

SUR LES CÔNES CONVEXES DE RIESZ ET LES NOYAUX DE CONVOLUTION COMPLÈTEMENT SOUS-HARMONIQUES

MASAYUKI ITÔ

1. Introduction

Soit X un groupe abélien localement compact et dénombrable à l'infini; ξ sera sa mesure de Haar. Dans les articles précédents [10] et [11], pour un noyau de convolution de Hunt N sur X , nous avons défini la famille sous-ordonnée $H(N; X)$ au noyau N , qui est une large classe de noyaux de convolution de Hunt sur X définie par N et la totalité des noyaux de convolution de Hunt bornés sur la droite réelle \mathbf{R} portés par $\mathbf{R}^+ = \{t \in \mathbf{R}; t \geq 0\}$.

Dans l'autre article [7], nous avons montré le théorème suivant:

Supposons que, pour un noyau de convolution N sur X , il existe la résolvente $(N_p)_{p \geq 0}$ associée au noyau N . Pour une mesure de Radon positive ν quelconque sur \mathbf{R}^+ et pour une constante non-négative c , le noyau de convolution $c\varepsilon + \int N_p d\nu(p)$ sur X satisfait au principe de domination dès que cela a un sens, où ε est la mesure de Dirac à l'origine dans X .

Cette proposition entraîne que la somme de puissances fractionnaires de N satisfait aussi au principe de domination. D'autre part, la formule de Riesz concernant les potentiels de Riesz-Frostman est bien connue et très utile. Ces deux résultats portera naturellement la définition du cône convexe de Riesz relatif à un noyau de convolution de Hunt sur X .

Notre premier but sera de montrer le théorème suivant:

Pour un noyau de convolution de Hunt N sur X , il existe uniquement un cône convexe de Riesz $C_R(N)$ relatif au noyau N contenu dans $\bar{H}(N; X) = H(N; X) \cup \{0\}$. Soit $(N_p)_{p \geq 0}$ la résolvente associée au noyau N ; alors $C_R(N)$ est la totalité des noyaux de convolution sur X de la

Received March 16, 1973.

forme $c\varepsilon + \int N_p d\nu(p)$, où c et ν sont respectivement une constante non-négative et une mesure de Radon positive sur \mathbf{R}^+ . On obtiendra en même temps $C_{\mathbf{R}}(N) = \cap C(N)$, où $C(N)$ est un cône convexe de Riesz relatif au noyau N .

La deuxième part de cet article sera consacrée à la détermination explicite d'un cône convexe de Riesz relatif au noyau newtonien. Soit \mathbf{R}^n l'espace euclidien à $n(\geq 1)$ dimensions; on notera $|x|$ la distance entre x et l'origine. Un noyau de convolution N sur \mathbf{R}^n sera dit complètement sous-harmonique en dehors de l'origine si l'on a, quel que soit k un entier ≥ 1 , $\Delta^k N \geq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine, où Δ est l'opérateur de Laplace sur \mathbf{R}^n et $\Delta^k = \Delta^{k-1}\Delta$ ($k \geq 2$). Pour un nombre $p > 0$, désignons par G_p le noyau de convolution sur \mathbf{R}^n dont la transformée de Fourier est égale à $(p + |x|^2)^{-1}$. Si un noyau de convolution N sur \mathbf{R}^n est complètement sous-harmonique en dehors de l'origine et invariant par rotations, alors il satisfait au principe complet du maximum et il est de la forme $N = c_1 + c_2\varepsilon + \int G_p d\nu(p)$, où c_i ($i = 1, 2$) et ν sont respectivement une constante non-négative et une mesure de Radon positive sur \mathbf{R}^+ . Soit $S_{r,0}(\mathbf{R}^n)$ la totalité des noyaux de convolution sur \mathbf{R}^n complètement sous-harmoniques en dehors de l'origine, invariants par rotations et s'annulant à l'infini; alors si $n \geq 3$, $S_{r,0}(\mathbf{R}^n)$ sera un seul cône convexe de Riesz relatif au noyau newtonien sur \mathbf{R}^n et constitué par de noyaux de convolution sur \mathbf{R}^n invariants par rotations.

2. Préliminaires

Dans cette note, on notera :

$C_{\mathbf{K}}(X)$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions finies et continues dans X à support compact,

$M_{\mathbf{K}}(X)$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions ξ -mesurables et bornées dans X à valeurs réelles et à support compact,

$L_{\text{loc}}(X)$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions localement ξ -sommables dans X à valeurs réelles.

$C_{\mathbf{K}}^+(X)$, $M_{\mathbf{K}}^+(X)$ et $L_{\text{loc}}^+(X)$ sont respectivement leur sous-ensembles des fonctions non-négatives.

Dans la théorie du potentiel, un noyau de convolution N sur X signifie une mesure de Radon positive dans X . On appelle le noyau

adjoint \check{N} de N la mesure symétrisant avec N par rapport à l'origine. Si, en particulier, $N = \check{N}$, il est dit symétrique. Si N est de la forme $dN = K(x)d\xi(x)$, où $K \in L^+_{loc}(X)$, alors N est un noyau-fonction de convolution sur X , et dans ce cas, on utilisera souvent K au lieu de N . On dit qu'un noyau de convolution N sur X est borné (resp. s'annule à l'infini) si, quelle que soit f de $C_K(X)$, la fonction $N*f$ est bornée sur X (resp. $N*f(x)$ tend vers 0 avec $x \rightarrow \infty$).

Soit N un noyau de convolution sur X . Pour une mesure de Radon réelle μ dans X , $N*\mu$ s'appelle le N -potentiel de μ dès que cette convolution a un sens. S'il est absolument continu par rapport à ξ , sa densité s'écrira $N\mu$. Pour une fonction f de $L_{loc}(X)$, on notera $N*f$ et Nf au lieu de $N*(f\xi)$ et $N(f\xi)$ dès que ceux sont définis. Pour une fonction borélienne f dans X , on peut supposer $Nf = N*f$ dès que, quel que soit x de X , $\tau_x f$ est \check{N} -sommable, où $\tau_x f$ est la fonction obtenue de f par la translation x .

On dit qu'un noyau de convolution N sur X satisfait au principe de domination (resp. au principe complet de maximum) si, quelles que soient f et g de $C^+_K(X)$, l'implication suivante a lieu :

$$\begin{aligned} Nf \leq Ng \text{ (resp. } Nf \leq Ng + 1 \text{) sur } \text{supp}(f) \\ \Leftrightarrow Nf \leq Ng \text{ (resp. } Nf \leq Ng + 1 \text{) sur } X, \end{aligned}$$

où $\text{supp}(f)$ désigne le support de f . Si N est borné, alors les deux principes pour N sont équivalents (cf. [8]). On connaît bien que le principe de domination pour N (resp. le principe complet du maximum pour N) est équivalent au principe de domination pour \check{N} (resp. au principe complet du maximum pour \check{N}). D'autre part, il est aussi connu que le principe de domination pour N (resp. le principe complet du maximum pour N) est équivalent au principe du balayage pour N (resp. au principe du balayage avec diminution de masse pour N). On dit que N satisfait au principe du balayage si, pour une mesure de Radon positive μ dans X et pour un ouvert relativement compact ω de X , il existe une mesure de Radon positive μ'_ω dans X portée par $\bar{\omega}$ telle que $N*\mu \geq N*\mu'_\omega$ dans X , $N*\mu = N*\mu'_\omega$ dans ω et, quelle que soit μ'' une mesure de Radon positive dans X portée par $\bar{\omega}$, $N*\mu'_\omega \leq N*\mu''$ dans X dès que $N*\mu'' \geq N*\mu$ dans ω . On dit que μ'_ω est une mesure balayée de μ sur ω relativement au noyau N . Si N satisfait au principe du balayage et, quels que soient μ une mesure de Radon positive dans X à support com-

pact et ω un ouvert relativement compact de X , $\int d\mu'_\omega \leq \int d\mu$, alors on dit que N satisfait au principe du balayage avec diminution de masse.

Un noyau de convolution N sur X satisfait au principe de domination et vérifie la condition supplémentaire "régularité" si et seulement s'il existe la résolvante associée au noyau N (cf. [9]). Une famille $(N_p)_{p>0}$ de noyaux de convolution sur X s'appelle une résolvante si, quels que soient $p > 0$ et $q > 0$,

$$N_p - N_q = (q - p)N_p * N_q \text{ (Equation résolvante).}$$

Si, pour un noyau de convolution N sur X , il existe une résolvante $(N_p)_{p>0}$ telle que $\lim_{p \rightarrow 0} N_p = N$ (au sens de la topologie vague), alors elle est uniquement déterminée et $(N_p)_{p \geq 0}$ s'appelle la résolvante associée au noyau N , où $N_0 = N$. Supposons que, pour un noyau de convolution N sur X , il existe la résolvante $(N_p)_{p \geq 0}$ associée au noyau N ; alors N satisfait au principe complet du maximum si et seulement si, quel que soit $p > 0$, $p \int dN_p \leq 1$.

PROPOSITION 1 (cf. [7]). *Soit N un noyau de convolution sur X et supposons qu'il existe la résolvante associée au noyau N . Alors, pour une constante non-négative c et pour une mesure de Radon positive ν sur \mathbf{R}^+ , il existe la résolvante associée au noyau $c\varepsilon + \int N_p d\nu(p)$ dès que cela a un sens.*

Un noyau de convolution de Hunt N sur X est, par définition, un noyau de convolution sur X de la forme

$$N = \int_0^\infty \alpha_t dt,$$

où $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu de mesures de Radon positives dans X ; c'est-à-dire, $\alpha_0 = \varepsilon$, $\alpha_t * \alpha_s = \alpha_{t+s}$ ($\forall t \geq 0$, $\forall s \geq 0$) et l'application $t \rightarrow \alpha_t$ est vaguement continue. Dans ce cas, $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est uniquement déterminé, qui s'appellera le semi-groupe associé au noyau N .

PROPOSITION 2 (cf. [11]). *Pour qu'un noyau de convolution N sur X soit un noyau de convolution de Hunt sur X , il faut et il suffit qu'il*

existe la résolvante associée au noyau N et que N soit non-périodique⁽¹⁾.

Pour un noyau de convolution $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ sur X , on obtiendra facilement que les trois énoncés suivants sont équivalents:

- (a) N est borné.
- (b) $\int d\alpha_t \leq 1$ ($\forall t \geq 0$).
- (c) Il existe une fonction définie-négative ψ dans le groupe dual \hat{X} de X , et une seule telle que la transformée de Fourier de α_t soit de la forme $\hat{\alpha}_t = \exp(-t\psi)$.

