Compositio Mathematica **109:** 357–365, 1997.

Une réciproque générique du théorème de Sunada

HUBERT PESCE
Unversité Joseph Fourier, UFR De Mathématiques, URA 188 Du CNRS, 100 Rue Des Math BP 74, 38402 St. Martin D'Heres, France; e-mail: Hubert.Pesce@ujf-grenoble.fr

Received: 26 March 1996; accepted in final form 3 September 1996

Abstract. Let G a compact group of isometries of a closed Riemannian manifold $(X, \mathbf{m})$. Sunada proved that if Γ_1 and Γ_2 are two finite almost-conjugated subgroups of G, then $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m})$ and $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m})$ are isospectral. We prove that if G is finite, there exists an open dense set in the set of G-invariant metrics for which the converse of this result is true. If G is infinite, the situation is more complicated and we obtain some partial results.

Mathematics Subject Classifications (1991): 35G20, 35J50.

Key words: length spectrum, Laplace spectrum, induced representation

Introduction

Soient $(X, \mathbf{m})$ une variété riemannienne fermée et Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami opérant sur $C^\infty(X)$. Cet opérateur possède un spectre discret qui s'appelle le spectre de la variété. Une question naturelle est de savoir dans quelle mesure le spectre détermine la géométrie de la variété. En particulier, deux variétés isospectrales sont-elles isométriques? Depuis l'exemple de Milnor, on sait que la réponse à cette question est négative. Ensuite d'autres exemples de caractère sporadique ont été introduits (voir [B] pour un historique du problème).

La situation a radicalement changé avec l'introduction par Sunada d'une méthode systématique pour construire des variétés isospectrales [S]. Il se place dans le cadre suivant: $(X, \mathbf{m})$ est une variété riemannienne fermée et Γ_1 et Γ_2 sont deux sous-groupes discrets d'un groupe G d'isométries de $(X, \mathbf{m})$ qui opèrent librement sur X. On note $\pi^G_{\Gamma_i}$ la représentation de G induite par la représentation triviale de Γ_i (représentation quasi-régulière).

Le théorème de Sunada affirme que si les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ sont équivalentes, alors les quotients riemanniens $\Gamma_1\backslash X$ et $\Gamma_2\backslash X$ sont isospectraux pour le laplacien opérant sur les fonctions et, plus généralement, pour tout opérateur différentiel naturel. En utilisant ce théorème, on peut construire de nombreux exemples de variétés isospectrales et non isométriques. Il est alors naturel de se demander si, lorsque l'on est dans la même situation, la condition du théorème de Sunada est nécessaire. Les exemples d'Ikeda d'espaces lenticulaires isospectraux sur les fonctions mais pas sur les formes [I] fournissent une réponse négative à cette question et montrent que le théorème de Sunada n'admet pas de réciproque en général.

Le but de cet article est de montrer que les exemples de variétés isospectrales qui n'entrent pas dans le cadre du théorème de Sunada sont rares. Pour cela, on fixe une variété fermée X et un groupe compact G qui opère sur celle-ci. On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{M}^G$ des métriques sur X invariantes par G, c'est-à-dire l'ensemble des métriques pour lesquelles on peut appliquer le théorème de Sunada, et on considère l'ensemble $\mathcal{S}^G$ des métriques de $\mathcal{M}^G$ pour lesquelles la condition du théorème de Sunada est équivalente à l'isospectralité des variétés quotients. Dans un premier temps, on considère le cas où le groupe G est fini et on montre que $\mathcal{S}^G$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}^G$ (Prop. 2.1.). Pour cela, on utilise la formule de traces de Sunada et les relations entre le spectre du laplacien et le spectre des longueurs à travers les formules démontrées par Colin de Verdière [CdV]. On considère ensuite le cas où G est compact et infini. Il se trouve que le résultat démontré n'est pas le même. En effet, il est possible dans ce cas d'affaiblir la condition du théorème de Sunada en ne demandant que l'équivalence de sous-représentations $(\pi^G_{\Gamma_i})_K$ des représentations $\pi^G_{\Gamma_i}$ [P]. On introduit alors l'ensemble $\mathcal{S}^G_K$ des métriques de $\mathcal{M}^G$ pour lesquelles l'équivalence des sous-représentations que l'on vient d'introduire est équivalente à l'isospectralité des variétés quotients. On montre alors que si G vérifie certaines hypothèses, alors $\mathcal{S}^G_K$ est dense dans $\mathcal{M}^G$ (voir Prop. 3.1. pour énoncé précis). La méthode utilisée est différente que dans le cas où G est fini et repose uniquement sur de techniques de représentations.

