Can. J. Math. Vol. **49** (4), 1997 pp. 820–839

SUR L'INTÉGRABILITÉ DES SOUS-ALGÈBRES DE LIE EN DIMENSION INFINIE

THIERRY ROBART

RÉSUMÉ. Une des questions fondamentales de la théorie des groupes de Lie de dimension infinie concerne l'intégrabilité des sous-algèbres de Lie topologiques $\mathcal{H}$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ d'un groupe de Lie G de dimension infinie au sens de Milnor. Par contraste avec ce qui se passe en théorie classique il peut exister des sous-algèbres de Lie fermées $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ non-intégrables en un sous-groupe de Lie. C'est le cas des algèbres de Lie de champs de vecteurs C^∞ d'une variété compacte qui ne définissent pas un feuilletage de Stefan. Heureusement cette "imperfection" de la théorie n'est pas partagée par tous les groupes de Lie intéressants. C'est ce que montre cet article en exhibant une très large classe de groupes de Lie de dimension infinie exempte de cette imperfection. Cela permet de traiter complètement le second problème fondamental de Sophus Lie pour les groupes de jauge de la physique-mathématique et les groupes formels de difféomorphismes lisses de $\mathbb{R}^n$ qui fixent l'origine.

1. **Introduction.** Un groupe de Lie de dimension infinie est selon Milnor [Mil 83] un groupe G muni d'une structure de variété infiniment différentiable compatible avec les opérations de groupe, c'est-à-dire telle que le produit de $G \times G$ à valeurs dans G qui à (g, g') associe $g^{-1} \cdot g'$ est de classe C^∞. La notion de variété différentiable en dimension infinie est identique à la notion classique en dimension finie : on utilise le calcul différentiel de type Gâteaux [Mil 83]. En particulier une application analytique est une application continue qui se représente localement par une série de polynômes homogènes continus (son développement de Taylor), la convergence étant topologique [BS b71]. Soit G un tel groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. L'existence pour tout v de $\mathcal{G}$ d'un sous-groupe à un paramètre $\gamma_v \colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ admettant v pour "vecteur vitesse initiale" $v = \frac{d\gamma_v}{dt}_{|t=0}$ n'est pas garantie. Lorsque c'est le cas, l'application $\exp \colon \mathcal{G} \longrightarrow G$ qui à v associe $\gamma_v(1)$ désigne l'exponentielle de groupe. Comme exemples types on peut citer les groupes de Lie d'opérateurs linéaires bornés d'un espace de Banach [Har 72], les groupes de transformations de jauge de la physique-mathématique associés à des fibrés principaux P de dimension finie

$$\begin{array}{ccc} F_x & \longrightarrow & P \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ & & M \end{array}$$

et de base une variété M compacte [Mil 83, Rob 94], ainsi que le groupe $\mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes infiniment différentiables d'une variété compacte M avec ou sans bords [Les 67, Omo 74, Ebi 70].

Cette recherche a été supportée par une bourse CRSNG.
Reçu par les éditeurs le 3 juin, 1996.
Classification (AMS) par sujet : Première: 22E65, 58h05; Seconde: 17B65.

https://doi.org/10.4153/CJM-1997-042-7 Published online by Cambridge University Press

Une théorie efficace de groupes de Lie de dimension infinie se doit de résoudre de façon satisfaisante la connexion sous-jacente et si fondamentale entre d'une part les sous-groupes de Lie connexes H d'un groupe de Lie G donné et d'autre part les sous-algèbres de Lie topologiques $\mathcal{H}$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G. C'est *le second problème fondamental de Lie*. On sait qu'à tout sous-groupe de Lie d'un groupe de Lie de dimension infinie correspond une sous-algèbre de Lie. Qu'en est-il de la réciproque?

En 1982 tandis que Milnor conjecturait [Mil 82] que toute sous-algèbre de Lie fermée est intégrable en un sous-groupe de Lie Omori rappelait qu'il avait exhibé en 1973 [Omo 73] un contre-exemple à cette conjecture.

Soit en effet $M = T^2$, le tore de dimension deux, de coordonnées x et y modulo 2π. Considérons pour tout angle θ modulo 2π la sous-algèbre de Lie fermée $\mathcal{H}_\theta$ de $\chi^\infty(T^2) \simeq L\big(\mathrm{Diff}^\infty(T^2)\big)$ des champs de vecteurs lisses

$$v(x,y) = f(x,y)\partial_x + g(x,y)\partial_y$$

tels que $g(x,y) = 0$ pour $x \in [\theta, \theta+\pi]$. Le champ de vecteurs constant v_0 défini par

$$v_0(x,y) = \partial_x$$

appartient en particulier à $\mathcal{H}_0$, et le difféomorphisme $\exp(tv_0)$ n'est autre que la rotation d'angle t

$$\exp(tv_0)(x,y) = (x+t,y).$$

Par suite $\mathrm{Ad}\big(\exp(\theta v_0)\big)\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_\theta$. La sous-algèbre fermée $\mathcal{H}_0$ n'étant pas stable par l'action adjointe $\mathrm{Ad}(g)$ pour $g \in \exp(\mathcal{H}_0)$ ne peut être l'algèbre de Lie d'un sous-groupe de Lie de $\mathrm{Diff}(T^2)$. On peut également construire de tels contre-exemples sur $M = \mathbb{R}$ ou S^1.

En réponse au problème soulevé par Milnor, J. Leslie fournit en 1987 des conditions suffisantes d'intégrabilité d'une sous-algèbre de Lie fermée $\mathcal{H}$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ d'un groupe de Lie G de dimension infinie de type "perfect" [Les 87, Les 92]. Une algèbre de Lie "admissible" admet un complémentaire topologique et satisfait à d'autres conditions de natures plus techniques. Tous les groupes de Lie d'importance sont des groupes de Lie de type "perfect". L'approche de J. Leslie de nature essentiellement bornologique consiste à intégrer via un théorème de type Frobenius le sous-fibré vectoriel invariant à gauche

$$L^{\mathcal{H}} = \bigcup_{g\in G} g\cdot\mathcal{H}$$

du fibré tangent TG. C'est ainsi que Bourbaki [Bou 72, th. 3 p. 170] avait élargi au cadre banachique le traitement classique [Chev 46]. Malheureusement le théorème proposé demeure fort technique et d'utilisation difficile.

