Compositio Mathematica **115:** 329–357, 1999.

Représentations extraordinaires

LOUISE NYSSEN
Correspondance de Langlands entre représentations de GL(2) *et représentations galoisiennes aux places extraordinaires*
Université Louis Pasteur, Departement de Mathematique, 7 Rue Rene Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France. e-mail: nyssen@math.u-strasbg.fr

(Received 16 May 1997; accepted in final form 7 October 1997)

Résumé. On propose ici une nouvelle démonstration d'un théorème de Carayol. La correspondance globale d'Eischler–Shimura permet d'associer á une représentation automorphe π de poids au moins deux, un système de représentations galoisiennes l-adiques ρ_l tel que, en presque toute place p, la composante de π en p soit associée à la restriction de ρ_l au groupe de Weil en p par la correspondance locale de Langlands convenablement normalisée. Ce résultat a été étendu à toutes les places par Deligne puis par Carayol qui a réglé le cas plus épineux des places extraordinaires en utilisant le changement de base de Langlands et la théorie de la réduction des courbes de Schimura. On aborde ici cette question en utilisant une autre méthode, fondée sur les congruences entre formes modulaires de poids 1 et de poids supérieur à 2, qui fournit une nouvelle démonstration sans faire appel à la théorie des courbes de Shimura.

Mathematics Subject Classifications (1991): 11F11, 11F70, 13F33.

Key words: congruence, modular form, galois representation.

0. Introduction

0.1. POSITION DU PROBLÈME

Ce travail s'inscrit dans le cadre général de l'étude de la correspondance entre représentations automorphes et représentations galoisiennes. On note $\mathbb{A}$ le groupe des adèles de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{A}_f$ le groupe des adèles finies. Sur $\mathbb{Q}_p$ on utilise la valeur valeur absolue $|x|_p = p^{-\mathrm{val}_p(x)}$, et sur $\mathbb{R}$ la valeur absolue habituelle $|\ |_\infty$ en omettant l'indice lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Le produit définit une valeur absolue $|\ |$ sur $\mathbb{Q}^*\backslash\mathbb{A}^*$. Un élément de Frobenius en une place finie p sera toujours un Frobenius arithmétique, agissant comme la puissance p sur le corps résiduel de $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On normalise l'isomorphisme de la théorie du corps de classes pour que les Frobenius correspondent aux inverses des uniformisantes. Tous les caractères considérés seront des quasi-caractères et la même lettre désignera un caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ et le caractère correspondant de $\mathbb{Q}_p^*$.

Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ et, pour l premier, $\overline{\mathbb{Q}}_l$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_l$. On note $\mathcal{O}_l$ l'anneau des entiers de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ et $\mathfrak{m}_l$ son idéal maximal (qui n'est pas principal!). On fixe un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$ et un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$.

INTERPRINT J.V.: PIPS Nr.: 152387 MATHKAP
comp4260.tex; 21/07/1995; 13:16; v.7; p.1

Les résultats établis par Kutzko dans [Ku1], permettent d'associer à une représentation π_p de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}$ admissible et irréductible, une représentation F-semi-simple du groupe de Weil–Deligne $\mathrm{W}'_{\mathbb{Q}_p}$. D'où, pour chaque nombre premier l différent de p, une représentation l-adique continue, de degré 2, $\sigma_H(\pi_p)$ du groupe de Weil local W_p, caractérisée par les égalités: pour tout caractère χ de $\mathbb{Q}_p^*$, et tout caractère additif non trivial de $\mathbb{Q}_p$, ψ

$$L(\pi_p \otimes \chi, s) = L(\sigma_H(\check{\pi}_p) \otimes |\,|_p^{-(1/2)} \otimes \chi, s),$$

$$\varepsilon(\pi_p \otimes \chi, s, \psi) = \varepsilon(\sigma_H(\check{\pi}_p) \otimes |\,|_p^{-(1/2)} \otimes \chi, s, \psi),$$

où $\check{\pi}_p$ désigne la contragrédiente de π_p. C'est la correspondance de Hecke qui est obtenue à partir de la correspondance de Langlands σ_L par

$$\sigma_H(\pi_p) = \sigma_L(\check{\pi}_p) \otimes |\,|_p^{-(/2)}.$$

Dans la version classique de la théorie globale, on considère une forme modulaire parabolique de poids $k \geqslant 2$ pour le groupe $\Gamma_0(N)$, $f \in S_k(N, \varepsilon)$, où ε est un caractère de Dirichlet modulo N. On note (a_n), $n \geqslant 1$, les coefficients de son développement de Fourier. On suppose que f est nouvelle, vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke, et normalisée pour que $a_1 = 1$. Deligne a démontré dans [D1].

THÉORÈME 1. *Dans ces conditions il existe pour chaque nombre premier l une représentation continue l-adique σ:* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ *non ramifiée en dehors de Nl et qui vérifie, pour tout p premier ne divisant pas Nl et Φ_p un élément de Frobenius en p, les relations*

$$\mathrm{tr}\,(\sigma(\Phi_p)) = a_p \quad \textit{et} \quad \det\,(\sigma(\Phi_p)) = p^{k-1}\varepsilon(p).$$

Deligne et Serre ont démontré dans [D-S] le même théorème lorsque $k = 1$, la seule différence étant qu'on obtient une seule représentation galoisienne continue à valeurs dans $\mathbb{C}$.

La question se pose alors naturellement, de savoir ce qui se passe lorsque p est différent de l et divise N. Pour y répondre, il faut adopter le point de vue adélique de la théorie. Etant donnés $k \geqslant 1$ et w deux entiers de même parité, soit $D_{k,w}$ la représentation de dimension infinie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ qui intervient dans l'induite unitaire $\mathrm{I}(\alpha, \beta) \otimes |\,|^{-(w/2)}$ où α et β sont les caractères

$$\alpha(t) = |t|^{k-1/2}\,\mathrm{sgn}(t)^k \quad \text{et} \quad \beta(t) = |t|^{-(k-1/2)}.$$

Pour $k \geqslant 2$, elle est essentiellement de carré intégrable et appartient à la série discrète. Posons en particulier $D_k = D_{k,-k}$. Pour k et w fixés, il existe une bijection entre l'ensemble des nouvelles formes de poids k, normalisées et vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke (c'est-à-dire les T_p pour p premier au niveau de f et les U_p pour les autres p), et l'ensemble des représentations admissibles irréductibles du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ dont la composante à l'infini est $D_{k,w}$. Celles-ci se décomposent en un produit tensoriel restreint

$$\pi = \left(\bigotimes_p \pi_p\right) \otimes D_{k,w}$$

où π_p est une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Nous allons privilégier le cas $w = -k$ où la composante à l'infini est D_k pour être en accord avec les conventions de Deligne (voir le paragraphe 2.1 de [D3]). Gelbart caractérise dans [Ge] la bijection correspondant à $w = 0$. Pour caractériser la bijection correspondant à w, il faut modifier en conséquence les relations données par Gelbart. Si $f \in S_k(N, \varepsilon)$ est associée à π et si p est un nombre premier ne divisant pas N, π_p est la représentation principale non ramifiée $\pi_p = \mathrm{I}(|\,|^{s_1}, |\,|^{s_2})$ où s_1 et s_2 sont deux nombres complexes vérifiant

$$p^{s_1} + p^{s_2} = p^{1-k-w/2}\, a_p \quad \text{et} \quad p^{s_1}p^{s_2} = p^{-w}\, \varepsilon(p).$$

Dans ces conditions le théorème 1 devient

THÉORÈME 2. *Soient $k \geqslant 2$ et w des entiers de même parité, et π une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ dont la composante à l'infini est $D_{k,w}$. Pour chaque nombre premier l, il existe une représentation continue l-adique $\sigma^l\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ telle que pour toute place p non ramifiée et différente de l, la F-semi-simplifiée de la restriction de σ au groupe de Weil en p, W_p, est associée à π_p par la correspondance de Hecke.*

Lorsque $p \neq 2$ toutes les représentations irréductibles de degré 2 de W_p sont induites par un caractère du groupe de Weil d'une extension quadratique de $\mathbb{Q}_p$: on les appelle représentations imprimitives. Si $p = 2$, il en existe d'autres, dites primitives. Les représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ associées aux représentations imprimitives par la correspondance de Langlands sont dites ordinaires. Lorsque $p = 2$, celles qui correspondent aux représentations primitives sont dites extraordinaires. A la suite d'un travail de Langlands [L1], Deligne a étendu le théorème 2 à toutes les places p différentes de l, telles que π_2 n'est pas cuspidale extraordinaire ([D2] et [C2]). Enfin Carayol a réglé le cas plus épineux des représentations extraordinaires, en utilisant le changement de base de Langlands et la théorie de la réduction des courbes de Shimura ([C1] et [C2]). On aborde ici cette question en utilisant une nouvelle méthode, fondée sur les congruences entre formes modulaires de poids 1 et de poids supérieur à 2, qui fournit une autre démonstration sans faire appel à la théorie des courbes de Shimura.

0.2. LA CORRESPONDANCE DE DELIGNE

Revenons au théorème 2 et considérons une place p telle que π_p soit spéciale ou cuspidale. Deligne a démontré dans [D2] que la restriction σ_p^l de σ^l au groupe de Weil en p ne dépend que de π_p ce que nous écrirons $\sigma_p^l = \mathcal{F}_l(\pi_p)$.

Carayol a décrit cette correspondance locale dans le dixième paragraphe de [C2]. Soit B_p^* le corps des quaternions de centre $\mathbb{Q}_p^*$. Le groupe produit $W_p \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times B_p^*$ agit sur une variété de cycles évanescents dont la cohomologie l-adique donne une représentation l-adique $\mathcal{U}_l$. Si π_p est une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, on note $\overline{\pi}_p$ la représentation de B_p^* qui lui est associée par la correspondance de Jacquet–Langlands. La composante isotypique $\mathcal{U}_l(\overline{\pi}_p^\vee)$ de $\overline{\pi}_p^\vee$ dans $\mathcal{U}_l$ est une représentation de $W_p \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui permet de calculer $\mathcal{F}_l(\pi_p)$ car $\mathcal{U}_l(\overline{\pi}_p^\vee) = \pi_p \otimes \mathcal{F}_l(\pi_p)$, soit

$$\mathcal{F}_l(\pi_p) = \mathrm{Hom}_{W_p \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\pi_p \otimes \overline{\pi}_p^\vee, \mathcal{U}_l).$$

Soit χ un caractère non ramifié de $\mathbb{Q}_p^*$ tel qu'il existe une représentation automorphe dont la composante en p soit $\pi_p \otimes \chi$ et la composante à l'infini soit un $D_{k',w'}$. Alors $\pi_p \otimes \chi$ est encore cuspidale et il résulte de la théorie globale que $\mathcal{F}_l(\pi_p \otimes \chi) = \mathcal{F}_l(\pi_p) \otimes \chi^{-1}$.

En outre, cette correspondance est indépendante de l au sens suivant

PROPOSITION. *Soit π_p une représentation cuspidale de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. *Pour tout élément g de W_p, les coefficients du polynôme caractéristique de $\mathcal{F}_l(\pi_p)(g)$ sont dans $\overline{\mathbb{Q}}$ et ne dépendent pas de l.*

Démonstration. Il faut d'abord écrire π_p comme la composante d'une représentation automorphe de poids 2. Nous allons pour cela, démontrer un lemme analogue au lemme 15.10, bien classique, de [Lau-R-St], en modifiant la condition à l'infini.

