Can. J. Math., Vol. XLII, No. 1, 1990, pp. 126–140

RESOLUBILITE LOCAL POUR DES EQUATIONS SEMI LINEAIRES COMPLEXES

B. DEHMAN

1. Introduction. Dans ce travail, nous construisons des solutions pour une certaine classe d'équations semi-linéaires complexes dans le plan. Plus précisément on considère prés d'un point x_0 de $\mathbf{R}^2$ l'équation

$$(*) \qquad Pu = f(x, u, \partial_x u, \ldots, \partial_x^\alpha u), \quad |\alpha| \leqq m-1$$

où P est un opérateur différentiel d'ordre $m(m \geqq 1)$ à coefficients C^∞ complexes, et où f est à valeurs complexes, analytique en $u, \ldots, \partial^\alpha u, |\alpha| \leqq m-1$, et seulement C^∞ en x. En supposant alors que P est de type principal près de x_0 et vérifie la condition de Nirenberg-Trêves sous elliptique (que nous noterons $(\mathcal{P})$, voir [**5**]), nous construisons une solution locale de $(*)$, de classe C^∞ (Théorème 2.1).

Ce résultat échappe évidemment aux théorèmes classiques d'existence de Hamilton–Jacobi et de Cauchy–Kowalevsky. En outre il généralise dans une certaine direction le théorème de résolubilité locale de Nirenberg–Trêves.

La démonstration repose essentiellement sur la procédure d'itération de Nash-Moser (cf. par exemple [**1**] ou [**2**]) et est inspirée du travail de G. Nakamura et Y. Maeda [**3**]. A l'aide de la paramétrix construite par Trêves dans [**5**], nous construisons de même une paramétrix droite pour la partie principale de l'opérateur P. Cela nous permet de trouver une solution à l'équation linéarisée de $(*)$, vérifiant une inégalité douce, essentielle au fonctionnement du schéma d'itération que nous utilisons.

1. Préliminaires – notations. On travaille dans un ouvert Ω voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^2$. On notera x le point courant de $\mathbf{R}^2$ et ξ sa variable duale.

Si u est une fonction numérique définie et dérivable sur Ω on notera ∇u son gradient:

$$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right).$$

Pour un couple $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbf{N}^2$, on désignera par ∂_x^α la dérivation $\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}$.

D'autre part, pour un réel s, on notera $H^s(\mathbf{R}^2)$ l'espace de Sobolev d'ordre s, muni de sa norme habituelle :

$$|u|_s = \left(\int_{\mathbf{R}^2}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Reçu le 16 janvier 1989.

Nous rappelons de même qu'un symbole différentiel homogène $p(x,\xi)$ défini sur $T^*\Omega\backslash 0$ est dit de type principal sur Ω si pour tout $(x,\xi)\in T^*\Omega\backslash 0, p(x,\xi)=0$ implique $\nabla p(x,\xi)\neq 0$. Et on appellera courbe bicaractéristique nulle de p, toute courbe intégrale du champ H_p sur laquelle $p=0$.

2. Enoncé du résultat – remarques. Dans Ω voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^2$, on considère l'équation semi-linéaire.

$$pu = f(x,u,\partial_x u,\dots,\partial_x^\alpha u),\qquad |\alpha|\leqq m-1 \tag{2.1}$$

où P est un opérateur différentiel homogène d'ordre $m (m\geqq 1)$ à coefficients dans $C^\infty(\Omega)$ et où f est une fonction à valeurs complexes, C^∞ de ses arguments et analytique en $u,\partial_x u,\dots,\partial_x^\alpha u$, $|\alpha|\leqq m-1$. On notera $\operatorname{Re} p(x,\xi)$ (resp. $\operatorname{Im} p(x,\xi)$) pour désigner la partie réelle (resp. imaginaire) de $p(x,\xi)$.

THÉORÈME 2.1. *Dans le cadre défini ci-dessus, on suppose en outre que l'opérateur P est de type principal sur Ω et que*

$(\mathcal{P})$ $\begin{cases}\textit{Pour tout } (x_0,\xi_0)\in \Omega x\mathbf{R}^2\backslash 0 \textit{ et pour tout nombre complexe}\\ z \textit{ tels que } p(x_0,\xi_0)=0 \text{ et } \nabla_\xi \operatorname{Re}(zp)(x_0,\xi_0)\neq 0, \textit{ la fonction}\\ \operatorname{Im}(zp)(x,\xi) \textit{ restreinte à la bicaractéristique de } \operatorname{Re}(zp)(x,\xi)\\ \textit{issue de } (x_0,\xi_0), \textit{ possède des zéros d'ordre pair (donc fini)}\\ \textit{inférieur ou égal à } 2k.\end{cases}$

Il existe alors un voisinage Ω_0 de l'origine sur lequel l'équation (2.1) *possède une solution de classe C^∞.*

Exemple 2.2. Près de l'origine de $\mathbf{R}^2$ dont on note (t,x) le point ordinaire, on considère l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + it^{2k}a(t,x)\,\frac{\partial u}{\partial x} = f(t,x,u) \tag{2.2}$$

avec $k\in\mathbf{N}$, a de classe C^∞, $a(0,0)\neq 0$ et f de classe C^∞, analytique en u.

Il existe alors un voisinage de l'origine sur lequel l'equation (2.2) possède une solution C^∞.

Remarque 2.3. Le Théorème 2.1 généralise dans le plan (et dans le cadre sous elliptique) le théorème de résolubilité locale de Nirenberg–Trêves [**4**].