Plaçons nous maintenant dans le cadre des groupes de Lie *réguliers* au sens de Milnor-Omori [OMYK 81, Mil 83]. C'est-à-dire que l'équation différentielle ordinaire $g^{-1}\cdot\dot{g} = u$, où $u\colon I = [0,1] \longmapsto \mathcal{G}$ est un chemin lisse à valeurs dans l'algèbre de Lie, admet toujours une solution lisse $g\colon I = [0,1] \longmapsto G$ pointée en 0, *i.e.* telle que $g(0) = e$

(e élément neutre du groupe G) pouvant s'obtenir par intégrale multiplicative (voir Section 2.3)

$$g(t) = \prod_{0\le\tau\le t} \exp\big(v(\tau)\, d\tau\big).$$

La question fondamentale qui motive cette étude concerne l'existence d'un critère de nature purement géométrique pour l'intégrabilité d'une sous-algèbre de Lie fermée. On veut un théorème géométrique d'utilisation facile. Une condition nécessaire et qui n'est pas toujours vraie compte tenu du contre-exemple d'Omori est la condition de *stabilité* $\mathrm{Ad}(\exp \mathcal{H})\mathcal{H} = \mathcal{H}$. Dans le cadre d'un groupe de difféomorphismes d'une variété M c'est précisément la condition de H. Sussmann pour que le feuilletage engendré par $\mathcal{H}$ soit un feuilletage de Stefan [Sus 73, Stf 74, Daz 85]. Ce point de vue sert de fondement à la théorie proposée par P. Dazord [Daz 93] et pour laquelle un groupe de Lie de dimension infinie s'identifie au groupe des bissections d'un groupoïde de Lie. Il est raisonnable de conjecturer que la condition de stabilité est également suffisante. Ce problème inverse demeure dans toute sa généralité très difficile à traiter. Un premier résultat dans cette direction est donné par le Théorème 9. Il montre que si $\mathcal{H}$ est une sous-algèbre de Lie *fermée* et *stable* de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie régulier alors l'algèbre de Lie $C^\infty(I, \mathcal{H})$ des chemins lisses de l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ est intégrable en un groupe de Lie. Une autre question concerne la caractérisation des algèbres de Lie *naturellement stables* c'est-à-dire des algèbres de Lie qui à l'instar des algèbres de Lie banachiques vérifient systématiquement la condition de stabilité $\mathrm{Ad}(\exp \mathcal{H})\mathcal{H} = \mathcal{H}$. En d'autres termes il s'agit de caractériser les classes d'algèbres de Lie qui ne "souffrent" pas de cette imperfection structurelle d'instabilité. On s'attend alors avec Milnor à l'intégrabilité de toute sous-algèbre de Lie fermée de ce type. Réalisée comme algèbre de Lie de champs de vecteurs, elle engendrera automatiquement un feuilletage de Stefan.

Ces deux problèmes fondamentaux sont ici abordés simultanément. C'est le point de vue *structurel* qui sert de guide. Il en résulte une démarche originale et pourtant fort naturelle pour traiter du second problème fondamental de Lie.

Dans un premier temps l'importance d'une très large classe de groupes de Lie est soulignée. Cette classe englobe les groupes de Lie banachiques, les nouvelles classes de groupes de Lie construites dans [NRW 94], Les groupes de Lie nilpotents, les groupes de jauge (ou de courants), et les groupes de Lie formels de type Campbell-Baker-Hausdorff construits à partir d'un ensemble fini d'éléments [Bou 72]. Les algèbres $\mathcal{L}$ de la classe associée d'algèbres de Lie sont caractérisées par l'analyticité locale au sens de Gâteaux de la série de Campbell-Baker-Hausdorff. De fait on appelle groupe (resp. algèbre) de Lie de type CBH un groupe (resp. une algèbre) de cette classe. La classe des groupes (resp. algèbres) de Lie de type CBH est notée $\mathcal{CBH}$ (resp. $\mathcal{L}(\mathcal{CBH})$). Les algèbres de Lie de type CBH sont naturellement stables. C'est une conséquence du Théorème 3 qui résoud *complètement* le second problème de Lie dans cette classe. Il se trouve (Théorème 2) qu'une telle algèbre de Lie est plus simplement caractérisée par l'analyticité au voisinage de l'origine de la série qui à $(x, y) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ associe $\sum_{n=0}^{\infty} (adx)^n y$. Ce nouveau point de vue offre des perspectives très intéressantes pour l'analyste. L'originalité et la transparence de la démonstration proposée pour le second théorème de Lie (Théorème 3) permet en outre d'élucider une subtilité technique soulevée par J. Leslie dans le cadre même des algèbres de Lie banachiques (Section 3.3).

Cette première classe d'algèbres de Lie naturellement stables est ensuite prolongée à la Section 3.4.1 par la classe des algèbres de Lie de *première espèce*. Par définition un groupe de Lie de première espèce est modelé au voisinage de l'identité par l'exponentielle. La classe des groupes de première espèce est notée EXP et la classe associée d'algèbres de Lie est notée $L(EXP)$. C'est l'analyticité de la structure de variété sous-jacente compatible avec les opérations de groupe qui distingue un groupe de Lie CBH d'un groupe de Lie de première espèce. L'inclusion $CBH \subset EXP$ est stricte. L'exemple le plus simple de groupe de Lie de première espèce qui n'est pas CBH est celui du groupe des difféomorphismes C^∞ formels de la droite réelle qui fixent un point. Le second problème de Lie est *presque* complètement résolu dans cette classe (Théorème 5 et Corollaire 2). Il soulève le problème de la régularité au sens d'Omori et/ou Milnor d'un groupe de Lie de première espèce.

La classe des algèbres de Lie naturellement stables est ensuite élargie en considérant les algèbres de Lie topologiques qui s'obtiennent comme extension d'une algèbre de Lie de dimension finie par une algèbre de Lie CBH (Section 3.4.2). Ce point de vue est suffisant pour traiter de nombreux groupes de Lie importants qui ne sont pas de première espèce. C'est tout particulièrement le cas des groupes formels de difféomorphismes C^∞ qui fixent un point dans $\mathbb{R}^n$ pour tout entier $n > 1$. Pour illustrer simplement l'intérêt de ce nouveau point de vue on remarque que le groupe des symétries des équations d'Euler pour un fluide idéal incompréssible et sans viscuosité (Section 3.5.2) est une extension d'un groupe de dimension finie par un groupe de Lie de type CBH.

Finalement le second problème de Lie est abordé (Section 4) dans la classe des groupes de Lie Milnor-Omori réguliers via le concept de pré-intégrabilité introduit par J. Leslie [Les 93].

Ce travail reprend certains résultats obtenus dans [Rob 94]. J'exprime ici ma profonde gratitude au professeur Jean Marion qui a dirigé ma thèse, au professeur Joshua Leslie pour les fructueuses discussions que nous avons eues et au professeur Niky Kamran pour la qualité du soutien post-doctoral qu'il m'accorde.

2. **Préliminaires.**

Pour une présentation générale du cadre classique des groupes de Lie de dimension infinie voir [Mil 83].

2.1. *Différentiation de type Gâteaux.*

Une variété de dimension infinie est un espace topologique Hausdorff séquentiellement complet modelé (via un atlas) sur un espace vectoriel localement convexe. Le calcul différentiel utilisé est une version adaptée du calcul différentiel de type Gâteaux [Bas 64]. Je rappelle ici ses fondements.