LEMME. *Il existe une représentation automorphe* Π *de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ *admettant* π_p *comme composante en p et D_2 comme composante à l'infini.*

Démonstration. Soient $p_0 = p$ et p_1, p_2, p_3, trois autres places de $\mathbb{Q}$. On note $\mathbb{A}_\bullet$ le groupe des adèles qui ont pour composante 0 aux places p_0, p_1, p_2, p_3, et ∞. Pour $i = 1,2$ soit π_{p_i} une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p_i})$. Pour chaque $i = 0,1,2$ on fixe K_i un sous groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p_i})$ tel que π_{p_i} ait des vecteurs non nuls invariants sous K_i et, d'après [J-L 482], il existe une fonction $f_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p_i}))$ telle que π_{p_i} soit la seule représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p_i})$ vérifiant $\mathrm{tr}\,\pi_{p_i}(f_i) \neq 0$. D'après [L1] (p. 74–75), il existe également une fonction $f_\infty \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ telle que D_2 soit la seule représentation unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{tr}\,D_2(f_\infty) \neq 0$ et dont l'intégrale orbitale en un élément elliptique régulier de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ne soit pas nulle.

Si on choisit encore $f_3 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p_3}))$ à support dans l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p_3})$ et $f_\bullet \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\bullet))$, on peut écrire la formule des traces simples pour la fonction $f = f_0 \otimes f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 \otimes f_\infty \otimes f_\bullet$ [D-Kz-V] et [H]

$$\sum_{\Pi \text{ cuspidale}} \operatorname{tr}(\Pi(f)) = \sum_{\substack{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \\ \text{elliptique regulier}}} c_\gamma \, \mathcal{O}_\gamma(f).$$

Dans le membre de gauche, n'interviennent que les représentations Π telles que $\Pi_\infty = D_2$ et $\Pi_{p_i} = \pi_{p_i}$ pour $i = 0, 1, 2$. Pour montrer qu'il en existe, il suffit de montrer que cette somme n'est pas nulle, ce que nous allons faire en étudiant le membre de droite.

Une démonstration analogue à celle de Laumon, Rapoport et Stuhler établit l'existence d'ouverts V_i de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p_i})$ pour $i = 0, 1, 2$, invariants par conjugaison sous $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p_i})$ et ne contenant que des éléments elliptiques réguliers où l'intégrale orbitale de f_i n'est pas nulle. Soit $P_i(X) \in \mathbb{Q}_{p_i}[X]$ le polynôme caractéristique d'un élément de V_i. On peut construire un polynôme $P(X)$ dans $\mathbb{Q}[X]$ qui soit proche de $P_i(X)$ en p_0, p_1, p_2, et qui soit un polynôme irréductible en p_3 et à l'infini. On choisit alors un élément γ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ dont $P(X)$ est le polynôme caractéristique. Il est elliptique régulier en p_0, p_1, p_2, p_3 et à l'infini, et d'après ce qui précède, l'intégrale orbitale de f n'est pas nulle en γ_i pour $i = 0, 1, 2, \infty$. Si l'on choisit pour f_3 la fonction caractéristique d'un voisinage ouvert compact de γ_3 dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_{p_3})$ et pour $f_\bullet$ celle d'un voisinage compact de $\gamma_\bullet$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\bullet)$ qui soit presque partout le compact maximal canonique, le membre de droite ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls dont celui qui correspond à γ. Quitte à rétrécir les supports de f_3 et $f_\bullet$, on peut s'arranger pour que ce soit le seul, ce qui démontre le lemme.

Le théorème 2 associe à Π une représentation galoisienne l-adique ρ_l. Pour le démontrer dans le cas où $k = 2$, Shimura construit une variété algébrique A de dimension n sur $\mathbb{Q}$, qui est une variété à multiplication réelle, c'est à dire qu'il existe un corps totalement réel F de degré n sur $\mathbb{Q}$ et un morphisme $F \to \mathrm{End}^\circ_{\mathbb{Q}}(A)$, où End° désigne les endomorphismes à isogénie près. La représentation ρ_l se réalise sur le $F \otimes \mathbb{Q}_l$ module $\mathrm{H}^1(A \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_l)$ (voir [Sh]). Il s'agit de démontrer que si g est un élément de W_p les coefficients du polynôme caractéristique de $\rho_l(g)$ sont des éléments de $\overline{\mathbb{Q}}$ indépendants de l. Lorsque $F = \mathbb{Q}$, le théorème 3 de [S-Ta] règle le cas d'une variété abélienne ayant bonne réduction, et le théorème 4.3 de [Gr] celui d'une variété abélienne quelconque: on interprète l'action du groupe de Weil en p sur $\mathrm{H}^1(A \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p, \mathbb{Q}_l)$ comme provenant d'une action géométrique sur la fibre spéciale du modèle de Néron en p de A. Lorsque F est quelconque, un ordre de F agit également sur la fibre spéciale du modèle de Néron. Pour régler ce cas, Casselman applique le même raisonnement, en remarquant que si A n'a pas potentiellement bonne réduction, la fibre spéciale du modèle de Néron est isomorphe à un tore [Cas1].

Le théorème 2 étendu par Deligne signifie que si π_p est spéciale ou cuspidale ordinaire, $\mathcal{F}_l(\pi_p) = \sigma_H(\pi_p)$. Ici, nous allons démontrer

https://doi.org/10.1023/A:1000602707982 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 3. *Soit* π_2 *une représentation admissible irréductible de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)$. *Si* π_2 *est cuspidale extraordinaire* $\mathcal{F}_l(\pi_2) = \sigma_H(\pi_2)$.

Puisque la correspondance de Deligne est compatible à la torsion par un caractère, il suffit de démontrer le théorème 3 pour une représentation cuspidale extraordinaire π_2 dont le caractère central vaut $\frac{1}{2}$ en 2. On procède en plusieurs étapes.

A. Le but du premier paragraphe est de démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 1. *Il existe une représentation automorphe* π *de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ *admettant* π_2 *comme composante locale en la place* 2 *et* D_1 *comme composante à l'infini.*

Pour cela, on associe à π_2 la représentation $\sigma_2 = \sigma_L(\pi_2) \otimes |\,|_2^{-(1/2)}$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_2/\mathbb{Q}_2)$. On prolonge σ_2 en une représentation σ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ à laquelle les méthodes de Langlands [L2] et Tunnell [T2] permettent d'associer une représentation automorphe π dont la composante à l'infini est D_1. Les fonctions L et les facteurs ε de π et $\sigma \otimes |\,|_2^{1/2}$ coïncident presque partout. Un argument standard permet d'en déduire qu'ils coïncident partout et donc de vérifier que π_2 est la composante locale de π en 2.

La représentation π est associée à une forme modulaire f de poids 1, nouvelle, normalisée et vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke.

B. Ensuite, au paragraphe 2, on remplace f par une forme modulaire f' de poids $l \geqslant 2$, nouvelle, normalisée et vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke, qui est congrue à f en un sens qui sera précisé. Elle est associée à une représentation automorphe π' dont la composante à l'infini est D_l, qui correspond elle-même, par le théorème 2, à une représentation galoisienne l-adique σ'. Par définition de $\mathcal{F}_l$, la restriction σ'_2 de σ' à W_2 vérifie

$$\mathcal{F}_l(\pi'_2) = \sigma'_2.$$

C. On montre alors, et c'est le point crucial de ce travail, que les composantes locales de π et π' en 2 sont 'congrues modulo l' c'est-à-dire que.

PROPOSITION 5. *Il existe un caractère* χ_l *de* $\mathbb{Q}_2$ *à valeurs dans* $1 + l\mathbb{Z}_l$ *tel que* $\pi_2 \simeq \pi'_2 \otimes \chi_l$.

C'est l'objet du paragraphe 3.

D. Au paragraphe 4, on remarque que les relations de congruence entre f et f' donnent pour presque tout p $\sigma'_p \equiv \check{\sigma}_p \otimes |\,|_p^{-1} \bmod \mathfrak{m}_l$, au sens où le déterminant et la trace de ces représentations sont congrus modulo $\mathfrak{m}_l$. Le théorème de Cebotarev permet d'en déduire

PROPOSITION 6. *Si* $p = 2$ *on a encore* $\sigma'_2 \equiv \check{\sigma} \otimes |\,|_2^{-1} \mod \mathfrak{m}_l$.

E. On peut enfin conclure: d'après C, B et D respectivement

$$\mathcal{F}_l(\pi_2) \equiv \mathcal{F}_l(\pi'_2) \equiv \sigma'_2 \equiv \check{\sigma}_2 \otimes |\,|_2^{-1} \bmod \mathfrak{m}_l.$$

Soit, puisque $\check{\sigma}_2 \otimes |\,|_2^{-1} = \sigma_H(\pi_2)$

$$\mathcal{F}_l(\pi_2) \equiv \sigma_H(\pi_2) \bmod \mathfrak{m}_l.$$

Comme cette relation est vraie pour une infinité de l et que ni la trace ni le déterminant de $\mathcal{F}_l(\pi_2)$ ne dépendent de l, on en déduit l'égalité cherchée $\mathcal{F}_l(\pi_2) = \sigma_H(\pi_2)$.

Grossièrement, ce raisonnement revient à démontrer que si π_2 est facteur local d'une représentation automorphe dont la composante à l'infini est D_1, $\mathcal{F}_l(\pi_2)$ est donnée par la correspondance de [D-S] en poids 1.

1. Passage du local au global en poids 1

Considérons donc une représentation cuspidale extraordinaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)$ dans un espace vectoriel complexe V, que nous noterons provisoirement π_2° et dont le caractère central ω_2 vérifie $w_2(2) = \frac{1}{2}$.

PROPOSITION 1. *Il existe une représentation automorphe de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ *admettant* π_2° *comme composante locale en la place* 2 *et* D_1 *comme composante à l'infini.*

Démonstration. La représentation $\pi_2^\circ \otimes |\,|_2^{-(1/2)}$ a un caractère central trivial sur 2 et la représentation irréductible et primitive qui lui est associée par la correspondance locale de Langlands σ_2: $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_2/\mathbb{Q}_2) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, est tétrahédrale ou octahédrale, c'est à dire que la composée $\overline{\sigma}_2$ de σ_2 avec la projection dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ a une image finie, isomorphe à $\mathfrak{A}_2$ ou à $\mathfrak{S}_2$ respectivement.

Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ et c l'élément de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ qui correspond à la conjugaison complexe pour un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$. En adaptant la démonstration du théorème 1.3 de [T1], nous allons d'abord démontrer

LEMME 1.1. *Il existe une représentation continue* σ: $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *irréductible, tétrahédrale ou octahédrale, dont la restriction à* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_2/\mathbb{Q}_2)$ *est isomorphe à* σ_2 *et qui vérifie* $\det \sigma(c) = -1$.