Dans ce cas, ψ s'appelle la fonction définie-négative associée au noyau N . On a évidemment $\hat{N} = 1/\psi$ dès que cela a un sens. Une fonction complexe et continue ψ dans \hat{X} est, par définition, définie-négative si l'on a:

- (1) $\psi(\hat{0}) \geq 0$ et $\psi(-\hat{x}) = \overline{\psi(\hat{x})}$ ($\forall \hat{x} \in \hat{X}$).
- (2) Quels que soient n un entier ≥ 1 , $(\hat{x}_i)_{i=1}^n \subset \hat{X}$ et $(c_i)_{i=1}^n$ nombres complexes avec $\sum_{i=1}^n c_i = 0$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi(\hat{x}_i - \hat{x}_j) c_i \overline{c_j} \leq 0.$$

En particulier, un noyau de convolution de Hunt symétrique sur X s'appelle un noyau de convolution de Dirichlet sur X , qui satisfait toujours au principe complet du maximum.

PROPOSITION 3 (cf. [10] et [11]). *Supposons qu'il existe un espace vectoriel topologique E appartenant à X et homéomorphe avec \mathbf{R} , et soit κ un noyau de convolution non-zéro sur \mathbf{R} porté par \mathbf{R}^+ . Alors pour que, quel que soit $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur X , $N_{(\kappa)} = \int \alpha_t d\kappa(t)$ soit aussi un noyau de convolution de Hunt sur X , il faut et il suffit que κ soit un noyau de convolution borné de Hunt sur \mathbf{R} .*

Pour simplifier la notation, $H(A)$ et $H_b(A)$ désigneront respectivement la totalité des noyaux de convolution de Hunt sur X portés par A et son sous-ensemble des noyaux de convolution de Hunt bornés, où A est un semi-groupe fermé dans X . D'après la proposition 3, on arrive à la définition suivante:

⁽¹⁾ Cela signifie que, quel que soit $x \neq 0$ de X , $N \neq N * \varepsilon_x$, où ε_x est la mesure de Dirac à x .

DÉFINITION 1 (cf. [10] et [11]). Soit $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur X . On note

$$H(N; X) = \left\{ N_{(\kappa)} = \int \alpha_t d\kappa(t); \kappa \in H_b(\mathbf{R}^+) \right\},$$

qui s'appelle la famille sous-ordonnée au noyau N . On notera ensuite $\bar{H}(N; X) = H(N; X) \cup \{0\}$.

Soit κ_0 un noyau d'Heaviside sur \mathbf{R} ; c'est-à-dire $d\kappa_0 = dt$ sur \mathbf{R}^+ et $\kappa_0 = 0$ dans $\mathbf{R} - \mathbf{R}^+$. Alors on a évidemment

$$H_b(\mathbf{R}^+) = H(\kappa_0; \mathbf{R}).$$

3. Les cônes convexes de Riesz

Commençons d'abord avec la définition du principe relatif de domination. Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution sur X . On dit que N_1 satisfait au principe de domination relatif à N_2 si, quelles que soient f et g de M_X^+ , l'inégalité $N_1 f \leq N_2 g$ est satisfaite presque partout pour ξ (noté désormais ξ -p.p.) sur X dès qu'elle l'est ξ -p.p. sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$. On notera, dans ce cas, $N_1 < N_2$. En particulier, si, pour un noyau de convolution N sur X , $N < \xi$, on dit qu'il satisfait au principe classique du maximum.

PROPOSITION 4. Soient N_0 et $H(N_0; X)$ un noyau de convolution de Hunt sur X et la famille sous-ordonnée au noyau N_0 , respectivement. Alors tout le noyau de convolution N de $H(N_0; X)$ satisfait au principe de domination relatif à N_0 et il existe un autre noyau de convolution N' sur X , et un seul tel que $N * N' = N_0$.

LEMME 1. Soit $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ un noyau de convolution de Hunt sur X ; supposons que, pour trois mesures positives λ_1, λ_2 et λ_3 dans \mathbf{R}^+ , $\lambda_1 * \lambda_2 = \lambda_3$. Alors $N_{(\lambda_i)} = \int \alpha_t d\lambda_i(t)$ ($i = 1, 2$) a un sens et a

$$N_{(\lambda_1)} * N_{(\lambda_2)} = N_{(\lambda_3)}$$

dès que $N_{(\lambda_3)}$ a un sens et $\lambda_3 \neq 0$.

En effet, on a

$$\begin{aligned}
 N_{(\lambda_3)} &= \int \alpha_t d(\lambda_1 * \lambda_2)(t) = \int \alpha_{t+s} d\lambda_1(t) d\lambda_2(s) \\
 &= \iint \alpha_t * \alpha_s d\lambda_1(t) d\lambda_2(s) = N_{(\lambda_1)} * N_{(\lambda_2)},
 \end{aligned}$$

d'où notre lemme.

LEMME 2. *Pour un noyau de convolution κ de $H_b(\mathbf{R}^+)$, il existe un autre noyau de convolution κ' sur \mathbf{R} porté par \mathbf{R}^+ tel que*

$$d(\kappa * \kappa') = dt \text{ sur } \mathbf{R}^+ \text{ et } \frac{d}{dt} \kappa' \leq 0$$

au sens des distributions dans $(0, +\infty)$.

En effet, soit κ_0 le noyau d'Heaviside sur \mathbf{R} . Il suffit de montrer que κ satisfait au principe de domination relatif à κ_0 . Si c'est vrai, il existe un autre noyau de convolution borné κ' sur \mathbf{R} porté par \mathbf{R}^+ tel que $\kappa * \kappa' = \kappa_0$ (cf. [5]). Donc, au sens des distributions, $((d/dt)\kappa') * \kappa = \varepsilon$, où ε désigne aussi la mesure de Dirac à l'origine de \mathbf{R} . κ étant de la forme $\kappa = \int_0^\infty \alpha_t dt$, la famille $((\varepsilon - \alpha_t)/t)_{t>0}$ converge vers la distribution $(d/dt)\kappa'$ au sens des distributions dans \mathbf{R} avec $t \downarrow 0$, d'où $(d/dt)\kappa' \leq 0$ dans $(0, +\infty)$. Pour que κ satisfasse au principe de domination relatif à κ_0 , il suffit que l'implication suivante ait lieu: Quelles que soient f, g de $M_K^+(\mathbf{R})$,

$$\kappa f \leq \kappa_0 g \text{ p.p. sur } \text{supp}(fdt) \Leftrightarrow \kappa f \leq \kappa_0 g \text{ p.p. sur } \mathbf{R}$$

(cf. [8]). Donc il suffit de voir que, dans tout l'intervalle fermé $[a, b]$ dans le complément de $\text{supp}(fdt)$, $\kappa f \leq \kappa_0 g$ p.p. sur $[a, b]$. Soient f_a et g_a les restreintes de f et de g sur $(-\infty, a]$; alors $\kappa f = \kappa f_a$ et $\kappa_0 g = \kappa_0 g_a$ sur $(-\infty, b]$. On a

$$\kappa_0 g_a = \int g_a dt \text{ p.p. sur } [a, b] \text{ et } \kappa_0 g_a \leq \int g_a dt \text{ p.p. sur } \text{supp}(f_a dt).$$

κ étant borné, il satisfait au principe classique du maximum (cf. par exemple, [9]). Donc $\kappa f_a \leq \int g_a dt$ p.p. sur $[a, b]$, d'où $\kappa f \leq \kappa_0 g$ p.p. sur $[a, b]$.

On obtiendra facilement l'inverse du lemme 2 dans la section 4. La proposition 4 résultra immédiatement des deux présents lemmes. Soit $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe associé au noyau N_0 ; alors il existe un noyau de

convolution de Hunt κ de $H_b(\mathbf{R}^+)$ tel que $N = \int \alpha_t d\kappa(t)$. D'après le lemme 2, il existe un autre noyau de convolution κ' sur \mathbf{R} tel que $\text{supp}(\kappa') \subset \mathbf{R}^+$ et $d(\kappa*\kappa')(t) = dt$ sur \mathbf{R}^+ . D'après le lemme 1, on a

$$N*N_{(\kappa')} = N_0.$$

Par conséquent, d'après le principe de domination pour N , on a évidemment $N < N_0$.

Pour simplifier la notation, on note $\bar{H}(X) = H(X) \cup \{0\}$ et $\bar{H}_b(X) = H_b(X) \cup \{0\}$.

DÉFINITION 2. Soit N_0 un noyau de convolution de Hunt sur X . Une famille $C(N_0)$ contenue dans $\bar{H}(X)$ s'appelle un cône convexe de Riesz relatif au noyau N_0 si elle est un cône convexe vaguement fermé de vertex 0 qui vérifie les conditions suivantes:

- (1) $N_0 \in C(N_0)$.
- (2) Pour un noyau de convolution de Hunt quelconque N de $C(N_0)$, il existe un autre noyau de convolution de Hunt N' de $C(N_0)$ tel que $N*N' = N_0$.

Dans (2), N' est uniquement déterminé, d'après le principe d'unicité pour $N^{(2)}$, et il s'appellera le noyau dual de N relatif au noyau N_0 . La définition 2 est une notion induite de la formule classique de Riesz et de la proposition 1.

Remarque 1. Soient N_0 et $C(N_0)$ un noyau de convolution de Hunt sur X et un cône convexe de Riesz relatif au noyau N_0 , respectivement; alors on a, quel que soit N de $C(N_0)$, $N < N_0$. Cela résulte immédiatement de (2) et du principe de domination pour N .

PROPOSITION 5. Soient N_0 et $C(N_0)$ un noyau de convolution de Hunt sur X et un cône convexe de Riesz relatif au noyau N_0 , respectivement. Alors, pour tout le noyau de convolution de Hunt N de $C(N_0)$, la résolvente associée au noyau N est contenue dans $C(N_0)$.

Démonstration. Soit N' le noyau dual de N relatif au noyau N_0 . Alors, quel que soit $p > 0$, $N' + pN_0 \in C(N_0)$. Soit \tilde{N}_p le noyau dual de $N' + pN_0$ relatif au noyau N_0 ; alors, quels que soient $p > 0$ et $q \geq 0$,

⁽²⁾ Cela signifie que, quelle que soit μ une mesure de Radon réelle dans X , $\mu = 0$ dès que $N*\mu$ a un sens et $N*\mu = 0$.

$$(N' + pN_0) * \tilde{N}_p = (N' + qN_0) * \tilde{N}_q = N_0 .$$

On a, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} (N' + qN_0) * \tilde{N}_q &= (N' + pN_0 + (q - p)(N' + pN_0) * \tilde{N}_p) * \tilde{N}_q \\ &= (N' + pN_0) * (\tilde{N}_q + (q - p)\tilde{N}_p * \tilde{N}_q) . \end{aligned}$$

$N' + pN_0$ satisfaisant au principe d'unicité, on a $\tilde{N}_p - \tilde{N}_q = (q - p)\tilde{N}_p * \tilde{N}_q$, et donc $(\tilde{N}_p)_{p>0}$ est une résolvante. On a aussi $\tilde{N} - \tilde{N}_p = pN * \tilde{N}_p$ ($\forall p > 0$). N étant un noyau de convolution de Hunt sur X , on a $\lim_{p \rightarrow 0} \tilde{N}_p = N$ (au sens de la topologie vague), d'où $(\tilde{N}_p)_{p \geq 0}$ est la résolvante associée au noyau N , où $\tilde{N}_0 = N$. La démonstration est ainsi complète.

