Mais $|\Pi(\tilde{\Re}_\sigma, \chi_\sigma)| = |\Pi_\sigma(G)|$ et $|\Pi(\tilde{\Re}_\sigma^L, \chi_\sigma)| = |\Pi_\sigma(L)|$. Ainsi $\Re_\sigma = \Re_\sigma^L$ implique $|\Pi_\sigma(G)| = |\Pi_\sigma(L)|$ et donc chaque composante irréductible de $i_{G,M}(\sigma)$ est de la forme $i_{G,L}(\tau)$ pour $\tau \in \Pi_\sigma(L)$.

Réciproquement. Supposons que $\Pi_\sigma(G)$ a un élément proprement irréductiblement induite, *i.e.*, il existe $\pi \in \Pi_\sigma(G)$ tel que $\pi = i_{G,L}(\tau)$ où $\tau \in \Pi(L)$ et $L \in \mathcal{L}_0$.

$\tau \in \Pi(L)$ implique qu'il existe, modulo conjugaison par W_0^L, une unique paire discrète (M_1,σ_1) de L tel que $\tau \in \Pi_{\sigma_1}(L)$. Dans ce cas, $\pi \in \Pi_\sigma(G) \cap \Pi_{\sigma_1}(G)$ et alors il existe $t \in W_0^G$ tel que $(M,\sigma) = (tM_1, t\sigma_1)$ (corollaire 9). Si on suppose que $(M,\sigma) = (M_1,\sigma_1)$, alors $L \in \mathcal{L}_0(M)$ et $\tau \in \Pi_\sigma(L)$. Sans perte de généralité, supposons que L satisfait la condition de compatibilité d'Arthur, *i.e.*, $L \in \mathcal{L}_0(M) \cap \mathcal{L}_A(M)$.

Le théorème 4 et l'expression (4) impliquent que le caractère de $\pi = \pi_\rho$, $\rho \in \Pi(\tilde{\Re}_\sigma, \chi_\sigma)$ s'écrit comme combinaison linéaire finie d'induites de supertempérées, *i.e.*,

$$\Theta_\pi = \sum_{S \in \mathcal{L}(\Re_\sigma)} i_{G,S}(\Theta_{\pi,S})$$

où, pour $S \in \mathcal{L}(\Re_\sigma)$, la paire $(S, \Theta_{\pi,S})$ est une paire supertempérée de G.

De même, le caractère de $\tau = \tau_{\rho_L}$, $\rho_L \in \Pi(\tilde{\Re}_\sigma^L, \chi_\sigma)$ s'écrit comme combinaison linéaire finie d'induites de supertempérées, *i.e.*,

$$\Theta_\tau = \sum_{T \in \mathcal{L}^L(\Re_\sigma^L)} i_{L,T}(\Theta_{\tau,T})$$

où, pour $T \in \mathcal{L}^L(\Re_\sigma^L)$, la paire $(T, \Theta_{\tau,T})$ est une paire supertempérée de L. Ce qui implique, par transitivité de l'induction, que:

$$\Theta_\pi = i_{G,L}(\Theta_\tau) = \sum_{T \in \mathcal{L}^L(\Re_\sigma^L)} i_{G,T}(\Theta_{\tau,T}).$$

Mais le corollaire 7 implique que la famille

$$\{(S, \Theta_{\pi,S})\}_{S \in \mathcal{L}(\Re_\sigma)} \quad \text{est conjuguée à la famille} \quad \{(T, \Theta_{\tau,T})\}_{T \in \mathcal{L}^L(\Re_\sigma^L)}.$$

En particulier, la famille $\{S; S \in \mathcal{L}(\Re_\sigma)\}$ est conjuguée à la famille $\{T; T \in \mathcal{L}^L(\Re_\sigma^L)\}$. Ainsi, si on suppose que ces deux familles sont égales, on obtient:

$$\mathfrak{a}_G \neq \mathfrak{a}_L \subset \mathfrak{a}_S \quad \text{pour tout } S \in \mathcal{L}(\Re_\sigma)$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2003-044-9 Published online by Cambridge University Press

et alors:

$$\mathfrak{a}_G \neq \mathfrak{a}_L \subset \bigcap_{S \in \mathcal{L}(\Re_\sigma)} \mathfrak{a}_S = \bigcap_{r \in \Re_\sigma} \mathfrak{a}_M^r = \mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma}.$$

D'où le théorème. ■

Le théorème 13 est une généralisation du lemme 1.3 de R. Herb [10].

***Corollaire 14* (Conjecture [5])** *Soit (M,σ) une paire discrète de G. Supposons que:*

$$i_{G,M}(\sigma) = \pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \cdots \oplus \pi_n.$$

Si $\pi_1 \in \Pi_{\mathrm{ess}}(G)$ alors tous les $\pi_i \in \Pi_{\mathrm{ess}}(G)$.

Preuve Se déduit du théorème 13. ■

***Proposition 15* (Conjecture [5])** *Toute représentation irréductible tempérée de G est irréductiblement induite d'une essentielle.*

Preuve Soit $\pi \in \Pi(G)$, on sait qu'il existe, modulo conjugaison par W_0^G, une unique paire discrète (M,σ) de G telle que $\pi \in \Pi_\sigma(G)$. On va distinguer deux cas:

— Si $\mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma} = \mathfrak{a}_G$, alors, le théorème 13 implique que $\pi \in \Pi_{\sigma,\mathrm{ess}}(G)$.
— Si $\mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma} \neq \mathfrak{a}_G$, alors, aussi le théorème 13 implique qu'il existe $L \in \mathcal{L}_0(M)$ et $\tau \in \Pi_\sigma(L)$ tel que π est proprement irréductiblement de τ.