Démonstration. Le noyau de σ_2 est donné par une extension finie de $\mathbb{Q}_2$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_2$ notée E. Comme, d'après le treizième paragraphe de [W], le groupe $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_2)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$ ou à $\mathfrak{S}_4$, E est le corps de décomposition d'un polynôme P de degré 4, à coefficients dans $\mathbb{Q}_2$. On peut approcher P par un polynôme R de même degré, à coefficients dans $\mathbb{Q}$, dont le corps de décomposition sur $\mathbb{Q}_2$ est E et qui possède exactement deux racines réelles. Si L est le corps de décomposition de R sur $\mathbb{Q}$, $L_2 = E$ et $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_2)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ qui est lui-même un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$. Le groupe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ est donc isomorphe à $\mathfrak{A}_4$ ou à $\mathfrak{S}_4$ et on obtient le diagramme commutatif

https://doi.org/10.1023/A:1000602707982 Published online by Cambridge University Press

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_2) \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \arrow[d] \\
& \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

où les flèches diagonales sont des injections, la première étant induite par σ_2. En composant la seconde avec la restriction de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ on obtient une représentation projective $\overline{\sigma}$: $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ qui, d'après [S1], se relève en une représentation σ: $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_2/\mathbb{Q}_2) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] \arrow[dr, "\overline{\sigma}"] & \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \arrow[d] \\
\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}_2) \arrow[r, hook] & \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \arrow[r, hook] & \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}),
\end{tikzcd}$$

est commutatif. La restriction de $\overline{\sigma}$ à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_2/\mathbb{Q}_2)$ est donc $\overline{\sigma}_2$. Quitte à tordre σ par un caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, on en déduit que sa restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_2/\mathbb{Q}_2)$ est σ_2.

La représentation σ est octahédrale ou tétrahédrale, car l'image de $\overline{\sigma}$ dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ donc à $\mathfrak{A}_4$ ou $\mathfrak{S}_4$. Son image dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ n'est pas commutative si bien qu'elle est irréductible.

Le polynôme R, qui n'a que deux racines réelles, possède aussi deux racines complexes. C'est pourquoi la conjugaison complexe n'est pas triviale dans $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ qui est plongé dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. Par conséquent, d'après le paragraphe I.3.3 de [S1] $\det\sigma(c) = -1$ et le lemme 1.1 est vrai.

De plus, si χ est un caractère continu de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, la représentation $\sigma \otimes \chi$ est encore tétrahédrale ou octahédrale, deux types de représentation pour lesquels, d'après [L2] et [T2], il existe une représentation automorphe π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ dont la composante à l'infini est D_1 et qui vérifie, en presque tout place finie

$$L(\pi_p \otimes |\,|_p^{-(1/2)}, s) = L(\sigma_p, s), \tag{1.1}$$

où σ_p désigne la restriction de σ au groupe de Weil en p. Nous devons encore montrer.

LEMME 1.2. *π_2 est équivalente à π_2°.*

Démonstration. Cette propriété résulte de l'égalité entre les fonctions L en presque toutes les places. Nous allons utiliser l'équation fonctionelle de Tate dans des raisonnements inspirés du douzième paragraphe de [J-L]. Soit χ un caractère de $\mathbb{Q}^*\backslash\mathbb{A}^*$ et ψ un caractère additif non trivial de $\mathbb{Q}$. On notera χ_v et ψ_v leurs composantes locales respectives. En presque toute bonne place p, où σ_p est non ramifiée et caractérisée par sa fonction L, l'égalité (1.1) assure

$$\sigma_p = \sigma_L(\pi_p) \otimes |\,|_p^{-(1/2)} = \sigma_H(\check{\pi}_p). \tag{1.2}$$

La fonction L globale de π est le produit de ses facteurs locaux

$$L(\pi \otimes \chi, s) = \prod_v L(\pi_v \otimes \chi_v, s),$$

où v parcourt toutes les places – finies ou non – de $\mathbb{Q}$. De même

$$\varepsilon(\pi \otimes \chi, s) = \prod_v \varepsilon(\pi_v \otimes \chi_v, s, \psi_v).$$

Ils vérifient, pour tout choix de χ et ψ, l'équation fonctionnelle

$$L(\pi \otimes \chi, s) = \varepsilon(\pi \otimes \chi, s) L(\check{\pi} \otimes \chi^{-1}, 1 - s).$$

On peut écrire les mêmes égalités pour $L(\sigma \otimes |\,|_p^{1/2} \otimes \chi, s)$ et $\varepsilon(\sigma \otimes |\,|_p^{1/2} \otimes \chi, s)$. Lorsqu'on fait le quotient des équations fonctionnelles, tous les facteurs locaux correspondant aux places où $\sigma_p = \sigma_L(\pi_p) \otimes |\,|_p^{-(1/2)}$ s'éliminent ainsi que les facteurs à l'infini. Il reste un ensemble fini de places archimédiennes, contenant les places ramifiées, noté S, tel que

$$\prod_{v \in S} \frac{L(\sigma_v \otimes |\,|_v^{1/2} \otimes \chi_v, s)}{L(\pi_v \otimes \chi_v, s)}$$

$$= \prod_{v \in S} \frac{\varepsilon(\sigma_v \otimes |\,|_v^{1/2} \otimes \chi_v, s, \psi_v)}{\varepsilon(\pi_v \otimes \chi_v, s, \psi_v)} \prod_{v \in S} \frac{L(\check{\sigma}_v \otimes |\,|_v^{-(1/2)} \otimes \chi_v^{-1}, 1 - s)}{L(\check{\pi}_v \otimes \chi_v^{-1}, 1 - s)}.$$

Puisque σ_2 est ramifiée comme π_2°, la place 2 appartient à S. D'après le Lemme 12.5 de [J-L], il existe un quasi-caractère ω qui coïncide avec χ_2 sur $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_2/\mathbb{Q}_2)$ et tel que le conducteur de ω_v soit arbitrairement grand en toute autre place de S. Or, si ce conducteur est assez grand, toujours d'après [J-L] (p. 406 et 116), les fonctions L de $\sigma_v \otimes |\,|_v^{1/2} \otimes \omega_v$, $\check{\sigma}_v \otimes |\,|_v^{-(1/2)} \otimes \omega_v^{-1}$, $\pi_v \otimes \omega_v$, et $\check{\pi}_v \otimes \omega_v^{-1}$ sont égales à 1, et les facteurs ε vérifient

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma_v \otimes |\,|_v^{1/2} \otimes \omega_v, s, \psi_v) &= \varepsilon(\det \sigma_v \otimes |\,|_v \otimes \omega_v, s, \psi_v)\varepsilon(\omega_v, s, \psi_v) \\ &= \varepsilon(\pi_v \otimes \omega_v, s, \psi_v), \end{aligned}$$

car $\det \sigma_v \otimes |\,|_v$ est le caractère central de π_v. Avec ω à la place de χ, notre équation devient

$$\frac{L(\sigma_2 \otimes |\,|_2^{1/2} \otimes \chi_2, s)}{L(\pi_2 \otimes \chi_2, s)}$$

$$= \frac{\varepsilon(\sigma_2 \otimes |\,|_2^{1/2} \otimes \chi_2, s, \psi_2)}{\varepsilon(\pi_2 \otimes \chi_2, s, \psi_2)} \frac{L(\check{\sigma}_2 \otimes |\,|_2^{-(1/2)} \otimes \chi_2^{-1}, 1 - s)}{L(\check{\pi}_2 \otimes \chi_2^{-1}, 1 - s)}.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000602707982 Published online by Cambridge University Press

La représentation $\sigma_2 \otimes |\,|_2^{1/2}$ étant associée à π_2° par la conjecture de Langlands locale, leurs facteurs L et ε sont égaux et nous obtenons

$$\frac{\varepsilon(\pi_2 \otimes \chi, s, \psi_2) L(\check{\pi}_2 \otimes \chi_2^{-1}, 1-s)}{L(\pi_2 \otimes \chi_2, s)} = \frac{\varepsilon(\pi_2^\circ \otimes \chi_2, s, \psi_2) L(\check{\pi}_2^\circ \otimes \chi_2^{-1}, 1-s)}{L(\pi_2^\circ \otimes \chi_2, s)},$$

ce qui signifie d'après le corollaire 2.19 de [J-L] que π_2 est équivalente à π_2°. Le lemme 1.2 est donc vrai et la proposition 1 aussi.

Remarque 1. Ces calculs sont classiques. On en trouve de semblables par exemple dans [Cas2] où Casselman compare les facteurs locaux de deux représentations automorphes, ou dans [Lau-R-St].

Remarque 2. En remplaçant 2 par n'importe qu'elle autre place de S, on montre que l'égalité (1.2) est vraie pour tout p.

La représentation π détermine une nouvelle forme de poids 1, normalisée et vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke $f = \sum_{n \geqslant 1} a_n q^n$, dont les coefficients de Fourier sont donnés par la relation

$$L(\check{\sigma}, s) = L(\check{\pi} \otimes |\,|^{1/2}, s) = \sum_{n \geqslant 1} a_n n^{-s}.$$

Soit N le conducteur de σ et ε son déterminant. L'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur les racines N^e de l'unité fournit un homomorphisme de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Il permet de factoriser ε, qu'on identifie au caractère de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ ainsi obtenu.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr] & & \mathbb{C}^\times \\ & (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times . \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Alors f appartient à $S_1(N, \varepsilon)$.

Si p ne divise pas N, on note F_p l'image par σ de la substitution de Frobenius en p qui est définie à conjugaison près. La relation $L(\check{\sigma}_p, s) = \det(1 - p^{-s} F_p)^{-1}$, donne la trace et le déterminant de F_p. D'autre part, π_p est l'induite unitaire $\mathrm{I}(\mu_1, \mu_2)$ où $\mu_i = |\,|^{si}$ avec

$$p^{s_1} + p^{s_2} = p^{1/2} a_p \quad \text{et} \quad p^{s_1} p^{s_2} = p\,\varepsilon(p),$$

ce qui permet de calculer

$$\begin{aligned} L(\check{\pi}_p \otimes |\,|_p^{1/2}, s) &= (1 - p^{-s} p^{s_1 - 1/2})^{-1} (1 - p^{-s} p^{s_2 - 1/2})^{-1} \\ &= (1 - p^{-s} a_p + p^{-2s} \varepsilon(p))^{-1}. \end{aligned}$$

Puisque d'après la remarque 2, $L(\check{\sigma}_p, s) = L(\check{\pi}_p \otimes |\,|_p^{1/2}, s)$, on obtient

$$\operatorname{tr} F_p = a_p \quad \text{et} \quad \det F_p = \varepsilon(p),$$

σ est associée à f par la correspondance de Deligne et Serre en poids 1.

NB: Dans [D-S] et [S1] on trouve l'égalité $L(\sigma, s) = \Sigma a_n n^{-s}$ au lieu de $L(\check{\sigma}, s) = \Sigma a_n n^{-s}$. Cette différence provient d'une différence dans la définition des fonctions L. Dans [D-S] et [S1], la fonction $L(\sigma_p, s)$ d'une représentation galoisienne locale σ_p est définie à partir du déterminant de $(1 - p^{-s} F_p)$, alors que nous avons adopté la version géométrique en définissant $L(\sigma_p, s)$ à partir du déterminant de $(1 - p^{-s} F_p{}^{-1})$.