1. Spectre du Laplacien et géodésiques périodiques

Le but de cette partie est de rappeler les résultats obtenus dans l'article de Colin de Verdière [CdV]. L'idée de cet article est d'obtenir une formule de traces, c'est-à-dire une formule faisant le lien entre le spectre du laplacien et le spectre des longueurs d'une variété compacte. La méthode utilisée dans cet article consiste à étudier le comportement asymptotique du noyau de la chaleur. D'autres méthodes utilisant l'équation des ondes sont apparues plus tard. La formule de trace obtenue n'est, à priori, valable que pour des métriques génériques.

Nous allons tout d'abord expliquer l'hypothèse requise. Soient X une variété compacte, $\mathbf{m}$ une métrique sur X, alors l'ensemble $\Omega(X) = H^1([0,1], X)$ des applications c absolument continues $[0,1]$ dans X telles que $\dot{c}$ soit de carré sommable est une variété hilbertienne. Si g est une isométrie de $(X, \mathbf{m})$, on peut considérer l'ensemble $\Omega(X,g)$ des éléments c de $\Omega(X)$ qui sont tels que $g.c(0) = c(1)$ et $g.\dot{c}(0) = \dot{c}(1)$. On peut montrer que $\Omega(X,g)$ est une sous-variété de $\Omega(X)$ et que l'énergie $E_g : \Omega(X,g) \to \mathbf{R}$ est une fonction lisse dont les points critiques s'étendent en les géodésiques de $(X, \mathbf{m})$ qui sont telles que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on ait $c(t+1) = g.c(t)$. Notons $\mathcal{L}_g$ l'ensemble des longueurs des géodésiques critiques pour E_g. On dit qu'une longueur l de $\mathcal{L}_g$ est non dégénérée si l'ensemble des points critiques correspondants à la valeur critique l^2 est une réunion finie de sous-variétés

https://doi.org/10.1023/A:1000286121144 Published online by Cambridge University Press

compactes, connexes et non-dégénérées, c'est-à-dire que la restriction du hessien de E_g au fibré normal de chacune de ces sous-variétés est non dégénérée. Nous allons pouvoir énoncer le résulat qui nous intéresse. Dans l'énoncé, il apparaît le symbole '$=_{F_\alpha}$'. Ce symbole est défini p.167 dans [CdV] et ne signifie pas qu'il y a égalité entre les fonctions mais que, aprés changement de variables, les deux fonctions ont des transformées de Fourier qui ont un comportement similaire. On introduit maintenant le noyau de la chaleur $k(x, y, t)$ avec x, y dans X et $t > 0$ et on note

$$Z(g,t) = \int_X k(x, g.x, t)\ \mathrm{d}x.$$

Le but de la formule obtenue dans [CdV] est d'obtenir une expression de $Z(g,t)$ faisant apparaitre les longueurs de $\mathcal{L}_g$. De façon plus précise, il est montré à la page 172 de [CdV] que si toutes les longueurs de $\mathcal{L}_g$ sont non dégénérées, alors $\mathcal{L}_g = \{0 \leqslant l_0(g) < \cdots < l_n(g) < \cdots\}$ et

$$Z(g,t) =_{F_\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{\alpha,g}(t) \exp(-l_n^2(g)/4t).$$

De plus, on peut décrire la forme des fonctions $f_n^{\alpha,g}$ en fonction de l'indice et de la nullité des géodésiques critiques pour la valeur $l_n^2(g)$. Nous allons maintenant pouvoir appliquer ce résultat aux problèmes d'isospectralité.