Remarque 2.4. Nous justifions ici les deux hypothèses du Théorème 2.1 qui nous semblent les plus restrictives, à savoir, la dimension deux et l'hypothèse de Nirenberg–Trêves "forte" (qui fait que l'équation soit sous elliptique).

En fait, en partant simplement de l'hypothèse de résolubilité locale de [**4**], l'équation (2.1) est en général au mieux sous elliptique. Ce qui nous amène alors naturellement à la résoudre à l'aide du procédé d'itération de Nash–Moser (cf. par exemple [**1**] ou [**2**]). En notant donc

$$F(x,u,\partial u,\dots,\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leqq m} = Pu - f(x,u,\dots,\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leqq m-1},$$

on veut résoudre $F(x, u, \ldots) = 0$ localement.

Or le point crucial de cette méthode consiste à établir une inégalité "douce" pour le linéarisé de F sur u. Plus explicitement si

$$(2.3) \qquad L_u v = g$$

il s'agit d'établir une estimation du type

$$(2.4) \qquad |v|_{s-d} \leqq C_s\{|g|_s + |u|_s |v|_d\}$$

pour tout $s \in \mathbf{R}$, d fixé (dépendant de l'équation).

Malheureusement, sous une simple hypothèse de résolubilité locale, une telle inégalité semble difficile à obtenir. Par contre, dans le cadre du Théorème 2.1, nous construisons une paramétrix à droite pour P, qui nous permet de résoudre localement (2.3) et nous fournit une estimation du type (2.4).

D'autre part, la dimension deux est justifiée par le fait qu'elle permet, grâce à une bonne factorisation de P, de construire (d'abord microlocalement puis localement) cette paramétrix.

Enfin, le cadre semi-linéaire est dicté par "l'instabilité" de la condition de Nirenberg–Trêves (même sous elliptique). En effet, sans une hypothèse de structure assez rigide (et donc peu raisonnable) sur le linéarisé L_u, la condition $(\mathcal{P})$ peut être vérifiée par L_{u_0}, sans l'être par L_u, pour u arbitrairement "proche" de u_0.

Remarque 2.5. Il est important de noter (voir aussi [**4**]) que la condition $(\mathcal{P})$ est vérifiée par l'operateur P si et seulement si elle est vérifiée par son transposé ${}^tP$. Ce fait sera utilisé implicitement lors de la construction de la paramètrix droite pour P.

3. Demonstration du theorème. Nous nous contenterons d'établir la démonstration pour les équations d'ordre 1 ($m = 1$) puis nous indiquerons les modifications à introduire pour les équations d'ordre supérieur, et qui se situent uniquement au niveau de la construction de la paramètrix à droite de P.

On se place donc dans un voisinage ouvert Ω de l'origine de $\mathbf{R}^2$ dont on note (t, x) le point courant. Et on considère sur Ω l'équation.

$$(3.1) \qquad P(t, x;\ \partial_t,\ \partial_x)u = f(t, x, u)$$

où P est homogène d'ordre 1, vérifiant la condition $(\mathcal{P})$ et où f est C^∞ de ses arguments, et analytique en u.

A l'aide d'un changement de variables classique (redressement d'un champ de vecteurs non singulier) :

$$(t', x') \longrightarrow \varphi(t', x') = (t, x),$$

et grâce à l'invariance de la condition ($\mathcal{P}$), on ramène (3.1) à :

$$\frac{\partial v}{\partial t'} + ia(t',x')\,\frac{\partial v}{\partial x'} = f(t',x',\, v). \tag{3.2}$$

On reprend donc les notations habituelles, et on résout

$$\frac{\partial u}{\partial t} + ia(t,x)\,\frac{\partial u}{\partial x} = f(t,x,u) \tag{3.3}$$

le symbole $(\tau + ia(t,x)\,\xi)$ vérifiant ($\mathcal{P}$).

La preuve repose sur la méthode d'itération de Nash–Moser. Elle est constituée de 3 étapes essentielles.

a) Construction d'une solution "approchée" de l'équation (3.3). Nous verrons plus loin que l'approximation se fera au sens d'une certaine norme Sobolev. Cette construction fera l'objet du Lemme 3.1 que nous énoncerons d'ailleurs dans un cadre plus général que celui du Théorème 2.1.

b) Construction d'une paramétrix droite pour l'opérateur linéaire associé à (3.3), et preuve de l'estimation douce du type (2.4).

c) Le fonctionnnement du schéma d'itération de Nash–Moser pour la résolution de (3.3). C'est une légère modification de la méthode classique, que nous développons afin que l'exposé soit auto-contenu.