On notera $m_1(\mathbf{R}^+)$ et $m(X)$ la totalité des mesures de Radon positives dans \mathbf{R}^+ de masse totale finie et la totalité des mesures de Rodon positives dans X , respectivement.

DÉFINITION 3. Soit $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe vaguement continu de mesures de Radon positives dans X tel que, quelle que soit ν de $m_1(\mathbf{R}^+)$, $\int \alpha_t d\nu(t)$ a un sens dans $m(X)$. Si l'application $m_1(\mathbf{R}^+) \ni \nu \rightarrow \int \alpha_t d\nu(t) \in m(X)$ est injective, alors ce semi-groupe est dit injectif.

Pour un noyau de convolution de Hunt $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ sur X , $\int \alpha_t d\nu(t)$ a un sens dans $m(X)$ ($\forall \nu \in m_1(\mathbf{R}^+)$).

Remarque 2. Soit $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe vaguement continu de mesures de Radon positives dans X tel que $\int d\alpha_t \leq 1$ ($t \geq 0$); alors il existe une fonction définie-négative ψ dans \hat{X} , et une seule telle que l'on ait $\hat{\alpha}_t = \exp(-t\psi)$ ($t \geq 0$) (cf. par exemple, [4]). Si $\{\psi(\hat{x}) \in \mathbf{C}; \hat{x} \in \hat{X}\} \cap \{z \in \mathbf{C}; \text{Re. } z > 0\}$ contient un ensemble relativement compact et infini dans $\{z \in \mathbf{C}; \text{Re. } z > 0\}$, alors $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est injectif. On note ici \mathbf{C} le champ complexe et $\text{Re. } z$ désigne la partie réelle de z .

En effet, il est évident que, quelle que soit ν de $m_1(\mathbf{R}^+)$, $\int \alpha_t d\nu(t)$ a un sens dans $m(X)$, et on a

$$\widehat{\int \alpha_t d\nu(t)}(\hat{x}) = \int \exp(-t\psi(\hat{x})) d\nu(t)$$

pour tout \hat{x} de \hat{X} . Posons $F_1(z) = \int \exp(-tz) d\nu(t)$ sur $\{z \in \mathbf{C}; \text{Re. } z \geq 0\}$;

alors F_z est continue sur $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z \geq 0\}$ et elle est analytique dans $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$. En utilisant le théorème de coïncidence dans la théorie classique de fonction et le fait que la transformation de Laplace est injective, on peut affirmer facilement que $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est injectif.

Rappelons ensuite le théorème de Bernstein dans la théorie classique d'analyse harmonique.

PROPOSITION 4 (cf. par exemple, [13]). *Soit φ une fonction non-négative et infiniment dérivable dans $(0, +\infty)$. Pour que φ soit complètement monotone, il faut et il suffit qu'il existe une mesure de Radon positive λ sur \mathbb{R}^+ telle que*

$$\varphi(t) = \int \exp(-ts) d\lambda(s) \quad \text{dans } (0, +\infty).$$

On dit que φ est complètement monotone si, quel que soit m un entier non-négatif, $(-1)^m \varphi^{(m)}(t) \geq 0$ dans $(0, +\infty)$, où $\varphi^{(0)} = \varphi$ et $\varphi^{(m)}$ est la dérivée de φ d'ordre m .

Nous montrerons notre premier théorème principal suivant:

THÉORÈME 1. *Soient N et $(N_p)_{p \geq 0}$ respectivement un noyau de convolution de Hunt sur X et la résolvante associée au noyau N . Alors la totalité des noyaux de convolution sur X de la forme $c\varepsilon + \int N_p d\lambda(p)$ est un cône convexe de Riesz relatif au noyau N , où c et λ sont une constante non-négative et une mesure de Radon positive dans \mathbb{R}^+ , respectivement. En particulier, si le semi-groupe associé au noyau N est injective, alors cela est un seul cône convexe de Riesz relatif au noyau N appartenant à $\bar{H}(N; X)$.*

On préparera d'abord un lemme élémentaire.

LEMME 3. *Soient n , $(p_i)_{i=0}^n$, $(a_i)_{i=0}^n$ et c un entier positif, une famille de nombres avec $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_n$, une famille de nombres positifs et un nombre positif, respectivement. La fonction*

$$f(t) = \frac{1}{ct + \sum_{i=0}^n \frac{a_i t}{t + p_i}}$$

sur \mathbb{R} est de la forme

$$f(t) = \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{t + q_i},$$

où $p_i < q_i < p_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n - 1$), $q_n > p_n$ et $b_i > 0$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Posons

$$g(t) = ct(t + p_1) \cdots (t + p_n) + \sum_{i=0}^n \frac{a_i t(t + p_1) \cdots (t + p_n)}{t + p_i};$$

alors $g(-p_{2k}) > 0$ et $g(-p_{2m+1}) < 0$ dès que $2k \leq n$ et $2m + 1 \leq n$. D'autre part, il existe une constante positive A telle que, quel que soit $t \geq A$, $(-1)^n g(-t) < 0$. Donc il existe une famille $(q_i)_{i=0}^n$ de nombres positifs telle que $g(-q_i) = 0$ ($0 \leq i \leq n$), $p_i < q_i < p_{i+1}$ ($0 \leq i \leq n - 1$) et $q_n > p_n$. Donc on peut écrire

$$f(t) = \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{t + q_i},$$

où b_i est une constante réelle. Remarquons

$$f(t) = \frac{(t + p_1) \cdots (t + p_n)}{g(t)},$$

on a alors

$$\lim_{t \rightarrow -q_i} f(t) = +\infty,$$

et par suite $b_i > 0$ ($0 \leq i \leq n$), d'où notre lemme.

Démonstration du théorème 1. Soit κ_0 le noyau d'Heaviside sur R ; $(\kappa_p)_{p \geq 0}$ désigne la résolvante associée au noyau κ_0 . On a alors $\kappa_p = 0$ dans $(-\infty, 0)$ et $d\kappa_p(t) = \exp(-pt)dt$ sur R^+ . On notera $C_R(\kappa_0)$ la totalité des noyaux de convolution sur R de la forme $c\varepsilon + \int \kappa_p d\lambda(p)$, où c et λ sont une constante non-négative et une mesure de Radon positive sur R^+ , respectivement.

On montrera d'abord que $C_R(\kappa_0)$ est un seul cône convexe de Riesz relatif au noyau κ_0 . Il est bien connu que $C_R(\kappa_0)$ appartient à $\bar{H}(\kappa_0; R) = \bar{H}_\delta(R^+)$ (cf. [7] et [11]). Evidemment $C_R(\kappa_0)$ est un cône convexe de vertex 0. D'après le lemme 1, pour un noyau de convolution de Hunt $c\varepsilon + \int \kappa_p d\lambda(p)$ de $C_R(\kappa_0)$, il existe un noyau de convolution κ' sur R porté

par R^+ , et un seul tel que l'on ait

$$\left(c\varepsilon + \int \kappa_p d\lambda(p)\right) * \kappa' = \kappa_0 .$$

Pour que κ' appartienne à $C_R(\kappa_0)$, il suffit que, quel que soit m un entier non-négatif, $(-1)^m(d^m/dt^m)\kappa' \geq 0$ au sens des distributions dans $(0, +\infty)$, d'après le théorème de Bernstein. Soit κ'_n un noyau de convolution sur X qui vérifie l'égalité

$$\left(\left(c + \frac{1}{n}\right)\varepsilon + \int_0^n \kappa_p d\lambda(p)\right) * \kappa'_n = \kappa_0 ;$$

alors il est uniquement déterminé, et la suite $(\kappa'_n)_{n=1}^\infty$ converge vaguement vers κ' avec $n \rightarrow +\infty$. Donc on peut supposer que $c > 0$ et λ est à support compact. Si λ est de la forme

$$\lambda = \sum_{i=0}^n a_i \varepsilon_{p_i} ,$$

où $a_i > 0$, $p_0 = 0$, $p_i > 0$ ($1 \leq i \leq n$) et ε_{p_i} est la mesure de Dirac au point p_i , on a alors

$$\left(c + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{t + p_i}\right) \tilde{\kappa}'(t) = \frac{1}{t}$$

dans $(0, +\infty)$, où $\tilde{\kappa}'$ est la transformée de Laplace de κ' . On remarque ici que $\tilde{\kappa}'$ a un sens, d'après le fait que κ' est borné (cf. le lemme 2). Donc

$$\tilde{\kappa}'(t) = \frac{1}{ct + \sum_{i=0}^n \frac{a_i t}{t + p_i}} .$$

D'après le lemme 3, on a

$$\tilde{\kappa}'(t) = \sum_{i=0}^\infty \frac{b_i}{t + q_i} ,$$

où $q_i > 0$ et $b_i > 0$, et par suite

$$\kappa' = \sum_{i=0}^n b_i \kappa_{q_i} ,$$

d'où, quel que soit m un entier non-négatif, $(-1)^m(d^m/dt^m)\kappa' \geq 0$ au sens

des distributions dans $(0, +\infty)$. En général, pour une mesure de Radon positive λ dans \mathbf{R}^+ à support compact, il existe une suite $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ de mesures de Radon positives sur \mathbf{R}^+ de la présente forme qui converge vaguement vers λ avec $n \rightarrow +\infty$. On note encore κ'_n le noyau de convolution sur \mathbf{R} tel que

$$\left(c\varepsilon + \int \kappa_p d\lambda_n(p) \right) * \kappa'_n = \kappa_0,$$

et alors la suite $(\kappa'_n)_{n=1}^\infty$ converge vaguement vers κ' avec $n \rightarrow +\infty$. On a donc, quel que soit m un entier non-négatif, $(-1)^m (d^m/dt^m)\kappa' \geq 0$ au sens des distributions dans $(0, +\infty)$, d'où $\kappa' \in C_{\mathbf{R}}(\kappa_0)$. Supposons qu'une suite de $C_{\mathbf{R}}(\kappa_0)$ converge vaguement vers un noyau de convolution κ sur \mathbf{R} ; alors on a aussi $(-1)^m (d^m/dt^m)\kappa \geq 0$ au sens des distribution dans $(0, +\infty)$, et donc, d'après la proposition 6, κ appartient à $C_{\mathbf{R}}(\kappa_0)$. Par conséquent, $C_{\mathbf{R}}(\kappa_0)$ est vaguement fermé, d'où $C_{\mathbf{R}}(\kappa_0)$ est un cône convexe de Riesz relatif au noyau κ_0 .