2. Preuve du résultat principal

On considère une variété fermée X et un groupe fini G qui opère fidèlement sur X. On introduit l'ensemble $\mathcal{M}$ des métriques C^∞ que l'on munit de de la topologie C^k avec $k \geqslant 5$. On peut considérer l'ensemble $\mathcal{M}^G$ des métriques invariantes par G et l'on note $\mathcal{S}^G$ l'ensemble des métriques $\mathbf{m}$ de $\mathcal{M}^G$ qui sont caractérisées par la propriété

'Si Γ_1 et Γ_2 sont deux sous-groupes de G tels que les quotients riemanniens $(\Gamma_1 \backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2 \backslash X, \mathbf{m})$ sont isospectraux, alors les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont équivalentes.'

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant

PROPOSITION 1. *$\mathcal{S}^G$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}^G$.*

Preuve. Montrons tout d'abord que $\mathcal{S}^G$ est un ouvert de $\mathcal{M}^G$. Considérons une suite $\{\mathbf{m}_p\}_{p \geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{M}^G - \mathcal{S}^G$ qui converge vers une métrique $\mathbf{m}$ et montrons que $\mathbf{m}$ est aussi dans $\mathcal{M}^G - \mathcal{S}^G$. Pour tout $p \geqslant 0$, il existe deux sous-groupes $\Gamma_1^{(p)}$ et $\Gamma_2^{(p)}$ de G tels que les quotients riemanniens $(\Gamma_1^{(p)} \backslash X, \mathbf{m}_p)$ et $(\Gamma_2^{(p)} \backslash X, \mathbf{m}_p)$ soient isospectraux et tels que les représentations $\pi_{\Gamma_1^{(p)}}^G$ et $\pi_{\Gamma_2^{(p)}}^G$

https://doi.org/10.1023/A:1000286121144 Published online by Cambridge University Press

ne soient pas équivalentes. Comme un groupe fini n'a qu'un nombre fini de sous-groupes, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les groupes $\Gamma_1^{(p)}$ et $\Gamma_2^{(p)}$ sont indépendants de p. Posons donc $\Gamma_1 = \Gamma_1^{(p)}$ et $\Gamma_2 = \Gamma_2^{(p)}$ et remarquons que la convergence des métriques $\{\mathbf{m}_p\}_{p\geqslant 0}$, vues comme métriques sur X, implique leur convergence vues comme métriques sur $\Gamma_1\backslash X$ et $\Gamma_2\backslash X$. Les valeurs propres étant des fonctions continues de la métrique, on en déduit que les variétés $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m})$ sont isospectrales. Comme les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ ne sont pas équivalentes, on a bien montré que $\mathbf{m}$ n'est pas dans $\mathcal{S}^G$, ce qui montre bien que $\mathcal{S}^G$ est ouvert dans $\mathcal{M}^G$.

Nous allons maintenant montrer que $\mathcal{S}^G$ est dense dans $\mathcal{M}^G$. Nous allons utiliser les résultats de la partie précédente sur les relations entre le spectre du laplacien et le spectre des longueurs. Nous allons tout d'abord fixer des éléments $\mathcal{C} = \{g_1, \ldots, g_N\}$ de G qui forment une système de représentant des classes de conjugaison de G, c'est-à-dire que tout élément g de G est conjugué à un unique élément de $\mathcal{C}$. Ce choix étant fait, pour toute métrique $\mathbf{m}$ dans $\mathcal{M}^G$, on a une identification entre $\Omega(G\backslash X)$ et $\bigcup_{i=1}^N \Omega(X, g_i)$. On dit qu'une métrique $\mathbf{m}$ dans $\mathcal{M}^G$ est bosselée ('bumpy') si toutes les valeurs critiques de l'énergie E: $\Omega(G\backslash X) \to \mathbf{R}$ sont non dégénérées et si pour tout $l \neq 0$ dans le spectre des longueurs de $(G\backslash X, \mathbf{m})$ la variété critique correspondant à l^2 n'a que deux composantes connexes W_{+1} et W_{-1} qui sont, c étant une géodésique périodique de longueur l fixée, $W_\varepsilon = \{t \mapsto c(a+\varepsilon t) \mid a \in S^1\}$. Dans le cas où l'action de G est libre, on peut identifier les métriques de $G\backslash X$ et $\mathcal{M}^G$ et un théorème d'Abraham [A] nous assure que l'ensemble des métriques bosselées est résiduel dans $\mathcal{M}^G$ muni de la topologie C^k pour $k \geqslant 5$. Dans le cas où l'action de G n'est pas libre, ce résultat est encore vrai: on remarque en effet que l'ensemble des points fixes d'un élément g de G est une sous-variété totalement géodésique pour n'importe quelle métrique dans $\mathcal{M}^G$ et on reproduit mot-à-mot l'argument de perturbation d'Abraham au voisinage de ces sous-variétés.

