

GENERALISATION DE LA DECOMPOSITION DE KATO AUX OPÉRATEURS PARANORMAUX ET SPECTRAUX

par MOSTAFA MBEKHTA

(Received 28 October, 1985)

Introduction. Dans tout ce qui suit, H désigne un espace de Hilbert séparable, A un opérateur fermé de domaine $D(A)$ dans H , on note $B(H)$ l'ensemble des opérateurs bornés de H dans lui-même et $N(A)$, $R(A)$ respectivement le noyau de A , l'image de A .

En 1958, T. Kato a démontré dans [7] le théorème suivant.

Soit A un opérateur semi-Fredholm sur un espace de Hilbert H . Alors il existe une décomposition directe de $H = M \oplus N$ telle que

- (a) M, N sont invariants par A ,
- (b) $A \upharpoonright M$ est régulier (c'est-à-dire $R(A \upharpoonright M)$ est fermé et contient tous les noyaux itérés de $A \upharpoonright M$),
- (c) $N \subseteq D(A)$, $A \upharpoonright N$ est nilpotent de degré d .

Cette décomposition est connue sous le nom de décomposition de Kato de degré D . Les opérateurs admettant une telle décomposition ont été caractérisés en 1978 par J. P. Labrousse [8] et on les appelle les opérateurs quasi-Fredholm de degré d ; l'ensemble de ces opérateurs est noté $q\Phi(d)$ et contient évidemment les semi-Fredholm comme cas particuliers.

Une question se pose naturellement: sous quelles conditions sur A , peut-on généraliser la décomposition de Kato par une décomposition où (c) est remplacée par: $A \upharpoonright N$ est limite de nilpotents?

Dans ce travail on donne (Théorème 3.3) une caractérisation des opérateurs admettant une décomposition du type de Kato lorsque A est paranormal (voir [8]) et lorsque la condition (c) est remplacée par la condition

$$(c') \quad A \upharpoonright N \in \mathcal{Q}_{af} \cap \mathcal{Q}_{af}^*$$

où

$$\mathcal{Q}_{af} \cap \mathcal{Q}_{af}^* = \{T \in B(H) \mid T \text{ et } T^* \text{ sont des transformations quasi-affines d'opérateurs quasi-nilpotents}\}$$

(voir [2]). Si on note $qN = \{T \in B(H) \mid \sigma(T) = \{0\}\}$ c'est-à-dire l'ensemble des opérateurs quasi-nilpotents, alors on a $a: qN \not\subseteq \mathcal{Q}_{af} \cap \mathcal{Q}_{af}^* \not\subseteq$ l'adhérence de l'ensemble des nilpotents (voir [9]).

Dans le cas où A est spectral (au sens de Dunford [4]) on obtient (Corollaire 4.2) une décomposition du type de Kato où la condition (c) est remplacée par la condition (c'') $A \upharpoonright N \in qN$ et la condition (b) est remplacée par (b') $A \upharpoonright M$ est inversible. Les paragraphes 3 et 4 sont consacrés à la démonstration de ces résultats.

Dans le paragraphe 2 on s'est intéressé aux opérateurs réguliers c'est-à-dire tels que

Glasgow Math. J. **29** (1987) 159–175.

$R(A)$ soit fermé et $(\forall n \in \mathbb{N})N(A^n) \subseteq R(A)$; on notera $\text{Reg}(H)$ l'ensemble des opérateurs réguliers.

On sait que l'ensemble resolvant de A qu'on note

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe et est borné}\}$$

est ouvert dans \mathbb{C} et que l'opérateur $R(A, \lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ est analytique dans $\rho(A)$. Donc

$$(\forall \lambda \in \mathbb{C}) \quad \lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe et est borné.}$$

On va donner une généralisation de $\rho(A)$ où la notion d'inverse est remplacée par celle d'inverse généralisé. Notons $\text{reg}(A)$ l'ensemble resolvant généralisé de A défini par

$$\text{reg}(A) = \{\lambda_0 \in \mathbb{C} \mid \exists U_0 \text{ voisinage de } \lambda_0 \text{ dans } \mathbb{C}, \text{ tels que } \forall \lambda \in U_0, \exists B_\lambda \text{ opérateur continu sur } H \text{ à valeurs dans } D(A) \text{ et analytique dans } U_0, \text{ tel que } B_\lambda \text{ soit un inverse généralisé de } (A - \lambda I)\}.$$

On a évidemment $\rho(A) \subseteq \text{reg}(A)$ et on montre dans le Théorème 2.6, le résultat suivant:

$$\lambda \in \text{reg}(A) \Leftrightarrow A - \lambda I \text{ est régulier.}$$

On verra aussi que si $\dim H < \infty$ alors $\rho(A) = \text{reg}(A)$ (c'est-à-dire que tout opérateur régulier est inversible); ce résultat reste vrai (avec H Hilbert quelconque) et A spectral ou décomposable. Ceci montre que la notion d'opérateur régulier généralise celle d'opérateur inversible.

Pour établir les résultats des paragraphes 2, 3 et 4, on aura besoin d'une part d'introduire la notion du coeur analytique $K(A)$ d'un opérateur (inspirée de celle de coeur d'un opérateur (P. Saphar [10])) et d'autre part d'étudier ses relations avec

$$H_0(A) = \{u \in D^\infty(A) \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n u\|^{1/n} = 0\}$$

sous-espace connu dans la littérature. C'est l'objet du paragraphe 1 et notamment on démontre dans le Théorème 1.6 que λ_0 est un point isolé du spectre de A si et seulement si

$$H = H_0(A - \lambda_0 I) \oplus K(A - \lambda_0 I) \quad \text{et} \quad H_0(A - \lambda_0 I) \neq \{0\}.$$

Ce théorème généralise le Théorème 5.8.A et le Théorème 5.8.D de Taylor [11], car si λ_0 est un pôle d'ordre d alors on a

$$H_0(A - \lambda_0 I) = N((A - \lambda_0 I)^d) \quad \text{et} \quad K(A - \lambda_0 I) = R((A - \lambda_0 I)^d).$$

Je tiens à remercier le referee pour ses suggestions qui m'ont permis d'améliorer la rédaction de ce travail.

1. Caractérisation des points isolés du spectre. On notera

$$K(A) = \{u \in H \mid \exists a > 0, \quad \forall n \geq 0 \quad \exists v_n \in D(A^n) \text{ tels que} \\ (1) v_0 = u \text{ et } Av_{n+1} = v_n, (2) \|v_n\| \leq a^n \|u\| \quad \forall n \geq 0\}.$$

REMARQUE 1.1.

- (1) $K(A)$ et $H_0(A)$ sont des sous-espaces de H non nécessairement fermés.
- (2) $A(K(A) \cap D(A)) = K(A)$ et $H_0(A) \subseteq D(A)$, $A(H_0(A)) \subseteq H_0(A)$.
- (3) $K(A)$ est lié au coeur de l'opérateur A par la proposition suivante, (rappelons que le coeur de A noté $\text{Co}(A)$ (voir [10]) est par définition le plus grand sous-espace M de H tel que $A(M \cap D(A)) = M$).

LEMME 1.2. Soit A un opérateur fermé. Alors on a

- (a) $H_0(A) \subseteq \{u \in H : \gamma_A(u) \subset \{0\}\}$;
on a l'égalité si A a la S.V.E.P.
- (b) $K(A) = \{u \in H : 0 \in \delta_A(u)\}$.