A. *Construction d'une solution approchée.*

LEMME 3.1. *On considère sur un voisinage ouvert Ω de l'origine de $\mathbf{R}^n$ l'équation non linéaire*

$$F(x,u,\nabla u) = 0 \tag{3.4}$$

où F est une fonction à valeurs complexes C^∞ de ses arguments et analytique en u et ∇u. Et on suppose qu'il existe $q_0 \in \mathbf{C}$ et $r_0 \in \mathbf{C}^n$ vérifiant

$$F(0,q_0,r_0) = 0 \quad et \quad \nabla_r F(0,q_0,r_0) \neq 0. \tag{3.5}$$

Alors pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout $\eta > 0$ il existe un voisinage Ω' de l'origine de $\mathbf{R}^n$ et une fonction u_0 analytique sur Ω' vérifiant

$$|F(x,u_0,\nabla u_0)|_{H^N(\Omega')} < \eta. \tag{3.6}$$

Preuve. Soit $N \in \mathbf{N}$ et $\eta > 0$. Definissons la fonction G par :

$$\begin{aligned} G(x,u,\nabla u) = F(0,u,\nabla u) &\\ + x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1}(0,u,\nabla u) + \cdots + x_n \frac{\partial F}{\partial x_n}(0,u,\nabla u)&\\ + x_1^N \frac{\partial^N F}{\partial x_1^N}(0,u,\nabla u) + \cdots + x_n^N \frac{\partial^N F}{\partial x_n^N}(0,u,\nabla u).& \end{aligned}$$

G est la partie polynÔmiale du développement de Taylor de F à l'ordre N, selon son premier argument x. G est analytique de ses arguments, et vérifie en outre

$$(3.7) \qquad \begin{cases} G(0, q_0, r_0) = 0 & \text{et par exemple (cf. (3.5))} \\ \dfrac{\partial G}{\partial(\partial_1 u)}\,(O, q_0, r_0) \neq 0. & \end{cases}$$

On résout donc le problème du Cauchy–Kowalevsky suivant

$$(3.8) \qquad \begin{cases} G(x, u, \nabla u) = 0 \\ u_{|x_1=0} = q_0 + \displaystyle\sum_{j=2}^{n} x_j r_{oj} \end{cases}$$

où on a noté $r_0 = (r_{01}, \ldots, r_{on}) \in \mathbf{C}^n$.

On trouve ainsi une fonction u_0 analytique dans un petit voisinage Ω' de l'origine vérifiant (3.6).

B. *Construction d'une paramétrix à droite pour le linéarisé.* Dans ce paragraphe nous changeons légèrement de notations. Posons

$$(3.9) \qquad F(t, x, u, \nabla u) = \frac{\partial u}{\partial t} + ia(t, x)\frac{\partial u}{\partial x} - f(t, x, u).$$

(Nous essayons donc de résoudre localement $F = 0$.) Puis écrivons le linéarisé de F sur u sous la forme :

$$(3.10) \qquad L_u(t, x;\ \partial_t, \partial_x) = P(t, x;\ \partial_t,\ \partial_x) + b(t, x, u)$$

où P est l'opérateur différentiel homogène de symbole $p = i(\tau + ia\xi)$ et b une fonction C^∞ en (t, x) et analytique en u.

Rappelons à présent que dans [**5**], F. Trêves à construit une paramétrix à droite, pseudo-differentielle pour l'opérateur P (en fait pour une classe plus large).

Plus précisément, il a construit deux opérateurs intégraux de Fourier K_1 et R_1 vérifiant :

$$(3.11) \qquad \begin{cases} PK_1 v = \omega(t, x)v + R_1 v & \forall v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2) \\ K_1 = H^{o,s}(\mathbf{R}^2) \longrightarrow H^{o,s+\delta}(\mathbf{R}^2) & \forall s \in \mathbf{R}, \text{ continument} \\ R_1 : L^2(\mathbf{R}^2) \longrightarrow H^{o,s}(\mathbf{R}^2) & \forall s \in \mathbf{R}, \text{ continument} \end{cases}$$

où $\omega \in C_0^\infty$, $\omega = 1$ prés de (0, 0) et supp ω est contenu dans un petit voisinage de (0, 0); et où pour $s, s' \in \mathbf{R}$, nous avons noté :

$$H^{s,s'}(\mathbf{R}^2) = \Big\{ u \in D'(\mathbf{R}^2),$$

$$|u|_{s,s'} = \left\{ \iint (1+\tau^2)^s (1+|\xi|^2)^{s'} |\hat{u}(\tau,\xi)|^2 d\tau d\xi \right\}^{1/2} < \infty \Big\}.$$

Enfin, $\delta = 1/2k + 1$ où k est l'entier naturel introduit dans l'énoncé de la condition $(\mathcal{P})$. Nous remarquons d'autre part que dans la direction $\{\tau \neq 0\}$ i.e., dans un cône du cotangent de la forme $\{|\xi| < c|\tau|\}$ l'opérateur P est elliptique; il admet donc dans cette région un inverse pseudo-différentiel.

Soient alors c et c' deux constantes positives telles que $0 < c < c'$. Et soient $\chi_1(\tau,\xi)$ et $\chi_2(\tau,\xi)$ deux fonctions C^∞ hors de (0, 0) réelles, homogènes de degré 0, constituant une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de $\mathbf{R}^2\backslash 0$ par

$$\{|\tau| > c|\xi|\} \quad \text{et} \quad \{|\tau| < c'|\xi|\}.$$

Nous pouvons trouver un opérateur pseudo-différentiel classique K_0 élément de $OPS^{-1}_{1,0}$, proprement supporté, vérifiant

$$\text{(3.12)} \quad PK_0 v = \omega(t,x)\chi_1(D_t,D_x)v + R_0(t,x;\, D_t,D_x)v, \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$$

où R_0 est un opérateur infiniment régularisant.