La fin de la preuve consiste à montrer qu'une métrique bosselée est dans $\mathcal{S}^G$. On utilise le fait que deux variétés sont isospectrales si et seulement si elles ont même fonction de partition. Il est possible d'exprimer la fonction de partition Z_Γ d'une variété du type $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$ en fonction du noyau de la chaleur de $(X, \mathbf{m})$. Si, de plus, la métrique $\mathbf{m}$ est dans $\mathcal{M}^G$, avec $\Gamma \subset G$, on a la formule de trace de Sunada [S]. Pour tout $t > 0$

$$Z_\Gamma(t) = \sum_{i=1}^N r_\Gamma(g_i) Z(g_i, t).$$

Dans l'égalité précédente, r_Γ est la fonction centrale définie sur G par la formule $r_\Gamma(g) = \sharp(\{g\} \bigcap \Gamma)/\sharp(\Gamma)$, où $\{g\}$ désigne la classe de conjugaison de g dans G. Maintenant, si la métrique $\mathbf{m}$ est bosselée, le spectre des longueurs $\mathcal{L}$ de $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$

est discret: $\mathcal{L} = \{0 = l_0 < l_1 < \cdots < l_n < \cdots\}$ et $\mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{L}_{g_i}$. On déduit donc de la formule de Sunada et des formules démontrées dans [CdV] que

$$Z_\Gamma(t) =_{F_\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n,\Gamma}^{\alpha}(t) \exp(-l_n^2/4t)$$

avec $f_{n,\Gamma}^{\alpha} = \Sigma r_\Gamma(g_i) f_p^{\alpha,g_i}$, la somme portant sur les couples (i,p) tels que $l_p(g_i) = l_n$. Pour écrire cette formule, on a juste utilisé le fait que les valeurs critiques de l'énergie sont non dégénérées. On va maintenant utilisé le fait que la métrique est bosselée. Dans ce cas, les fonctions f_p^{α,g_i} sont non nulles (voir [CdV], p. 172 pour une expression de ces fonctions) et pour tout n, il existe un unique couple (i,p) tel que $l_p(g_i) = l_n$. Supposons maintenant que deux quotients $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m})$ soient isospectraux, on déduit de l'égalité $Z_{\Gamma_1} = Z_{\Gamma_2}$ et de l'unicité des développement considérés ([CdV], p. 167) que pour tout couple (i,p), on a $r_{\Gamma_1}(g_i) f_p^{\alpha,g_i} = r_{\Gamma_2}(g_i) f_p^{\alpha,g_i}$. Comme $f_p^{\alpha,g_i} \neq 0$, on a forcément $r_{\Gamma_2}(g_i) = r_{\Gamma_1}(g_i)$. Les fonctions considérées étant centrales, on en déduit que $r_{\Gamma_1} = r_{\Gamma_2}$. Or le caractère χ_Γ de la représentation π_Γ^G se calcule facilement: $\chi_\Gamma(g) = r_\Gamma(g)\sharp(G)/\sharp(\{g\})$. Il en résulte que l'égalité $r_{\Gamma_1} = r_{\Gamma_2}$ est équivalente au fait que les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ ont même caractère. On a donc bien montré que $\mathcal{S}^G$ contient les métriques bosselées, ce qui prouve que $\mathcal{S}^G$ est dense. □

EXEMPLE 1. Si G est d'ordre pq où p et q sont deux nombres premiers, alors $\mathcal{S}^G = \mathcal{M}^G$. En effet, si Γ_1 et Γ_2 sont deux sous-groupes de G tels que $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m})$ soient isospectraux, alors, comme ces quotients ont même volume, Γ_1 et Γ_2 ont même cardinal et, d'aprés le théorème de Sylow, sont conjugués dans G.