2. Du poids 1 au poids supérieur à 2

2.1. CONGRUENCES: VERSION CLASSIQUE

Nous voici avec une forme parabolique primitive de poids 1 de niveau N et de caractère ε, associée à une représentation automorphe dont la composante locale en $p = 2$ est π_2° – que nous noterons désormais π_2. Nous voulons calculer $\mathcal{F}_l(\pi_2)$. Si π_2 était un facteur d'une représentation automorphe π' de poids supérieur à 2, $\mathcal{F}_l(\pi_2)$ serait la restriction à W_2 de la représentation l-adique associée à π' par le théorème 2. Il s'agit donc de trouver une nouvelle forme de poids supérieur à 2, normalisée et vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke, qui ne soit pas trop différente de f. Or, les séries d'Eisenstein permettent de modifier le poids des formes paraboliques sans les perturber outre mesure.

Choisissons donc un nombre premier l plus grand que 5 et ne divisant pas N, et considérons la série d'Eisenstein E_l de poids $l - 1$ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, normalisée pour que son terme constant soit 1. Son développement en série est l-entier, c'est à dire que $E_l = \sum_{n \geqslant 0} b_n q^n$, avec $b_0 = 1$ et $b_n \in l\mathbb{Z}_l \cap \mathbb{Q}$ si $n \geqslant 1$. Cf. [D-S].

Les coefficients de f sont entiers dans une extension finie $K/\mathbb{Q}_l$ dont on note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers d'idéal maximal $\mathfrak{m}_K$, et $\tilde{K} = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K$ le corps résiduel. On peut supposer que K contient aussi les racines de l'unité d'ordre N. Les coefficients de la forme modulaire $E_l f \in S_l(N, \varepsilon)$ sont aussi dans $\mathcal{O}_K$. En appliquant le lemme 6.11 de [D-S] au $\mathcal{O}_K$ module des formes de $S_l(N, \varepsilon)$ à coefficients dans $\mathcal{O}_K$, sur lequel agissent tous les opérateurs de Hecke, quitte à remplacer K par une extension finie, on obtient une forme modulaire $f^1 \in S_l(N, \varepsilon)$, à coefficients dans $\mathcal{O}_K$, qui est vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke, avec des valeurs propres $a_p^1 \equiv a_p \bmod \mathfrak{m}_K$. Elle n'est pas nécéssairement nouvelle, mais il existe une unique forme parabolique f' de poids l, nouvelle, normalisée, et vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke avec des valeurs propres a'_p presque toute égales à celles de f^1. On peut supposer qu'elle est à coefficients dans $\mathcal{O}_K$. Son niveau M est un diviseur de N tel que ε se factorise à travers $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*$ et f^1 s'écrit $f^1(z) = \sum_{i=1}^n l_i f'(d_i z)$, où les l_i sont des éléments de K et les d_i des diviseurs de

https://doi.org/10.1023/A:1000602707982 Published online by Cambridge University Press

N/M. Cette forme parabolique f' est congrue à f au sens où, pour presque tout nombre premier p $a'_p \equiv a_p \bmod \mathfrak{m}_K$ et elle est associée à une représentation π' de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ dont la composante à l'infini est D_l et qui, elle-même, correspond par le théorème 2, à une représentation l-adique σ': $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_l)$.

Puisque le poids l est supérieur à 2, nous savons que $\mathcal{F}_l(\pi'_2) = \sigma'_2$, ce qui nous incite à analyser les rapports entre π_2 et π'_2. Or, une relation entre ces deux représentations locales ne peut provenir que des relations de congruence entre f et f'. Nous avons donc besoin d'une interprétation globale qui nous permette de les exploiter: adoptons un point de vue géométrique.

2.2. CONGRUENCES: INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

Soit R un anneau commutatif où N est inversible. Soit H un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$. D'un point de vue géométrique, une forme modulaire sur R, de poids k et de niveau H, est une fonction qui, à une courbe elliptique E munie d'une structure de niveau α: $\hat{T}E \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{Z}}^2$ définie modulo H et d'une base ω de $\underline{\omega}_E = H^0(E, \Omega^1_E)$, associe un élément de R, qui est invariante par changement de base et qui est homogène de degré $-k$ en ω. Si

$$H = \left\{ g \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) \mid g \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N \right\},$$

on obtient les formes modulaires classiques de poids k pour $\Gamma_1(N)$. Elles constituent un R-module noté $M(R, N, k)$ où l'ensemble des formes paraboliques est un sous-module $S(R, N, k)$. Si

$$H = \left\{ g \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) \mid g \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N \right\},$$

on obtient les formes modulaires classiques associées au groupe $\Gamma(N)$. Pour plus de détails, on renvoie aux articles de Katz [K], ou Deligne–Rapoport [D-R].

A un élément de $M(R, N, k)$ on peut associer son développement de Fourier $f(q) \in R[[q]]$. En vertu du 'q-expansion principle' cette application est injective, et f est définie sur un sous-anneau R' de R si et seulement si $f(q) \in R'[[q]]$. On établit ainsi le lien avec la théorie classique des formes modulaires sur $\Gamma_1(N)$.

Comme les coefficients du développement de Fourier de f, f^1 et f' sont dans $\mathcal{O}_K$ on a

$$f \in S(\mathcal{O}_K, N, 1), \qquad f^1 \in S(\mathcal{O}_K, N, l), \quad \text{et} \quad f' \in S(\mathcal{O}_K, M, l).$$

En les réduisant modulo $\mathfrak{m}_K$ on obtient

$$\bar{f} \in S(\tilde{K}, N, 1), \qquad \bar{f}^1 \in S(\tilde{K}, N, l), \qquad \bar{f}' \in S(\tilde{K}, M, l).$$

https://doi.org/10.1023/A:1000602707982 Published online by Cambridge University Press

La réduction modulo l de la série d'Eisenstein E_l est l'invariant de Hasse $A_l \in M(\mathbb{F}_l, 1, l-1)$. Puisque $f^1 - E_l f$ est à coefficients dans $\mathfrak{m}_K$, la reduction modulo $\mathfrak{m}_K$ donne $\bar{f}^1 = A_l \bar{f}$.

Considérons la courbe modulaire $X(N)$ définie sur $\mathbb{Z}[1/N]$ et munie du faisceau inversible ω. Pour N supérieur à 4, les formes modulaires pour $\Gamma(N)$ correspondent aux sections globales du faisceau $\omega^{\otimes k}$ et on a une inclusion

$$M(R, N, k) \subset H^0(X(N) \otimes_{\mathbb{Z}[1/N]} R,\, \omega^{\otimes k}).$$

Nous allons décrire l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)$ sur

$$\varinjlim_a H^0(X(2^a N) \otimes K, \omega^{\otimes k}).$$

Puisqu'une forme modulaire est une fonction d'un triplet (E, α, ω), l'action de $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_2)$ sur cette fonction résulte de son action sur un tel triplet. Pour la décrire simplement, il vaut mieux considérer la catégorie des courbes elliptiques à isogénie près, obtenue en rendant toutes les isogénies inversibles. Les structures de niveau deviennent des isomorphismes $\alpha\colon \hat{V}E \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_f^2$ définis modulo un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$. Plaçons-nous dans cette catégorie en posant $R = \mathbb{C}$. D'après [D3] (0.1.3) un élément g de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)$ agit sur (E, α, ω) en remplaçant E par une courbe isogène E', $(\alpha \bmod H)$ par $(g \circ \alpha \bmod gHg^{-1})$ et ω en une base ω' de $\underline{\omega}_{E'}$ que nous cherchons à déterminer. Si E est définie par un réseau R_0 de $\mathbb{C}$ et si $\mathcal{K}$ est le noyau de l'exponentielle de Lie E dans E, on dispose du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathrm{Lie}\,E & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\omega}\downarrow\wr & & {\scriptstyle\omega}\downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \\ 0 & \longrightarrow & R_0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}/R_0 & \longrightarrow & 0. \end{array} \qquad (\mathcal{D})$$

Si E' est définie par R_0', on dispose d'un diagramme analogue $(\mathcal{D}')$ pour E', R_0' et ω'. L'isogénie φ de E dans E' induit un isomorphisme de Lie E avec Lie E' et une injection de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}'$ qui devient une injection de R_0 dans R_0'. Pour compléter la correspondance entre $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$, il faut donc que $\omega' \circ \varphi = \omega$ c'est-à-dire que ω' soit l'élément de $\underline{\omega}_{E'}$ vérifiant

$$\varphi^*(\omega') = \omega. \qquad (2.1)$$

Cette action se transporte de façon évidente à la catégorie des courbes elliptiques sur K à isogénie près. Puisque les sous-groupes

$$K_2^a = \left\{ g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2) \mid g \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod 2^a \right\},$$

https://doi.org/10.1023/A:1000602707982 Published online by Cambridge University Press

constituent un système cofinal de l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)$, le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)$ agit sur la limite injective

$$\varinjlim_a H^0(X(2^a N) \otimes K, \omega^{\otimes k}).$$

Dans notre situation particulière, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)$ agit sur le K espace vectoriel

$$\varinjlim_a H^0(X(2^a N) \otimes K, \omega) \ni f,$$

et si l ne divise pas N, sur le $\mathcal{O}_l$ module

$$\varinjlim_a H^0(X(2^a N) \otimes \mathcal{O}_K, \omega) \ni f.$$

Via la réduction de $H^0(X(2^a N) \otimes \mathcal{O}_K, \omega)$ dans $H^0(X(2^a N) \otimes \tilde{K}, \omega)$ on en déduit l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)$ sur le $\tilde{K}$ espace vectoriel

$$\varinjlim_a H^0(X(2^a N) \otimes \tilde{K}, \omega) \ni \bar{f}.$$

Nous nous intéressons au K-espace vectoriel

$$V = \mathrm{Vect}_K\{\pi(g).f \mid g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)\} \subset \varinjlim_a H^0(X(2^a N) \otimes K, \omega),$$

au $\mathcal{O}_K$-module

$$L = \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_K}\{\pi(g).f \mid g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)\},$$

qui est inclu dans V et au $\tilde{K}$ espace vectoriel

$$W = \mathrm{Vect}_{\tilde{K}}\{\pi(g).\bar{f} \mid g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)\},$$

ainsi qu'aux espaces V^1, L^1 et W^1 définis de façon analogue à l'aide de f^1 et ceux V', L' et W' définis à l'aide de f'. Tous ces ensembles sont des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)$ modules.

La réduction de $H^0(X(2^a N) \otimes \mathcal{O}_K, \omega)$ dans $H^0(X(2^a N) \otimes \tilde{K}, \omega)$ induit un morphisme surjectif de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)$ modules de L dans W dont le noyau contient $\mathfrak{m}_K L$. On construit ainsi un morphisme surjectif de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)$ modules qui est $\tilde{K}$-linéaire

$$L/\mathfrak{m}_K L \to W. \tag{2.2}$$

On en construit un autre

$$L^1/\mathfrak{m}_K L^1 \to W^1, \tag{2.3}$$

de la même façon. Or les espaces W et W^1 sont isomorphes car

PROPOSITION 2. *La multiplication par A_l induit un isomorphisme $W \xrightarrow{\sim} W^1$.*

Démonstration. Il s'agit en fait de démontrer que l'invariant de Hasse est invariant sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)$. Dans [K-M] (12.4.1.1) Katz et Mazur donnent une méthode pour calculer A_l qui permet de monter facilement que A_l est invariant par isogénie. Soit E une courbe elliptique sur K et ω une base de $\underline{\omega}_E$. On note $\hat{E}$ le groupe formel à l'origine de E. Une coordonnée X sur $\hat{E}$ est dite adaptée à ω si

$$\omega|\hat{E} = (1 + \text{ termes de plus haut degrés})\,\mathrm{d}X,$$

$A_l(E, \omega)$ est alors le coefficient de X^l dans la série formelle $[l]X$ qui exprime la somme itérée l fois.