Définissons alors l'opérateur pseudo-différentiel $Q(t,x;\, D_t,D_x)$ par

$$\text{(3.13)} \quad Q = \varphi(t,x)K_0 + \varphi(t,x)\chi_2 K_1$$

où $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, $\varphi = 1$ prés de (0, 0) et

$$\operatorname{supp}\varphi C\{(t,x), \omega(t,x) = 1\}.$$

En tenant compte de la remarque suivante (cf. (3.15)) on vérifie aisément que

$$\text{(3.14)} \quad L_u Q v = \varphi(t,x)v + Rv \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2),$$

où R est un opérateur δ-régularisant dans le sens suivant : Pour tout $s \geqq 0$, R est borné de H^s dans $H^{s+\delta}$ (On rapelle que $\delta = 1/2k + 1$).

Remarques. (3.15) Il est facile de voir que si v est une distribution dans $H^{o,s}(s \geqq 0)$ dont le spectre est contenu dans un cône de la forme $\{|\tau| < c_0|\xi|\}$, $c_0 \in \mathbf{R}^+$, alors $v \in H^s$.

(3.16) Il est important de noter que les opérateurs K_0 et K_1 (et donc Q) ne dépendent pas de (la fonction inconnue)u. Seul le reste régularisant R en dépend, de manière d'ailleurs assez pratique. C'est là l'avantage direct du cadre semi-linéaire, que nous allons mettre à profit pour établir notre estimation douce.

(3.17) Dans (3.14) la fonction u est supposée de classe C^∞.

C – *Estimation douce pour L_u.* Dans cette section et dans la suivante, la preuve est une adaptation de celle développée par G. Nakamura et Y. Maeda dans [**3**]. Nous reprenons la fonction u_0 construite au Lemme 3.1, et quitte à la tronquer prés de (0, 0), nous la supposons dans $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$. Nous établissons alors la.

PROPOSITION 3.2. *Sous les hypothèses du Théorème* 2.1, *il existe un voisinage ouvert de l'origine* $\Omega_1 \, C\Omega$, *à bord régulier,* $\alpha \in \mathbf{N}$ *et* $r \in \,]0, 1[$ *tels que pour toute fonction* $u \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$, $|u - u_0|_\alpha \leqq r$, *et tout* $s \in \mathbf{R}^+$ *et* $g \in H^s(\mathbf{IR}^2)$, *l'équation*

$$(3.18) \quad L_u v = g \ dans \ \Omega_1$$

admet une solution $v \in H^s(\mathbf{R}^2)$ *vérifiant l'estimation*

$$(3.19) \quad |v|_s \leqq C_s(|g|_s + |u|_s|g|_3)$$

où C_s *est une constante* > 0, *indépendante de* u *et* g.

Preuve. Considérons trois fonctions $\phi_1, \ \phi_2, \ \phi_3$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ vérifiant $\phi_1 \equiv 1$ sur Ω_1 et $\phi_1 \subset \phi_2 \subset \phi_3$ (i.e., $\phi_2 \equiv 1$ sur supp $\phi_1 \ldots$). Et définissons l'opérateur T comme suit

$$(3.20) \quad T = \phi_2 R \phi_3 = \phi_2(L_u Q - \mathrm{Id})\phi_3 \qquad \text{(cf.(3.14))}.$$

Du fait que l'opérateur R est continu de $H^s(\mathbf{R}^2)$ dans $H^{s+\delta}(\mathbf{R}^2)$ pour tout $s \geqq 0$, il est clair que l'opérateur $\mathrm{Id} + T$ est inversible dans $H^s(\mathbf{R}^2)$ pour tout $s \geqq 0$. Par un choix approprié des fonctions Φ_1, Φ_2 et Φ_3 et quitte à multiplier Q à droite par une fonction convenable de $C_0^\infty(\Omega)$, on obtient

$$(3.21) \quad \phi_1\{L_u Q(\mathrm{Id} + T)^{-1}\phi_2 - \mathrm{Id}\} \equiv 0$$

ce qui prouve que pour tout $g \in H^s(\mathbf{R}^2)$, on peut prendre comme solution de (3.18) dans Ω_1

$$(3.22) \quad v = Q(\mathrm{Id} + T)^{-1}\phi_2 g.$$

Il nous reste maintenant à établir l'estimation (3.19).

Remarquons tout d'abord que, compte tenu de la remarque (3.16), il existe $C > 0$ telle que

$$(3.23) \quad |v|_s < C|(\mathrm{Id} + T)^{-1}\phi_2 g|_s \quad \forall s \geqq 0.$$

Notons de même que l'opérateur T s'écrit sous la forme

$$(3.24) \quad T = \phi_2 b(t, x, u)Q(t, x; \ D_t, D_x)\phi_3 + T'(t, x; \ D_t, D_x)$$

où Q est la paramétrix construite au $B/$ et T' un opérateur δ-régularisant. Nous écrirons pour abréger que T se met sous la forme

$$(3.25) \quad T = b(t, x, u)T_1(t, x; \ D_t, D_x)$$

où b est C^∞ de ses arguments, nulle pour t et x grands et T_1 un opérateur δ-régularisant.

Posons $w = (\mathrm{Id} + T)^{-1}\phi_2 g$; on a alors $w = \phi_2 g - Tw$. On en déduit

$$(3.26) \quad |w|_s \leqq C|g|_s + |b(t,x,u)T_1 w|_s.$$

Soit, en tenant compte de l'inégalité d'interpolation classique

$$|h_1 h_2|_s \leqq C_s(|h_1|_s |h_2|_{L^\infty} + |h_1|_{L^\infty}|h_2|_s)$$

et en utilisant une estimation du type Cagliardo–Nirenberg

$$(3.27) \quad |w|_s \leqq C|g|_s + C_s(|u|_s|w|_2 + (1 + |u|_2)|w|_{s-\delta}) \quad s \geqq \delta + 2.$$

Ici, comme dans les inégalités qui suivent, nous notons par C_s différentes constantes > 0, indépendantes de u et g.