EXEMPLE 2. On considère un variété fermée Y, un groupe fini Γ qui opère sur Y et on pose $X = Y \times Y$ et $G = \Gamma \times \Gamma$. Dans ce cas $\mathcal{M}^G - \mathcal{S}^G$ contient la variété de dimension infinie constituée des métriques de la forme $\mathbf{m} = \mathbf{n} \oplus \mathbf{n}$ où $\mathbf{n}$ parcourt l'ensemble des métriques sur Y qui sont invariantes par Γ. Si l'on pose $\Gamma_1 = \Gamma \times \{1\}$ et $\Gamma_2 = \{1\} \times \Gamma$ et si l'on considère une métrique du type précédent, alors les variétés $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m})$ sont isométriques, donc isospectrales et les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ ne sont pas équivalentes puisque Γ_1 et Γ_2 sont normaux dans G.

EXEMPLE 3. On considère la sphère $S^{2n-1} \subset \mathbf{C}^n$. Ikeda a montré qu'il existe deux opérateurs unitaires g_1 et g_2 de $\mathbf{C}^n$, qui commutent et qui sont tels que, si Γ_i désigne le groupe engendré par g_i, alors les quotients $\Gamma_1\backslash S^{2n-1}$ et $\Gamma_2\backslash S^{2n-1}$, lorsqu'on les munit de la métrique canonique, sont isospectraux pour le laplacien opérant sur les fonctions mais pas pour le laplacien opérant sur les formes différentielles [I]. On en déduit que si G est n'importe quel sous-groupe du groupe orthogonal contenant Γ_1 et Γ_2, alors la métrique canonique à courbure constante n'est pas dans $\mathcal{S}^G$.

https://doi.org/10.1023/A:1000286121144 Published online by Cambridge University Press

3. Le cas des groupes compacts

Dans cette partie, on regarde le cas où le groupe G n'est supposé fini, mais seulement compact. Le résultat attendu, et démontré dans des cas particuliers, n'est pas le même. Ceci vient du fait que, dans cette situation, la condition du théorème de Sunada peut être affaiblie (on ne demande que l'équivalence de sous-représentations des représentations quasi-régulières) et c'est cette nouvelle condition dont la réciproque semble être vraie génériquement. Nous allons tout d'abord rappeler comment on peut affaiblir la condition du théorème de Sunada.

Si G est un groupe de Lie qui opère sur une variété X, on note G_x le stabilisateur d'un point x de X, c'est-à-dire l'ensemble des $g \in G$ tels que $g.x = x$. Si l'action de G est propre et C^∞, ce qui est le cas lorsque G est un sous-groupe fermé du groupe des isométries d'une variété riemannienne, alors G_x est un sous-groupe compact de G et on peut montrer ([Bo], p. 96) qu'il existe un sous-groupe compact K de G, que l'on appelle stabilisateur générique, qui est tel que pour tout $x \in X$, K est conjugué à un sous-groupe de G_x et qu'il existe un ouvert dense U tel que si $x \in U$, alors K et G_x sont conjugués.

EXEMPLE 1. L'ensemble des points fixes d'une isométrie étant un fermé d'intérieur vide, le théorème de Baire nous assure que si le groupe G est dénombrable, alors le stabilisateur générique est le groupe trivial.

EXEMPLE 2. Si on considère une variété riemannienne homogène pour G, elle est de la forme G/K où K est un sous-groupe compact de G qui est évidemment le stabilisateur générique de l'action de G sur G/K.

Maintenant si ρ est une représentation de G dans un espace de Hilbert V et si K est un sous-groupe compact de G, on peut construire une sous-représentation de ρ comme suit: on considère tout d'abord l'espace V^K des vecteurs v dans V tels que $\rho(k)(v)=v$ pour tout k dans K. On définit ensuite V_K comme étant le plus petit sous-espace fermé invariant contenant V^K et ρ_K comme la sous-représentation correspondant à V_K. Remarquons que V_K est l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les $V^{gKg^{-1}}$ quand g parcourt G.