Mais $\mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma} = \mathfrak{a}_L$ implique que $\Re_\sigma = \Re_\sigma^L$ et alors $\mathfrak{a}_M^{\Re_\sigma^L} = \mathfrak{a}_L$, ce qui signifie que $\Re_\sigma^L$ est essentiel. Donc, le théorème 13 implique que $\tau \in \Pi_{\sigma,\mathrm{ess}}(L)$, d'où la proposition. ■

Corollaire 16 *Soit $\pi \in \Pi(G)$, si:*

$$\pi = i_{G,L_1}(\delta_1), \quad \delta_1 \in \Pi_{\mathrm{ess}}(L_1), \quad L_1 \in \mathcal{L},$$
$$\pi = i_{G,L_2}(\delta_2), \quad \delta_2 \in \Pi_{\mathrm{ess}}(L_2), \quad L_2 \in \mathcal{L},$$

alors il existe $t \in G$ tel que $tL_1 = L_2$ et $t\delta_1 = \delta_2$.

Preuve Si $\delta_1 \in \Pi_{\mathrm{ess}}(L_1)$ alors le théorème 13 implique qu'il existe une paire discrète (M_1,σ_1) de L_1 vérifiant $\mathfrak{a}_{M_1}^{\Re_{\sigma_1}^{L_1}} = \mathfrak{a}_{L_1}$ tel que $\delta_1 \in \Pi_{\sigma_1}(L_1)$. Mais comme π est irréductiblement induite de δ_1, on aura $\Re_{\sigma_1} = \Re_{\sigma_1}^{L_1}$, ce qui revient à ce que $\mathfrak{a}_{M_1}^{\Re_{\sigma_1}} = \mathfrak{a}_{L_1}$. De même, $\delta_2 \in \Pi_{\mathrm{ess}}(L_2)$ implique qu'il existe une paire discrète (M_2,σ_2) de L_2 vérifiant $\mathfrak{a}_{M_2}^{\Re_{\sigma_2}} = \mathfrak{a}_{L_2}$ tel que $\delta_2 \in \Pi_{\sigma_2}(L_2)$. Ainsi $\pi = i_{G,L_1}(\delta_1) = i_{G,L_2}(\delta_2)$ implique $\pi \in \Pi_{\sigma_1}(G) \cap \Pi_{\sigma_2}(G)$ et donc il existe $t \in G$ tel que $(M_1,\sigma_1) = (tM_2, t\sigma_2)$ d'après le corollaire 9. Supposons que $(M,\sigma) := (M_1,\sigma_1) = (M_2,\sigma_2)$, alors on aura $\mathfrak{a}_L := \mathfrak{a}_{L_1} = \mathfrak{a}_{L_2}$ et donc $\delta_1 = \delta_2$ car $|\Pi_\sigma(G)| = |\Pi_\sigma(L)|$. ■

Références

[1] J. Arthur, *On Elliptic Tempered Characters.* Acta Math. **171**(1993), 73–138.
[2] J. Bernstein et Z. Zelevinsky, *Induced representations of reductive p-adic groups I.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10**(1977), 441–472.
[3] W. Casselman, *Characters and Jacquet modules.* Math. Ann. **230**(1977), 101–105.
[4] L. Clozel, *Invariant harmonic analysis on the Schwartz space of a reductive p-adic group.* In: Harmonic Analysis on Reductive Groups, Progr. Math. **101**(1991), 101–121.
[5] ———, *Orbital integrals on p-adic groups. A proof of the Howe conjecture.* Ann. of Math. **129**(1989), 237–251.
[6] P. Deligne, *Le support du caractère d'une représentation supercuspidale.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B (4) **283**(1976), Aii, A155–157.
[7] G. Van Dijk, *Computation of certain induced characters of p-adic groups.* Math. Ann. **199**(1972), 229–240.
[8] Harish-Chandra, *The Plancherel Formula for Reductive p-adic Groups.* In: Collected Papers, Vol. **IV**, Springer Verlag, 1984, 353–367.
[9] Harish-Chandra, *Supertempered distributions on real reductive groups.* In: Studies in Applied Math., Adv. Math. Suppl. Stud. **8**(1983), 139–158.
[10] R. Herb, *Elliptic representations for* $\mathrm{Sp}(2n)$ *et* $\mathrm{SO}(n)$*.* Pacific J. Math. **161**(1993), 347–358.
[11] ———, *Supertempered virtual characters.* Compositio Math. **93**(1994), 139–154.
[12] D. Kazhdan, *Cuspidal Geometry of p-adic Groups.* J. Analyse Math. **47**(1986), 1–36.
[13] A. J. Silberger, *Introduction to harmonic analysis on reductive p-adic groups.* Math. Notes **23**, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1979.

Laboratoire de Théorie des Groupes
Représentations – Applications
Institut de Mathématiques de Jussieu
175, rue du Chevaleret
75013 Paris
France