En itérant ce procédé jusqu'à un rang $s_0 \in [2+\delta, 2+2\delta[$, on obtient

$$(3.28) \quad |w|_{s_0} \leqq C|g|_{s_0} + C_{s_0}(|u|_{s_0}|w|_2 + (1 + |u|_2)|w|_3).$$

Maintenant, si on note par $\|T\|_3$ la norme de T en tant qu'opérateur de $H^3(\mathbf{R}^2)$ dans lui-même, on sait qu'il existe $\alpha \in \mathbf{N}$ tel que

$$\|T\|_3 \leqq C(1 + |u|_\alpha)\,\mathrm{vol}\,(\mathrm{Supp}\,\phi_3).$$

En fixant alors $r > 0$ (par exemple $1/2$) et en réduisant au besoin $\mathrm{supp}\,\phi_3$ on peut avoir $\|T\|_3 \leqq 1/2$ dés que $|u - u_0|_\alpha \leqq r$. D'où

$$(3.29) \quad |w|_3 \leqq C|g|_3$$

En remontant alors la chaine d'inégalités (3.28) à (3.27), on établit aisément (3.19), pour $s \geqq \delta + 2$, le cas $0 \leqq s < \delta + 2$ étant trivial.

D. *determination de* u : *Procédé de Nash–Moser.* La démonstration qui va suivre est une légère variante de la méthode de résolution classique de Nash-Moser. Elle est inspirée de [**3**]. Rappelons que nous cherchons à résoudre localement prés de $(0,0)$ l'équation

$$(3.30) \quad F(t,x,u,\nabla u) = \frac{\partial u}{\partial t} + ia(t,x)\,\frac{\partial u}{\partial x} - f(t,x,u) = 0$$

où l'opérateur

$$\frac{\partial}{\partial t} + ia(t,x)\,\frac{\partial}{\partial x}$$

vérifie l'hypothèse ($\mathcal{P}$). Pour cela, posons

$$G(u) = F(u + u_0) - F(u_0) \quad \text{et} \quad h = -F(u_0) \tag{3.31}$$

où u_0 est la fonction déterminée au Lemme 3.1 et où nous avons omis, pour allèger l'écriture les variables (t, x).

Il est clair que si u est une solution de

$$G(u) = h \quad \text{dans } \Omega_1 \tag{3.32}$$

$u + u_0$ vérifie sur le même ouvert l'équation (3.30).

Récrivant alors la proposition 3.2 en termes de $G'(u)$, linéarisé de G sur u, on obtient que pour toute $u \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$, $|u|_\alpha < r$, pour tout $s \in \mathbf{R}^+$ et $g \in H^s(\mathbf{R}^2)$, l'équation

$$G'(u)v = g \quad \text{dans } \Omega_1 \tag{3.33}$$

admet une solution $v \in H^s(\mathbf{IR}^2)$ vérifiant l'estimation

$$|v|_s \leqq C_s(|g|_s + |u|_s|g|_3) \tag{3.34}$$

$C_s > 0$, indédpendante de u et g.

Avant d'entamer la démonstration, nous rappelons quelques résultats classiques concernant la fonction non linéaire G définie en (3.31). C'est l'objet du Lemme 3.3 suivant, dont nous omettons la preuve. Dans tout ce qui suivra, nous noterons pour $s \in \mathbf{R}$, la norme $|\ \ |_{H^s(\Omega_1)}$ par $|\ \ |_s^0$.

LEMME 3.3. *Pour toute constante $C_0 > 0$, l'application $u \longrightarrow G(u)$ est deux fois différentiable Fréchet par rapport à $u \in H^s(\Omega)$, $s > 2$, $|u|_2^0 < C_0$. On a de plus dans ces conditions, pour $v, w \in H^s(\Omega)$, $s > 2$,*

$$|G(u)|_s^0 \leqq C_s|u|_{s+1}^0 \quad \forall s \geqq 0 \tag{3.35}$$

$$|G'(u)v|_s^0 \leqq C_s(|v|_{s+1}^0 + |u|_s^0|v|_2^0) \quad \forall s \geqq 2 \tag{3.36}$$

$$|G''(u)(v, w)|_s^0 \leqq C_s(1 + |u|_s^0)|v|_s^0|w|_s^0 \quad \forall s \geqq 2. \tag{3.37}$$

Remarque. Ce lemme admet un énoncé plus général, dans lequel on permet à la fonction G d'être non linéaire en ∇u.

Maintenant pour résoudre (3.32), considérons la suite de fonctions $(u_n)_{n \geqq 1}$ définie par

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + S_{\theta_n}\rho_n \quad (n \geqq 1) \end{cases} \tag{3.38}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1990-008-x Published online by Cambridge University Press

où les $S_\theta(\theta \geqq 1)$ sont les opérateurs de régularisation classiques associés à la chaine d'espaces de Banach $H^s(\mathbf{R}^2)(s \in \mathbf{R})$, $\theta_n = \theta^{\tau^{n+n_0}}\theta > 1, n_0$ assez grands, $\tau = 4/3$ et ρ_n vérifiant :

$$(3.39) \qquad \begin{cases} G'(u_n)\rho_n = eRg_n \\ g_n = h - G(u_n) \end{cases}$$

$$e \ : \ H^s(\Omega_1) \longrightarrow H^s(\mathbf{R}^2) \quad \text{et} \quad R \ : \ H^s(\mathbf{R}^2) \longrightarrow H^s(\Omega_1)$$

étant respectivement les opérateurs d'extension et de restriction.