Nous allons maintenant revenir aux problèmes d'isospectralité. On regarde maintenant le cas où $(X, \mathbf{m})$ est une variété riemannienne fermée et G un groupe d'isométries de $(X, \mathbf{m})$. Le groupe G n'est plus supposé fini mais seulement compact. On peut donc considérer le stabilisateur générique K de son action sur X et on peut montrer que si Γ_1 et Γ_2 sont deux sous-groupes discrets de G qui opèrent librement sur X et qui sont tels que les sous-représentations $(\pi^G_{\Gamma_1})_K$ et $(\pi^G_{\Gamma_2})_K$ sont équivalentes, alors les quotients riemanniens $(\Gamma_1 \backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2 \backslash X, \mathbf{m})$ sont isospectraux pour le laplacien opérant sur les fonctions ([P], Prop. 2.2). La condition imposée dans le théorème est à priori plus faible que celle qui apparait dans le théorème de Sunada et il semble donc, dans ce cadre, plus raisonnable d'espérer démontrer une réciproque générique de ce résultat. Comme précédemment, on considére l'ensemble $\mathcal{M}^G$ des métriques invariantes par G et l'on note $\mathcal{S}_K^G$ l'ensemble des métriques **m** de $\mathcal{M}^G$ qui sont caractérisées par la propriété

'Si Γ_1 et Γ_2 sont deux sous-groupes de G tels que les quotients riemanniens $(\Gamma_1 \setminus X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2 \setminus X, \mathbf{m})$ sont isospectraux pour le laplacien opérant sur les fonctions, alors les représentations $(\pi_{\Gamma_1}^G)_K$ et $(\pi_{\Gamma_2}^G)_K$ sont équivalentes.'

Le but de cette partie est d'obtenir, dans certains cas, un résultat du même type que celui obtenu dans le cas des groupes finis. Le problème est que l'on ne peut plus utiliser l'argument de la première partie portant sur les géodésiques périodiques pour deux raisons de natures différentes: l'une est géométrique et l'autre algébrique. Tout d'abord, supposons pour simplifier que l'action de G est libre. Dans ce cas, $G \setminus X$ est une variété et toute métrique **m** dans $\mathcal{M}^G$ induit une métrique sur $G \setminus X$, que l'on note encore **m**, de sorte que la projection $(X, \mathbf{m}) \to (G \setminus X, \mathbf{m})$ soit une submersion riemannienne. Le problème que l'on rencontre est que les géodésiques de $(G \setminus X, \mathbf{m})$ s'identifient aux géodésiques horizontales de $(X, \mathbf{m})$ et il n'y a aucune raison pour que les géodésiques critiques pour l'énergie qui apparaissent dans la formule de trace soient horizontales. Il n'est donc pas évident de trouver une condition simple sur la métrique qui assure la validité des formules de trace, ce qui est une première obstruction à l'utilisation de la méthode de la première partie. Le deuxième problème nous vient des représentations. En effet, pour montrer que les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ étaient équivalentes, il suffisait de montrer qu'elles avaient même caractère. On est donc confrontés au problème de savoir comment on peut exprimer en fonction des caractères de deux représentations α et β le fait que les sous-représentations $(\alpha)_K$ et $(\beta)_K$ sont équivalentes. Un tel critère existe effectivement ([P], Prop. 1.1) mais est difficilement appliquable, sauf dans le cas où G est fini ([P], Cor. 1.5), ce qui est le cas envisagé dans la première partie (rappelons que dans ce cas, K est trivial). Ceci étant dit, on peut énoncer:

PROPOSITION 2. *On suppose que X et G sont tels que pour toute représentation de G irréductible réelle ρ admettant des vecteurs invariants par K, on a* $\dim(\rho) \leqslant \dim(X)$, *alors $\mathcal{S}_K^G$ est dense dans $\mathcal{M}^G$.*