Soit $C(\kappa_0)$ un autre cône convexe de Riesz relatif au noyau κ_0 . D'après la proposition 5, on a $C_{\mathbf{R}}(\kappa_0) \subset C(\kappa_0)$. On remarque ici que $\varepsilon \in C(\kappa_0)$ résulte de $\kappa_0 \in C(\kappa_0)$. D'après le lemme 2, on a, quel que soit κ de $C(\kappa_0)$, $(-d/dt)\kappa \geq 0$ au sens des distributions dans $(0, +\infty)$. Soit m un entier positif et supposons que, quel que soit κ de $C(\kappa_0)$, $(-1)^m (d^m/dt^m)\kappa \geq 0$ au sens des distributions dans $(0, +\infty)$. Soit κ un noyau de convolution de Hunt quelconque de $C(\kappa_0)$; κ' désigne le noyau dual de κ relatif au noyau κ_0 . On note ensuite $(\kappa'_p)_{p \geq 0}$ la résolvante associée au noyau κ' ; alors $(\kappa'_p)_{p \geq 0} \subset C(\kappa_0)$ (cf. la proposition 5). On a

$$(p\kappa'_p) * \kappa = p\kappa * \kappa' - p^2\kappa * \kappa' * \kappa'_p = p\kappa_0 - p^2\kappa_0 * \kappa'_p,$$

et par suite

$$(-1)^{m+1} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} (p\kappa'_p) * \kappa = p(-1)^{m+1} \frac{d^m}{dt^m} \varepsilon + p^2(-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \kappa'_p.$$

Par conséquent, on a

$$(-1)^{m+1} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} (p\kappa'_p) * \kappa \geq 0$$

au sens des distributions dans $(0, +\infty)$. Faisant $p \rightarrow +\infty$, on obtient

$$(-1)^{m+1} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \kappa \geq 0$$

au sens des distributions dans $(0, +\infty)$, car $\lim_{p \rightarrow +\infty} p\kappa'_p = \varepsilon$ (au sens de la topologie vague). Par récurrence on obtient, quels que soient κ de $C(\kappa_0)$ et m un entier non-négatif, $(-1)^m (d^m/dt^m)\kappa \geq 0$ au sens des distributions dans $(0, +\infty)$, d'où $C_{\mathbb{R}}(\kappa_0) \supset C(\kappa_0)$. Donc $C_{\mathbb{R}}(\kappa_0)$ est un seul cône convexe de Riesz relatif au noyau κ_0 .

Soient N un noyau de convolution de Hunt sur X et $(N_p)_{p \geq 0}$ la résolvente associée au noyau N . On désignera par $C_{\mathbb{R}}(N)$ la totalité des noyaux de convolution sur X de la forme $c\varepsilon + \int N_p d\lambda(p)$, où c et λ sont respectivement une constante non-négative et une mesure de Radon positive dans \mathbb{R}^+ . Alors cela est évidemment un cône convexe de vertex 0 vérifiant les conditions (1), (2) dans la définition 1, car on a, quelle que soit λ une mesure de Radon positive sur \mathbb{R}^+ ,

$$\int N_p d\lambda(p) = \int_0^\infty \alpha_t \int \exp(-pt) d\lambda(p) dt,$$

où $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est le semi-groupe associé au noyau N . Montrons que $C_{\mathbb{R}}(N)$ est vaguement fermé. Si une famille $(\int N_p d\lambda_\alpha(p))_{\alpha \in A}$ est vaguement bornée dans X , alors $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ est aussi vaguement bornée sur \mathbb{R}^+ . Donc il suffit de montrer que si une suite $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ de mesures de Radon positives sur \mathbb{R}^+ converge vaguement vers une mesure de Radon positive λ sur \mathbb{R}^+ et si $(\int N_p d\lambda_n(p))_{n=1}^\infty$ est vaguement bornée dans X , alors tout sa sous-suite converge vaguement vers un noyau de convolution de $C_{\mathbb{R}}(N)$ dès qu'elle converge vaguement. On a, quelle que soit f une fonction de $C_K(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f(p) N_p d\lambda_n(p) = \int f(p) N_p d\lambda(p)$$

au sens de la topologie vague dans X . Donc on peut supposer qu'il existe un nombre $r > 0$ tel que $\text{supp}(\lambda_n) \subset [r, +\infty)$ ($\forall n \geq 1$). Evidemment la suite $(\int \kappa_p d\lambda_n(p))_{n=1}^\infty$ est vaguement bornée dans R , et on peut supposer qu'elle converge vaguement vers un noyau de convolution κ de $C_{\mathbb{R}}(\kappa_0)$ avec $n \rightarrow +\infty$. De la même manière que pour $C_{\mathbb{R}}(\kappa_0)$, on obtient que $C_{\mathbb{R}}(\kappa_r)$ est aussi un cône convexe de Riesz relatif au noyau κ_r . La famille

$(\kappa_{r+p})_{p \geq 0}$ étant la résolvante associée au noyau κ_r , on a $(\int \kappa_p d\lambda_n(p))_{n=1}^\infty \subset C_R(\kappa_r)$ et $\kappa \in C_R(\kappa_r)$. On peut supposer $\lambda_n \neq 0$ ($\forall n \geq 1$), $\lambda \neq 0$, et donc $\kappa \neq 0$. Soient κ'_n et κ' le noyau dual de $\int \kappa_p d\lambda_n(p)$ et le noyau dual de κ relatifs au noyau κ_r , respectivement. Alors $(\kappa'_n)_{n=1}^\infty$ converge vaguement vers κ' avec $n \rightarrow +\infty$. Ayant

$$\iint d\kappa_p d\lambda_n(p) \int d\kappa'_n = \int \frac{1}{p} d\lambda_n(p) \int d\kappa'_n = \int d\kappa_r = \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \int d\kappa \int d\kappa' = \frac{1}{r},$$

on obtient que la suite $(\int \frac{1}{p} d\lambda_n(p))_{n=1}^\infty$ est bornée. D'autre part, on a, quelle que soit f une fonction de $C_R(X)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_t * f(0) = 0$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int N_p d\lambda_n(p) = \int \alpha_t d\kappa(t)$$

au sens de la topologie vague dans X . Par conséquent, $C_R(N)$ est vaguement fermé, d'où $C_R(N)$ est un cône convexe de Riesz relatif au noyau N .

Supposons finalement que le semi-groupe $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ associé au noyau N est injectif. Soit $C(N)$ un cône convexe de Riesz quelconque relatif au noyau N appartenant à $\bar{H}(N; X)$. Pour que $C(N) = C_R(N)$, il suffit de montrer que la famille

$$C'_R(\kappa_0) = \left\{ \kappa \in \bar{H}_b(\mathbf{R}^+); \int \alpha_t d\kappa(t) \in C(N) \right\}$$

appartient à $C_R(\kappa_0)$, car on a toujours $C(N) \supset C_R(N)$. $C'_R(\kappa_0)$ est évidemment un cône convexe de vertex 0. Soit κ un noyau de convolution de $\bar{H}_b(\mathbf{R}^+) \cap C'_R(\kappa_0)$; alors il existe un autre noyau de convolution κ' de $\bar{H}_b(\mathbf{R}^+) \cap C'_R(\kappa_0)$ tel que

$$N = \left(\int \alpha_t d\kappa(t) \right) * \left(\int \alpha_t d\kappa'(t) \right) = \int \alpha_t d(\kappa * \kappa')(t).$$

Soient $(\tilde{\kappa}_p)_{p \geq 0}$ et $(\tilde{\kappa}'_p)_{p \geq 0}$ respectivement la résolvante associée au noyau κ et la résolvante associée au noyau κ' ; on a alors, pour trois nombres $p > 0$, $q > 0$ et $r > 0$,

$$\int \alpha_t d\kappa_p * (\varepsilon - q\tilde{\kappa}_q) * (\varepsilon - r\tilde{\kappa}'_r)(t) = \int \alpha_t d\tilde{\kappa}_q * \tilde{\kappa}'_r * (\varepsilon - p\kappa_p)(t).$$

Ayant $\int d|\kappa_p*(\varepsilon - p\tilde{\kappa}_p)*(\varepsilon - p\tilde{\kappa}'_p)| < +\infty$ et $\int d|\tilde{\kappa}_q*\tilde{\kappa}'_r*(\varepsilon - p\kappa_p)| < +\infty$, on obtient

$$\kappa_p*(\varepsilon - q\tilde{\kappa}_q)*(\varepsilon - r\tilde{\kappa}'_r) = \tilde{\kappa}_q*\tilde{\kappa}'_r*(\varepsilon - p\kappa_p) .$$

Faisant séparément $p \downarrow 0, q \downarrow 0$ et $r \downarrow 0$, on a $\kappa_0 = \kappa*\kappa'$. Donc, de la même manière que ci-dessus, on a $C'_R(\kappa_0) \subset C_R(\kappa_0)$. La démonstration est ainsi complète.

Remarque 3. Soient N un noyau de convolution de Hunt sur X et $(C_\alpha(N))_{\alpha \in \Lambda}$ une famille de cônes convexes de Riesz relatifs au noyau N . Alors $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha(N)$ est aussi un cône convexe de Riesz relatif au noyau N . $C_R(N)$ est le plus petit cône convexe de Riesz relatif au noyau N .

4. Les noyaux de convolution complètement sous-harmoniques en dehors de l'origine.

Dès maintenant, X est toujours l'espace euclidien \mathbf{R}^n à $n (\geq 1)$ dimensions. Pour un point $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbf{R}^n , on notera $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$. On désignera par $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ et $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions complexes et infiniment dérivables dans X à support compact, et l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions complexes et infiniment dérivables dans X à décroissance rapide. Soit k un entier non-négatif. On notera

θ_0^k (resp. θ_s^k) l'idéal de \mathcal{D} (resp. \mathcal{S}) constitué par toutes les fonctions qui s'annulent ainsi que leurs dérivées d'ordre $< k$ à l'origine,

$\widehat{\theta}_0^k$ (resp. $\widehat{\theta}_s^k$) l'idéal de convolution formé des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}$ (resp. $\in \mathcal{S}$) telles que, quel que soit α un multi-indice avec $|\alpha| < k, \int x^\alpha \varphi(x) dx = 0$.

Pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, on écrit $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbf{R}^n, x^α désigne $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$. La définition suivante est mis en ordre par C. S. Herz [4].

DÉFINITION 4. (i) Soit k un entier non-négatif. Une distribution u dans \mathbf{R}^n sera dite k -conditionnellement positive si, quelle que soit φ de $\theta_0^k, u(|\varphi|^2) \geq 0$.

(ii) Une distribution v dans \mathbf{R}^n sera dite k -conditionnellement de type positif si, quelle que soit φ de $\widehat{\theta}_0^k, v*\varphi*\check{\varphi}(0) \geq 0, \text{ où } \check{\varphi}(x) = \overline{\varphi(-x)}$.

Si une distribution v dans \mathbf{R}^n est k -conditionnellement de type positif,

alors v est une distribution dans \mathbf{R}^n à croissance lente (cf. [4]), et donc, quelle que soit φ de θ_s^k , $v * \varphi * \check{\varphi}(0) \geq 0$, car θ_0^k est dense dans θ_s^k . C. S. Herz [4] montre le théorème fondamental suivant, qui est une généralisation du théorème de Bochner.