2.1.1. Application de classe C^k. On désigne par E, F deux espaces vectoriels topologiques localement convexes Hausdorff. L'ensemble U est un ouvert de E. Une application $f\colon U \longrightarrow F$ est dite de classe C^0 si elle est continue. Elle est dite de classe C^k

https://doi.org/10.4153/CJM-1997-042-7 Published online by Cambridge University Press

$(k \leq 1)$ dans U si elle est de classe C^{k-1} dans U et si, pour tout $x \in U$ et tout $1 \leq p \leq k$, il existe une application p-linéaire continue $D^p f_x \colon E^p \longrightarrow F$, telle que, en posant

$$R_k(v) = f(x+v) - f(x) - \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p!} D^p f_x(v, \ldots, v),$$

la fonction $R_k(t, v)$ définie pour $t \neq 0$ par

$$R_k(t, v) = \frac{R_k(tv)}{t^k},$$

et prolongée en $t = 0$ selon $R_k(0, v) = 0$ est continue en tout point $(0, h)$, et si de plus l'application

$$D^k f \colon (x, v_1, \ldots, v_k) \longrightarrow D^k f_x(v_1, \ldots, v_k)$$

est continue de $U \times E^k$ dans F.

Cette notion de différentiabilité coïncide avec la notion usuelle en dimension finie. Pour E et F des espaces de Banach de dimension infinie, elle est un peu plus faible que la différentiabilité de type Fréchet. Néanmoins toute fonction infiniment (Gâteaux) différentiable est infiniment Fréchet différentiable et réciproquement.

2.1.2. Application analytique. Un *polynôme homogène de degré n* d'un espace vectoriel E à valeurs dans un espace vectoriel F est une application $f_n \colon E \longrightarrow F$ définie à l'aide d'une application n-linéaire

$$\overline{f_n} \colon \overbrace{E \times \cdots \times E}^{n \text{ copies}} \longrightarrow F$$

par $f_n(h) = \overline{f_n}(h, \ldots, h)$ pour tout h de E. On note $\mathcal{P}^k(E, F)$ l'espace des polynômes homogènes *continus* de degré k de E à valeurs dans F. Une série $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$, où pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est un polynôme homogène de degré k, sera dite *série formelle*. L'espace des séries formelles à coefficients continus (*i.e.* dans $\mathcal{P}^k(E, F)$) est noté $\mathcal{S}(E, F)$.

Une série formelle converge topologiquement dans un ouvert U de E si et seulement si pour toute semi-norme continue q de F et tout $x \in U$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} q\big(f_n(x)\big)$ converge.

La notion d'analyticité en dimension infinie peut être dérivée du point de vue de Cauchy-Riemann (holomorphie). Rappelons ici la définition selon le point de vue de Weierstrass [BS b71].

DÉFINITION 1 (ANALYTICITÉ). Soit $f \colon U \subseteq E \longrightarrow F$ une fonction continue définie dans l'ouvert U. f est dite *analytique* dans U si pour tout point $x \in U$ il existe une série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n,x} \in S(E, F)$$

telle que

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n,x}(h)$$

pour tout h appartenant à un voisinage de zéro dans E.

https://doi.org/10.4153/CJM-1997-042-7 Published online by Cambridge University Press

2.2. *Sous-algèbres et sous-groupes de Lie.* Un *plongement* entre deux variétés M et N de dimension infinie est une application différentiable $\pi\colon M \longrightarrow N$ injective, telle que $(d\pi)_x$ est injectif pour tout x.

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ deux algèbres de Lie topologiques de dimension infinie. $\mathcal{H}$ est dite sous-algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ si

(i) $\mathcal{H}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{G}$, au sens algébrique du terme,

(ii) l'application identité de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$ est un morphisme continu d'algèbres.

Soient G un groupe de Lie de dimension infinie et H un sous-groupe de G qui n'est pas nécessairement fermé dans G. On dit que H est un sous-groupe de Lie de G si

(i) H est un groupe de Lie,

(ii) l'application identité de H dans G est un plongement de la variété H dans la variété G.

Il est clair que si H est un sous-groupe de Lie de G, son algèbre de Lie $\mathcal{L}(H)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(G)$. Notons qu'alors la topologie de H (resp. $\mathcal{H}$) est plus fine que celle de G (resp. $\mathcal{G}$).

2.3. *Groupes de Lie réguliers.* Afin de pallier à l'absence de théorèmes fondamentaux pour le calcul différentiel en dimension infinie (fonctions implicites, fonction inverse, existence et unicité pour le problème de Cauchy) H. Omori *et al.* dans [OMYK 81] puis J. Milnor dans [Mil 83] ont introduit une notion de *groupe de Lie régulier*. L'approche la plus générale est celle de J. Milnor [Mil 83, p. 1046].

On munit l'ensemble $C^\infty\big([0,1],\mathcal{L}(G)\big)$ des chemins lisses de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(G)$ de la topologie de la convergence uniforme C^∞.

Selon Milnor un groupe de Lie est *régulier* si l'équation différentielle ordinaire

$$g^{-1}\cdot\frac{dg(t)}{dt} = v(t) \text{ avec } g(0) = e \tag{1}$$

admet une solution lisse γ_v quel que soit le chemin lisse v de $\mathcal{L}(G)$, et si la correspondance

$$v \longmapsto \gamma_v(1)$$

de $C^\infty\big([0,1],\mathcal{L}(G)\big)$ à valeurs dans G est infiniment différentiable.

On dit alors, que v est la *dérivée logarithmique à gauche* du chemin γ_v.

REMARQUE. Il est équivalent de s'intéresser à l'équation $\dot{g}g^{-1} = u$ avec $g(0) = e$. Sa solution, lorqu'elle existe, est notée δ_u, et u est dite *dérivée logarithmique droite* de δ_u. On vérifie aisément que si u est la dérivée logarithmique gauche du chemin p alors $-u$ est la dérivée logarithmique droite du chemin p^{-1}.

Le point de vue d'Omori *et al.* initialement formalisé dans le cadre des groupes de Lie-Fréchet admet une généralisation naturelle. Fondamentalement on impose à la solution γ_v de toujours s'obtenir par "intégrale multiplicative". Précisons l'algorithme ; il généralise la notion d'intégrale de Riemann.

https://doi.org/10.4153/CJM-1997-042-7 Published online by Cambridge University Press

L'intégrale multiplicative doit être conçue comme le produit d'une infinité d'éléments du groupe, tous infinitésimalement proches de l'élément neutre e. Choisissons une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de l'intervalle $[0,1]$, et, pour chaque segment $[t_{i-1}, t_i]$, un représentant $\hat{t_i} \in [t_{i-1}, t_i]$. On a clairement

$$\gamma_v(1) = \prod_{1 \le i \le n} p(t_{i-1})^{-1} \cdot p(t_i).$$

Lorsque la subdivision est assez fine, on peut approximer v dans chaque segment $[t_{i-1}, t_i]$ par $v(\hat{t_i})$. De la sorte, on peut espérer approcher $\gamma_v(1)$ à l'aide de

$$\prod_{1 \le i \le n} \exp\bigl((t_i - t_{i-1})v(\hat{t_i})\bigr).$$

Le point de vue d'Omori *et al.* consiste essentiellement à imposer la convergence de cette expression lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro. Il fournit donc un algorithme pour résoudre l'équation différentielle ordinaire (1). L'intégrale multiplicative de v entre 0 et 1 est notée symboliquement par

$$\gamma_v(1) = \prod_{0 \le t \le 1} \exp\bigl(v(t)\, dt\bigr).$$

Un groupe de Lie Milnor régulier sera dit *Milnor-Omori régulier* si la solution γ_v s'obtient toujours par intégrale multiplicative. Tous les groupes de Lie connus sont Milnor-Omori réguliers.