Soit E' une autre courbe elliptique sur $\mathbb{F}_l$ et $\varphi\colon E \to E'$ une isogénie d'ordre n premier à l. On dispose alors des applications

$$\varphi_*\colon \underline{\omega}_E \to \underline{\omega}_{E'}$$

$$\varphi^*\colon \underline{\omega}_{E'} \to \underline{\omega}_E$$

telles que $\varphi^* \circ \varphi_*$ est la multiplication par n sur $\underline{\omega}_E$ et $\varphi_* \circ \varphi^*$ la multiplication par n sur $\underline{\omega}_{E'}$. Soit $\omega' \in \underline{\omega}_{E'}$. Nous allons montrer

$$A_l(E, \omega) = A_l(E', \varphi_*(\omega)), \tag{2.4}$$

$$A_l(E', \omega') = A_l(E, \varphi^*(\omega')). \tag{2.5}$$

Soit X' une coordonnée formelle sur $\hat{E}'$ adaptée à ω'. Alors $X = X' \circ \varphi$ est une coordonnée formelle sur $\hat{E}$ adaptée à $\varphi^*(\omega')$, puisque $\varphi^*(dX') = d(X' \circ \varphi)$. Si $[l]X = \sum_i a_i X^i$ on a

$$[l]X' = \sum_i a_i X^i \circ \varphi = \sum_i a_i {X'}^i$$

ce qui donne (2.5)

$$A_l(E, \varphi^*(\omega')) = a_l = A_l(E', \omega').$$

En remplaçant ω' par $\varphi_*(\omega)$ on obtient (2.4)

$$A_l(E', \varphi_*(\omega)) = (n^{l-1} \bmod l)\, A_l(E, \omega) = A_l(E, \omega).$$

Considérons maintenant l'espace des courbes elliptiques à l'-isogénie près, obtenu en rendant inversible les isogénies de degré premier à l. Les structures de niveau deviennent des isomorphismes $\alpha\colon \hat{V}^l E \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_f^{l2}$ où $\hat{V}^l E$ est le produit tensoriel par $\mathbb{Q}$ de la limite projective des points de n torsion de E sur les entiers n premiers à l, et où $\mathbb{A}_f^l$ est l'ensemble des adèles finies ayant une composante nulle en l. En réduisant modulo l les courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}_l$ à l'-isogénie près, on obtient les courbes sur $\mathbb{F}_l$ à l'-isogénie près. L'invariance de A_l sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)$ résulte alors de son invariance par isogénie (2.1) et (2.4).

La proposition 2 s'en déduit immédiatement.

Remarque. La démonstration qui précède est valable pour tout p et l'invariant de Hasse est invariant sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ en général.

Enfin, nous allons démontrer.

LEMME. *V^1 est isomorphe à une somme de copies de V'.*

Démonstration. La représentation π' se factorise

$$\pi' = \left(\bigotimes_p \pi'_p\right) \otimes D_l.$$

Puisque f' est nouvelle, elle se décompose aussi $f' = \bigotimes_p \xi'_p$ où ξ'_p est le nouveau vecteur de la représentation π'_p qui se réalise sur le K espace vectoriel

$$V'_p = \mathrm{Vect}_K\{\pi'_p(g).f' \mid g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)\}.$$

Notons V_l l'espace de la représentation D_l. En termes de représentations, la relation

$$f^1(z) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\, f'(d_i z)$$

s'écrit

$$f^1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i\, \pi' \begin{pmatrix} d_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f'$$

où d_i est considéré dans les adèles finies. Il existe alors des vecteurs ξ^i dans $(\bigotimes_{p\neq 2} V'_p) \otimes V_l$ tels que

$$f^1 = \sum_{i=1}^n \xi^i \otimes \pi'_2 \begin{pmatrix} d_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xi'_2.$$

Si $d_i = 2^{n_i} d_{i,0}$ avec $d_{i,0}$ dans $\mathbb{Z}_2^*$, on a

$$\pi'_2 \begin{pmatrix} d_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xi'_2 = \omega_2(d_{i,0})\, \pi'_2 \begin{pmatrix} 2^{n_i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xi'_2.$$

En regroupant les termes de la somme qui ont des n_i égaux, on peut écrire

$$f^1 = \sum_{i=1}^{m} \zeta^i \otimes \pi_2' \begin{pmatrix} 2^{n_i} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xi_2'$$

avec ζ^i dans $(\bigotimes_{p\neq 2} V_p') \otimes V_l$ et avec des n_i deux à deux distincts. D'après [D3] (2.2.6), les $\pi_2'\left(\begin{smallmatrix} 2^{n_i} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \xi_2'$ sont linéairement indépendants. Cette façon d'écrire f^1 démontre que V^1 est isomorphe à une somme de copies de V'.

Pour exploiter ces résultats, nous avons besoin des travaux de Marie-France Vignéras sur les réseaux dans les représentations admissibles, qui nous permettront de montrer que π_2 est isomorphe à π_2' tordue par un caractère à valeurs dans $1+l\mathbb{Z}_l$.

3. Réseaux dans les représentations admissibles

On peut retrouver tous les résultats de ce paragraphe dans le récent ouvrage [V1] sur les représentations modulaires des groupes réductifs, où Marie-France Vignéras étudie en détail la théorie des réseaux dans une représentation admissible. Mais cette étude est menée dans un cadre très général, faisant largement appel à la théorie des groupes réductifs, et développant une théorie des types dans le cas modulaire. Ici, avec GL_2, nous nous trouvons dans un cas bien plus simple. Il peut être intéressant de comprendre rapidement certains points: par exemple comment et pourquoi on réduit les représentations cuspidales, d'où proviennent les réseaux. Pour la commodité du lecteur, j'ai donc donné de certaines démonstrations une version adaptée a notre situation, que j'espère plus explicite. En plus de [V1], l'article [V2] où Marie-France Vignéras avait commencé par étudier le cas du groupe GL_2 m'a été très utile.

3.1. DÉFINITION ET MOTIVATIONS

La place 2 ne joue aucun rôle particulier pour les résultats de ce paragraphe, aussi allons-nous travailler avec une place quelconque p. Nous supposerons que p ne divise pas $(l-1)l(l+1)$ pour éviter certaines situations gênantes. Lorsque nous reviendrons au cas où p vaut 2, nous pourrons utiliser les résultats obtenus puisque nous avons pris soin d'imposer à l d'être supérieur à 5. Soit $\pi = \otimes_p \pi_p \otimes \pi_\infty$ une représentation admissible irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ dont la composante à l'infini est équivalente à $D_{k,w}$, associée à une nouvelle forme parabolique $f \in S_k(N, \varepsilon)$. Soit p une place finie où le caractère central ω_p vérifie $\omega_p(p) = p^w$ et K une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ qui contient les coefficients a_n, $n \geqslant 1$, de f et les racines de l'unité d'ordre N (donc les valeurs de ε). La représentation π_p se réalise alors sur un K espace vectoriel V. Pour alléger les notations nous noterons, dans ce paragraphe, $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

La définition d'un réseau admissible figure au paragraphe I.9 de [V1]. Nous la traduisons ici en tenant compte du fait que $\mathcal{O}_K$ est un anneau principal. Nous

https://doi.org/10.1023/A:1000602707982 Published online by Cambridge University Press

retrouvons alors une définition semblable à celle de [V2]. (La différence tient au fait que, dans [V2] c'est la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_l$ qui intervient au lieu d'une extension finie, et qu'on y impose $\omega_p(p) = 1$).

DÉFINITION. Soit π_p une représentation admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans un K-espace vectoriel V. Un $\mathcal{O}_K$ réseau admissible de π_p, appelé aussi un $\mathcal{O}_K G$ réseau de π_p, est un $\mathcal{O}_K$ module $L \subset V$ stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, qui engendre V (tout élément de V s'écrit $x.v$ avec $x \in K$ et $v \in L$) et qui est admissible (pour tout sous-groupe ouvert compact $\Gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, L^Γ est un $\mathcal{O}_K$ module libre de type fini).

On peut alors considérer la réduction modulo $\mathfrak{m}_K$ de π_p qui est la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans le $\tilde{K}$-espace vectoriel $L/\mathfrak{m}_K L$ déduite de π_p. On la note $\bar{\pi}_p$. Elle est elle-même admissible.

On dit que L est de type fini si c'est un $O_K[G]$ module de type fini.

L'objet de ce paragraphe est de construire un $\mathcal{O}_K$ réseau admissible de π_p. Nous appliquerons alors cette construction à nos représentations π_2 et π'_2 en adaptant deux résultats fondamentaux de [V1]. D'abord le principe de Brauer–Nesbitt, du paragraphe II.5.11.b, que nous énoncerons ainsi.

THÉORÈME (BN). *Soit une représentation de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *qui est une somme finie de représentations irréductibles et admissibles, et qui possède plusieurs réseaux admissibles de type finis. Alors les réductions de ces réseaux sont de longueur finie et isomorphes à semi-simplification près*.

Ensuite, le théorème de réduction des représentations cuspidales.

THÉORÈME (RC). (i) *Si une représentation cuspidale de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *sur* K *admet un* $\mathcal{O}_K$ *réseau admissible, sa réduction modulo* $\mathfrak{m}_K$ *est irréductible.*

(ii) *Soient* π_p *et* π'_p *des représentations admissibles irréductibles de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *sur* K *qui admettent chacune un* $\mathcal{O}_K$ *réseau admissible, et qui ont même caractère central et même réduction modulo* $\mathfrak{m}_K$. *Alors, si l'une des deux est cuspidale, elles sont équivalentes*.

Ce résultat est démontré dans [V1], mais pour les raisons évoquées plus haut, nous en donnons une démonstration valable dans notre cas particulier.

Démonstration. Supposons que π_p est cuspidale. Quitte à tordre π_p et π'_p par un caractère non ramifié, on peut encore supposer que leur caractère central commun est trivial en p. Les deux sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ compacts modulo le centre, maximaux, sont $Z_1 H_1$ et $Z_2 H_2$ où Z_1 et Z_2 sont les sous-groupes cycliques engendrés par $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ respectivement et

$$H_1 = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p),$$

https://doi.org/10.1023/A:1000602707982 Published online by Cambridge University Press

$$H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \mid a, d \in \mathbb{Z}_p^* c \in p\mathbb{Z}_p \right\}.$$

Pour $i = 1$ ou 2, les groupes H_i admettent une filtration décroissante par des sous-groupes compacts distingués H_i^n, $n \geqslant 0$.

Notons $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. D'après [Ku2] et [C4], puisque π_2 est cuspidale, il existe une représentation très cuspidale ρ de l'un des groupes $Z_i H_i$, avec $i = 1$ ou 2, telle que π_p est l'induite compacte $\pi_p = \mathrm{ind}_{Z_i H_i}^G \rho$. La représentation ρ est triviale sur H_i^n pour un certain entier $n \geqslant 1$. D'après la formule d'induction-restriction, c'est une composante de $(\pi_{p|Z_i H_i})^{H_i^n}$.