Démonstration. Pour les définitions de $\gamma_A(u)$, $\delta_A(u)$ et de la S.V.E.P. voir [13] et [14].

- (a) Est une simple vérification.
- (b) Se déduit directement du Lemme 1.1 [14].

PROPOSITION 1.3. Soit A un opérateur fermé. Alors

$$\text{Co}(A) \text{ fermé dans } H \Rightarrow K(A) = \text{Co}(A).$$

Démonstration. D'après la remarque précédente (2), il suffit de montrer que $\text{Co}(A) \subseteq K(A)$; remarquons d'abord que $\text{Co}(A) \cap D(A)$ est fermé dans $D(A)$; soit $A : \text{Co}(A) \cap D(A) \rightarrow \text{Co}(A)$; la restriction de A à $\text{Co}(A) \cap D(A)$ est surjective $\Rightarrow \exists B$ borné inverse à droite de A tel que $\forall u \in \text{Co}(A)$ on a $u = ABu$ avec $Bu \in \text{Co}(A) \cap D(A)$ en posant $v_n = B^n u \in D(A^n)$ on a $v_0 = u$ et $Av_{n+1} = AB^{n+1}u = B^n u = v_n$ et $\|v_n\| \leq \|B\|^n \cdot \|u\|$ donc $u \in K(A)$ d'où $\text{Co}(A) \subseteq K(A)$.

REMARQUE. Dans le cas des opérateurs $q\Phi(d)$ on a

$$K(A) = \text{Co}(A) = \bigcap_{j \geq 0} R(A^j)$$

(voir [9, Théorème 1.5.4]).

PROPOSITION 1.4. Soit $T \in B(H)$. Alors

$$T \text{ quasi-nilpotent} \Rightarrow K(T) = K(T^*) = \{0\}.$$

Démonstration. C'est une simple vérification.

PROPOSITION 1.5. Soit A un opérateur fermé. Alors sont équivalents:

- (i) $H_0(A) = H$;
- (ii) A quasi-nilpotent.

Démonstration. Voir [14, Théorème 1.5].

THÉORÈME 1.6. Soit A un opérateur fermé. Alors les conditions suivantes sont

équivalentes:

- (1) $\lambda_0 \in \sigma(A)$ est isolé dans $\sigma(A)$;
- (2) $H = H_0(A - \lambda_0 I) \oplus K(A - \lambda_0 I)$ et $H_0(A - \lambda_0 I) \neq \{0\}$
(où \oplus est la somme topologique).

Démonstration.

(1) \Rightarrow (2). Sans perte de généralité prenons $\lambda_0 = 0$, donc 0 est isolé dans $\sigma(A)$ et par le théorème de “séparation du spectre” on a $H = N \oplus M$, où N et M sont invariants par A et $\sigma(A | N) = \{0\}$, $0 \notin \sigma(A | M)$. D’après le Lemme 5.8.c [11] on a $N = H_0(A)$ (en particulier $H_0(A) \neq \{0\}$) et d’autre part $0 \in \rho(A | M) \Rightarrow A | M$ est surjectif $\Rightarrow A(M \cap D(A)) = M$ et M fermé $\Rightarrow M \subseteq K(A)$; donc

$$H = N \oplus M = H_0(A) \oplus M = H_0(A) + K(A),$$

montrons que $H_0(A) \cap K(A) = \{0\}$. Remarquons que

$$H_0(A) \cap K(A) = K(A | H_0(A));$$

“ \supseteq ” est évident et l’autre inclusion découle du fait que

$$u = A^n v_n \in H_0(A) \Rightarrow v_n \in H_0(A).$$

Comme $H_0(A) = N$ est fermé $\Rightarrow A | H_0(A)$ est quasi-nilpotent (cf. Proposition 1.5) et d’après la Proposition 1.4 on a $K(A | H_0(A)) = \{0\}$ on voit que $H_0(A) \cap K(A) = \{0\}$ d’où $H = H_0(A) \oplus K(A)$ et $H_0(A) \neq \{0\}$.

(2) \Rightarrow (1). $H = H_0(A) \oplus K(A) \Rightarrow H_0(A)$ est fermé $\Rightarrow A | H_0(A)$ est quasi-nilpotent i.e. $\sigma(A | H_0(A)) = \{0\}$, de même (2) $\Rightarrow K(A)$ est fermé $\Rightarrow A | K(A)$ est surjectif et $H_0(A) \cap K(A) = \{0\} \Rightarrow N(A) \cap K(A) = \{0\} \Rightarrow A | K(A)$ est injectif donc $0 \in \rho(A | K(A))$ et comme l’ensemble résolvant est ouvert $\Rightarrow \exists V$ voisinage de zéro dans \mathbb{C} inclus dans $\rho(A | K(A))$ donc $\forall \lambda \in V - \{0\}$ on a $\lambda \in \rho(A | H_0(A)) \cap \rho(A | K(A)) = \rho(A) \Rightarrow 0$ est isolé dans $\sigma(A)$.

REMARQUE 1.7. Le théorème précédent généralise le Théorème 5.8.A. et le Théorème 5.8.D. de Taylor [11], car si λ_0 est un pôle d’ordre d , alors on a

$$H_0(A - \lambda_0 I) = N((A - \lambda_0 I)^d) \quad \text{et} \quad K(A - \lambda_0 I) = R((A - \lambda_0 I)^d).$$

PROPOSITION 1.8. Si A est fermé avec $\overline{D(A)} = H$ on a

$$\overline{H_0(A)} \subseteq K(A^*)^\perp.$$

Démonstration. Montrons que $H_0(A) \subseteq K(A^*)^\perp$, soit $w \in H_0(A)$ et $u \in K(A^*)$, par définition de $K(A^*)$ on a

$$\forall n \geq 0, u = A^{*n} v_n \quad \text{avec} \quad v_n \in D(A^{**n}) \quad \text{et} \quad \|v_n\| \leq a^n \cdot \|u\|$$

d’où

$$(w, u) = (w, A^{*n} v_n) = (A^n w, v_n) \quad \forall n \geq 0$$

car $w \in H_0(A) \subseteq D(A^n)$. Donc

$$|(w, u)| \leq \|A^n w\| \cdot \|v_n\| \leq a^n \cdot \|A^n w\| \cdot \|u\| \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$ car $w \in H_0(A)$.

Donc $|(w, u)| = 0 \Rightarrow (w, u) = 0 \Rightarrow H_0(A) \subseteq K(A^*)^\perp$ d'où $\overline{H_0(A)} \subseteq K(A^*)^\perp$.

QUESTION 1. A-t-on l'inclusion inverse i.e.

$$K(A^*)^\perp \subseteq \overline{H_0(A)} ?$$

REMARQUE 1.9. La réponse à cette question est affirmative dans le cas des opérateurs $q\Phi(d)$ (voir [9, Proposition 2.3.2]).

2. Quelques résultats sur les opérateurs réguliers. Soit A et B deux opérateurs fermés d'un espace de Hilbert H dans lui-même de domaines $D(A)$ et $D(B)$ respectivement dans H .

DÉFINITION 2.1. On dira que l'opérateur B est un *inverse généralisé de A* et on notera $B \text{ (inv) } A$ si et seulement si $R(B) \subseteq D(A)$, $R(A) \subseteq D(B)$ et $ABA = A$ sur $D(A)$, $BAB = B$ sur $D(B)$.