3. **Second problème de Lie.**

3.1. *Sur l'approche bornologique.* L'absence au-delà du cadre banachique des théorèmes fondamentaux du calcul différentiel (fonction inverse, fonctions implicites, existence et unicité pour le problème de Cauchy) est le fait marquant de l'analyse en géométrie différentielle de dimension infinie. La théorie des groupes de Lie de dimension infinie telle que définie par Milnor n'échappe certainement pas à ces difficultés. De fait la recherche actuelle qui concerne les groupes différentiels de dimension infinie (voir par exemple [Sou 85, BaD 93, Daz 93]) s'accomode généralement d'un abandon de la notion de variété différentiable en dimension infinie.

L'analyse en dimension infinie des théorèmes fondamentaux de Sophus Lie peut être (au moins partiellement) menée à bien ; il suffit pour cela de s'assurer de la validité de certaines conditions techniques adéquates. On doit à J. Leslie de nous avoir ouvert la voie dans cette direction. Son approche bornologique est très significative. Le lecteur devrait consulter par exemple [Les 87] ou [Les 92]. Précisons ici le cadre théorique adopté dans [Les 93] pour intégrer une algèbre de Lie de dimension infinie.

Soit E un espace vectoriel. Un sous-ensemble V de E est dit *équilibré* si $u \in V$ et $|\lambda| \le 1$ impliquent $\lambda u \in V$. Un disque de E est un sous-ensemble équilibré et convexe. Soient A, B deux sous-ensembles de E. On dit que A absorbe B si : $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ \,/\, |\lambda| \ge \alpha \Rightarrow \lambda . A \supseteq B$. Un borné (pour la bornologie de von Neumann) d'un espace vectoriel topologique localement convexe Hausdorff E est un sous-ensemble B absorbé par tout voisinage de

https://doi.org/10.4153/CJM-1997-042-7 Published online by Cambridge University Press

l'origine. L'espace vectoriel topologique E est dit *bornologique* si tout disque bornivore (*i.e.* qui absorbe tout borné de E) est un voisinage de l'origine.

Soit K_B la classe des espaces vectoriels topologiques localement convexes Hausdorff séquentiellement complets bornologiques.

DÉFINITION 2. Si E est un espace topologique bornologique et $U \subseteq E$ est un voisinage de l'origine, on appelle U-système de générateurs $\mathcal{B}$ des bornés de E, toute collection de disques bornés fermés de E contenus dans U telle que :

1. si $A, B \in \mathcal{B}$ alors il existe $C \in \mathcal{B}$ vérifiant $A \cup B \subseteq C$;
2. pour tout borné B de E, il existe $A \in \mathcal{B}$ et $\lambda > 0$ tels que $\lambda B \subseteq A$.

L'intégration d'une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ est intimement liée à l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = [x, y]$$

pour tout chemin $x \in C^\infty(I, \mathcal{L})$ de l'algèbre de Lie. L'analyse de cette équation a conduit Leslie à la définition suivante :

DÉFINITION 3 (ALGÈBRE DE LIE PRÉINTÉGRABLE). Une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ de K_B est dite *préintégrable* s'il existe un $\mathcal{L}$-système $\mathcal{B}$ de générateurs des bornés de $\mathcal{L}$ tel que, pour tout $B_0 \in \mathcal{B}$, il existe une suite de disques bornés $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

1. $\mathrm{ad}_{B_0}(B_n) = \bigcup_{\substack{b_1 \in B_0 \\ b_2 \in B_n}} [b_1, b_2] \subseteq B_{n+1}$ pour tout entier n ;
2. $\sum_{q \geq n} \frac{1}{q!} B_q$ converge vers 0 dans $L_C = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda C$ pour un certain disque borné fermé C de $\mathcal{B}$.

Sous ces conditions J. Leslie montre

THÉORÈME 1 (LESLIE). *Une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ préintégrable est telle que l'algèbre de Lie $C^\infty(I, \mathcal{L})$ munie du crochet de Lie*

$$[v, w](t) = \left[\int_0^t v(\tau)\, d\tau, w(t)\right] + \left[v(t), \int_0^t w(\tau)\, d\tau\right]$$

est intégrable en un groupe de Lie (au sens de Milnor).

Les outils utilisés sont les outils classiques avec tout particulièrement la méthode de Picard assistée de la convergence de la série qui intervient dans la définition d'une algèbre de Lie préintégrable. Cette approche montre que l'on peut espérer prolonger au cadre de la dimension infinie les outils classiques de l'analyse. Il convient ensuite de dégager le contenu géométrique des définitions et si possible de reformuler géométriquement les théorèmes.

3.2. *Une classe fondamentale.* Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie topologique de dimension infinie. Si l'on reprend les idées de Leslie dans un cadre résolument topologique nous sommes amenés à considérer la série formelle *canonique* $c(adx)$ attachée à tout vecteur x de $\mathcal{L}$ et définie par $c(adx) = \sum_{k=0}^\infty (adx)^k$. Remarquons que $c(adx)$ est une série formelle d'endomorphismes continus de $\mathcal{L}$ et qu'il n'existe généralement pas de bonne topologie pour l'espace $End(V)$ des endormorphismes continus d'un espace vectoriel V de dimension infinie. Une approche naturelle consiste à restreindre notre analyse à la classe Σ des algèbres de Lie topologiques L localement convexes Hausdorff et séquentiellement complètes telles que la série formelle de $L \times L$ à valeurs dans L qui à (x, y) associe $c(adx)y$ est Gâteaux analytique au voisinage de l'origine.

Par définition même il est assez aisé de vérifier si une algèbre de Lie donnée appartient à Σ. C'est en particulier le cas des algèbres de Lie banachiques, des algèbres de Lie de jauge à support compact, et de nombreuses algèbres de Lie formelles. En revanche l'algèbre de Lie $\chi^\infty(M)$ des champs de vecteurs d'une variété n'entre pas dans cette classe. Il se trouve que la convergence locale de la série canonique (la plus simple que l'on peut concevoir dans l'algèbre de Lie) est suffisante pour analyser complètement les théorèmes fondamentaux de Sophus Lie dans ce cadre là [Rob 94, Rob 96]. Mais quel est donc le contenu géométrique d'une telle définition?

THÉORÈME 2. *Une algèbre de Lie appartient à Σ si et seulement si sa série formelle de Campbell-Baker-Hausdorff est Gâteaux analytique au voisinage de l'origine.*

La démonstration de ce théorème qui repose sur des techniques bornologiques associées à la bornologie compacte et la régularité au sens de Milnor fera l'objet d'une autre publication.