On note r – respectivement r' – la restriction de π_p – respectivement π_p' – à $Z_i H_i$. La représentation π_p possède un $\mathcal{O}_K$ réseau admissible L, qui est aussi un $\mathcal{O}_K$ réseau admissible de r. La suite exacte de $Z_i H_i$ modules

$$0 \to \mathfrak{m}_K L \to L \to L/\mathfrak{m}_K L \to 0$$

fournit une autre suite exacte de $Z_i H_i$ modules

$$0 \to \mathfrak{m}_K L^{H_i^n} \to L^{H_i^n} \to (L/\mathfrak{m}_K L)^{H_i^n} \to 0$$

parce que H_i^n est un pro-p-groupe et que l ne divise pas p. Comme $L^{H_i^n}$ est un $\mathcal{O}_K$ réseau de $r^{H_i^n}$ cela signifie que 'prendre les invariants sous H_i^n' est une opération qui commute à la réduction $(\overline{r})^{H_i^n} \simeq \overline{(r^{H_i^n})}$. De la même façon, on démontre $(\overline{r'})^{H_i^n} \simeq \overline{(r'^{H_i^n})}$ et puisque $\overline{\pi_p} = \overline{\pi_p'}$ on en déduit $\overline{(r^{H_i^n})} \simeq \overline{(r'^{H_i^n})}$. Comme le caratère central commun de π_p et π_p' est trivial en p, $r^{H_i^n}$ et $r'^{H_i^n}$ sont des représentations de dimension finie du groupe $Z_1 \backslash Z_i H_i / H_i^n$ qui est fini d'ordre $(p-1)p^\alpha(p+1)$. Elles sont donc semi-simples et, d'après [S2] (15.5), puisque l ne divise pas $(p-1)p(p+1)$, elles sont caractérisées par leur réduction, si bien que $r^{H_i^n} \simeq r'^{H_i^n}$.

La représentation ρ étant une composante de $r^{H_i^n}$, elle est aussi une composante de $r'^{H_i^n}$, *a fortiori* une composante de $r' = \pi'_{p|Z_i H_i}$. La réciprocité de Frobenius

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_{Z_i H_i}^G \rho, \pi_p') \simeq \mathrm{Hom}_{Z_i H_i}(\rho, \pi'_{p|Z_i H_i}),$$

fournit un entrelacement entre $\pi_p = \mathrm{ind}_{Z_i H_i}^G \rho$ et π_p' qui sont donc isomorphes. Ceci achève la démonstration de (RC).

A la lumière des résultats du paragraphe 2.2, nous pourrons alors montrer que π_2 et π_2' sont isomorphes modulo un caractère à valeurs dans $1 + l\mathbb{Z}_l$.

3.2. CONSTRUCTION DE RÉSEAUX ADMISSIBLES

Il s'agit maintenant de construire un $\mathcal{O}_K$ réseau admissible de π_p. Au paragraphe II.4.13 de [V1] Marie-France Vignéras établit l'existence d'un tel réseau.

Toujours pour les raisons de commodité invoquées plus haut, nous allons le cons truire explicitement dans notre cas particulier. On peut réaliser cette construction à l'aide du modèle de Kirillov, comme Marie-France Vignéras l'a fait dans [V4] et comme je l'avais tout d'abord rédigé dans ma thèse. Mais cette méthode est encore trop compliquée pour ce dont nous avons besoin ici. Laurent Clozel m'a fait remarquer une démonstration plus simple et plus courte qui figure aussi dans [V1]. Nous allons donc démontrer.

PROPOSITION 3. *Si π_p est comme au paragraphe* 3.1, *elle possède un $\mathcal{O}_K$ réseau admissible*.

Démonstration. Envisageons d'abord le cas où π_p appartient à la série principale. Elle apparaît alors dans une induite unitaire $\mathrm{I}(\mu_1,\mu_2)$ où μ_1 et μ_2 sont deux caractères de $\mathbb{Q}_p$. Pour construire un $\mathcal{O}_K$ réseau admissible de π_p nous devons d'abord démontrer.

LEMME 3.1. *Les caractères μ_1 et μ_2 sont à valeurs dans l'anneau des entiers d'une extension finie de K.*

Démonstration. Puisque μ_1 et μ_2 sont des caractères continus, leur restriction à $\mathbb{Z}_p^*$ est à valeurs dans l'anneau des entiers d'une extension finie de K. Il suffit donc de vérifier que $\mu_1(p)$ et $\mu_2(p)$ sont inversibles dans l'anneau des entiers d'une extension finie de K, ce que nous allons faire en distingant les différentes possibilités.

- Si π_p est principale non-ramifiée, $\pi_p = \mathrm{I}(|\,|_p^{s_1}, |\,|_p^{s_2})$ avec

  $$p^{s_1} + p^{s_2} = p^{1-k-w/2}\,a_p \quad \text{et} \quad p^{s_1}p^{s_2} = p^{-w}\,\varepsilon(p) = p^{-w},$$

  p^{s_1} et p^{s_2} sont donc les racines de l'équation dont les coefficients sont des entiers algébriques

  $$X^2 - p^{1-k-w/2}a_pX + p^{-w} = 0.$$

  Ils sont donc entiers dans une extension finie K_1/K. Comme leur produit vaut p^{-w}, ils sont inversibles dans $\mathcal{O}_{K_1}$.
- Si π_p est spéciale, il existe un caractère χ tel que π_p est la composante irréductible de dimension infinie de $\mathrm{I}(|\,|_p^{1/2}\otimes\chi, |\,|_p^{-1/2}\otimes\chi)$. Comme précédemment, $\chi(p)^2 = \omega_p(p) = p^w$ et $\chi(p)$ est inversible dans l'anneau des entier d'une extension finie de K. Donc $\mu_1(p)$ et $\mu_2(p)$ aussi.
- Si $\pi_p = \mathrm{I}(\mu_1,\mu_2)$ est principale avec μ_1 ramifié et pas μ_2 on a

  $$\mu_1 = \omega_p \otimes |\,|_p^{s_1} \quad \text{et} \quad \mu_2 = |\,|_p^{-s_1}.$$

  Le p^e facteur du développement eulérien de la série de Dirichlet associée à f est

https://doi.org/10.1023/A:1000602707982 Published online by Cambridge University Press

$$L_p(f,s) = \frac{1}{1-p^{-s}a_p},$$

et comme

$$L_p(f,s) = L\left(\check{\pi}_p, s + \frac{1-k-w}{2}\right),$$

on obtient $p^{-s_1} = p^{1-k-w/2}a_p$ et p^{-s_1} est un entier algébrique. En appliquant à la représentation

$$\omega_p^{-1} \otimes \pi_p = I(|\,|_p^{s_1}, \omega_p^{-1} \otimes |\,|_p^{-s_1}),$$

qui est un facteur de la représentation globale $\omega_\pi^{-1} \otimes \pi$, le raisonnement qui précède, on démontre que p^{s_1} aussi est un entier algébrique. Donc, $\mu_2(p)$ est inversible dans l'anneau des entiers d'une extension finie de K, et $\mu_1(p) = p^w\mu_2(p)^{-1}$ aussi.

- Si $\pi_p = \mathrm{I}(\mu_1, \mu_2)$ est principale avec μ_1 et μ_2 ramifiés on a, par exemple $\mu_1 = \chi \otimes |\,|_p^{s_1}$ où est un caractère de $\mathbb{Z}_p^*$. En utilisant la décomposition

  $$\mathbb{A}^* = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}_+^* \times \textstyle\prod_p \mathbb{Z}_p^*,$$

  on plonge χ dans un *grössencharater* $\overline{\chi}$ de $\mathbb{Q}$, ce qui permet d'appliquer le raisonnement précédent à la représentation $\chi^{-1} \otimes \pi_p = I(|\,|_p^{s_1}, \chi^{-1} \otimes \mu_2)$ qui est un facteur local de la représentation $\overline{\chi}^{-1} \otimes \pi$. Ainsi, en se ramenant à l'un des cas précédents, on démontre que $\mu_1(p) = p^{s_1}$ est inversible dans l'anneau des entiers d'une extension finie de K. De la même façon, on montre que c'est aussi le cas pour $\mu_2(p)$, ce qui achève la démonstration du lemme 3.1.

Considérons maintenant l'extension K_1 fournie par le lemme 3.1. On peut encore supposer que K_1 contient les racines carrées de p. Soit B le groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. La représentation $\mathrm{I}(\mu_1, \mu_2)$ se réalise sur le K_1 espace vectoriel V_1 constitué des fonctions localement constantes f de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans K_1 vérifiant

$$\forall g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in B$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g\right) = \mu_1(a)\mu_2(d)\left|\frac{a}{d}\right|_p^{1/2} f(g),$$

sur lesquelles $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ agit par translation à droite. L'ensemble L_1 des fonctions de V_1 qui sont à valeurs dans $\mathcal{O}_{K_1}$ est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et, puisque les fonctions de V_1 ne prennent qu'un nombre fini de valeurs sur un système de représentants de $B\backslash G$, L_1 engendre V_1. Si Γ est un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, L_1^Γ est un $\mathcal{O}_{K_1}$ module libre de rang $|B\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\Gamma|$.

https://doi.org/10.1023/A:1000602707982 Published online by Cambridge University Press

Revenons à notre représentation π_p qui se réalise sur le K-espace vectoriel V. Par extension des scalaires, on obtient une composante irréductible $V \otimes_K K_1$ de V_1, ce qui permet de plonger V dans V_1. L'image réciproque de L_1 par cette injection est un $\mathcal{O}_K$ réseau admissible de V. Remarquons que d'une manière générale, pour construire un $\mathcal{O}_K$ réseau admissible de V, il suffit de construire un $\mathcal{O}_{K_1}$ réseau admissible de $V \otimes_K K_1$ pour une extension finie K_1 de K.

Il nous reste à étudier le cas où π_p est cuspidale. Nous présentons deux démonstrations: la première, fondée sur les résultats de [Ku2] est plus simple, mais fortement liée à la structure du groupe GL_2, tandis que la seconde, fondée sur les résultats de [V3], est valable pour tout groupe réductif.

La première solution consiste à écrire comme dans la démonstration du lemme (RC), que π_p est l'induite compacte d'une représentation ρ définie sur une extension finie K_1/K, de l'un des groupes $Z_i H_i$, avec $i = 1$ ou 2, qui est triviale sur H_i^n pour un certain $n \geqslant 1$. On peut encore supposer que K_1 contient les racines carrées de p. Le caractère central de ρ, comme celui de π_p, vaut p^w en p, si bien que $\rho \otimes |\ |_p^{w/2}$ est une représentation de dimension finie du groupe fini $Z_1 \backslash Z_i H_i / H_i^n$. Elle admet donc un $\mathcal{O}_{K_1}$ réseau qui est un $\mathcal{O}_{K_1}$ module libre et qui reste un $\mathcal{O}_{K_1}$ réseau de ρ. Par induction, on obtient un $\mathcal{O}_{K_1}$ réseau admissible de π_p qui fournit comme précédemment un $\mathcal{O}_K$ réseau admissible de π_p.