REMARQUES. (1) Cette relation est symétrique.

(2) si $B \text{ (inv) } A$ alors AB est un projecteur tels que $R(AB) = R(A)$ et $N(AB) = N(B)$.

(3) Inverse de Moore–Penrose: l'opérateur $\hat{A} = A \mid D(A) \cap N(A)^\perp \rightarrow \overline{R(A)}$ est injectif et à image dense dans $\overline{R(A)}$. On pose

$$B \mid R(A) = \hat{A}^{-1}, \quad B \mid R(A)^\perp = 0.$$

On a

$$D(B) = R(A) \oplus R(A)^\perp \Rightarrow R(A) \subseteq D(B)$$

et

$$R(B) = R(\hat{A}^{-1}) = D(A) \cap N(A)^\perp \subseteq D(A)$$

et il est clair que $ABA = A$, $BAB = B$; on vérifie que, ainsi défini B est un inverse généralisé de A . On voit facilement que si $R(A)$ est fermé alors B est borné.

DÉFINITION 2.2. A est dit *régulier* si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(A^n) \subseteq R(A) \quad \text{et} \quad R(A) \quad \text{est fermé.}$$

EXEMPLES.

- (1) A surjectif.
- (2) A injectif et $R(A)$ fermé.

LEMMA 2.3. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

- (a) $\forall m \in \mathbb{N}, \quad N(A) \subseteq R(A^m)$;
- (b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(A^n) \subseteq R(A)$;
- (c) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad N(A^n) \subseteq R(A^m)$.

Démonstration. (a) \Rightarrow (b) par induction sur n ; pour $n = 0$ c'est évident et pour $n = 1$ c'est une conséquence immédiate de (a); supposons que (b) est démontré pour $n = k$ et soit

$$u \in N(A^{k+1}) \Rightarrow A^k u \in N(A) \subseteq R(A^{k+1})$$

par (a). Donc $\exists v \in N(A^{k+2})$ tel que $A^k u = A^{k+1} v \Rightarrow u = Av + w$ où $w \in N(A^k) \subseteq R(A)$ par hypothèse d'induction. Donc $u \in R(A)$ c'est-à-dire $N(A^{k+1}) \subseteq R(A)$.

(b) \Rightarrow (c) par induction sur m , pour $m = 0$ et $m = 1$ d'après (b) on a (c) $\forall n \in \mathbb{N}$. Supposons que (c) est démontré pour $m = k$ et $\forall n \in \mathbb{N}$. Soit $u \in N(A^n)$ avec $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Alors (b) $\Rightarrow \exists v \in N(A^{n+1})$ tel que $Av = u$ et comme par hypothèse d'induction $N(A^{n+1}) \subseteq R(A^k)$ on voit que $v \in R(A^k) \Rightarrow u \in R(A^{k+1})$ ce qui établit (c).

(c) \Rightarrow (a). Il suffit de prendre dans (c) $n = 1$.

PROPOSITION 2.4. Soit B un inverse généralisé quelconque de A et A régulier. Alors on a

- (1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 \leq k \leq n, N(A^k) \subseteq R(A^{n-k+1})$,
- (2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, B : R(A^{n+1}) \rightarrow R(A^n)$,
- (3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, B : N(A^n) \rightarrow N(A^{n+1})$.

Démonstration. (1) Par induction sur k et en appliquant le Lemma 2.3 et la Définition 2.2. (2) Soit $u \in R(A^{n+1}) \Rightarrow \exists v \in D(A^{n+1})$ tel que $u = A^{n+1}v$. On a

$$(BA - I)A^n v \in N(A) \subseteq R(A^n)$$

du fait que A est régulier et du Lemma 2.3; comme $A^n v \in R(A^n)$ donc

$$BA^{n+1}v \in R(A^n) \Rightarrow Bu \in R(A^n).$$

(3) Soit $u \in N(A^n)$. A régulier $\Rightarrow N(A^n) \subseteq R(A) \Rightarrow u \in R(A)$. Donc $\exists v \in D(A)$ tel que $u = Av, A^{n+1}Bu = A^{n+1}BAv = A^nABA v = A^nAv = A^nu = 0$. Donc $A^{n+1}Bu = 0 \Rightarrow Bu \in N(A^{n+1})$.

COROLLAIRE 2.5. Sous les hypothèses de la Proposition 2.4 on a

$$B^k : N(A) \rightarrow N(A^{k+1}),$$

$$B^k : R(A^{k+1}) \rightarrow R(A).$$

Démonstration. Se déduit à partir de (2) et (3) de la Proposition 2.4.

Il est bien connu que l'ensemble résolvant de A qu'on note

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe et est borné}\}$$

est ouvert dans \mathbb{C} et que l'opérateur $R(A, \lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ est analytique dans $\rho(A)$. On va donner une généralisation de $\rho(A)$ où la notion d'inverse est remplacée par celle d'inverse généralisé. Notons $\text{reg}(A)$ l'ensemble résolvant généralisé de A défini par

$$\text{reg}(A) = \{\lambda_0 \in \mathbb{C} \mid \exists U_0 \text{ voisinage de } \lambda_0 \text{ dans } \mathbb{C}, \text{ tel que}$$

$$\forall \lambda \in U_0, \exists B_\lambda \text{ opérateur continu sur } H \text{ à valeurs}$$

$$\text{dans } D(A) \text{ et analytique dans } U_0, \text{ tel que } B_\lambda \text{ soit}$$

$$\text{un inverse généralisé de } (A - \lambda I)\}.$$

On a évidemment $\rho(A) \subseteq \text{reg}(A)$. Le théorème suivant montre le lien entre $\text{reg}(A)$ et les opérateurs réguliers.

THÉORÈME 2.6. Soit A un opérateur fermé et $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Alors sont équivalents:

- (i) $\lambda_0 \in \text{reg}(A)$;
- (ii) $A - \lambda_0 I$ est régulier.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii). $(A - \lambda_0 I)B_{\lambda_0} = P_{\lambda_0}$ est une projection sur $R(A - \lambda_0 I)$ (voir remarque (2) de la Définition 2.1). Montrons que P_{λ_0} est un opérateur continu de domaine égal à H . Pour cela on a: si A un opérateur fermé, B un opérateur continu tel que $R(B) \subseteq D(A)$, alors AB est continu.