Une algèbre de Lie de cette classe sera dite de type CBH (ou CBH) et la classe des algèbres de Lie CBH sera notée $L(CBH)$. Un groupe de Lie de dimension infinie dont l'algèbre de Lie est de type CBH sera dit de type CBH (ou CBH). La classe des groupes de Lie CBH est notée CBH.

THÉORÈME 3 (LIE II CBH). *Soit G un groupe de Lie CBH d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une sous-algèbre de Lie $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ soit l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie CBH, H, plongé dans G, est qu'elle soit de type Campbell-Baker-Hausdorff. Dans ce cas, le plongement est analytique et la composante connexe de H est unique[1] à isomorphisme près.*

Ce théorème a pour corollaire évident le résultat suivant :

COROLLAIRE 1. *Toute sous-algèbre de Lie fermée $\mathcal{H}$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ d'un groupe de Lie CBH, G, est, munie de la topologie induite par $\mathcal{G}$, l'algèbre de Lie d'un unique groupe de Lie connexe Campbell-Baker-Hausdorff H plongé dans G.*

PREUVE (DU THÉORÈME 3). La condition est trivialement nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante.

Soit U un voisinage ouvert de zéro dans $\mathcal{G}$ tel que $\exp\colon U \longrightarrow G_e$ soit un difféomorphisme analytique et tel que la série h de Campbell-Baker-Hausdorff

$$h(u, v) = v + w + \frac{1}{2}[v, w] + \frac{1}{12}\Big(\big[v, [v, w]\big] - \big[w, [v, w]\big]\Big) + \cdots,$$

[1] Dans la catégorie des groupes de Lie CBH.

https://doi.org/10.4153/CJM-1997-042-7 Published online by Cambridge University Press

soit analytique dans l'ouvert $U \times U$. Si $\mathcal{H}$ est une sous-algèbre de Lie CBH de $\mathcal{G}$, l'injection $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$ est continue et il existe un voisinage ouvert $\tilde{V}$ de zéro dans $\mathcal{H}$ tel que l'application exponentielle restreinte à $\tilde{V}$ soit injective et tel que $h: \tilde{V} \times \tilde{V} \longrightarrow \mathcal{H}$ soit analytique. Désignons par V un voisinage ouvert et équilibré de zéro dans $\mathcal{H}$ tel que $h(V, V) \subseteq \tilde{V}$. On note alors que son image $H_e = \exp(V)$ dans G est symétrique, *i.e.* $H_e = H_e^{-1}$. Munissons H_e de la topologie induite par l'application exponentielle et celle de V et déclarons H_e variété analytique par l'unique carte $(V, \exp)$. H_e muni du produit de groupe hérité de G est un groupuscule de Lie [Bou 72, p. 114]. Cela découle immédiatement de l'analyticité de la série de Campbell-Baker-Hausdorff dans $V \times V$.

Soit maintenant g un élément quelconque du groupe G. Soit log le diffeomorphisme local inverse de exp. La variété analytique gH_e munie de la carte $\varphi_g: gx \longmapsto log(x)$ est variété intégrale de

$$L^{\mathcal{H}} = \bigcup_{g \in G} g\mathcal{H}$$

au voisinage du point g. En effet cela est vrai pour $g = e$ d'après la formule de Campbell-Baker-Hausdorff et $L^{\mathcal{H}}$ est une distribution invariante à gauche. D'autre part l'intersection $g_1H_e \cap g_2H_e$ est ouverte dans g_1H_e et g_2H_e. Pour s'en convaincre, il suffit de vérifier que $gH_e \cap H_e$ est ouvert dans H_e et dans gH_e pour tout g de G. Mais si $x \in gH_e \cap H_e$, $x = g \cdot y$ où $y = g^{-1} \cdot x$ appartient à H_e. Il est facile de trouver un voisinage ouvert W_e de e dans H_e tel que $y \cdot W_e$ soit un voisinage ouvert de y dans H_e et $x \cdot W_e$ soit un voisinage ouvert de x dans H_e. Mais alors $g \cdot (y \cdot W_e) = g \cdot (g^{-1} \cdot x \cdot W_e) = x \cdot W_e$ appartient à l'intersection $gH_e \cap H_e$ et est ouvert dans H_e et dans gH_e. La collection des ouverts des variétés intégrales gH_e constitue donc une base pour une topologie Θ sur G plus fine que sa topologie de variété. Soit H la composante connexe de l'élément neutre e pour cette nouvelle topologie. Il est clair que H contient H_e. H est une variété analytique. En effet, si g et g' sont deux éléments du groupe G, tels que l'intersection $g \cdot H_e \cap g' \cdot H_e$ est non vide, alors $g'^{-1} \cdot g$ appartient à $V \times V \subseteq \tilde{V}$. L'analyticité du changement de carte est donc une conséquence de l'analyticité de h dans $\tilde{V} \times \tilde{V}$. H est donc une variété analytique intégrale de $\mathcal{L}$ et $\{gH,\ g \in G\}$ est un feuilletage analytique de $\mathcal{L}$. Il en résulte que H est un sous-groupe de G. On vérifie que l'injection $H \hookrightarrow G$ est un plongement analytique.

Reste à démonter qu'il s'agit d'un groupe CBH. Pour l'analyticité de $(g, h) \longmapsto g \cdot h^{-1}$ au voisinage de $(g_0, h_0) \in H \times H$, posons $k_0 = g_0h_0^{-1}$ et remarquons, que si $g = g_0 \cdot \gamma$ et $h = h_0 \cdot \eta$ alors $gh^{-1} = k_0 \cdot i_{h_0}(\gamma \cdot \eta^{-1})$, où i_{h_0} désigne l'automorphisme intérieur de G défini par $i_{h_0}: g \longmapsto h_0 \cdot g \cdot h_0^{-1}$.

L'analyticité de h dans $\tilde{V} \times \tilde{V}$ et le fait que $V \cdot V \subseteq \tilde{V}$ montrent que $i_{h_0}: H \longrightarrow H$ est analytique au voisinage de e pour tout h_0 élément de H_e. D'autre part la multiplication à gauche est analytique dans H. Par suite H_e engendre H. Si maintenant h appartient à H, il admet une décomposition finie $h = h_1 \cdots h_l$ où pour tout $j \in \{1, \ldots, l\}$, $h_j \in H_e$. Comme $i_{h \cdot h'} = i_h \circ i_{h'}$, l'analyticité de i_h dans un voisinage de l'élément neutre de H est démontrée pour tout $h \in H$. Enfin, rappelons que H_e est un groupuscule de Lie. On en déduit, en décomposant le produit $g \cdot h^{-1}$, l'analyticité de ce même produit de $H \times H$ dans H. Comme par construction l'exponentielle sert de carte locale pour H, H est donc un sous-groupe CBH plongé dans G et admettant $\mathcal{H}$ pour algèbre de Lie.