La seconde solution consiste à considérer un sous-groupe discret co-compact Γ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ tel que la représentation sur $\mathbb{C}$ obtenue à partir de π_p par extension des scalaires est une composante de l'induite compacte $\rho_{\mathbb{C}} = \mathrm{ind}_{\Gamma}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1_{\mathbb{C}}$, où $1_{\mathbb{C}}$ désigne la représentation identité dans $\mathbb{C}$. Un tel groupe existe d'après [V3] (4.3) et en outre, d'après [V3] (4.4) ce résultat reste valable sur K, c'est-à-dire que π_p est une composante de l'induite compacte $\rho_K = \mathrm{ind}_{\Gamma}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1_K$.

L'espace $\mathcal{V}$ de cette représentation est l'ensemble des fonctions f de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans K qui sont invariantes à gauche par K et à droite par un sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui dépend de f. L'ensemble des fonctions de $\mathcal{V}$ qui sont à valeurs dans $\mathcal{O}_K$ est un $\mathcal{O}_K$ réseau admissible de $\mathcal{V}$ dont l'intersection avec l'espace de π_p fournit un $\mathcal{O}_K$ réseau admissible de π_p.

Ceci conclut la proposition 3. On peut en déduire le résultat principal de ce paragraphe:

PROPOSITION 4. *Si v est un vecteur non-nul de V*

$$L(v) = \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_K}\{\pi_p(g)v \mid g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)\},$$

est un $\mathcal{O}_K$ réseau admissible de type fini de π_p.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $L(v)$ est bien un $\mathcal{O}_K[G]$ module de type fini. Notons alors L le $\mathcal{O}_K$ réseau fourni par la proposition 3. Le $\mathcal{O}_K$ module $L(v)$ est stable par G. Il engendre un sous-espace de V qui est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et qui, puisque V est irréductible sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, est V tout entier. Il existe un élément non nul a dans $\mathcal{O}_K$ tel que av soit dans L si bien que

https://doi.org/10.1023/A:1000602707982 Published online by Cambridge University Press

$L(v)$ est contenu dans $a^{-1}L$. Si Γ est un sous groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $L(v)^\Gamma$ est contenu dans $a^{-1}L^\Gamma$ qui est un $\mathcal{O}_K$ module libre de type fini. Donc $L(v)^\Gamma$ aussi. Donc $L(v)$ est un $\mathcal{O}_K$ réseau admissible de π_p.

3.4. POUR EN FINIR AVEC π_2 ET π_2'

PROPOSITION 5. *Il existe un caractère χ_l de $\mathbb{Q}_2$ à valeurs dans $1+l\mathbb{Z}_l$ tel que*

$$\pi_2 \simeq \pi_2' \otimes \chi_l.$$

Démonstration. Reprenons notre problème tel que nous l'avions abandonné à la fin du Paragraphe 2. La représentation π est associée à la forme modulaire f. Par hypothèse, le caractère central de π_2 vérifie $\omega_2(2) = \frac{1}{2}$. Sa restriction à $\mathbb{Z}_2^*$ est donnée par ε. De même, la représentation π' est associée à la forme modulaire f', le caractère central de π_2' vérifie $\omega_2'(2) = 2^{-l}$ et il est égal à ω_2 sur $\mathbb{Z}_2^*$. On a donc $\omega_2 = \omega_2' \otimes |\,|_2^{1-l}$, c'est-à-dire que les représentations π_2 et $\pi_2' \otimes |\,|_2^{1-l/2}$ ont le même caractère central. Soit β le caractère non ramifié d'ordre 2 de $\mathbb{Q}_2^*$, donné par $\beta(2) = -1$. Si $2^{l-1/2} \equiv 1 \bmod l$ on posera $\chi_l = |\,|_2^{1-l/2}$. Si au contraire $2^{l-1/2} \equiv -1 \bmod l$ on posera $\chi_l = |\,|_2^{1-l/2} \otimes \beta$. Ce caractère χ_l est à valeurs dans $1+l\mathbb{Z}_l$ et vérifie $\chi_l \bmod l = 1$.
On peut appliquer la proposition 4 à π_2. Le réseau L introduit en 2.2 est admissible. D'après le corollaire 12 de [V2], puisque π_2 est cuspidale, $L/\mathfrak{m}_K L$ est irréductible, et la surjection (2.2) de $L/\mathfrak{m}_K L$ sur W est en fait un isomorphisme

$$L/\mathfrak{m}_K L \xrightarrow{\sim} W, \tag{3.1}$$

si bien que W aussi est irréductible. De même, L' est un réseau admissible de π_2'. C'est donc aussi un réseau admissible de $\pi_2' \otimes \chi_l$ qui a la même réduction modulo $\mathfrak{m}_K$ que π_2'.

Intéressons-nous maintenant à f^1. Puisque V^1 est isomorphe à une somme de copies de V', le vecteur $f^1 \in V^1$ correspond dans cette somme à $\bigoplus_{i=1}^m v_i$ avec un v_i dans chaque copie de V'. D'après la proposition 4, pour tout i

$$L_i' = \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_K}\{\pi_2(g)v_i \mid g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_2)\}$$

est un réseau admissible de V' et, puisque L' en est un autre, d'après le lemme (BN)

$$L_i'/\mathfrak{m}_K L_i' \simeq L'/\mathfrak{m}_K L' \tag{3.2}$$

à semi-simplification près. De plus $\bigoplus_{i=1}^m L_i'$ est un $\mathcal{O}_K$ réseau admissible de V'. L'isomorphisme de V^1 avec $\bigoplus_{i=1}^m V'$ induit une injection $L^1 \to \bigoplus_{i=1}^m L_i'$. Par construction, le réseau L^1 est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et engendre V^1. Puisqu'il est plongé dans un $\mathcal{O}_K$ réseau admissible, il est lui-même admissible. Alors, d'après le lemme (BN), les semi-simplifiées de $L^1/\mathfrak{m}_K L^1$ et $\bigoplus_{i=1}^m L_i'/\mathfrak{m}_K L_i'$ sont isomorphes.

https://doi.org/10.1023/A:1000602707982 Published online by Cambridge University Press

Le point clé de ce raisonnement est la proposition 2: la multiplication par l'invariant de Hasse établit un isomorphisme de W sur W^1. L'espace W^1 est donc irréductible, et c'est un quotient de $L^1/\mathfrak{m}_K L^1$ à cause de la surjection (2.3). C'est donc un sous-quotient de l'un des $L_i'/\mathfrak{m}_K L_i'$, c'est-à -dire, par (3.2), un sous-quotient de $L'/\mathfrak{m}_K L'$. On déduit alors de l'isomorphisme (3.1) $L/\mathfrak{m}_K L \xrightarrow{\sim} W$ et de la proposition 2 $W \xrightarrow{\sim} W^1$, que $L/\mathfrak{m}_K L$ est un sous-quotient de $L'/\mathfrak{m}_K L'$. D'après le corollaire 12 de [V2], le cas où $L'/\mathfrak{m}_K L'$ n'est pas irréductible survient uniquement si π_2' est une représentation principale. La représentation $L'/\mathfrak{m}_K L'$ est alors induite par deux caractères. Mais $L/\mathfrak{m}_K L$, qui est cuspidale comme π_2, ne peut pas être sous-quotient d'une telle induite. La représentation $L'/\mathfrak{m}_K L'$ est donc irréductible et isomorphe à $L/\mathfrak{m}_K L$. Comme π_2 et $\pi_2' \otimes \chi_l$ ont même caractère central, on a, d'après le lemme (RC) $\pi_2 \simeq \pi_2' \otimes \chi_l$, ce qui démontre la proposition 5.

4. Conclusion

Revenons à un point de vue global. D'une part, au paragraphe 1, nous avons construit une représentation galoisienne σ continue et à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, associée à π et f par les relations suivantes: pour presque tout p

$$\sigma_p = \sigma_H(\check{\pi}_p) \tag{4.1}$$

et

$$\mathrm{tr}\, F_p = a_p \quad \text{et} \quad \det F_p = \varepsilon(p). \tag{4.2}$$

D'autre part, nous disposons de la représentation galoisienne σ' associée à π' et f' par le théorème 2, telle que que pour presque tout p

$$\sigma_p' = \sigma_H(\pi_p'), \tag{4.3}$$

si bien que

$$\check{\sigma}_p' = \sigma_H(\check{\pi}_p') \otimes |\,|_p. \tag{4.4}$$

La représentation σ est *a priori* à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ mais se réalise en fait sur K. L'image de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ est finie dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ donc aussi dans $\mathrm{GL}_2(K)$ où elle est compacte. La représentation σ' se réalise également sur K et comme elle est continue, $\sigma'(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}))$ aussi est compacte dans $\mathrm{GL}_2(K)$. Les représentations σ et σ' sont donc équivalentes à des représentations à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ et on peut les réduire modulo $\mathfrak{m}_K$, *a fortiori* modulo $\mathfrak{m}_l$. Nous allons démontrer la proposition 6 dont l'énoncé précis est

PROPOSITION 6. *Les représentations σ_2 et σ_2' sont liées par la relation*

$$\mathrm{tr}(\sigma_2') \equiv \mathrm{tr}(\check{\sigma}_2 \otimes |\,|_2^{-1}) \bmod \mathfrak{m}_l$$

et

$$\det(\sigma_2') \equiv \det(\check{\sigma}_2 \otimes |\,|_2^{-1}) \bmod \mathfrak{m}_l.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000602707982 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Soit p une bonne place pour π et π'. Nous allons comparer $\sigma_H(\check{\pi}_p)$ avec $\sigma_H(\check{\pi}'_p)$, c'est-à-dire, d'après (4.1) et (4.4), σ_p avec $\check{\sigma}'_p \otimes |\,|_p^{-1}$. La relation (4.2) permet de calculer

$$\det(1 - XF_p) = 1 - a_p X + \varepsilon(p) X^2.$$

Rappelons que π'_p est la série principale non ramifiée $\mathrm{I}\big(|\,|^{s_1}, |\,|^{s_2}\big)$, où s_1 et s_2 sont donnés par

$$p^{s_1} + p^{s_2} = p^{1/2}\, a'_p \quad \text{et} \quad p^{s_1} p^{s_2} = p^l\, \varepsilon(p).$$

Notons F'_p l'image de la substitution de Frobenius en p par σ'. La relation (4.3) permet alors de calculer que F'_p est équivalent à

$$\begin{pmatrix} p^{-s_1-1/2} & 0 \\ 0 & p^{-s_2-1/2} \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\det(1 - Xp^{-1}F_p'^{-1}) = 1 - a'_p X + p^{l-1}\varepsilon(p) X^2.$$

Comme $a'_p \equiv a_p \bmod \mathfrak{m}_l$ et $p^{l-1} \equiv 1 \bmod l$ les réductions modulo $\mathfrak{m}_l$ de $\det(1 - XF_p)$ et $\det(1 - Xp^{-1}F_p'^{-1})$ sont égales pour presque tous les nombres premiers p. D'après le lemme 3.2 de [D-S] (qui se déduit du théorème de Cebotarev) les représentations obtenues par réduction modulo $\mathfrak{m}_l$ à partir de σ et $\check{\sigma}' \otimes |\,|^{-1}$ sont isomorphes à semi-simplification près. En particulier

$$\mathrm{tr}(\sigma'_2) \equiv \mathrm{tr}(\check{\sigma}_2 \otimes |\,|_2^{-1}) \bmod \mathfrak{m}_l$$

et

$$\det(\sigma'_2) \equiv \det\,(\check{\sigma}_2 \otimes |\,|_2^{-1}) \bmod \mathfrak{m}_l,$$

ce qui démontre la proposition 6.