On en déduit que P_{λ_0} est continu ($\forall \lambda_0 \in \text{reg}(A)$). Or P_{λ_0} est un projecteur ($P_{\lambda_0}^2 = P_{\lambda_0}$), donc $R(P_{\lambda_0})$ est fermé dans H , comme $R(P_{\lambda_0}) = R(A - \lambda_0 I)$ on a donc montré que $R(A - \lambda_0 I)$ est fermé. Il reste à montrer que $N((A - \lambda_0 I)^n) \subseteq R(A - \lambda_0 I)$, $\forall n \geq 0$. Tout d'abord, on remarque que

$$\text{si } \lambda \neq \lambda_0, \quad N((A - \lambda_0 I)^n) \subseteq R(A - \lambda I) \quad \forall n \geq 0,$$

en effet, soit $u \in D((A - \lambda_0 I)^n)$ et $(A - \lambda_0 I)^n u = 0$, on a

$$[(A - \lambda I) + (\lambda - \lambda_0)I]^n u = 0.$$

La formule du binôme de Newton nous donne

$$\left[\sum_{j=0}^n \binom{j}{n} (A - \lambda I)^j \cdot (\lambda - \lambda_0)^{n-j} \right] u = 0 \Rightarrow (\lambda - \lambda_0)^n u = - \sum_{j=1}^n \binom{j}{n} (A - \lambda I)^j (\lambda - \lambda_0)^{n-j} u,$$

d'où $(\lambda - \lambda_0)^n u \in R(A - \lambda I)$; puisque $\lambda \neq \lambda_0$ on a $u \in R(A - \lambda I)$; donc $N((A - \lambda_0 I)^n) \subseteq R(A - \lambda I)$ si $\lambda_0 \neq \lambda$; donc pour $u \in N((A - \lambda_0 I)^n)$ on a $u \in R(A - \lambda I) = R(P_\lambda)$. Donc

$$u = P_\lambda u \Rightarrow u = (P_\lambda - P_{\lambda_0})u + P_{\lambda_0} u,$$

or P_λ est une fonction analytique en λ_0 donc continue sur un voisinage U de λ_0 , faisons tendre λ vers λ_0 dans l'expression précédente alors $P_\lambda \rightarrow P_{\lambda_0}$ d'où $u = P_{\lambda_0} u$ i.e. $u \in R(P_{\lambda_0}) = R(A - \lambda_0 I)$ donc

$$N((A - \lambda_0 I)^n) \subseteq R(A - \lambda_0 I), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc $(A - \lambda_0 I)$ est régulier.

(ii) \Rightarrow (i). Sans perte de généralité on supposera $\lambda_0 = 0$. A et $I \mid D(A): D(A) \rightarrow H$ seront considérés comme des opérateurs dans $B(D(A), H)$, où $D(A)$ est muni de la norme du graphe. Soit B_0 l'inverse généralisé de A respectant les décompositions $H = R(A) \oplus R(A)^\perp$ et $D(A) = N(A) \oplus N(A)^\perp$. Alors $B_0 \in B(H, D(A))$ car $R(A)$ est fermé. Remarquons que $B_0 A = I - P$ où $P: D(A) \rightarrow D(A)$ est la projection orthogonale sur $N(A)$. Pour $|\lambda| < \|B_0\|^{-1}$ montrons que

$$(I - \lambda B_0)^{-1} (A - \lambda I): N(A) \rightarrow R(A).$$

Soit $u \in N(A)$; on a

$$(I - \lambda B_0)^{-1} (A - \lambda I)u = -(I - \lambda B_0)^{-1} \lambda u.$$

Par la série de Neumann on obtient

$$(I - \lambda B_0)^{-1}(A - \lambda I)u = - \sum_{j \geq 0} \lambda^{j+1} B_0^j u$$

et en utilisant le Corollaire 2.5 et la régularité de A , on en déduit que

$$(I - \lambda B_0)^{-1}(A - \lambda I)u \in R(A),$$

$R(A)$ étant fermé. Ceci montre que les hypothèses du Théorème 3.9 [12] sont vérifiées (remarquons que dans [12, Théorème 3.9] la condition (3.10) doit se lire $(I + \lambda A^+)^{-1}B$ envoie $N(A)$ dans $R(A)$). Par conséquent

$$B_\lambda = B_0(I - \lambda B_0)^{-1} = (I - \lambda B_0)^{-1}B_0$$

est un inverse généralisé de $A - \lambda I$, analytique et à valeur dans $D(A)$ pour $|\lambda| < \|B_0\|^{-1}$. Donc $0 \in \text{reg}(A)$.

REMARQUE 2.7.

$$\rho(A) \subseteq \text{reg}(A) \subseteq \rho(A) \cup \sigma_d(A) \cup \sigma_r(A).$$

En effet si $\lambda \in \sigma_c(A) \Rightarrow R(A - \lambda I)$ n'est pas fermé par conséquent $\lambda \notin \text{reg}(A)$.

PROPOSITION 2.8 (cf. [8, Prop. 3.3.3.]). Soit A un opérateur régulier et $D(A)$ dense dans H . Alors A^* est régulier et

$$\forall n \geq 0, \quad N(A^n)^\perp = R(A^{**n}) \quad \text{et} \quad N(A^{**n})^\perp = R(A^n).$$

REMARQUE. $N(A^{**n})^\perp = R(A^n) \Rightarrow R(A^n)$ est fermé.

COROLLAIRE 2.9. $D(A)$ dense dans H . Alors

$$\text{reg}(A^*) = \overline{\text{reg}(A)} \quad (\text{conjugué complexe})$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{reg}(A^*) &\Leftrightarrow A^* - \lambda I \text{ est régulier} \Leftrightarrow A - \bar{\lambda} I \text{ est régulier} \\ &\Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \text{reg}(A) \Leftrightarrow \lambda \in \overline{\text{reg}(A)}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.10. Si A est régulier alors

$$\overline{H_0(A)} = \bigcup_{j \geq 0} \overline{N(A^j)}.$$

Démonstration. Tout d'abord on a le lemma suivant.

LEMME. Si A est régulier alors

$$\gamma(A^{n+m}) \geq \gamma(A^n) \cdot \gamma(A^m) \quad (\forall n, m \in \mathbb{N}),$$

où $\gamma(A)$ est la conorme de A (voir [6], [5]).

Démonstration. Voir [5].

Démonstration de la proposition. Soit $u \in H_0(A)$ et $u \perp \bigcup_{j \geq 0} N(A^j) \Rightarrow \forall j \geq 0, u \perp N(A^j)$ or d'après la Proposition 2.8; A régulier $\Rightarrow \forall j \geq 0, R(A^j)$ est fermé d'où d'après ([6, Théorème IV 1.6] $\forall j \geq 0, \gamma(A^j) > 0$ et comme

$$u \perp N(A^j) \Rightarrow \forall j \geq 0 \|A^j u\| \geq \gamma(A^j) \|u\|$$

et d'après le lemme précédent on a

$$\|A^j u\| \geq \gamma(A^j) \|u\| \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \|A^j u\|^{1/j} \geq \gamma(A) > 0 \Rightarrow u \notin H_0(A),$$

ce qui contredit l'hypothèse $u \in H_0(A)$. Donc $u = 0$,

$$H_0(A) \cap \left[\bigcup_{j \geq 0} N(A^j) \right]^\perp = \{0\}$$

et comme $\bigcup_{j \geq 0} N(A^j) \subseteq H_0(A)$ on en déduit que

$$\overline{H_0(A)} = \overline{\bigcup_{j \geq 0} N(A^j)}.$$

THÉORÈME 2.11. A régulier et $H_0(A)$ fermé $\Rightarrow H_0(A) = \{0\}$.