Unicité : Soit $H' \xrightarrow{i} G$ un groupe de Lie CBH et connexe répondant au second problème de Lie relativement à la sous-algèbre $\mathcal{H}$. L'application différentielle tangente i_* en l'élément neutre de H', $i_*: \mathcal{L}(H') \longrightarrow \mathcal{H}$, est donc un isomorphisme continu d'algèbres de Lie. Comme $i\big(exp(u)\big) = \exp(i_* u)$, $i: H' \longrightarrow H$ est un isomorphisme local et analytique de groupes de Lie. H' étant connexe,

$$H' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (H'_e)^n$$

où H'_e est un voisinage ouvert de l'élément neutre du groupe H'. De même pour H. Ceci implique que $i(H') = H$. L'isomorphisme local fait donc de H' un groupe CBH isomorphe à H via l'injection i. ∎

3.3. *Sur l'intégrabilité des algèbres de Lie Banach.* J. Leslie a souligné dans l'introduction de [Les 93] une subtilité technique qui concerne le troisième théorème de Lie et semble, à notre connaissance, être passée longtemps inaperçue. Une remarque de G. Birkhoff [Bir 38] "has led many knowledgeable Lie theorists to imagine that there is nothing to prove as regards Lie's third theorem in the case of Banach-Lie algebras which are center free". La difficulté mentionnée réside dans une utilisation abusive du théorème des fonctions implicites. Leslie remarque plus loin "in order for the inverse function theorem to be applicable the image of the derivative must split the codomain, and we can not conclude as Birkhoff did; instead, we must find ways to circumvent a direct usage of the implicit function theorem in this context."

La preuve du second théorème de Lie présentée pour les groupes CBH fait justement l'économie du théorème des fonctions implicites. Il en résulte une démonstration limpide du troisième théorème de Lie pour les algèbres de Lie Banach de centre trivial.

THÉORÈME 4 (LIE III). *Toute algèbre de Lie banachique $\mathcal{L}$ de centre trivial est intégrable en un groupe de Lie Banach (analytique) plongé dans $GL(\mathcal{L})$.*

PREUVE. $\mathcal{L}$ est munie d'une norme $\|\cdot\|$ telle que:

$$\|[x,y]\| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

On sait que c'est une algèbre de Lie de type CBH. Puisque le centre de $\mathcal{L}$ est trivial nous avons l'injection

$$\mathcal{L} \overset{\text{ad}}{\hookrightarrow} \text{ad}(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{E}nd(\mathcal{L}).$$

C'est un homomorphisme continu d'algèbres de Lie, puisque si $x \in \mathcal{L}$, alors la norme $\|\,\text{ad}(x)\|$ de $\text{ad}(x)$ dans $\mathcal{E}nd(\mathcal{L})$ est inférieure à la norme $\|x\|$ de x dans $\mathcal{L}$. Il résulte de [Lie II CBH] que $\mathcal{L}$ est intégrable par un groupe de Lie CBH plongé dans $GL(\mathcal{L})$. ∎

3.4. *Au-delà des CBH.*

3.4.1. Groupes et algèbres de première espèce. De nombreux groupes de Lie de dimension infinie admettent une carte canonique de première espèce sans être pour autant analytiques. C'est-à-dire que l'application exponentielle fournit une carte au voisinage de

https://doi.org/10.4153/CJM-1997-042-7 Published online by Cambridge University Press

l'élément neutre mais le produit de groupe dans cette carte n'est plus donné par la série de Campbell-Baker-Hausdorff. Un exemple intéressant est le groupe des difféomorphismes formels de la droite réelle qui fixent un point. Un groupe de Lie admettant l'exponentielle comme carte au voisinage de l'identité sera dit groupe de Lie de *première espèce*. Ils définissent une large classe EXP de groupes de Lie de dimension infinie.

Si L est une algèbre de Lie topologique ayant Z pour centre, le quotient $K = L/Z$ est naturellement structuré en algèbre de Lie topologique. On peut identifier K à une sous-algèbre de Lie topologique de l'algèbre de Lie $\mathrm{End}(L)$ des endomorphismes continus de L par l'injection $K \overset{\mathrm{ad}}{\hookrightarrow} \mathrm{End}(L)$. L'algèbre de Lie L sera dite de *première espèce* si la fonction exponentielle est définie dans K et structure $\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathrm{Exp}\, K)^n$ en un groupe de Lie de première espèce. La classe des algèbres de Lie de première espèce, notée $L(EXP)$, est précisément la classe associée à EXP.

Le second théorème de Lie [Lie II CBH] pour les groupes CBH et son Corollaire 1 admettent immédiatement les généralisations suivantes dans le cadre des groupes de première espèce.

THÉORÈME 5 (LIE II EXP). *Pour qu'une sous-algèbre de Lie H de l'algèbre de Lie G d'un groupe de Lie de première espèce G soit l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie de première espèce H, plongé dans G, il est nécessaire et suffisant que H soit de première espèce.*

COROLLAIRE 2. *Toute sous-algèbre de Lie fermée H de l'algèbre de Lie G d'un groupe de Lie G de première espèce Milnor-Omori régulier est, munie de la topologie induite, l'algèbre de Lie d'un unique groupe de Lie connexe de première espèce régulier au sens d'Omori H plongé dans G.*

La condition de régularité au sens d'Omori assure techniquement la stabilité de H par le produit de groupe dans la carte canonique de première espèce. Il serait intéressant de savoir si tout groupe de Lie de première espèce est régulier au sens d'Omori et/ou de Milnor.

3.4.2. Groupes et algèbres de Lie de seconde espèce. Soit G un groupe de Lie de dimension infinie d'algèbre de Lie G. On dira que G est un groupe de Lie de seconde espèce s'il existe pour G une décomposition en somme directe

$$G = \bigoplus_{i=1}^{m} G_i$$

de telle sorte que l'application

$$\prod_{i=1}^{m} \mathrm{Exp}_i \colon (x_1, \ldots, x_m) \in G_1 \times \cdots \times G_m \longrightarrow \mathrm{Exp}(x_1) \cdots \mathrm{Exp}(x_m) \in G$$

définisse une carte de variété au voisinage de l'élément neutre. Afin de préciser la "multiplicité" m de la décomposition, on dira que G appartient à la classe EXP^m. Il est clair que $EXP \subset EXP^m \subset EXP^{m'}$ pour tout $m < m'$. La définition de la classe associée d'algèbres de Lie est analogue à celle de $L(EXP)$. Si L est une algèbre de Lie topologique ayant Z pour centre, notons $K = L/Z$ l'algèbre de Lie quotient. En identifiant naturellement K à son image par la représentation adjointe, on a

DÉFINITION 4. L est une algèbre de Lie de seconde espèce lorsque la fonction exponentielle est définie dans K et permet de structurer $\bigcup_{n=1}^{\infty}(\operatorname{Exp} K)^n$ en un groupe de Lie de seconde espèce. La classe des algèbres de Lie de seconde espèce, notée génériquement $L(EXP^m)$, est précisément la classe associée à EXP^m.