LEMME 3.4. *Supposons qu'il existe un nombre réel $\eta > 0$ assez petit et un entier s^* assez grand tels que*

$$(3.40) \qquad |g_1|^0_{s^*} = |F(u_0)|^0_{s^*} < \eta \quad \textit{et} \quad |u_k|_\alpha \leqq r \quad \textit{pour } k = 1, \dots, n.$$

Alors

$$(3.41)_k \quad |g_k|^0_s \leqq C_s(|g_1|^0_s + |u_k|^0_{s+1}) \quad \forall s \geqq 0,\ \forall k = 1, \dots, n.$$

Pour tout réel $s_0 \geqq 1$, il existe $\theta > 1$ assez grand tel que

$$(3.42)_k \quad |u_k|_s \leqq \theta_k^4 |g_1|^0_{s-1} \quad \forall s, 1 \leqq s \leqq s_0,\ \forall k = 1, \dots, n+1.$$

Il existe un réel $\mu > 0$ tel que

$$(3.43)_k \quad |g_k|^0_\alpha \leqq C\theta_k^{-\mu}|g_1|^0_{s^*} \quad \forall k = 1, \dots, n+1.$$

Démonstration. a) Preuve de $(3.41)_k$. Supposons $\alpha > 5$. En écrivant alors:

$$\begin{aligned} |g_k|^0_s &\leqq |g_1|^0_s + |g_k - g_1|^0_s \\ &= |g_1|^0_s + |G(u_k)|^0_s \end{aligned}$$

et en utilisant (3.35), on établit facilement $(3.41)_k$.

b) Preuve de $(3.42)_k$. On a

$$u_{k+1} = u_k + s_{\theta_k}\rho_k$$

d'où

$$|u_{k+1}|_s \leqq |u_k|_s + C_s\theta_k|\rho_k|_{s-1}.$$

En utilisant alors la continuité des opérateurs e et R, (3.34), (3.40) et $(3.41)_k$, on obtient :

$$(3.44) \qquad |u_{k+1}|_s \leqq C_s\theta_k(|u_k|_s + |g_1|^0_{s-1}).$$

Et $(3.42)_k$ en découle par récurrence, en prenant θ assez grand.

c) Preuve de $(3.43)_k$. On a

$$g_{k+1} - g_k = -(G(u_{k+1}) - G(u_k))$$

d'où

$$g_{k+1} = g_k - G'(u_k)(S_{\theta_k}\rho_k) + Q_k$$

où nous avons noté

$$(3.45) \quad Q_k = -\int_0^1 tG''(tu_k + (1-t)u_{k+1})(S_{\theta_k}\rho_k, S_{\theta_k}\rho_k)dt.$$

Grâce à (3.39), on obtient donc

$$(3.46) \quad g_{k+1} = G'(u_k)(1 - S_{\theta_k})\rho_k + Q_k \quad \text{sur } \Omega_1$$

d'où

$$(3.47) \quad |g_{k+1}|_\alpha^0 \leqq |\overbrace{G'(u_k)(1 - S_{\theta_k})\rho_k}^{①}|_\alpha^0 + \overbrace{|Q_k|_\alpha^0}^{②}.$$

Estimons le terme ①.

Grâce à (3.36) et (3.40) on obtient facilement

$$(3.48) \quad ① \leqq C|(1 - S_{\theta_k})\rho_k|_{\alpha+1} \leqq C_{s^*}\theta_k^{-(s^*-\alpha-2)}|\rho_k|_{s^*-1}.$$

De la même manière, et à l'aide de (3.34), $(3.41)_k$ et $(3.42)_k$, on établit

$$(3.49) \quad ① \leqq C_{s^*}\theta_k^{6-(s^*-\alpha)}|g_1|_{s^*-1}^0.$$

Estimons à présent le terme ②.

On a :

$$tu_k + (1-t)u_{k+1} = u_k + (1-t)S_{\theta_k}\rho_k,$$

d'où en appliquant (3.37) et (3.40)

$$(3.50) \quad ② \leqq C_\alpha(1 + |S_{\theta_k}\rho_k|_\alpha^0)(|S_{\theta_k}\rho_k|_\alpha^0)^2.$$

De même manière on obtient

$$(3.51) \quad |S_{\theta_k}\rho_k|_\alpha^0 \leqq C_\alpha\theta_k|g_k|_{\alpha-1}^0$$

d'où grâce à $(3.41)_k$

$$(3.52) \quad ② \leqq C_\alpha(1 + |g_1|_{\alpha-1}^0)\theta_k^3(|g_k|_{\alpha-1}^0)^2.$$

Finalement, on a donc

$$(3.53)\quad |g_{k+1}|_\alpha^0 \leqq C_{s^*}\theta_k^{6-(s^*-\alpha)}|g_1|_{s^*-1}^0 + C_\alpha(1+|g_1|_{\alpha-1}^0)\theta_k^3(|g_k|_{\alpha-1}^0)^2.$$

Considérons alors la suite

$$(3.54)\quad d_k = \theta_k^\mu |g_k|_\alpha^0, \quad k \geqq 1$$

avec $\mu > 0$ à déterminer.