Démonstration. Soit $\hat{A} = A |_{H_0(A)}$ la restriction de A à $H_0(A)$. $H_0(A)$ est fermé donc c'est un Hilbert et comme $A(H_0(A)) \subseteq H_0(A)$ on a: $\hat{A} : H_0(A) \rightarrow H_0(A)$ et on voit que $\hat{A} \in B(H_0(A))$ (car $H_0(A) \subseteq D(A)$) et $H_0(A) = H_0(\hat{A}) \Rightarrow \hat{A}$ est quasi-nilpotent (d'après la proposition 1.5). A régulier $\Rightarrow \forall j \geq 0, N(A^j) \subseteq R(A) \Rightarrow \bigcup_{j \geq 0} N(A^j) \subseteq R(A)$. $R(A)$ fermé $\Rightarrow \overline{\bigcup_{j \geq 0} N(A^j)} \subseteq R(A)$, et d'après la Proposition 2.10 on en déduit que $H_0(A) = \overline{H_0(A)} \subseteq R(A)$, donc $H_0(A) = H_0(A) \cap R(A) = A(H_0(A)) = \hat{A}(H_0(A))$ (la deuxième égalité est due au fait que si $u = Av \in H_0(A)$ alors $v \in H_0(A)$).

Or $\hat{A}(H_0(A)) = H_0(A) \Rightarrow \hat{A}$ est surjectif $\Rightarrow H_0(A) = K(\hat{A})$ or \hat{A} est quasi-nilpotent $\Rightarrow K(\hat{A}) = \{0\}$ d'après la Proposition 1.4. D'où $H_0(A) = \{0\}$.

COROLLAIRE 2.12. Soit $T \in B(H)$. Si l'une des quatre conditions suivantes est vérifiée

- (1) $\dim H < \infty$,
- (2) T spectral,
- (3) T décomposable,

alors $\text{reg}(T) = \rho(T)$.

Démonstration. Dans chacun des cas on montre que $H_0(T - \lambda I)$ est fermé; donc si $\lambda \in \text{reg}(T)$, d'après le Théorème 2.11. On en déduit que $H_0(T - \lambda I) = \{0\}$. Donc $N(T - \lambda I) = \{0\}$ si $\lambda \in \text{reg}(T)$. En utilisant la symétrie avec l'adjoint on obtient $N(T^* - \bar{\lambda}I) = \{0\}$ si $\lambda \in \text{reg}(T)$. Donc $R(T - \lambda I) = H$ si $\lambda \in \text{reg}(T)$, d'où $\text{reg}(T) \subseteq \rho(T)$.

LEMME 2.13. Soit $T = XNX^{-1} + Q$ la décomposition canonique de l'opérateur spectral

T (voir [4]). Alors

$$H_0(T) = N(XNX^{-1}) = XN(N)$$

et donc fermé.

Démonstration. On a XNX^{-1} commute avec $Q \Rightarrow T$ est quasi-nilpotent équivalent à XNX^{-1} en utilisant les termes de [3] et d'après le Corollaire 3.5 de [3], page 52, on a $H_T(F) = H_{XNX^{-1}}(F)$ pour tout F fermé de \mathbb{C} or $H_T(0) = H_0(T)$, toujours d'après [3, p. 113], donc $H_0(T) = H_0(XNX^{-1})$ comme N est normal $\Rightarrow H_0(N) = N(N)$; on en déduit que $H_0(T) = H_0(XNX^{-1}) = XH_0(N) = XN(N) = N(XNX^{-1})$; donc $H_0(T)$ est fermé comme noyau d'un opérateur continu.

COROLLAIRE 2.14. Si $H \neq \{0\}$ alors $\text{Reg}(H) \cap qN = \emptyset$, où

$$\text{Reg}(H) = \{T \in B(H) \mid T \text{ régulier}\}.$$

Démonstration. La Proposition 1.5 \Rightarrow si $A \in qN$ alors $H_0(A) = H$ donc $H_0(A)$ est fermé et d'après le Théorème 2.11, A régulier et $H_0(A)$ fermé $\Rightarrow H_0(A) = \{0\}$. Donc $H = \{0\}$ et comme $0 \notin \text{Reg}(H)$ on en déduit que $\text{Reg}(H) \cap qN = \emptyset$.

COROLLAIRE 2.15. Si $d \geq 1$ alors

$$q\Phi(d) \cap qN = \{\text{nilpotents de degré } d\}.$$

Démonstration. On utilise la décomposition de Kato et le Corollaire 2.14.

3. Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux. Dans tout ce qui suit T désigne un opérateur borné de H dans lui-même. Posons $T_0 = T^*$ et pour $j \in \mathbb{N}$, $T_{j+1} = i[T, T_j]$, le commutateur de T et de T_j multiplié par $i = \sqrt{-1}$.

DÉFINITION 3.1. Nous dirons que T est *paranormal* si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|^{1/n} = 0$; nous écrivons alors $T \in pN$.

REMARQUES. La notion des opérateurs paranormaux a été introduite par J. P. Labrousse dans [8] et notamment on y trouve les démonstrations des résultats suivants:

- (1) T normal $\Rightarrow T \in pN$;
- (2) T quasi-nilpotent $\Rightarrow T \in pN$;
- (3) $T \in pN \Leftrightarrow T^* \in pN$;
- (4) on a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$T^*T^n = i^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-iT)^j T_{n-j}.$$

DÉFINITIONS 3.2. Un opérateur $X \in B(H)$ est dit *quasi-inversible* si X est injectif et à image dense dans H . Un opérateur T est une transformation *quasi-affine* d'un opérateur $S \in B(H)$ s'il existe un opérateur X quasi-inversible tel que $XT = SX$. On note

$\mathcal{Q}_{af} = \{T \in B(H) \mid T \text{ une transformation quasi-affine d'un opérateur quasi-nilpotent}\}$,
et

$$\mathcal{Q}_{af}^* = \{T \in B(H) \mid T^* \in \mathcal{Q}_{af}\}.$$

REMARQUES.

- (1) $qN \not\subseteq \mathcal{Q}_{af} \cap \mathcal{Q}_{af}^* \not\subseteq$ l'adhérence des opérateurs nilpotents ([9, ch. III]).
- (2) Apostol [2] a caractérisé les opérateurs de $\mathcal{Q}_{af} \cap \mathcal{Q}_{af}^*$ par le théorème suivant.

THÉORÈME (Apostol). *Si H est Hilbert séparable alors*

$$\overline{H_0(T)} = \overline{H_0(T^*)} = H \Leftrightarrow T \in \mathcal{Q}_{af} \cap \mathcal{Q}_{af}^*.$$

Démonstration. Voir [2].

THÉORÈME 3.3. *Soit T un opérateur paranormal. Alors (1) et (2) sont équivalents:*

- (1) $R(T) + \overline{H_0(T)}$ fermé dans H , $R(T^*) + \overline{H_0(T^*)}$ fermé dans H ;
- (2) (a) $\exists M, N$ deux sous-espaces fermés dans H tels que $H = M \oplus N$,
- (b) $T(M) \subseteq M$, $T^*(M) \subseteq M$ et si on note $T_0 = T \upharpoonright M$, $T_0^* = T^* \upharpoonright M$ alors T_0 et T_0^* sont réguliers,
- (c) $T(N) \subseteq N$, $T^*(N) \subseteq N$ et $T \upharpoonright N \in \mathcal{Q}_{af} \cap \mathcal{Q}_{af}^*$.

Pour la démonstration de ce théorème on a besoin de quelques lemmes et propositions.

LEMME 3.4. *Si T est paranormal alors*

$$T^*(H_0(T)) \subseteq H_0(T).$$

Démonstration. La remarque (4) de la Définition 3.1

$$\Rightarrow T^n T^* = (-i)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} T_{n-j}(iT)^j.$$

En appliquant cette dernière égalité et le fait que T est paranormal, on montre que $T^*u \in H_0(T)$ si $u \in H_0(T)$.