Preuve. Il nous faut trouver une condition simple qui implique qu'une métrique soit dans $\mathcal{S}_K^G$. Cette condition a déja été considérée dans [P] et s'exprime en terme de représentations. Pour cela, on considère une métrique **m** dans $\mathcal{M}^G$, une valeur propre λ du laplacien de $(X, \mathbf{m})$ et on note $V_{\lambda,k}$ l'ensemble des fonctions propres à valeurs dans k correspondant à la valeur propre λ avec $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Comme le groupe G est un groupe d'isométries, on obtient une représentation naturelle de G dans $V_{\lambda,k}$ que l'on note $\pi_{\lambda,k}^G$. On peut maintenant introduire l'ensemble $\mathcal{R}^G$ des métriques **m** de $\mathcal{M}^G$ qui sont telles que pour toute valeur propre λ du laplacien de $(X, \mathbf{m})$, la représentation $\pi_{\lambda,\mathbf{R}}^G$ soit irréductible. La proposition est basée sur le fait que $\mathcal{R}^G$ est inclus dans $\mathcal{S}_K^G$ et que, sous les hypothèses de la proposition, $\mathcal{R}^G$ est dense dans $\mathcal{M}^G$.

https://doi.org/10.1023/A:1000286121144 Published online by Cambridge University Press

Par soucis de complétude, on va rappeler pourquoi $\mathcal{R}^G$ est inclus dans $\mathcal{S}_K^G$. Si Γ est un sous-groupe fini de G et si $\mathbf{m}$ est dans $\mathcal{M}^G$, comme les fonctions propres de $(\Gamma\backslash X,\mathbf{m})$ correspondant à une valeur propre λ sont les fonctions propres de $(X,\mathbf{m})$ qui sont invariantes par Γ, la multiplicité de λ, vue comme valeur propre de $(\Gamma \backslash X,\mathbf{m})$, est égale à la multiplicité de la représentation triviale 1_Γ de Γ dans la représentation $\pi^\Gamma_{\lambda,\mathbf{C}}$. Une application directe du théorème de réciprocité de Frobenius et l'utilisation d'un résultat de Donnelly, résultat qui caractérise les représentations irréductibles de G qui apparaissent dans les espaces propres comme étant celles qui ont des vecteurs invariants par K, nous donne

$$[1_\Gamma : \pi^\Gamma_{\lambda,\mathbf{C}}] = \sum [\sigma : \pi^G_\Gamma][\sigma : \pi^G_{\lambda,\mathbf{C}}].$$

Dans le membre de droite de l'égalité, la somme porte sur l'ensemble des représentations irréductibles de G qui admettent des vecteurs invariants par K et le symbole $[\alpha : \beta]$ désigne la multiplicité d'une représentation irréductible α dans une représentation quelconque β. Si on suppose maintenant qu'une métrique est dans $\mathcal{R}^G$ et si Γ_1 et Γ_2 sont deux sous-groupes de G tels que les quotients riemanniens $(\Gamma_1\backslash X,\mathbf{m})$ et $(\Gamma_2\backslash X,\mathbf{m})$ sont isospectraux pour le laplacien opérant sur les fonctions, alors pour toute valeur propre λ, on a $[1_{\Gamma_1}\colon \pi^{\Gamma_1}_{\lambda,\mathbf{C}}] = [1_{\Gamma_2}\colon \pi^{\Gamma_2}_{\lambda,\mathbf{C}}]$. On utilise ensuite l'expression trouvée précédemment qui, compte-tenu de l'hypothèse faite sur la métrique est particulièrement simple ([P], Prop. 3.2.), et on trouve que pour toute représentation irréductible σ admettant des vecteurs invariants par K, on a $[\sigma\colon \pi^G_{\Gamma_1}] = [\sigma\colon \pi^G_{\Gamma_2}]$, ce qui est équivalent à l'équivalence des représentations $(\pi^G_{\Gamma_1})_K$ et $(\pi^G_{\Gamma_2})_K$.

Le fait que $\mathcal{R}^G$ soit dense dans $\mathcal{M}^G$ à condition que pour toute représentation de G irréductible réelle ρ admettant des vecteurs invariants par K, on ait $\dim(\rho) \leqslant \dim(X)$ est un résultat de Zelditch [Z]. Remarquons seulement que dans l'article de Zelditch le groupe G considéré est fini mais la preuve dans le cas où le groupe est compact est exactement la même et, comme seule les représentations qui apparaissent dans les espaces propres sont considérées dans la preuve, il suffit d'imposer l'hypothèse sur les dimensions aux représentations admettant des vecteurs invariants par K, d'aprés le résultat de Donnelly. $\square$