PROPOSITION 7. *Les deux énoncés suivants sont équivalents :*

(a) *Une distribution v dans \mathbf{R}^n est k -conditionnellement de type positif.*

(b) *$v = \hat{u}$, où u est une distribution k -conditionnellement positive dans \mathbf{R}^n à croissance lente.*

Rappelons ici que, dans cette note, la signe \wedge représente la transformation de Fourier. D'après la définition de fonction définie-négative, on obtient immédiatement que, pour une fonction définie-négative ψ dans \mathbf{R}^n , $-\psi$ est 1-conditionnellement de type positif. Rappelons que, d'après le théorème de Lévy-Khinchine, une fonction définie-négative ψ dans \mathbf{R}^n est de la forme

$$\psi(x) = c + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i \sqrt{-1} + \int \left(1 - \frac{x \cdot y}{1 + |y|^2} \sqrt{-1} - \exp(x \cdot y \sqrt{-1}) \right) d\sigma(y) ,$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$; $c \geq 0$, a_{ij} et b_i ($i, j = 1, 2, \dots, n$) sont constantes réelles; $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ est une forme quadratique non-négative; σ est une mesure de Radon positive en dehors de l'origine avec

$$\int \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} d\sigma(x) < +\infty .$$

Remarque 4. Soient ψ une fonction définie-négative dans \mathbf{R}^n et $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe vaguement continu de mesures de Radon positives dans \mathbf{R}^n tel que $\hat{\alpha}_t = \exp(-t\psi)$. Alors $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est injectif dès que $\psi \neq 0$. Cela résulte immédiatement de la remarque 2.

En particulier, si une fonction définie-négative ψ dans \mathbf{R}^n est invariante par rotations, alors elle est non-négative et de la forme

$$\psi(x) = c_1 + c_2 |x|^2 + \int (1 - \exp(x \cdot y \sqrt{-1})) d\sigma(y) ,$$

où c_i ($i = 1, 2$) est une constante non-négative et σ est une mesure de Radon positive en dehors de l'origine invariante par rotations et vérifiant la présente inégalité.

LEMME 4. Soit φ une fonction non-négative et continue sur \mathbf{R}^+ . Si, pour un entier positif m , $\psi_m(x) = \varphi(|x|)$ est définie-négative dans \mathbf{R}^m , alors, quel que soit n un entier positif avec $n \leq m$, la fonction $\psi_n(x) = \varphi(|x|)$ dans \mathbf{R}^n est aussi définie-négative.

Il est facile de voir ce lemme. Dans le présent lemme, pour un entier $n > m$, la fonction $\psi_n(x) = \varphi(|x|)$ dans \mathbf{R}^n n'est pas toujours définie-négative (voir [11]).

DÉFINITION 5. (i) Un noyau de convolution N sur \mathbf{R}^n est conditionnellement sous-harmonique si l'on a $\Delta N \geq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine.

(ii) N est dit complètement sous-harmonique en dehors de l'origine si l'on a, quel que soit k un entier non-négatif, $\Delta^k N \geq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine.

On note ici Δ l'opérateur de Laplace sur \mathbf{R}^n , et $\Delta^1 = \Delta$, $\Delta^k = (\Delta^{k-1})\Delta$.

LEMME 5. Soit φ une fonction infiniment dérivable dans $(0, +\infty)$. Si, quel que soit k un entier non-négatif, $\varphi^{(2k)} \geq 0$ et $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) < +\infty$, alors φ est complètement monotone.

En effet, φ est convexe et on a $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) < +\infty$, et donc $-\varphi'(t) \geq 0$ dans $(0, +\infty)$. Supposons qu'il existe un entier positif k tel que $\varphi^{(2k)}$ ne soit pas décroissante au sens large. On peut supposer ici que, quel que soit m un entier non-négatif avec $m < k$, $\varphi^{(2m)}$ est décroissante au sens large. Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^{(2m)}(t) < +\infty$. Soit t_0 un nombre positif tel que $\varphi^{(2k+1)}(t_0) > 0$. Alors

$$\varphi^{(2k+1)}(t) \geq \varphi^{(2k+1)}(t_0) \quad \text{sur } [t_0, \infty),$$

et donc

$$\varphi^{(2k)}(t) \geq \varphi^{(2k+1)}(t_0)(t - t_0)$$

pour tout t de $[t_0, +\infty)$. Soit f une fonction non-négative et non-zéro de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$; alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int \varphi^{(2k)}(|t - s|)f(s)ds \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} \int \varphi^{(2k+1)}(t_0)(|t - s| - t_0)f(s)ds = +\infty.$$

On a, d'autre part,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int \varphi^{(2k)}(|t - s|)f(s)ds = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int \varphi^{(2k-2)}(|t - s|)f''(s)ds < +\infty ,$$

d'où une contradiction. Par conséquent, quel que soit m un entier non-négatif, $(-1)^m \varphi^{(m)} \geq 0$.

Dans le présent lemme, on peut remplacer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)/t = 0$ au lieu de la condition $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) < +\infty$. Dès maintenant, nous considérerons principalement les noyaux de convolution sur R^n invariants par rotations.

LEMME 6. *Soit N un noyau de convolution borné et conditionnellement sous-harmonique sur R^n invariant par rotations; alors il existe une fonction définie-négative ψ dans R^n invariante par rotations, et une seule telle que $\psi = -\widehat{\Delta N}$.*

En effet, on remarque d'abord que N s'écrit

$$dN = c d\varepsilon + \Phi(|x|)dx ,$$

où c et Φ sont respectivement une constante non-négative et une fonction finie et continue dans $(0, +\infty)$, car N est évidemment absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue et sa densité est sous-harmonique au sens des distributions en dehors de O et invariante par rotations. Pour une fonction quelconque f de $C^+_k(R^n)$ invariante par rotations, $N*f$ est bornée sur R^n et sous-harmonique dans $\{x \in R^n; |x| > \sup_{y \in \text{supp}(f)} |y|\}$. Donc Φ est décroissante au sens large dans $(0, +\infty)$. Par conséquent, pour notre lemme, on peut supposer que Φ tend vers 0 avec $t \rightarrow +\infty$. N satisfaisant au principe classique du maximum et étant égal à une fonction en dehors de l'origine, N est de type positif (cf. [8]), et par suite $-\Delta N$ est aussi de type positif au sens des distributions. Soit σ la restriction de ΔN en dehors de l'origine; alors σ est une mesure de Radon positive en dehors de l'origine invariante par rotations. Pour un nombre positif r , on pose σ_r la restriction de σ sur $\{x \in R^n; |x| \geq r\}$, et alors elle est considérée comme une mesure de Radon positive dans R^n . Quelle que soit φ de $\mathcal{D}(R^n)$, la fonction $(-\Delta N + \sigma_r)*\varphi*\check{\varphi} - \sigma_r*\varphi*\check{\varphi}$ est de type positif, et par suite

$$\int \sigma_r*\varphi*\check{\varphi}dx \leq \int (-\Delta N + \sigma_r)*\varphi*\check{\varphi}dx < +\infty ,$$

car $(-\Delta N + \sigma_r) * \varphi * \tilde{\varphi}$ est à support compact. Par conséquent, $\int d\sigma_r < +\infty$.

D'autre part, soit φ_1 une fonction non-négative de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ invariante par rotations telle que $\varphi_1 \leq 1$ et $\varphi_1(x) = 1$ sur $\{x \in \mathbf{R}^n; |x| \leq 1\}$; on pose, pour un entier positif m , $\varphi_m(x) = \varphi_1(mx)$. On a alors

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int \Delta(|x|^2 (\varphi_m(x))^2) \Phi(|x|) dx = 0,$$

et par suite, en utilisant la formule de Green,

$$\begin{aligned} +\infty &> \int \Delta(|x|^2 (\varphi_1(x))^2) \Phi(|x|) dx \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \int \Delta(|x|^2 ((\varphi_1(x))^2 - (\varphi_m(x))^2)) \Phi(|x|) dx \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \int |x|^2 ((\varphi_1(x))^2 - (\varphi_m(x))^2) d\sigma(x) \geq \int_{|x| > 1} |x|^2 d\sigma(x), \end{aligned}$$

d'où

$$\int \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} d\sigma(x) < +\infty.$$

Par conséquent, on peut écrire

$$-\widehat{\Delta N}(x) = c' + c|x|^2 + \int (1 - \exp(x \cdot y \sqrt{-1})) d\sigma(y),$$

où c' est une autre constante réelle, car $-\Delta N$ est une distribution dans \mathbf{R}^n invariante par rotations et d'ordre ≤ 2 . En utilisant encore le fait que $-\Delta N$ est de type positif, on a $c' \geq 0$, d'où $-\widehat{\Delta N}$ est définie-négative dans \mathbf{R}^n .

Si $n \geq 3$, $1/\psi$ est localement sommable dès que N n'est pas constant. Mais, dans le cas où $n = 1, 2$, cela n'est pas toujours vrai.

On notera $S_{r,0} = S_{r,0}(\mathbf{R}^n)$ la totalité des noyaux de convolution sur \mathbf{R}^n complètement sous-harmoniques en dehors de l'origine, invariants par rotations et s'annulant à l'infini.

Remarque 5. Soit N un noyau de convolution borné sur \mathbf{R}^n complètement sous-harmonique en dehors de l'origine et invariant par rotations; alors il est de la forme $N = N_0 + c$, où N_0 est de $S_{r,0}$ et c est une constante ≥ 0 .

Le lemme suivant est obtenu par C. S. Herz [4].

LEMME 7. Soit k un entier positif; alors les deux énoncés suivants sont équivalents.

(a) Une distribution v dans \mathbf{R}^n est k -conditionnellement de type positif.

(b) $v = p_{2k}(x) + v'$, où p_{2k} est un polynôme homogène de degré $2k$ et fortement positif et v' est conditionnellement de type positif et vérifiant $v' = o(|x|^{2k})$ à l'infini.

v' est dite conditionnellement de type positif s'il existe un entier $k' \geq 0$ tel que v' soit k' -conditionnellement de type positif. $v' = o(|x|^{2k})$ à l'infini signifie que, quelle que soit φ de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $v' * \varphi = o(|x|^{2k})$ à l'infini.

D'après le lemme 7, on obtiendra facilement le lemme suivant:

LEMME 8. Soit N un noyau de convolution de $S_{r,0}(\mathbf{R}^n)$. Alors, quel que soit k un entier positif, $\Delta^k N$ est k -conditionnellement positive.

En effet, posons $\psi = -\widehat{\Delta N}$; alors ψ est définie-négative dans \mathbf{R}^n . On a donc

$$\Delta^k N(x) = (-1)^k |x|^{2(k-1)} \psi(x) .$$

On peut écrire

$$\psi(x) = c_1 + c_2 |x|^2 + \int (1 - \exp(x \cdot y \sqrt{-1})) d\sigma(y)$$

où c_i ($i = 1, 2$) est une constante non-négative et σ est une mesure de Radon positive en dehors de l'origine invariante par rotations avec

$$\int \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} d\sigma(x) < +\infty .$$

Soit v la distribution dans \mathbf{R}^n définie par la fonction $x \rightarrow (-1)^k |x|^{2(k-1)} (\psi(x) - c_2 |x|^2)$; alors $v = o(|x|^{2k})$ à l'infini. La distribution $\Delta^k(N - c_2 \varepsilon)$ vérifie la condition: Quelle que soit $\varphi \geq 0$ de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ avec $\text{supp}(\varphi) \not\ni O$, on a $\Delta^k(N - c_2 \varepsilon)(\varphi) \geq 0$. En utilisant le fait que la distribution $\Delta^k(N - c_2 \varepsilon)$ est d'ordre fini dans un voisinage de l'origine, il existe un entier positif k' tel que $\Delta^k(N - c_2 \varepsilon)$ est k' -conditionnellement positive, et par suite v est k' -conditionnellement de type positif, d'après la proposition 7. v est donc k -conditionnellement de type positif (cf. le lemme 7). Par conséquent, $\Delta^k N = c_2 \Delta^k + \Delta^k(N - c_2 \varepsilon)$ est k -conditionnellement positive.