REMARQUES 3.5. (1) Dans la suite on notera

$$H_0 = H_0(T), \quad H_0^* = H_0(T^*) \quad \text{et} \quad K = K(T), \quad K^* = K(T^*).$$

$$(2) \quad T(H_0) \subseteq H_0, \quad T^*(H_0) \subseteq H_0 \Leftrightarrow T(H_0^\perp) \subseteq H_0^\perp, \quad T^*(H_0^\perp) \subseteq H_0^\perp.$$

LEMME 3.6. *Si T est paranormal et $R(T) + \overline{H_0}$ est fermé dans H alors $\tilde{T} = T \upharpoonright H_0^\perp$ est injectif et à image fermé.*

Démonstration. D'après la Remarque 3.5 (2) on a $T(H_0^\perp) \subseteq H_0^\perp$, donc $\tilde{T}: H_0^\perp \rightarrow H_0^\perp$; par ailleurs

$$R(T) \subseteq T(H_0^\perp + \tilde{H}_0) \subseteq T(H_0^\perp) + \tilde{H}_0 \Rightarrow R(T) + \tilde{H}_0 \subseteq T(H_0^\perp) + \tilde{H}_0$$

d'où $R(T) + \tilde{H}_0 = T(H_0^\perp) + \tilde{H}_0 \Rightarrow T(H_0^\perp) + \tilde{H}_0$ est fermé (1), et comme $T(H_0^\perp) \subseteq H_0^\perp$ on a $T(H_0^\perp) \cap \tilde{H}_0 = \{0\}$ (2). Alors (1) et (2) et la Proposition 2.1.1 [8] $\Rightarrow T(H_0^\perp)$ est fermé, donc $R(\tilde{T})$ est fermé. D'autre part

$$N(\tilde{T}) = N(T) \cap H_0^\perp \subseteq H_0 \cap H_0^\perp = \{0\} \Rightarrow N(\tilde{T}) = \{0\},$$

donc \tilde{T} est injectif.

LEMME 3.7. Si T est paranormal et $R(T) + \bar{H}_0$ est fermé dans H alors $H_0^\perp = K^*$.

Démonstration. D'après le Lemme 3.6 on a

$$T \mid H_0^\perp \text{ est injectif et } T(H_0^\perp) \text{ est fermé} \Rightarrow T^* \mid H_0^\perp \text{ est surjectif;}$$

donc $H_0^\perp = K(T^* \mid H_0^\perp) \subseteq K(T^*) = K^* \Rightarrow H_0^\perp \subseteq K^*$ et comme l'inclusion inverse est toujours vérifié (voir la Proposition 1.8) on a $H_0^\perp = K^*$.

REMARQUES. (a) Sous l'hypothèse $R(T^*) + \overline{H_0^*}$ fermé et en utilisant la symétrie de T et T^* on a $H_0^{*\perp} = K$.

(b) Le Lemma 3.7 et la remarque (a) $\Rightarrow K, K^*$ sont fermés dans H .

COROLLAIRE 3.8. Si T est paranormal et $R(T) + \overline{H_0(T)}$ et $H_0(T)$ sont fermés alors $\exists M, N$ deux sous-espaces fermés de H tels que

- (1) $H = M \oplus N$,
- (2) $T(M) \subseteq M$ et $T \mid M$ est régulier,
- (3) $T(N) \subseteq N$ et $T \mid N$ est quasi-nilpotent.

Démonstration. On prend $M = H_0(T)^\perp$ et $N = H_0(T)$; on a $H = H_0^\perp \oplus H_0 = M \oplus N$ d'où (1).

(2) se déduit du Lemme 3.6.

(3) On a $N = H_0(T) = H_0(T \mid N)$ et d'après la Proposition 1.5 ceci entraîne que $T \mid N$ est quasiniptent.

LEMME 3.9. Sous les hypothèses (1) du Théorème 3.3 on a $T^*(K) \subseteq K$.

Démonstration. T paranormal $\Rightarrow T^*$ paranormal, donc $T^*(H_0^{*\perp}) \subseteq H_0^{*\perp}$ et $K = H_0^{*\perp}$, d'où $T^*(K) \subseteq K$.

PROPOSITION 3.10. Sous les hypothèses (1) du Théorème 3.3 on a

$$K = T^*(K) \oplus K \cap N(T), \quad K^* = T(K^*) \oplus K^* \cap N(T^*).$$

Démonstration. On pose $\hat{T} = T \mid K$ et $\hat{T}^* = T^* \mid K$.

$$R(\hat{T}) = K \text{ qui est fermé} \Rightarrow R(\hat{T}^*) \text{ est fermé} \Rightarrow K = N(\hat{T}) \oplus N(\hat{T})^\perp = N(\hat{T}) \oplus R(\hat{T}^*).$$

Or $N(\hat{T}) = K \cap N(T)$ d'où

$$K = R(\hat{T}^*) \oplus K \cap N(T) = T^*(K) \oplus K \cap N(T).$$

Par symétrie entre T et T^* on trouve

$$K^* = T(K^*) \oplus K^* \cap N(T^*).$$

PROPOSITION 3.11. Sous les hypothèses (1) du Théorème 3.3 on a

$$K = K \cap K^* \oplus K \cap K^{*\perp}, \quad K^* = K^* \cap K \oplus K^* \cap K^\perp.$$

Démonstration. T envoie $K \cap K^{*\perp}$ dans lui-même car $T(K) = K$ et $K^{*\perp} = \bar{H}_0$ et $T(\bar{H}_0) \subseteq \bar{H}_0$; donc $T : K \cap K^{*\perp} \rightarrow K \cap K^{*\perp}$. Montrons que T est surjectif. $x \in K \cap K^{*\perp}$

$\Rightarrow x \in K \Rightarrow \exists y \in K$ tel que $x = Ty$. Soit $z \in K^* \Rightarrow \exists z' \in K^*$ tel que $z = T^*z'$; on a

$$(y, z) = (y, T^*z') = (Ty, z') = (x, z') = 0$$

car $x \in K^{*\perp}$ et $z' \in K^*$; donc $(y, z) = 0 \Rightarrow y \in K^{*\perp}$ d'où la surjectivité de T .

Soit maintenant K' le complément orthogonal de $K \cap K^{*\perp}$ dans K i.e. $K = K \cap K^{*\perp} \oplus K'$. Soit $u \in K'$; alors $u \in K$ et d'après la Proposition 3.10 $\exists v \in K$ et $w \in K \cap N(T)$ tel que $u = T^*v + w$. Comme

$$u \perp K \cap K^{*\perp} \supseteq K \cap N(T)$$

car $N(T) \subseteq \tilde{H}_0 = K^{*\perp}$, donc

$$0 = (u, w) = (T^*v, w) + (w, w) = \|w\|^2$$

car $(T^*v, w) = 0$, donc $\|w\|^2 = 0 \Rightarrow w = 0$ et $u = T^*v$.