D'après la proposition 5 et les propriétés de $\mathcal{F}_l$, on peut écrire

$$\mathcal{F}_l(\pi_2) = \mathcal{F}_l(\pi'_2) \otimes \chi_l^{-1} = \sigma'_2 \otimes \chi_l^{-1},$$

avec la proposition 6, sachant que $\check{\sigma}_2 \otimes |\,|_2^{-1} = \sigma_H(\pi_2)$ on obtient

$$\mathrm{tr}(\mathcal{F}_l(\pi_2)) \equiv \mathrm{tr}(\sigma_H(\pi_2)) \bmod \mathfrak{m}_l, \tag{4.5}$$

$$\det(\mathcal{F}_l(\pi_2)) \equiv \det(\sigma_H(\pi_2)) \bmod \mathfrak{m}_l. \tag{4.6}$$

Les coefficients $\mathrm{tr}(\mathcal{F}_l(\pi_2))$ et $\det(\mathcal{F}_l(\pi_2))$ ne dépendent pas de l. Comme les relations (4.5) et (4.6) sont vraies pour tout nombre premier l supérieur à 5 et ne

https://doi.org/10.1023/A:1000602707982 Published online by Cambridge University Press

divisant pas N, c'est-à-dire pour une infinité de l, ce sont en fait des égalités: pour tout l, les représentations $\mathcal{F}_l(\pi_2)$ et $\sigma_H(\pi_2)$ ont le même polynôme caractéristique. Comme $\sigma_H(\pi_2)$ est irréductible, $\mathcal{F}_l(\pi_2)$ aussi et elles sont isomorphes $\mathcal{F}_l(\pi_2) = \sigma_H(\pi_2)$. Voilà pourquoi $\mathcal{F}(\pi_2)$ est associée à π_2 par la correspondance de Hecke.

5. Deux remarques

5.1. PROBLÈMES DE NORMALISATION

On est amené à comparer σ_p à $\check{\sigma}'_p \otimes |\ |_p^{-1}$ plutôt qu'à σ'_p parce que les correspondances des théorèmes 1 et 2 ne sont pas exactement les mêmes. Soit $k \geqslant 2$. Si π est une représentation automorphe admettant D_k comme composante à l'infini, on peut lui associer une forme modulaire $f \in S_k(N, \varepsilon)$. En une bonne place p, π_p est la série principale non ramifiée $\pi_p = \mathrm{I}(|\ |^{s_1}, |\ |^{s_2})$ où s_1 et s_2 sont deux nombres complexes vérifiant

$$p^{s_1} + p^{s_2} = p^{1/2}\, a_p \quad \text{et} \quad p^{s_1}p^{s_2} = p^k\, \varepsilon(p).$$

Via le théorème 1 on peut associer à f une représentation galoisienne l-adique ρ. Si Φ_p est un élément de Frobenius en p

$$\mathrm{tr}\,(\rho(\Phi_p)) = a_p \quad \text{et} \quad \det(\rho(\Phi_p)) = p^{k-1}\varepsilon(p),$$

c'est à dire que $\rho(\Phi_p)$ est équivalent à

$$\begin{pmatrix} p^{s_1-(1/2)} & 0 \\ 0 & p^{s_2-(1/2)} \end{pmatrix}.$$

Via le théorème 2, on peut associer directement à π une représentation galoisiene l-adique ρ' telle que, en une bonne place p, $\rho'_p = \sigma_H(\pi_p)$, si bien que $\rho'(\Phi_p)$ est équivalent à

$$\begin{pmatrix} p^{-s_1-(1/2)} & 0 \\ 0 & p^{-s_2-(1/2)} \end{pmatrix}.$$

C'est pourquoi $\rho_p = \check{\rho}'_p \otimes |\ |_p^{-1}$.

5.2. GÉNÉRALISATION

La démonstration du théorème 2 qu'on vient de lire reste valable pour une représentation cuspidale ordinaire π_p de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Il suffit de généraliser le lemme 1.1 à une représentation dihédrale, pour 'plonger' π_p dans une représentation automorphe de poids 1.

Plus précisément, considérons une représentation cuspidale ordinaire π_p° de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dont le caractère central ω_p vérifie $\omega_p(p) = 1/p$. La représentation

https://doi.org/10.1023/A:1000602707982 Published online by Cambridge University Press

galoisienne associée $\sigma_p = \sigma_L(\pi_p) \otimes |\,|_p^{-(1/2)}$ est dihédrale, c'est à dire que la projection dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ de l'image de σ_p est isomorphe à un groupe dihédral D_n pour un certain entier n supérieur à 2. Le lemme 1.1 devient alors.

LEMME 5. *Il existe une représentation continue* σ: $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, *irréductible, dihédrale, dont la restriction à* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ *est isomorphe à* σ_p.

Démonstration. Puisque σ_p est dihédrale, il existe une extension quadratique $E/\mathbb{Q}_p$ et d'un caractère λ_p de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p/E)$ tel que σ_p est induite par λ_p. On peut alors trouver une extension quadratique $L/\mathbb{Q}$ qui admet une seule place v au dessus de p telle que $L_v = E$, et prolonger λ_p en un caractère λ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L)$. La représentation σ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ induite par λ est irréductible, dihédrale et sa restriction à $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}_p)$ est isomorphe à σ_p.

Les méthodes décrites au paragraphe 12 de [J-L] permettent alors d'associer à σ une représentation automorphe π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ dont la composante à l'infini est D_1 et qui vérifie, en toute place finie p'

$$L(\pi_{p'} \otimes |\,|_{p'}^{-(1/2)}, s) = L(\sigma_{p'}, s).$$

Des calculs de la démonstration du lemme 1.2, on déduit que la composante en p de π est π_p°.

Remerciements

Cet article constitue une partie importante de ma thèse. Je l'ai écrit sous la direction avisée de Henri Carayol, à qui je dois un très grand merci car ce sont ses conseils et son optimisme qui m'ont permis d'en venir à bout. Je tiens également à remercier Laurent Clozel pour toutes ses remarques, utiles et pertinentes.

Bibliographie

[C1] Carayol, H.: Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura. *Compositio Mathematica* 59 (1986), 151–230.

[C2] Carayol, H.: Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (4)* 19 (1986), 409–408.

[C3] Carayol, H.: Formes modulaires et représentations l-adiques. *Société Mathématique de France, Astérisque* 147–148 (1987), 33–47.

[C4] Carayol, H.: Représentations cuspidales du groupe linéaire. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (4)* 17 (1984), 194–225.

[Cas1] Casselman, W.: *On Representations of* GL_2 *and the Arithmetic of Modumar Curves* dans *Modular Functions of One Variable II*, Lecture Notes in Math 349, Springer, New York, 1973.

[Cas2] Casselman, W.: On some results of Atkin and Lehner. *Mathematisches Annalen* 201 (1973), 301–314.

[D1] Deligne, P.: Formes modulaires et représentations l-adiques. *Séminaire Bourbaki*, février 1969, Lecture Notes in Math 179, Springer, New York, 1971.

[D2] Deligne, P.: *Lettre à Piateskii Shapiro*. Inédit, 1973.
[D3] Deligne, P.: Formes modulaires et représentations de $\mathrm{GL}(2)$, dans *Modular Functions of One Variable II*, Lecture Notes in Math 349, Springer, New York, 1973.
[D-Kz-V] Deligne, P., Kazhdan, D. and Vignéras, M. F.: Représentations des Algèbres Centrales Simples p-adiques, dans *Représentation des groupes réductifs sur un corps local*. Hermann, 1984.
[D-R] Deligne, P. et Rapoport, M.: Les schémas de modules de courbes elliptiques, dans *Modular Functions of One Variable II*, Lecture Notes in Math 349, Springer, New York, 1973.
[D-S] Deligne, P. et Serre, J.-P.: Formes modulaires de poids 1. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, (4)*. 7 (1974), 507–530.
[Ge] Gelbart, S.: Automorphic Forms on Adele Groups. *Annals of Mathematics studies*, Princeton university Press, 1975.
[Gr] Grothendieck, A.: Modèles de néron et monodromie dans groupes de monodromie en géométrie algébrique, *SGA* 7 1 (1972), 313–523.
[H] Henniart, G.: La conjecture de Langlands locale pour GL(3). *Mémoire de la Société Mathématique de France*. *Nouvelle série*. 11/12 (1984), 497–544.
[J-L] Jacquet, H. et Langlands, R.P.: *Automorphic Forms on* $\mathrm{GL}(2)$. Lecture Notes in Math 114, Springer, New York, 1970.
[K] Katz, N. M.: p-Adic properties of modular schemes and modular forms, dans *Modular Functions of One Variable III*, Lecture Notes in Math 350, Springer, New York, 1973.
[K-M] Katz, N. M. et Mazur, B.: Arithmetic moduli of elliptic curves. *Annals of Mathematics Studies*, 1985.
[Ku1] Kutzko, P.: The local Langlands conjecture for GL(2). *Annals of Mathematics* 112 (1980), 381.
[Ku2] Kutzko, P.: On the supercuspidal representations of GL(2) I. *American Journal of Mathematics* 100 (1978), 43–60.
[L1] Langlands, R. P.: Modular Forms and l-Adic representations, dans *Modular Functions of One Variable II*, Lecture Notes in Math 349, Springer, New York, 1973.
[L2] Langlands, R. P.: *Base Change for* GL(2). *Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press, 1980.
[Lau-R-St] Laumon, G., Rapoport, M. and Stuhler, U.: $\mathcal{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondance. *Inventiones Mathematicae* 113 $n^{\circ}2$ (1993), 217–338.
[S1] Serre, J.-P.: *Modular Forms of Weight One and Galois Representations* dans *Algebraic Number Fields*. Academic Press, 1977.
[S2] Serre, J.-P.: *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, 1971.
[S-Ta] Serre, J.-P. et Tate, J.: Good reduction of abelian varieties. *Annals of Mathematics* 88 (1968), 492–517.
[Sh] Shimura, G.: *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*. Mathematical Society of Japan, 1971.
[Ta] Tate, J.: *Number Theoretic Background*, Proceeding of Symposia in Pure Mathematics 33(2) (1979), 3–26.
[T1] Tunnell, J. B.: On the local Langlands conjecture for GL(2). *Inventiones Mathematicae* 46 (1978), 179–200.
[T2] Tunnell, J. B.: Artin's conjecture for representations of octahedral type. *Bulletin of A.M.S.* 5(2) (1981), 173–175.
[V1] Vignéras, M. F.: *Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$*. Birkhäuser, 1996.
[V2] Vignéras, M. F.: Représentations modulaires de $\mathrm{GL}(2, F)$ en caractéristique l, F corps p-adique, $p \neq l$. *Compositio Matematica* 72 (1989), 33–66.

[V3] Vignéras, M. F.: Formal degree and existence of stable arithmetic lattices of cuspidal representations of p-adic reductive groups. *Inventiones Mathematicae* 98 (1989), 549–563.

[V4] Vignéras, M. F.: Erratum à l'article: Représentations modulaires de $\mathrm{GL}(2, F)$ en caractéristique l, F corps p-adique, $p \neq l$. *Compositio Mathematica* 101(1) (1995), 109–113.

[W] Weil, A.: Exercices Dyadiques. *Inventiones Mathematicae* 27 (1974), 1–22.