LEMME 9. Soit φ une fonction finie et continue sur \mathbf{R}^+ telle que,

pour un entier positif n , $\varphi(|x|)$ soit définie-négative dans \mathbf{R}^n . Si, pour un entier positif k , la fonction $\psi_n(x) = (-1)^k |x|^{2(k-1)}\varphi(|x|)$ dans \mathbf{R}^n est k -conditionnellement de type positif, alors la fonction $\psi_1(t) = (-1)^k |t|^{2(k-1)}\varphi(|t|)$ dans \mathbf{R}^1 est aussi k -conditionnellement de type positif.

En effet, soit f_1 une fonction de $\mathcal{D}^+(\mathbf{R}^n)$ invariante par rotations telle que

$$\text{supp}(f_1) \subset \{x \in \mathbf{R}^n; |x| \leq 1\} \quad \text{et} \quad \int f_1 dx = 1.$$

On pose ensuite, quel que soit m un entier positif, $f_m(x) = m^n f_1(mx)$. En posant

$$\psi_{1,m}(t) = \psi_n * f_m * f_m(t, 0, \dots, 0),$$

on obtient que la suite $(\psi_{1,m})_{m=1}^\infty$ converge uniformément vers ψ_1 sur tout compact de \mathbf{R}^1 avec $m \rightarrow +\infty$. ψ_n étant k -conditionnellement de type positif dans \mathbf{R}^1 , la fonction

$$\psi_n * \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} f_m \right) * \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} f_m \right) = (-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x_1^{2k}} (\psi_n * f_m * f_m)$$

est de type positif. La fonction $\psi_n * f_m * f_m$ étant invariante par rotations, on a

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x_1^{2k}} (\psi_n * f_m * f_m)(t, 0, \dots, 0) = \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \psi_{1,m}(t)$$

pour tout t de \mathbf{R}^1 . Par conséquent,

$$(-1)^k \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \psi_{1,m}$$

est de type positif. Faisant $m \rightarrow +\infty$, on obtient que $(-1)^k (d^{2k}/dt^{2k})\psi_1$ est de type positif au sens des distributions dans \mathbf{R}^1 , d'où, quelle que soit f de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$,

$$\psi_1 * \left(\frac{d^k}{dt^k} f \right) * \left(\frac{d^k}{dt^k} f \right)(0) \geq 0.$$

On remarque ici que, dans \mathbf{R}^1 ,

$$\theta_0^k = \left\{ \frac{d^k}{dt^k} f; f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1) \right\},$$

qui est facilement montré. C. S. Herz a montré sa forme générale (cf. [4]). Par conséquent, ψ_1 est k -conditionnellement de type positif.

Dans cette note, on notera toujours $G_0^{(n)}$ ou bien r^{2-n} le noyau newtonien. Dans ce cas, on peut supposer $\widehat{G}_0^{(n)} = 1/|x|^2$. Pour tout $p > 0$, il existe le noyau de convolution de Dirichlet $G_p^{(n)}$ sur \mathbf{R}^n ($n \geq 1$) dont la transformée de Fourier est de la forme

$$\widehat{G}_p^{(n)}(x) = \frac{1}{p + |x|^2} .$$

La famille $(G_p^{(n)})_{p>0}$ est évidemment une résolvante. On a $\lim_{p \rightarrow 0} G_p^{(n)} = G_0^{(n)}$ sur \mathbf{R}^n ($n \geq 3$), et dans ce cas, $(G_p^{(n)})_{p \geq 0}$ s'appelle la résolvante associée au noyau newtonien.

THÉORÈME 2. (1) *Soit N un noyau de convolution borné sur \mathbf{R}^n complètement sous-harmonique en dehors de l'origine et invariant par rotations; alors il est de la forme*

$$N = c_1 + c_2\varepsilon + \int G_p^{(n)} d\lambda(p) ,$$

où c_i ($i = 1, 2$) et λ sont respectivement une constante non-négative et une mesure de Radon positive sur \mathbf{R}^+ , et N satisfait au principe complet du maximum.

(2) *Dans \mathbf{R}^n ($n \geq 3$), $S_{r,0}(\mathbf{R}^n)$ est un seul cône convexe de Riesz relatif au noyau newtonien sur \mathbf{R}^n et constitué par de noyaux de convolution invariants par rotations.*

Démonstration. On montrera d'abord l'énoncé (1). D'après le lemme 6, il existe une fonction non-négative, finie et continue φ sur \mathbf{R}^+ telle que la fonction

$$-\widehat{\Delta N}(x) = \varphi(|x|)$$

soit définie-négative dans \mathbf{R}^n . Posons $\psi_1(t) = \varphi(|t|)$ sur \mathbf{R}^1 ; alors ψ_1 est définie-négative dans \mathbf{R}^1 . Pour tout l'entier positif k , $\Delta^k N$ est k -conditionnellement positive, et donc la fonction

$$\psi_{n,k}(x) = (-1)^k |x|^{2(k-1)} \varphi(|x|)$$

dans \mathbf{R}^n est k -conditionnellement de type positif (au sens des distributions). D'après le présent lemme, la fonction

$$\psi_{1,k}(t) = (-1)^k |t|^{2(k-1)} \varphi(|t|)$$

est k -conditionnellement de type positif dans \mathbf{R}^1 . Soit u la distribution 1-conditionnellement positive dans \mathbf{R}^1 dont la transformée de Fourier est égale à $-\psi_1$. Ayant, quel que soit k un entier non-négatif,

$$\widehat{\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}u}(t) = (-1)^{k+1} |t|^{2k} \psi_1(t) ,$$

on obtient que $(d^{2k}/dt^{2k})u$ est $(k + 1)$ -conditionnellement positive. Donc il existe une fonction non-négative et infiniment dérivable φ_1 dans $(0, +\infty)$ telle que $u = \varphi_1(|t|)dt$ en dehors de l'origine et, quel que soit k un entier non-négatif, $(d^{2k}/dt^{2k})\varphi_1(t) \geq 0$ dans $(0, +\infty)$. ψ_1 étant définie-négative, on peut écrire

$$\psi_1(t) = c_1 + c_2 t^2 + \int (1 - \exp(ts\sqrt{-1}))d\sigma(s) ,$$

où c_i ($i = 1, 2$) et σ sont respectivement une constante non-négative et une mesure de Radon positive en dehors de l'origine avec $\int \frac{t^2}{1+t^2}d\sigma(t) < +\infty$. On a $u = \sigma$ en dehors de l'origine, et par suite

$$\int \frac{t^2}{1+t^2} \varphi_1(|t|)dt < +\infty .$$

On a donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_1(t) = 0$. D'après le théorème de Bernstein et le lemme 5, il existe une mesure de Radon positive ν sur \mathbf{R}^+ telle que

$$\varphi_1(t) = \int \exp(-ts)d\nu(s) \quad (\forall t > 0) .$$

D'après $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_1(t) = 0$, on a $\nu(\{0\}) = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} & \int (1 - \exp(ts\sqrt{-1}))\varphi_1(|s|)ds \\ &= \int \left(\int_{s>0} (1 - \exp(ts\sqrt{-1})) \exp(-sr)ds \right. \\ & \quad \left. + \int_{s<0} (1 - \exp(ts\sqrt{-1})) \exp(sr)ds \right) d\nu(r) \\ &= 2 \int \left(\frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{s - t\sqrt{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{s + t\sqrt{-1}} \right) d\nu(s) = 2 \int \left(1 - \frac{s^2}{s^2 + t^2} \right) \frac{1}{s} d\nu(s) \\ &= 2 \int (1 - s^2 \widehat{G}_{s^2}^{(1)}(t)) \frac{1}{s} d\nu(s) . \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\psi_1(t) = c_1 + c_2 t^2 + 2 \int (1 - s^2 \widehat{G}_{s^2}^{(1)}(t)) \frac{1}{s} d\nu(s),$$

et par suite

$$-\widehat{\Delta N}(x) = c_1 + c_2 |x|^2 + 2 \int (1 - s^2 \widehat{G}_{s^2}^{(n)}(x)) \frac{1}{s} d\nu(s)$$

dans \mathbf{R}^n . Soit N_0 le noyau de convolution sur \mathbf{R}^n de $S_{r,0}$ tel que $N - N_0$ soit constant (cf. la remarque 5). Alors la transformée de Fourier de N_0 est égale à une fonction et on a

$$\begin{aligned} \widehat{N}_0(x) &= \frac{c_1}{|x|^2} + c_2 + \frac{2}{|x|^2} \int (1 - s^2 \widehat{G}_{s^2}^{(n)}(x)) \frac{1}{s} d\nu(s) \\ &= \frac{c_1}{|x|^2} + c^2 + 2 \int \widehat{G}_{s^2}^{(n)}(x) \frac{1}{s} d\nu(s). \end{aligned}$$

Si $n = 1, 2$, alors $c_1 = 0$, car \widehat{N}_0 est localement sommable. Soit λ la mesure de Radon positive sur \mathbf{R}^+ définie par

$$\int f d\lambda = 2 \int f(t^2) \frac{1}{t} d\nu(t) + c_1 f(0)$$

pour toute la fonction f de $C_K(\mathbf{R}^+)$. Posons encore $c_1 = N - N_0$; alors

$$N = c_1 + c_2 \varepsilon + \int G_s^{(n)} d\lambda(s).$$

D'après la proposition 1, N_0 est un noyau de convolution de Dirichlet sur \mathbf{R}^n dès que $N_0 \neq 0$, et par suite N satisfait au principe complet du maximum. La démonstration de (1) est ainsi complète.

Avant la démonstration de l'énoncé (2), on préparera le lemme suivant:

LEMME 10. *Soit $C(r^{2-n})$ un cône convexe de Riesz relatif au noyau newtonien sur \mathbf{R}^n ($n \geq 3$). Alors tout l'élément de $C(r^{2-n})$ est complètement sous-harmonique en dehors de l'origine et s'annulant à l'infini.*

En effet, d'après la remarque 1, on a, quel que soit N de $C(r^{2-n})$, $N \prec G_0^{(n)}$, et par suite, N s'annule à l'infini. Soit N un noyau de convolution de Hunt quelconque sur X contenu dans $C(r^{2-n})$; on désigne par N' son noyau dual relatif au noyau newtonien. Alors on a $(-\Delta N) * N' = \varepsilon$.