Soit encore x un élément quelconque de $K \cap K^{*\perp}$; $\exists y \in K \cap K^{*\perp}$ tel que $x = Ty$, donc

$$(v, x) = (v, Ty) = (T^*v, y) = (u, y) = 0$$

car $u \in K'$ et $y \in K \cap K^{*\perp}$, donc $v \perp K \cap K^{*\perp}$ et $v \in K \Rightarrow v \in K'$ et par conséquent $T^*(K') = K'$ et $K' \subseteq K^*$ car K' est fermé et $K' \subseteq C_0(T^*)$; donc $K' \subseteq K \cap K^*$ ou encore

$$K \subseteq K \cap K^* \oplus K \cap K^{*\perp} \subseteq K$$

d'où $K = K \cap K^* \oplus K \cap K^{*\perp}$.

L'autre égalité se déduit en utilisant la symétrie entre T et T^* .

PROPOSITION 3.12. Soit $M = K + K^*$. Alors T^* envoie M dans lui-même et on a

$$M = T^*(M) \oplus K \cap N(T).$$

Démonstration. Soit $u \in M$, alors $\exists v \in K$ et $v^* \in K^*$ tel que $u = v + v^*$ en outre $\exists w^* \in K^*$ tel que $v^* = T^*w^*$ et d'après la Proposition 3.10 (i.e. $K = T^*(K) \oplus K \cap N(T)$) et $v \in K \Rightarrow \exists y \in K$ et $z \in K \cap N(T)$ tel que $v = T^*y + z$, donc $u = v + v^* = T^*(y + w^*) + z$ et comme $y + w^* \in K + K^* = M$ et $z \in K \cap N(T)$ donc $M \subseteq T^*(M) + K \cap N(T)$ et comme

$$T^*(M) = T^*(K) + T^*(K^*) \subseteq K + K^* \subseteq M,$$

donc $T^*(M) + K \cap N(T) \subseteq M$ d'où $M = T^*(M) \oplus K \cap N(T)$ car $T^*(M) \perp N(T)$.

COROLLAIRE 3.13.

$$M = K \cap K^* \oplus K \cap K^{*\perp} \oplus K^\perp \cap K^*,$$

M est fermé comme somme orthogonale de fermés.

Démonstration. $M = K + K^*$ et le résultat se déduit immédiatement de la Proposition 3.11.

On pose $N = M^\perp = (K + K^*)^\perp = K^\perp \cap K^{*\perp} = \tilde{H}_0 \cap \tilde{H}_0^*$; on a $H = M \oplus N$.

PROPOSITION 3.14.

Sous l'hypothèse (1) du Théorème 3.3 on a

$$T_0 = T \mid M \text{ est régulier.}$$

Démonstration. Montrons d'abord que $N(T_0) \subseteq R(T'_0) \forall j \geq 0$. On a

$$N(T_0) = N(T) \cap M = N(T) \cap [T^*(M) \oplus K(T) \cap N(T)]$$

(voir Proposition 3.12.) Comme $N(T) \perp T^*(M)$ et $K \cap N(T) \subseteq N(T)$, on a $N(T) \cap M = K \cap N(T)$

$$\Rightarrow N(T_0) = K \cap M \subseteq R(T'_0) \cap M \forall j \geq 0,$$

or

$$T(M) \subseteq M, \quad T(N) \subseteq N \Rightarrow R(T'_0) \cap M = R(T'_0)$$

d'où $N(T_0) \subseteq R(T'_0) \forall j \geq 0$.

Montrons que $R(T_0) = T(M)$ est fermé. Remarquons que $H = M + N = M + \bar{H}_0$ car $N \subseteq \bar{H}_0$, donc

$$R(T) \subseteq T(M + \bar{H}_0) \subseteq T(M) + \bar{H}_0,$$

donc $R(T) + \bar{H}_0 = T(M) + \bar{H}_0$ est fermé (1), car $R(T) + \bar{H}_0$ est fermé par hypothèse. Montrons maintenant que $T(M) + \bar{H}_0 = T(M) + N$, et tout d'abord que $\bar{H}_0 + K = N \oplus K$. On a

$$\bar{H}_0 = K^{\perp} \subseteq K^{\perp} \cap [M + N] = K^{\perp} \cap M + N$$

car $N \subseteq \bar{H}_0 \subseteq K^{\perp}$, donc $\bar{H}_0 \subseteq K^{\perp} \cap M + N$ (2).

D'après le Corollaire 3.13 on a

$$K^{\perp} \cap M = K^{\perp} \cap [K \cap K^* \oplus K \cap K^{\perp} \oplus K^{\perp} \cap K^*]$$

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

$$\Rightarrow u - u_2 = u_1 + u_3 \in K^* \cap K^{\perp} = \{0\}$$

$$\Rightarrow u = u_2 \in K^{\perp} \cap K$$

$$\Rightarrow K^{\perp} \cap M \subseteq K^{\perp} \cap K,$$

d'où $K^{\perp} \cap M = K^{\perp} \cap K$. Donc d'après (2) on a

$$\bar{H}_0 \subseteq K^{\perp} \cap M + N = K^{\perp} \cap K + N \Rightarrow K + \bar{H}_0 \subseteq N + K$$

d'où $K + \bar{H}_0 = N \oplus K$ car $N \subseteq K^{\perp}$. Par ailleurs

$$K \subseteq T(M) \Rightarrow T(M) + \bar{H}_0 = T(M) + K + \bar{H}_0 = T(M) + K + N = T(M) + N$$

$$\Rightarrow T(M) + \bar{H}_0 = T(M) + N.$$

Or (1) $\Rightarrow R(T) + \bar{H}_0 = T(M) + \bar{H}_0 = T(M) + N \Rightarrow T(M) + N$ est fermé et

$$T(M) \subseteq M \Rightarrow T(M) \cap N \subseteq M \cap N = \{0\}.$$

Donc $T(M) + N$ est fermé et $T(M) \cap N$ est fermé. Par la Proposition 2.1.1 [8], on a que $T(M)$ est fermé. Donc $N(T_0) \subseteq R(T'_0) \forall j \geq 0$, et $R(T_0)$ est fermé, d'où T_0 est régulier.

Démonstration du Théorème 3.3.

(1) \Rightarrow (2). On prend $M = K + K^*$ et $N = M^\perp$; donc $H = M \oplus N$ d'où (a) du Théorème 3.3. La Proposition 3.14 $\Rightarrow T_0 = T \upharpoonright M$ est régulier d'où (b). Pour (c) on a

$$N = M^\perp = (K + K^*)^\perp = K^\perp \cap K^{*\perp} = \tilde{H}_0 \cap \tilde{H}_0^* \Rightarrow N = \overline{H_0(T \upharpoonright N)} = \overline{H_0(T^* \upharpoonright N)}$$

d'où, d'après le théorème (Apostol) [2], on a $T \upharpoonright N \in \mathcal{Q}_{af} \cap \mathcal{Q}_{af}^*$.

(2) \Rightarrow (1). Montrons d'abord que $T(M) + N$ est fermé, le fait que $H = M \oplus N \Rightarrow H$ est isomorphe à $M \times N$ et par conséquent que $T(M) + N$ est isomorphe à $T(M) \times N$, or $T(M) \subseteq M$ et $T \upharpoonright M$ est régulier $\Rightarrow T(M)$ est fermé dans M d'où on déduit que $T(M) \times N$ est fermé et donc $T(M) + N$ est fermé aussi.

