Canad. Math. Bull. Vol. **24** (4), 1981

# REMARQUES SUR LA REPRÉSENTATION DE CERTAINES SÉRIES DE DIRICHLET

PAR
ARMEL MERCIER

Le but de la présente note est de donner une preuve différente et beaucoup moins laborieuse que celle que l'on trouve dans [1] pour obtenir la représentation de $\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l(k)}}^{\infty} f(n)$, $l$, $k$ étant des entiers positifs et $f$ étant une fonction multiplicative. Le lemme, que nous utiliserons pour obtenir la représentation ci-haut mentionnée, nous permettra aussi d'obtenir une identité pour $\sum_{\substack{n=1\\ (n,k)=l}}^{\infty} f(n)$, $l$, $k$ étant des entiers positifs et $f$ étant une fonction multiplicative.

LEMME. *Soient $f$, $g$ deux fonctions multiplicatives telles que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} f(dn)g(n)$ convergent absolument, où $d$ est un entier positnif. Si $\prod_{p\mid d} (1+f(p)g(p)+f(p^2)g(p^2)+\cdots)\neq 0$, alors*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(dn)g(n)=\prod_{p^a\|d}\left\{\frac{f(p^a)+f(p^{a+1})g(p)+f(p^{a+2})g(p^2)\cdots}{1+f(p)g(p)+f(p^2)g(p^2)+\cdots}\right\}\sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n),$$

*où $p^a \| d$ signifie que $p^a \mid d$ et $p^{a+1}\nmid d$.*

**Démonstration.** Soit $d=p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$, $a_j\geq 1$, $p_j$ étant des nombres premiers distincts. Alors pour chaque entier positif $n$, il existe un et un seul entier $i_j\geq 0$, $(1\leq j\leq r)$, tel que

$$n=p_1^{i_1}\cdots p_r^{i_r}m,\ (m,d)=1.$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} f(dn)g(n) &= \sum_{\substack{i_j\geq 0\\ (m,d)=1}} f(p_1^{a_1+i_1}\cdots p_r^{a_r+i_r}m)g(p_1^{i_1}\cdots p_r^{i_r}m)\\ &=\prod_{p^a\|d}\{f(p^a)+f(p^{a+1})g(p)+\cdots\}\sum_{\substack{m=1\\ (m,d)=1}}^{\infty} f(m)g(m)\\ &=\prod_{p^a\|d}\left\{\frac{f(p^a)+f(p^{a+1})g(p)+\cdots}{1+f(p)g(p)+\cdots}\right\}\sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n).\end{aligned}$$

Reçu par les editeurs le 10 août 1979 et, sous une forme revisée, le 19 mai 1980.
Travail fait dans le cadre de la subvention CRSNG A-3508.

THÉORÈME 1. *Soit $f$ une fonction multiplicative telle que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge absolument. Si $\prod_{p|d} (1+f(p)\chi(p)+f(p^2)\chi(p^2)+\cdots)$ est non nul, alors pour des entiers positifs $k$ et $l$, nous avons*

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l(k)}}^{\infty} f(n)=\frac{1}{\phi(k')}\sum_{\chi}\left[\frac{1}{\chi(l')}\prod_{p^a\|d}\left\{\frac{f(p^a)+f(p^{a+1})\chi(p)+\cdots}{1+f(p)\chi(p)+\cdots}\right\}\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\chi(n)\right]$$

*où $d=(k,l)$, $k=k'd$, $l=l'd$, $\chi$ sont les caractères de Dirichlet* $\bmod k'$ *et $\phi$ désigne la fonction phi d'Euler.*

**Démonstration.** Soit $d=(k,l)$, alors $l=dl'$ et $k=dk'$ et nous remarquons que la condition $n\equiv l(k)$ est équivalente à $n=dn'$ et $n'\equiv l'(k)$, $(l',k')=1$. Alors

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l(k)}}^{\infty} f(n)=\sum_{\substack{n'=1\\ n'=l'(k')}}^{\infty} f(n'd)=\frac{1}{\phi(k')}\sum_{\chi}\left\{\frac{1}{\chi(l')}\sum_{n'=1}^{\infty} f(n'd)\chi(n')\right\}$$

Utilisant le lemme, nous obtenons le résultat.

THÉOREME 2. *Soit $f$ une fonction multiplicative telle que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge absolument. Soient $k$ et $l$ des entiers positifs tels que $l\mid k$. Si $\prod_{p|l} (1+f(p)g(p)+f(p^2)g(p^2)+\cdots)\neq 0$, alors*

$$\sum_{\substack{n=1\\ (n,k)=l}}^{\infty} f(n)=\prod_{p^a\|l}\left\{\frac{f(p^a)+f(p^{a+1})g(p)+f(p^{a+2})g(p^2)+\cdots}{1+f(p)g(p)+f(p^2)g(p^2)+\cdots}\right\}\sum_{\substack{n=1\\ (n,\,k/l)=1}}^{\infty} f(n),$$

*où*

$$g(n)=\begin{cases}1 & \left(n,\dfrac{k}{l}\right)=1\\ 0 & \textit{autrement.}\end{cases}$$

**Démonstration.** Soient $n=n'l$ et $k=k'l$, alors

$$\sum_{\substack{n=1\\ (n,k)=l}}^{\infty} f(n)=\sum_{\substack{n'=1\\ (n',k')=1}}^{\infty} f(n'l)=\sum_{n'=1}^{\infty} f(n'l)g(n'),$$

où

$$g(n')=\begin{cases}1 & \text{si } (n',k')=1\\ 0 & \text{autrement.}\end{cases}$$

Utilisant le lemme, nous obtenons le résultat.

## BIBLIOGRAPHIE

1. A. Mercier, *Identité pour* $\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l(k)}}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$, Canad. Math. Bull. **22(3),** (1979), 317–325.

MODULE DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI
CHICOUTIMI (QUÉ.) CANADA G7H 2B1