EXEMPLE 1. L'exemple le plus simple est celui où $G = T$ est un tore. Dans ce cas, les représentations irréductibles réelles sont de dimension 1 ou 2 et la proposition s'applique dés que $\dim(X) \geqslant 2$. On peut prendre par exemple $X = T$ et voir opérer T par translations sur lui-même. Dans ce cas, $\mathcal{M}^T$ est l'ensemble des métriques invariantes sur T et le stabilisateur générique est trivial. Comme le groupe T est commutatif, on vérifie facilement que si deux sous-groupes Γ_1 et Γ_2 sont tels que $\pi^T_{\Gamma_1}$ et $\pi^T_{\Gamma_1}$ sont équivalentes, alors $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Remarquons que même dans ce cas simple, $\mathcal{S}^T_K = \mathcal{S}^T$ est différent de $\mathcal{M}^T$. Pour voir ceci, il suffit de considérer les exemples de paires de tores plats isospectraux connus à ce jour (par exemple les tores de Milnor). En effet, si T_0 et T_1 sont de tels exemples, il existe un tore plat T

qui est un revètement fini au dessus de T_0 et T_1 et la métrique sur T relevée de T_0 et T_1 n'est pas dans $\mathcal{S}^T$.

EXEMPLE 2. Nous allons voir maintenant un exemple où le groupe K est non trivial. On considère la sphère $S^{2n-1} \subset \mathbf{R}^{2n}$ et on prend comme groupe G le produit $(O(2))^n$ que l'on considère comme un sous-groupe de $O(2n)$ en le plongeant de manière diagonale par blocs. Dans ce cas, le stabilisateur générique est le sous-groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$. Pour voir cela, on écrit un élément x de $\mathbf{R}^{2n}$ sous la forme $x = (x_1, \ldots, x_n)$ où les x_i sont dans $\mathbf{R}^2$. On considère l'ouvert U de la sphère constitué des x tels que pour tout i, on ait $x_i \neq 0$. Comme l'action de G préserve cette décomposition de $\mathbf{R}^{2n}$, le stabilisateur G_x d'un tel point x est le produit des stabilisateur des x_i, c'est-à-dire, le produit des groupes d'ordre deux engendrés par les symétries orthogonales du plan par rapport aux droites engendrées par les x_i et ce pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Si l'on pose $T = (\mathrm{SO}(2))^n$ et $K = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$, alors G est le produit semi-direct $K \bowtie T$. On vérifie immédiatement que si l'on restreint à T une représentation irréductible de G qui admet des vecteurs invariants par K, alors cette représentation reste irréductible. L'hypothèse de dimension est donc satisfaite.

EXEMPLE 3. On considère une variété X compacte simplement connexe qui admet une métrique symétrique de rang 1, c'est-à-dire la sphère ou les espaces projectifs. On prend pour groupe G la composante neutre du groupe des isométries de la métrique symétrique et dans ce cas, on a $\mathcal{S}_K^G = \mathcal{M}^G$. En effet, toute métrique de $\mathcal{M}^G$ est multiple de la métrique symétrique et il est bien connu que les espaces propres du laplacien pour la métrique symétrique sont tous irréductibles pour G.

Bibliographie

[A] Abraham, R.: Bumpy metrics, *Proc. Symp. Pure Math.* 14 (1970), 1–3.

[B] Bérard, P.: Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques *Astérisque* 177 (1989), 127–154.

[Bo] Bourbaki, N.: *Eléments de mathématique: groupes et algèbre de Lie, chapitre 9*, Masson, Paris, 1982.

[CdV] Colin de Verdière, Y.: Spectre du laplacien et géodésiques périodiques, *Compositio Math.* 27 (1973), 159–184.

[I] Ikeda, A.: Riemannian manifolds p-isospectral but not $p+1$-isospectral *Perspect. Math.* 8 (1988), 383–417.

[P] Pesce, H.: Représentations relativement équivalentes et variétés riemanniennes isospectrales, *Comm. Math. Helv.* 71 (1996), 243–268.

[S] Sunada, T.: Riemannian covering and Isospectral manifolds *Ann. of Math.* 121 (1985), 169–186.

[Z] Zelditch, S.: On the generic spectrum of a Riemannian covering *Ann. Inst. Fourier* 40 (1990), 407–442.