N' étant un noyau de convolution de Hunt sur \mathbf{R}^n , on a $N' = \int_0^\infty \alpha'_t dt$, où $(\alpha'_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu de mesures de Radon positives dans X avec $\int d\alpha'_t \leq 1$. Donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon - \alpha'_t}{t} = -\Delta N$$

au sens des distributions dans \mathbf{R}^n , d'où $\Delta N \geq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine. Soit m un entier positif et supposons que, quel que soit N de $C(r^{2-n})$, $\Delta^m N \geq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine. Soit N un noyau de convolution de Hunt de $C(r^{2-n})$; on désigne ensuite par N' le noyau dual de N relatif au noyau newtonien, et par $(N'_p)_{p \geq 0}$ la résolvante associée au noyau N' . On a alors $(N'_p)_{p \geq 0} \subset C(r^{2-n})$, d'après la proposition 5. Ayant, quel que soit $p > 0$,

$$(pN'_p) * N = pN * N' - p^2 N * N' * N'_p = pG_0^{(n)} - p^2 G_0^{(n)} * N'_p,$$

on obtient donc

$$\Delta^{m+1}(pN'_p) * N = -p\Delta^m + p^2\Delta^m N'_p$$

au sens des distributions dans \mathbf{R}^n . D'après notre hypothèse, on a

$$\Delta^{m+1}(pN'_p) * N \geq 0$$

au sens des distributions en dehors de l'origine. D'après $p \int dN'_p \leq 1$ ($\forall p > 0$) et $\lim_{p \rightarrow +\infty} pN'_p = \varepsilon$ (au sens de la topologie vague), on a $\Delta^{m+1}N \geq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine. Par récurrence N est complètement sous-harmonique en dehors de l'origine, d'où notre lemme.

Montrons (2) dans le théorème 2. D'après le théorème 1, la totalité $C_{\mathbf{R}}(r^{2-n})$ des noyaux de convolution N sur \mathbf{R}^n de la forme $N = c\varepsilon + \int G_p^{(n)} d\lambda(p)$ est un cône convexe de Riesz relatif au noyau newtonien, où c et λ sont respectivement une constante ≥ 0 et une mesure de Radon positive sur \mathbf{R}^+ . Soit $C(r^{2-n})$ un cône convexe de Riesz quelconque relatif au noyau newtonien sur \mathbf{R}^n et constitué par noyaux de convolution invariants par rotations. D'après l'énoncé (1), on a $S_{r,0} \subset C_{\mathbf{R}}(r^{2-n})$, et d'après la remarque 3, $C_{\mathbf{R}}(r^{2-n}) \subset C(r^{2-n})$. En utilisant finalement le lemme 10, $C(r^{2-n}) \subset S_{r,0}$, d'où $S_{r,0} = C(r^{2-n})$. La démonstration est ainsi complète.

Remarque 6. Pour un noyau de convolution de Hunt borné κ sur \mathbf{R} porté par \mathbf{R}^+ et pour un nombre $p > 0$, le noyau de convolution

$$N_{(\kappa, p)} = \int \alpha_t \exp(-pt) d\kappa(t)$$

sur \mathbf{R}^n est aussi un noyau de convolution de Dirichlet sur \mathbf{R}^n , où $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ est le semi-groupe associé au noyau newtonien, car le noyau de convolution $\kappa_{(p)}$ sur \mathbf{R} satisfait au principe complet du maximum, où $d\kappa_{(p)}(t) = \exp(-pt)d\kappa(t)$. Est-ce qu'une discussion analogue pour $(N_{(\kappa, p)})_{p \geq 0}$ a lieu?

Nous discuterons finalement sur une généralisation du théorème de Bernstein.

Soit $C^\infty(0, +\infty)$ l'espace vectoriel topologique des fonctions réelles et infiniment dérivables dans $(0, +\infty)$ muni des semi-normes

$$p_{m, k}(f) = \sup_{1/m \leq t \leq m} |f^{(k)}(t)| \quad (m = 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots).$$

Rappelons le théorème de Krein-Milman et le lemme 5. Alors le théorème de Bernstein affirme l'éconcé suivant:

Le sous-ensemble

$$CM_1 = \{f \in C^\infty(0, +\infty); f^{(2k)}(t) \geq 0 \text{ dans } (0, +\infty), \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} f(t) \leq 1, \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} f(t) < +\infty\}$$

est convexe et compact dans $C^\infty(0, +\infty)$, et on a

$$\text{ex. } CM_1 = \{g_p; 0 \leq p \leq \infty\},$$

où $\text{ex. } CM_1$ est l'ensemble des points extrêmes de CM_1 , $g_p(t) = \exp(-\sqrt{p}t)$ ($0 \leq p < \infty$) et $g_\infty(t) = 0$.

DÉFINITION 6. Soit α un entier non-négatif. Une fonction f de $C^\infty(0, +\infty)$ sera dite compètement monotone d'ordre α si l'on a, quel que soit k un entier non-négatif,

$$(B_\alpha)^k \left(t; \frac{d}{dt} \right) f(t) \geq 0 \text{ dans } (0, +\infty) \text{ et } \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} f(t) < +\infty,$$

où

$$B_\alpha \left(t; \frac{d}{dt} \right) = \frac{d^2}{dt^2} - \frac{\alpha}{t} \frac{d}{dt}, \quad B_\alpha^0 \left(t; \frac{d}{dt} \right) f = f$$

et

$$B_\alpha^{k+1}\left(t; \frac{d}{dt}\right) = B_\alpha\left(t; \frac{d}{dt}\right)\left(B_\alpha^k\left(t; \frac{d}{dt}\right)\right).$$

On notera $CM_{\alpha,1}$ la totalité des fonctions complètement monotones d'ordre α dans $(0, +\infty)$ telles que $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} f(t) \leq 1$. En utilisant la fonction besselien, on obtient que, pour tout le nombre $p \geq 0$, il existe une fonction $g_p^{(\alpha)}$ de $CM_{\alpha,1}$, et une seule telle que

$$B_\alpha\left(t; \frac{d}{dt}\right)g_p^{(\alpha)} = pg_p^{(\alpha)} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} g_p^{(\alpha)}(t) = 1.$$

On a évidemment $g_0^{(\alpha)} = 1$. Il est évident que $g_p^{(0)} = g_p$ ($\forall p \geq 0$). Cela est, d'autre part, compris par

$$\Delta\left(\frac{\varphi(|x|)}{|x|^{\alpha+1}}\right) = \frac{B_\alpha(|x|; d/dt)\varphi(|x|)}{|x|^{\alpha+1}}$$

dans $\mathbf{R}^{\alpha+3} - \{0\}$, où φ et Δ sont respectivement une fonction de $C^\infty(0, +\infty)$ et le laplacien sur $\mathbf{R}^{\alpha+3}$.

LEMME 11. Soient α un entier non-négatif et f une fonction non-négative de classe C^2 dans $(0, +\infty)$ telle que $B_\alpha(t; d/dt)f(t) \geq 0$ dans $(0, +\infty)$ et $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} f(t) < +\infty$; alors f est décroissante (au sens large).

En effet, posons $n = \alpha + 3$. On a

$$\Delta\left(\frac{f(|x|)}{|x|^{n-2}}\right) = \frac{B_\alpha(|x|; d/dt)f(|x|)}{|x|^{n-2}}$$

dans $\mathbf{R}^n - \{0\}$. Donc la fonction $f(|x|)/|x|^{n-2}$ est sous-harmonique en dehors de l'origine. Elle tendant vers 0 avec $|x| \rightarrow +\infty$, il est facile de voir que f est décroissante (au sens large).

Par conséquent, pour toute la fonction f complètement monotone d'ordre α , la limite $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ existe, qui notera $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$. En généralisant le théorème de Bernstein, on obtient le théorème suivant:

THÉORÈME 3. Soit α un entier non-négatif. Alors $CM_{\alpha,1}$ est un sous-ensemble convexe et compact de $C^\infty(0, +\infty)$, et l'ensemble des points extrêmes ex. $CM_{\alpha,1}$ de $CM_{\alpha,1}$ est égal à $\{g_p^{(\alpha)}; 0 \leq p \leq +\infty\}$, où $g_\infty^{(\alpha)} = 0$.

Démonstration. Evidemment $CM_{\alpha,1}$ est convexe. Pour que $CM_{\alpha,1}$ soit compact, il suffit qu'il soit fermé et borné dans $C^\infty(0, +\infty)$. On rappelle

ici le théorème d'Ascoli. Il est facile de voir qu'il est fermé. Montrons que $CM_{\alpha,1}$ est borné dans $C^\infty(0, +\infty)$. On a, quels que soient m un entier ≥ 1 et f une fonction de $CM_{\alpha,1}$, $p_{m,0}(f) \leq 1$. Pour simplifier la notation, on pose $n = \alpha + 3$. Pour tout l'entier non-négatif k et pour toute la fonction f de $CM_{\alpha,1}$, la fonction

$$\frac{B_\alpha^k(|x|; d/dt)f(|x|)}{|x|^{n-2}}$$

est sous-harmonique dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$. On a, quelle que soit $\varphi \geq 0$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \int \frac{B_\alpha^k(|x-y|; d/dt)f(|x-y|)}{|x-y|^{n-2}} \varphi(y) dy = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \int \frac{f(|x-y|)}{|x-y|^{n-2}} \Delta^k \varphi(y) dy = 0$$

et donc

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{B_\alpha^k(|x|; d/dt)f(|x|)}{|x|^{n-2}} = 0.$$

Par conséquent, $B_\alpha^k(t; d/dt)f(t)$ est décroissante (au sens large) dans $(0, +\infty)$.