Lorqu'une algèbre de Lie L admet une décomposition en somme directe de m algèbres de Lie de première espèce,

$$L = \bigoplus_{i=1}^{m} L_i,$$

nous dirons qu'elle est *presque* de seconde espèce d'ordre m. Si en outre chaque L_i est intégrable au sens de Lie III en un groupe de première espèce G_i, L sera dite *intégrable par parties*. Cette algèbre est alors *virtuellement intégrable* selon le produit $\otimes_{i=1}^{m} G_i$.

L'intérêt de ce point de vue a été mis en évidence dans [RoK 97]. On y démontre avec N. Kamran que tout pseudogroupe de Lie transitif de dimension infinie (au sens de Lie-Cartan) est naturellement associé à une algèbre de Lie de seconde espèce d'ordre 2 intégrable par parties et que le groupe de Lie des difféomorphismes formels de $\mathbb{R}^n$ qui fixent un point est un groupe de Lie de seconde espèce d'ordre 2.

Soit K^∞ un groupe de Lie de dimension infinie et $\{H_i\}_{i=1,\dots,m}$ une famille de groupes de Lie de dimension finie. Posons $G_0^\infty = K^\infty$ et par récurrence notons G_j^∞ un groupe de Lie de dimension infinie qui est une extension de H_j par G_{j-1}^∞. Nous avons donc, pour $j = 1, \dots, m$, une séquence de suites courtes exactes de groupes de Lie

$$e \longrightarrow G_{j-1}^\infty \longrightarrow G_j^\infty \longrightarrow H_j \longrightarrow e,$$

à laquelle est associée une séquence de suites courtes exactes d'algèbres de Lie topologiques

$$0 \longrightarrow L(G_{j-1}^\infty) \longrightarrow L(G_j^\infty) \longrightarrow L(H_j) \longrightarrow 0.$$

La proposition suivante est immédiate

PROPOSITION 1. *Si K^∞ est un groupe de Lie de seconde espèce d'ordre l alors G_m^∞ est un groupe de Lie de seconde espèce d'ordre $l + m$. Si K^∞ est Milnor-Omori régulier il en est de même de G_m^∞.*

Désignons par $EXP^2_{\lhd}$ (resp. $CBH^2_{\lhd}$) la classe des groupes de Lie de seconde espèce d'ordre 2 obtenus comme précédemment à partir d'un groupe de Lie K^∞ de première espèce (resp. de type CBH). On a comme extension du second théorème de Lie

THÉORÈME 6. *Toute sous-algèbre de Lie fermée H de l'algèbre de Lie G d'un groupe de Lie G appartenant à $CBH^2_{\lhd}$ (resp. $EXP^2_{\lhd}$ et Milnor-Omori régulier) est, munie de la topologie induite, l'algèbre de Lie d'un unique groupe de Lie H connexe de même nature que G.*

PREUVE. Faire une récurrence sur chaque extension en utilisant au départ Lie II pour les groupes de première espèce. ∎

https://doi.org/10.4153/CJM-1997-042-7 Published online by Cambridge University Press

3.5. *Quelques exemples.*

3.5.1. Groupes formels d'isotropie. Nous avons déjà noté que les groupes formels d'isotropie de $\mathbb{R}^n$ sont des groupes de Lie de seconde espèce d'ordre 2 qui satisfont au Théorème 6 (voir [RoK 97]). Il en est de même de la plupart des groupes formels. Le groupe de symétrie des équations d'Euler est un exemple *non formel* de groupe de Lie de seconde espèce qui satisfait au Théorème 6.

3.5.2. Groupe de symétrie des équations d'Euler. Rappelons que le système des équations d'Euler pour un fluide idéal incompréssible et sans viscuosité d'un domaine Ω de dimension 3 prend la forme vectorielle

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} &= -\nabla p\\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Le domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ est décrit par les coordonnées spatiales $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Le temps est paramétré par la variable t et $\mathbf{u} = (u, v, w)$ représente le champs de vitesse. La variable p représente le champ de pression et $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Le terme non linéaire $\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}$ se lit $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$.

Une symétrie infinitésimale des équations d'Euler est un champ de vecteurs de la forme

$$\mathbf{v} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_z + \tau\partial_t + \phi\partial_u + \psi\partial_v + \chi\partial_w + \pi\partial_p,$$

où $\xi, \eta, \ldots, \pi$ sont des fonctions de $\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p$. Pour une détermination explicite voir [Olv 86]. Il en résulte que la composante connexe $Sym(Euler)_e$ du groupe de symétries des équations d'Euler en dimension 3 est engendrée par les champs de vecteurs suivants:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{v}^x_\alpha &= \alpha\partial_x + \alpha_t\partial_u - \alpha_{tt}x\partial_p,\\ \mathbf{v}^y_\beta &= \beta\partial_y + \beta_t\partial_v - \beta_{tt}y\partial_p,\\ \mathbf{v}^z_\gamma &= \gamma\partial_z + \gamma_t\partial_w - \gamma_{tt}z\partial_p,\end{aligned}\right\}\quad\text{(repère mobile)}\tag{3}$$

$$\mathbf{v}_0 = \partial_t,\qquad\text{(translation temporelle)}\tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{d}_1 &= x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + t\partial_t,\\ \mathbf{d}_2 &= t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w - 2p\partial_p,\end{aligned}\right\}\quad\text{(changement d'échelle)}\tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{r}_{xy} &= y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v,\\ \mathbf{r}_{zx} &= x\partial_z - z\partial_x + u\partial_w - w\partial_u,\\ \mathbf{r}_{yz} &= z\partial_y - y\partial_z + w\partial_v - v\partial_w,\end{aligned}\right\}\quad\text{(rotations)}\tag{6}$$

$$\mathbf{v}^p_\theta = \theta\partial_p,\qquad\text{(changement de pression)}\tag{7}$$

où α, β, γ et θ sont des fonctions arbitraires de t.

Désignons par $M^{3\infty}, T^1, S^2, R^3, P^\infty$ les espaces vectoriels réels engendrés respectivement par (3), (4), (5), (6) et (7). Il est aisé de voir que $PT = P^\infty \oplus T^1$, $MP =$

https://doi.org/10.4153/CJM-1997-042-7 Published online by Cambridge University Press

$M^{3\infty} \oplus P^{\infty}$, $MPT = M^{3\infty} \oplus P^{\infty} \oplus T^{1}$, $SP = S^2 \oplus P^{\infty}$ sont des sous-algèbres de Lie de dimension infinie de G. Ces algèbres de Lie sont naturellement structurées en algèbres de Lie topologique localement convexe Hausdorff complètes pour la topologie de Whitney (convergence uniforme C^{∞} sur toute partie compacte). Notons $L(\Delta^6)$ l'algèbre de Lie de dimension 6 engendrée par T^{1}, S^2 et R^{3}.