En outre, $T(M) + N \subseteq R(T) + N$ et

$$(c) \Rightarrow N = \overline{H_0(T \upharpoonright N)} \Rightarrow N \subseteq \overline{H_0(T)},$$

donc $T(M) + N \subseteq R(T) + \tilde{H}_0$. Réciproquement, $R(T) = T(M + N) \subseteq T(M) + N$, de même $\tilde{H}_0 \subseteq M + N$ et

$$N \subseteq \tilde{H}_0 \Rightarrow \tilde{H}_0 = M \cap \tilde{H}_0 + N;$$

or $M \cap \tilde{H}_0 = \overline{H_0(T \upharpoonright M)} \subseteq T(M)$ car $T \upharpoonright M$ est régulier, donc $\tilde{H}_0 \subseteq T(M) + N$, donc $R(T) + \tilde{H}_0 \subseteq T(M) + N$, d'où $R(T) + \tilde{H}_0 = T(M) + N$ qui est fermé $\Rightarrow R(T) + \tilde{H}_0$ est fermé. Par symétrie, en remplaçant T par T^* on montre que $R(T^*) + \tilde{H}_0^*$ est fermé d'où (1) du théorème.

4. Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs spectraux. Dans ce paragraphe nous allons utiliser plusieurs notions et résultats du chapitre XV de [4].

Le Théorème 5 de [4] (p. 1939) dit que si T est spectral il peut s'écrire comme la somme d'un opérateur scalaire S et un opérateur quasi-nilpotent Q tel que $S.Q = Q.S$.

La théorème 4 de [4] (p. 1947) dit que pour tout opérateur scalaire S il existe un opérateur continu inversible X tel que X^{-1} soit continu et $XSX^{-1} = \hat{S}$ soit normal.

Albrecht [1] a caractérisé les opérateurs spectraux à partir des opérateurs paranormaux et décomposable.

THÉORÈME (Albrecht [1]). $T \in B(H)$ est de la forme $T = N + Q$ avec N normal, Q quasi-nilpotent, et $NQ = QN$ si et seulement si T est paranormal et décomposable.

Remarques.

(a) L'implication directe (\Rightarrow) de ce théorème a été démontré par Labrousse [8] et la réciproque a été démontré par Albrecht [1].

(b) Dans la suite nous notons $T = T_0 \oplus Q_0$ ce qui veut dire, $\exists M, N$ deux sous-espaces fermés de H tels que $H = M \oplus N$ et $T(M) \subseteq M, T(N) \subseteq N$ et $T_0 = T \upharpoonright M, Q_0 = T \upharpoonright N$.

(c) Montrons d'abord le résultat suivant, pour les opérateurs spectraux de la forme opérateur normal N plus opérateur quasi-nilpotent Q qui commutent entre-eux.

THÉORÈME 4.1. Soit $T \in B(H)$ tel que $T = N + Q$ avec $NQ = QN, N$ normal, Q

quasi-nilpotent. Alors les quatre propositions suivantes sont équivalentes:

- (1) $R(T) + H_0(T)$ fermé dans H ;
- (2) $T = T_0 \oplus Q_0$ où T_0 est inversible et Q_0 quasi-nilpotent;
- (3) T inversible ou alors 0 un point isolé du spectre de T ;
- (4) $R(T) + H_0(T) = H$.

Démonstration.

(1) \Rightarrow (2). En utilisant le théorème (Albrecht), le Corollaire 3.8 et le Lemme 2.13, on en déduit que $T = T_0 \oplus Q_0$ où $T_0 = T |_{H_0(T)^\perp}$ est injectif, à image fermé et Q_0 quasi-nilpotent. Donc pour montrer que T_0 est inversible, il suffit de montrer que $N(T_0^*) = \{0\}$ car $T^*(H_0(T)^\perp) \subseteq H_0(T)^\perp$; or d'après le Lemme 2.13 $H_0(T) = N(N) = N(N^*) = H_0(T^*)$ (car N est normal). Par conséquent

$$N(T_0^*) = N(T^*) \cap H_0(T)^\perp = N(T^*) \cap H_0(T^*)^\perp = \{0\}$$

d'où $N(T_0^*) = \{0\}$ et donc T_0 est inversible.

(2) \Rightarrow (3). C'est un résultat classique.

(3) \Rightarrow (4). Si T est inversible $\Rightarrow R(T) = H$ donc $R(T) + H_0(T) = H$. Si T n'est pas inversible mais 0 est un point isolé de $\sigma(T)$, par le théorème 1.5 on en déduit que

$$H = K(A) + H_0(A) \subseteq R(A) + H_0(A),$$

d'où $R(T) + H_0(T) = H$.

(4) \Rightarrow (1). C'est évident.

COROLLAIRE 4.2. Si T est spectral alors les quatre propositions suivantes sont équivalentes:

- (1) $R(T) + H_0(T)$ fermé dans H ;
- (2) $T = T_1 \oplus Q_1$ où T_1 inversible et Q_1 quasi-nilpotent;
- (3) Soit T inversible, soit 0 est un point isolé du spectre de T ;
- (4) $R(T) + H_0(T) = H$.

Démonstration. Se déduit du Théorème 4.1, en utilisant le fait que si T est spectral il est similaire à $S = N + Q$ où N est normal et Q quasi-nilpotent et $NQ = QN$, c.à d. que $\exists X$ inversible tel que $T = X^{-1}SX$, et en remarquant que $R(T) + H_0(T) = X^{-1}(R(S) + H_0(S))$ donc $R(T) + H_0(T)$ fermé $\Leftrightarrow R(S) + H_0(S)$ fermé.

REFERENCES

1. E. Albrecht, A characterization of spectral operators on Hilbert spaces, *Glasgow Math. J.* **23** (1982), 91–95.
2. C. Apostol, Quasi-affine transform of quasiniptent compact operators, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **21** (1976), 813–816.
3. I. Colojoara et C. Foias, *Theory of generalized spectral operators* (Gordon and Breach, New York, 1968).
4. N. Dunford et J. Schwartz, *Linear operators, Part III: Spectral operators* (Wiley Interscience, New York, 1971).

5. K. H. Forster et M. A. Kaashoek, The asymptotic behaviour of the reduced minimum modulus of a Fredholm operator, *Proc. Amer. Math. Soc.* **49**, (1975), 123–131.
6. S. Goldberg, *Unbounded linear operators* (McGraw-Hill, New York, 1966).
7. T. Kato, Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators, *J. Analyse Math.* **6** (1958), 261–322.
8. J. P. Labrousse, Les opérateurs quasi-Fredholm, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) **XXIX** (1980), 161–258.
9. M. Mbekhta, *Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux* (Thèse 3ème cycle, Université de Nice, 1984).
10. P. Saphar, Contribution à l'étude des applications linéaires dans un espace de Banach, *Bull. Soc. Math. France* **92** (1964), 363–384.
11. A. Taylor, *Introduction to functional analysis* (Wiley, 1958).
12. M. Z. Nashed, Perturbations and approximations for generalized inverses and linear operator equations, *Generalized inverses and applications*, (Ed. Z. Nashed, Academic Press, 1976), 325–396.
13. F. H. Vasilescu, *Analytic functional calculus and spectral decompositions* (Reidel, 1982).
14. P. Vrbova, On local spectral properties of operators in Banach spaces, *Czechoslovak Math. J.* **23** (1973), 483–492.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
U.A. 168 AU C.N.R.S.
UNIVERSITÉ DE NICE
PARC VALROSE
F-06034 NICE CEDEX