En prenant θ assez grand et

$$(3.55)\quad \begin{cases} s^* > \tau\mu + \alpha + 6 \text{ et} \\ 3 + \tau\mu < 2\mu. \end{cases}$$

On montre facilement que

$$(3.56)\quad d_{k+1} \leqq C|g_1|_{s^*}^0 + d_k^2, \quad 1 \leqq k \leqq n.$$

Puis, en choisissant η assez petit, on montre par récurrence que

$$(3.57)\quad d_k \leqq C'|g_1|_{s^*}^0, \quad 1 \leqq k \leqq n+1,$$

ce qui établit $(3.43)_k$ et achève la preuve du Lemme 3.4.

Nous aurons besoin d'un dernier lemme pour démontrer le Théorème 2.1.

LEMME 3.5. *Si* $|g_1|_{s^*}^0 < \eta, \eta$ *assez petit, alors* $|u_n|_\alpha < r$ *pour tout* $n \geqq 1$.

Preuve. Comme $u_1 = 0$, on peut supposer le lemme établi jusqu'à l'ordre n. Pour $s \in \mathbf{R}^+, s \leqq s^* - \alpha$, on a

$$|u_{n+1}|_s \leqq \sum_{k=1}^n |S_{\theta_k}\rho_k|_s \leqq C\sum_{k=1}^n |\rho_k|_s.$$

En utilisant alors (3.34), (3.39) et les Lemmes 3.3 et 3.4, on obtient par interpolation, pour $k = 1, \dots, n$

$$(3.58)\quad |\rho_k|_s \leqq C_{s^*}|\rho_k|_{s^*-\alpha}^{\frac{s}{s^*-\alpha}}|\rho_k|_0^{1-\frac{s}{s^*-\alpha}} \leqq C_{s^*}\theta_k^a|g_1|_{s^*}^0,$$

avec

$$(3.59)\quad a = (4+\mu)\,\frac{s}{s^*-\alpha} - \mu.$$

Choix des constantes. On rappelle que (3.55) s'écrit aussi

$$(3.60)\quad \begin{cases} \mu > 9/2 \\ s^* > \alpha + 12. \end{cases}$$

Choisissons en outre

$$(3.61)\quad \begin{cases} \text{i)} & s \geqq \alpha \\ \text{ii)} & a < 0. \end{cases}$$

La condition $(3.61)_{\text{ii)}}$ est équivalente à

$$s < \frac{\mu}{\mu+4}(s^* - \alpha),$$

qui est compatible avec $(3.61)_{\text{i)}}$ et (3.60) dés que

$$(3.62)\quad s^* > \max\left(\alpha + 12, \frac{2\mu+4}{\mu}\alpha\right).$$

La série $\sum_1^\infty \theta_k^a$ est alors convergente pour $s \in \mathbf{R}$,

$$\alpha \leqq s < \frac{\mu}{\mu+4}(s^* - \alpha).$$

Et on achève la preuve du Lemme 3.5 en prenant $\eta > 0$ assez petit.

Fin de la preuve du Theoreme 2.1. Le Lemme 3.1 et le fait que $u_1 = 0$ garantissent la validité des hypothèse du Lemme 3.4 et celles du Lemme 3.5, et donc leurs conclusions. La suite $(u_n)_{n\geqq 1}$ vérifie, grâce à (3.58),

$$(3.63)\quad |u_{n+1} - u_n|_\alpha < C_{s^*}\theta_k^a |g_1|_{s^*}^0.$$

C'est donc une suite de Cauchy dans $H^\alpha(\mathbf{R}^2)$ et converge dans cet espace vers une fonction u.

En outre, on obtient grâce à $(3.43)_k$ que g_k tend vers zéro dans $H^\alpha(\Omega_1)$ lorsque $k \longrightarrow +\infty$.

Par suite u est bien solution de (3.32).

Nous montrons enfin, par un argument classique, que u est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$. Pour cela, nous allons établir que u est dans $H^s(\mathbf{R}^2)$ pour tout s.

Considérons un réel $\gamma > 1$, et écrivons l'inégalité d'interpolation

$$(3.64)\quad |\rho_k|_s \leqq C_{s,\gamma}|\rho_k|_{\gamma_s}^{1/\gamma}|\rho_k|_0^{1-1/\gamma}, \quad s > 0.$$

On soit déjà (cf. la preuve du lemme précédent) que

$$(3.65)\quad |\rho_k|_0 \leqq C_{s^*}\theta_k^{-\mu}|g_1|_{s^*}^0.$$

D'autre part, on obtient grâce à $(3.42)_k$

$$(3.66)\quad |\rho_k|_{\gamma_s} \leqq C_{s,\gamma}\theta_k^4|g_1|_{\gamma_s}^0$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1990-008-x Published online by Cambridge University Press

et donc

$$(3.67)\qquad |\rho_k|_s \leqq C_{s,\gamma}\theta_k^b(|g_1|^0_{\gamma s})^{1/\gamma}(|g_1|^0_{s^*})^{1-1/\gamma}$$

avec

$$(3.68)\qquad b = \frac{1}{\gamma}(4+\mu) - \mu.$$

Il est alors clair que si

$$(3.69)\qquad \gamma > \frac{4+\mu}{\mu}$$

la suite $(u_n)_{n\geqq 1}$ est une suite de Cauchy dans $H^s(\mathbf{R}^2)$ et converge dans cet espace vers une fonction u solution de (3.32).