Soit k un entier quelconque ≥ 1 , et supposons que, pour un entier quelconque j avec $0 \leq j \leq 2k$ et pour un entier quelconque $m \geq 1$, il existe une constante $c_{m,j} > 0$ telle que, quelle que soit f de $CM_{\alpha,1}$, $p_{m,j}(f) \leq c_{m,j}$. Alors, pour un entier quelconque j avec $0 \leq j \leq k$, il existe une autre constante positive $a_{m,j}$ telle que, quelle que soit f de $CM_{\alpha,1}$,

$$\sup_{1/m \leq t \leq m} \left| B_\alpha^j\left(t; \frac{d}{dt}\right) f(t) \right| \leq a_{m,j}.$$

Soit m un entier positif fixé. Alors il existe une constante c_m avec $0 < c_m < 1$ telle que

$$\begin{aligned} \varphi_m(x) = & \int G_0^{(n)}(x-y) ds_{1/2m}(y) - c_m \int G_0^{(n)}(x-y) ds_{1/4m}(y) - (1-c_m) \\ & \int G_0^{(n)}(x-y) ds_{1/m}(y) \end{aligned}$$

soit zéro sur $\{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1/4m \text{ ou } |x| \geq 1/m\}$, où, pour $r > 0$, s_r désigne la mesure uniforme sur $\{x \in \mathbb{R}^n; |x| = r\}$ de masse totale d'unité. On a, dans ce cas, $\varphi_m(x) > 0$ dans $\{x \in \mathbb{R}^n; 1/4m < |x| < 1/m\}$. On a ensuite, quelle que soit f de $CM_{\alpha,1}$,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{B_\alpha^{k+1}(|x|; d/dt)f(|x|)}{|x|^{n-2}} \varphi_m(x) dx \\
&= c_m \int \frac{B_\alpha^k(|x|; d/dt)f(|x|)}{|x|^{n-2}} dS_{1/4m}(x) + (1 - c_m) \int \frac{B_\alpha^k(|x|; d/dt)f(|x|)}{|x|^{n-2}} dS_{1/m}(x) \\
&\quad - \int \frac{B_\alpha^k(|x|; d/dt)f(|x|)}{|x|^{n-2}} dS_{1/2m}(x) \\
&= c_m (4m)^{n-2} B_\alpha^k\left(\frac{1}{4m}; \frac{d}{dt}\right) f\left(\frac{1}{4m}\right) + (1 - c_m) m^{n-2} B_\alpha^k\left(\frac{1}{m}; \frac{d}{dt}\right) f\left(\frac{1}{m}\right) \\
&\quad - (2m)^{n-2} B_\alpha^k\left(\frac{1}{2m}; \frac{d}{dt}\right) f\left(\frac{1}{2m}\right) \\
&\leq (4m)^{n-2} a_{4m,k},
\end{aligned}$$

car

$$\Delta\varphi_m = c_m S_{1/4m} + (1 - c_m) S_{1/m} - S_{1/2m}$$

au sens des distributions dans R^n . On a donc

$$\left(\int \varphi_m dx\right) B_\alpha^{k+1}\left(\frac{1}{m}; \frac{d}{dt}\right) f\left(\frac{1}{m}\right) \leq (4m)^{n-2} a_{4m,k}.$$

La fonction $B_\alpha^{k+1}(t, d/dt)f(t)$ étant décroissante dans $(0, +\infty)$, pour tout l'entier $m \geq 1$, il existe une constante positive $a_{m,k+1}$ telle que, quelle que soit f de $CM_{\alpha,1}$,

$$\sup_{1/m \leq t \leq m} \left| B_\alpha^{k+1}\left(t, \frac{d}{dt}\right) f(t) \right| \leq a_{m,k+1}.$$

On a, pour une fonction f de $CM_{\alpha,1}$,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} B_\alpha^k\left(t; \frac{d}{dt}\right) f(t) - \frac{\alpha}{t} B_\alpha^k\left(t; \frac{d}{dt}\right) f(t) \right) \geq 0$$

et

$$\frac{d}{dt} B_\alpha^k\left(t; \frac{d}{dt}\right) f(t) - \frac{\alpha}{t} B_\alpha^k\left(t; \frac{d}{dt}\right) f(t) \leq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2m} \sup_{1/m \leq t \leq m} \left| \frac{d}{dt} B_\alpha^k\left(t; \frac{d}{dt}\right) f(t) - \frac{\alpha}{t} B_\alpha^k\left(t; \frac{d}{dt}\right) f(t) \right| \\
&= \frac{1}{2m} \left(-\frac{d}{dt} B_\alpha^k\left(\frac{1}{m}; \frac{d}{dt}\right) f\left(\frac{1}{m}\right) + m\alpha B_\alpha^k\left(\frac{1}{m}; \frac{d}{dt}\right) f\left(\frac{1}{m}\right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq B_\alpha^k\left(\frac{1}{2m}; \frac{d}{dt}\right)f\left(\frac{1}{2m}\right) + \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)B_\alpha^k\left(\frac{1}{m}; \frac{d}{dt}\right)f\left(\frac{1}{m}\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)a_{2m,k} , \end{aligned}$$

et par suite

$$\sup_{1/m \leq t \leq m} \left| \frac{d}{dt} B_\alpha^k\left(t; \frac{d}{dt}\right)f(t) \right| \leq 2m^2 \alpha a_{m,k} + 2m \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) a_{2m,k} .$$

On a, en même temps,

$$\sup_{f \in CM_{\alpha,1}} \left(\sup_{1/m \leq t \leq m} \left| \frac{d^2}{dt^2} B_\alpha^k\left(t; \frac{d}{dt}\right)f(t) \right| \right) < +\infty .$$

On obtient ainsi que, quel que soit m un entier > 1 ,

$$\sup_{f \in CM_{\alpha,1}} p_{m,2k+1}(f) < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{f \in CM_{\alpha,1}} p_{m,2(k+1)}(f) < +\infty .$$

Par récurrence, $CM_{\alpha,1}$ est borné dans $C^\infty(0, +\infty)$, d'où $CM_{\alpha,1}$ est un sous-ensemble convexe et compact de $C^\infty(0, +\infty)$.

Montrons ensuite ex. $CM_{\alpha,1} = \{g_p^{(\alpha)}; 0 \leq p \leq +\infty\}$. Rappelons encore que, quelle que soit φ de $C^\infty(0, +\infty)$,

$$A\left(\frac{\varphi(|x|)}{|x|^{n-2}}\right) = \frac{B_\alpha(|x|; d/dt)\varphi(|x|)}{|x|^{n-2}} .$$

On a alors

$$G_p^{(n)} = \frac{g_p^{(\alpha)}(|x|)}{|x|^{n-2}} dx \quad (\forall p \geq 0) .$$

Soit f une fonction non-zéro de ex. $CM_{\alpha,1}$. Alors on a évidemment $f(0) = 1$. Le noyau de convolution $(f(|x|)/|x|^{n-2})dx$ sur \mathbf{R}^n appartenant à $S_{r,0}(\mathbf{R}^n)$, il existe une mesure de Radon positive λ dans $[0, +\infty)$ de masse totale d'unité telle que

$$f = \int g_p^{(\alpha)} d\lambda(p) .$$

Supposons que λ n'est pas une mesure d'unité à un point. Alors il existe un nombre $t > 0$ tel que $\lambda([0, t]) > 0$ et $\lambda([t, +\infty)) > 0$. Soient λ_1 et λ_2 les restrictions de λ sur $[0, t)$ et sur $[t, +\infty)$, respectivement. On a alors

$$f \pm \left(\int d\lambda_2 \int g_p^{(\alpha)} d\lambda_1(p) - \int d\lambda_1 \int g_p^{(\alpha)} d\lambda_2(p) \right) \in CM_{\alpha,1},$$

et par suite

$$\frac{1}{\int d\lambda_1} \int g_p^{(\alpha)} d\lambda_1(p) = \frac{1}{\int d\lambda_2} \int g_p^{(\alpha)} d\lambda_2(p).$$

Mais cela est en contradiction avec $g_p^{(\alpha)} > g_q^{(\alpha)}$ dans $(0, +\infty)$ dès que $p < q$, d'où λ est une mesure d'unité à un point. Par conséquent, $\text{ex. } CM_{\alpha,1} - \{0\} \subset \{g_p^{(\alpha)}; 0 \leq p < +\infty\}$. On montrera l'inclusion inverse. Supposons que l'inclusion inverse n'a pas lieu; alors il existe un nombre $q > 0$ et une mesure de Radon positive $\lambda \neq \varepsilon_q$ dans $[0, +\infty)$ de masse totale d'unité tels que

$$g_q^{(\alpha)} = \int g_p^{(\alpha)} d\lambda(p),$$

et donc

$$G_q^{(n)} = \int G_p^{(n)} d\lambda(p).$$

On a alors

$$\frac{1}{t^2 + q} = \int \frac{1}{t^2 + p} d\lambda(p)$$

sur \mathbf{R}^1 , et par suite

$$\exp(-\sqrt{qt}) = \int \exp(-\sqrt{pt}) d\lambda(p) \quad (\forall t \geq 0),$$

d'après l'injectivité de la transformation de Fourier. Mais cette égalité est en contradiction avec l'injectivité de la transformation de Laplace. Par conséquent, l'inclusion inverse a lieu. Il est évident que 0 est extrême. La démonstration est ainsi complète.

COROLLAIRE 1. *Soient α un entier non-négatif et φ une fonction de $C^\infty(0, +\infty)$. Pour que φ soit complètement monotone d'ordre α , il faut et il suffit qu'il existe une mesure de Radon positive λ sur $[0, +\infty)$ telle que*

$$\varphi = \int g_p^{(\alpha)} d\lambda(p) .$$

Dans ce cas, λ est uniquement déterminée.

Cela résulte immédiatement des théorèmes 2 et 3.

COROLLAIRE 2. Soit $S_{r,0}^{(1)}$ la totalité des noyaux de convolution N sur \mathbf{R}^n ($n \geq 3$) complètement sous-harmoniques en dehors de l'origine, invariants par rotations, s'annulant à l'infini et vérifiant $N(\{O\}) = 0$ et $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} N(x)|x|^{n-2} \leq 1$ ⁽³⁾. Alors $S_{r,0}^{(1)}$ est convexe et compact dans $C^\infty(\mathbf{R}^n - \{0\})$ et on a

$$\text{ex. } S_{r,0}^{(1)} = \{G_p^{(n)}; 0 \leq p \leq +\infty\} ,$$

où $G_\infty^{(n)} = 0$, où $C^\infty(\mathbf{R}^n - \{0\})$ est l'espace de Fréchet usuel des fonctions réelles et infiniment dérivables en dehors de l'origine et où $\text{ex. } S_{r,0}^{(1)}$ est l'ensemble des points extrêmes de $S_{r,0}^{(1)}$.

Cela est un résultat immédiat du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIES

- [1] A. Beurling et J. Deny: Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., **45** (1959), 208–215.
- [2] N. Bourbaki: Espaces vectoriels topologiques, Hermann, Paris, 1966.
- [3] J. Deny: Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **12** (1962), 643–667.
- [4] C. S. Herz: Analyse harmonique à plusieurs variables, Sémin. Math. d'Orsay, 1965/66.
- [5] I. Higuchi et M. Itô: Characterization of the relative domination principle, Nagoya Math. J., **50** (1972), 175–184.
- [6] M. Itô: Remarque sur la somme d'un noyau de Dirichlet et du noyau newtonien, Proc. Japan Acad., **46** (1970), 362–363.
- [7] —: Remarque sur la somme des résolvantes, Proc. Japan Acad., **46** (1970), 243–245.
- [8] —: Sur les principes divers du maximum et le type positif, Nagoya Math. J., **44** (1971), 133–164.
- [9] —: Caractérisation du principe de domination pour les noyaux de convolution, Nagoya Math. J., à paraître.
- [10] —: Sur la famille sous-ordonnée au noyau de convolution de Hunt, Nagoya Math. J., **51** (1973), 45–56.
- [11] —: Sur la famille sous-ordonnée au noyau de convolution de Hunt II, Nagoya Math. J., **53** (1974), 115–126.

⁽³⁾ N est considéré comme une fonction infiniment dérivable en dehors l'origine.

- [12] M. Riesz: Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels, *Acta Sc. Math.*, Szeged, **9** (1938), 1–42.
- [13] D. Widder: *The Laplace transform*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1948.

*Institut Mathématique
d'Université de Nagoya*