4. Preuve du theorème pour les équations d'ordre superieur. On considère à présent dans un voisinage Ω de l'origine de $\mathbf{R}^2$, l'équation

$$(4.1)\qquad P(t,x,\partial_t,\partial_x)u = f(t,x,u,\nabla u,\dots,\nabla^{m-1}u)$$

où P est homogène d'ordre m, P et f vérifiant les hypothèses du Théorème 2.1.

Nous allons montrer comment on peut construire une paramétrix droite pour P, le reste de la preuve étant similaire à celui développé dans les paragraphes précédents.

Il est tout d'abord clair qu'il suffit de travailler microlocalement. De plus, le traitement étant trivial pour les régions du cotangent où P est elliptique, nous allons nous occuper plus précisément des zones où le symbole $p(t,x,\tau,\xi)$ de P possède des zéros réels.

Soit donc $(\tau^0,\xi^0)\neq 0$, un zéro réel de $p(0,0,\tau,\xi)$. Grâce à l'hypothèse "type principal" du Théorème 2.1, il existe un voisinage conique $Vx\Gamma$ de $(0,0,\tau^0,\xi^0)$ dans lequel P admet une factorisation de la forme

$$(4.2)\qquad p(t,x;\tau,\xi) = (\tau-\lambda(t,x)\xi)q(t,x;\ \tau,\xi)$$

où $q(t,x,\tau,\xi)$ est homogène de degré $m-1, q(0,0;\ \tau^0,\xi^0)\neq 0, \lambda(t,x)$ est de classe C^∞ à valeurs complexes.

L'essentiel, à présent, est d'inverser le symbole

$$(4.3)\qquad L(t,x;\ \tau,\xi) = \tau - \lambda(t,x)\xi.$$

Posons

$$(4.4)\qquad a(t,x) = \operatorname{Re}\lambda(t,x) \quad \text{et} \quad b(t,x) = \operatorname{Im}\lambda(t,x)$$

et notons $A_0(t)$ la partie auto-adjointe de l'opérateur différentiel $a(t,x)D_x$. La différence $A_0(t) - a(t,x)D_x$ étant une fonction C^∞, elle n'aura pas d'importance dans ce qui va suivre.

Considérons alors le changement de variables qui redresse le champ de vecteurs $D_t - A_0(t)$; il correspond en fait à l'opérateur unitaire $U(t)$ défini dans [**5**]. Avec les notations de cet auteur, on a donc

$$U^{-1}(t)(D_t - A_0(t) - ib(t,x)D_x)U(t) = D_t - i\tilde{b}(t,x)D_x. \tag{4.5}$$

Soit enfin la paramétrix K construite dans [**5**] pour $D_t - i\tilde{b}(t,x)D_x$ (notons que grâce à ses propriétés d'invariance, la propriété $(\mathcal{P})$ est aussi vérifiée par $D_t - i\tilde{b}(t,x)D_x$). On vérifie sans difficulté que pour des fonctions $\rho(t,x)$ et $\Psi(t,x)$ de C_0^∞ convenables

$$K_1 = \varphi UKU^{-1}\Psi \tag{4.6}$$

constitue une paramétrix droite pour $D_t - A_0(t) - ib(t,x)D_x$. Plus précisement, il existe $\omega(t,x) \in C_0^\infty(\Omega), \omega = 1$ prés de (0, 0) telle que

$$(D_t - A_0(t) - ib(t,x)D_x)K_1 v = \omega(t,x)v + Rv, \forall v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2). \tag{4.7}$$

En outre K_1 est a un opérateur borné de $H^{o,s}(\mathbf{R}^2)$, dans $H^{o,s+\delta}(\mathbf{R}^2)$ pour tout $s \in \mathbf{R}(\delta = 1/(2k+1))$ et R est un opérateur borné de $L^2(\mathbf{R}^2)$ dans $H^{o,s}(\mathbf{R}^2)$, pour tout s.

A partir de là, il est aisé de construire à l'aide d'un jeu convenable de pseudo-différentiels de troncture sur $T^*\Omega'\backslash 0$ (où Ω' est un petit voisinage ouvert de l'origine) une paramétrix droite pour l'opérateur P dans le sens suivant. Il existe deux opérateurs Q et R vérifiant

$$PQv = \omega(t,x)v + Rv \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2) \tag{4.8}$$

où $\omega \in C_0^\infty(\Omega'), \omega = 1$ prés de (0, 0) et Q(resp. R) est un opérateur continu de $H^s(\mathbf{R}^2)$ dans $H^{s+m-1+\delta}(\mathbf{R}^2)$ (resp. $H^{s+\delta}(\mathbf{R}^2)$), pour tout $s \geqq 0$.

Bibliographie

1. L. Hormander, *The boundary problems of physical geodesy*, Arch. Rat. Mech. and Anal. *62* (1967), 1–52.

2. J. Moser, *A new technique for the construction of solution of non linear* P.D.E., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. *47* (1961), 1824–1831.

3. G. Nakamura et Y. Maeda, *Local smooth isometric embedding of low dimensional Riemannian manifolds into Euclidian spaces*, Preprint.

4. L. Nirenberg et F. Treves, *On local solvability of linear* P.D.E. *Part II. Sufficient conditions*, Comm. on Pure and Applied Maths. *23* (1970), 459–510.

5. F. Treves, *A new method of proof of the subelliptic estimates*, Comm. on Pure and Applied Maths. *24* (1971), 71–115.

Faculté des Sciences de Tunis,
Tunis, Tunisie