L'algèbre $L\big(Sym(Euler)\big)$ des symétries infinitésimales des équations d'Euler est une extension de l'algèbre de Lie $L(\Delta^6)$ par l'algèbre de Lie de type CBH MP. C'est-à-dire que l'on a la suite courte exacte d'algèbres de Lie (*)

$$0 \longrightarrow MP \longrightarrow L\big(Sym(Euler)\big) \longrightarrow L(\Delta^6) \longrightarrow 0.$$

De plus

PROPOSITION 2. *L'algèbre de Lie $L\big(Sym(Euler)\big)$ n'est pas une algèbre de Lie de première espèce.*

PREUVE. Si c'était le cas il en serait de même de la sous-algèbre de Lie fermée $PT = P^{\infty} \oplus T^{1}$. Or l'exponentielle du champ de vecteurs $\alpha\partial_t + \theta\partial_p$ associe à $(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, p)$ le point $\big(\mathbf{x}, t+\alpha, \mathbf{u}, p + \int_0^1 \theta(t+\alpha\tau)\,d\tau\big)$. Par suite PT n'est pas de première espèce.

Remarquons encore que $L\big(Sym(Euler)\big)$ est une algèbre de Lie de champs de vecteurs complets. Elle s'intègre en un groupe de Lie $Sym(Euler)$ de dimension infinie Milnor-Omori régulier, extension d'un groupe de Lie de dimension finie Δ^6 par un groupe de Lie MP de type CBH. En d'autres termes la suite (*) s'intègre selon

$$e \longrightarrow MP \longrightarrow Sym(Euler)_e \longrightarrow \Delta^6 \longrightarrow e.$$

4. **Lie II pour les groupes réguliers.**

4.1. *Intégrabilité d'une sous-algèbre CBH.* On commence par le lemme suivant pour lequel H est une algèbre de Lie de type CBH, $\tilde{V}$, V sont des voisinages de l'origine tels que $\tilde{V} \subset V$ et $h(\tilde{V}, \tilde{V}) \subset V$.

LEMME 1. *Si H est une algèbre de Lie de type CBH de centre trivial, alors l'application*

$$x \in \tilde{V} \subseteq H \longmapsto \exp(adx) \in \mathrm{Aut}(H)$$

est injective.

PREUVE. Il suffit de démontrer que dans V, $\exp(adx) = \mathrm{Id}$ équivaut à $x = 0$, puisque dans $\tilde{V}$,

$$\exp(adx)\cdot\exp(ady) = \exp\Big(ad\big(h(x,y)\big)\Big).$$

Supposons donc, que pour $u \in V$,

$$(\star)\; adu + \frac{1}{2!}(adu)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(adu)^n + \cdots = 0.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1997-042-7 Published online by Cambridge University Press

Si v n'appartient pas au noyau de adu, alors $adu(v)$ n'appartient pas au noyau de adu car sinon $(\star)$ implique $adu(v) = 0$. Posons $w = adu(v) = [u, v]$. On suppose w non nul. $(\star)$ implique

$$w + \frac{1}{2!}(adu)w + \cdots + \frac{1}{n!}(adu)^{n-1}w + \cdots = 0,$$

soit $(d\exp)_{-u}w = 0$. Or $(d\exp)_{-u}$ est un isomorphisme. Par suite $w = 0$; on obtient la contradiction désirée.

Comme $\mathcal{H}$ est de centre trivial, on a bien $\exp(adx) = \mathrm{Id}$ implique $x = 0$ dans V. ■

THÉORÈME 7. *Toute sous-algèbre de Lie de type CBH d'un groupe régulier de centre trivial est intégrable en un sous-groupe de Lie de type CBH.*

PREUVE. Le théorème est une conséquence des deux lemmes qui suivent. ■

LEMME 2. *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Lie CBH. Désignons par H_0 le groupuscule de Lie associé à $\mathcal{H}$. Tout homomorphisme $\mathcal{H} \xrightarrow{i_\star} \mathcal{G} = L(G)$ d'algèbres de Lie de $\mathcal{H}$ dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ d'un groupe de Lie régulier provient d'un unique homomorphisme de groupuscules de Lie $H_0 \xrightarrow{i} G$.*

PREUVE. L'unicité est une conséquence du Lemme 7.1 p. 1042 [Mil 83]. Montrons l'existence. A tout $x \in H_0 \subset \mathcal{H}$ associons $\exp(i_\star x) = i(x) \in G$. L'application i est C^∞, comme composée de $i_\star$ et exp. D'autre part,

$$i\big(h(x,y)\big) = \exp\big(i_\star h(x,y)\big) = \exp\big(h(i_\star x, i_\star y)\big),$$

car $h(i_\star x, i_\star y)$ a un sens puisque, la topologie de $\mathcal{G}$ est moins fine que celle de $\mathcal{H}$, $i_\star$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie, et à cause de l'unicité de la solution de l'équation différentielle logarithmique.

D'où $i\big(h(x,y)\big) = i(x)\cdot i(y)$.

LEMME 3. *Si $\mathcal{H}$ est de centre trivial, i est localement injectif.*

PREUVE. Pour démontrer que i est localement injectif, il suffit de vérifier qu'il existe un voisinage V de 0 dans H_0 tel que, si $x \in V$ et $i(x) = e$ alors $x = 0$. En effet, si un tel V existe, soit alors $\tilde{V}$ un voisinage ouvert de 0 vérifiant $h(\tilde{V}, \tilde{V}) \subset V$. Si $x, y \in \tilde{V}$ et $i(x) = i(y)$ alors $i\big(h(x, -y)\big) = e$, ce qui implique $x = y$ dès lors que V est contenu dans un groupuscule de Lie associé à $\mathcal{H}$. Or $\mathrm{Ad}(\exp h) = \mathrm{Exp}(adh)$ où Exp est l'exponentielle du groupe adjoint $\mathrm{Ad}(G)$. Comme $\mathrm{Exp}(adh)$ restreinte à $\mathcal{H}$ s'identifie pour tout $h \in \mathcal{H}$ à l'exponentielle algébrique

$$\exp(adh) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(adh)^n$$

dans $\mathrm{End}(\mathcal{H})$, le Lemme 1 permet d'achever la démonstration. ■

Voyons maintenant ce qui se passe si $\mathcal{H}$ est abélienne et est plongée dans $\mathcal{G}$, *i.e.* $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$. Il est clair que $\exp(\mathcal{H})$ est un sous-groupe abélien de G. Pour en faire un

https://doi.org/10.4153/CJM-1997-042-7 Published online by Cambridge University Press

sous-groupe de Lie CBH de G, il faut s'assurer que l'exponentielle restreinte à $\mathcal{H}$ est localement injective au voisinage de l'origine. Bien sûr si $\mathcal{H}$ est de dimension finie exp est localement injectif. Cependant si l'algèbre de Lie abélienne $\mathcal{H}$ n'est pas de dimension finie il n'est pas clair que l'exponentielle du groupe G restreinte à $\mathcal{H}$ soit systématiquement localement injective. C'est là un problème de *topologie* sans grande importance. En effet il est toujours possible d'affiner la topologie de $\mathcal{H}$ de sorte que cela devienne le cas; prendre par exemple la topologie limite inductive stricte d'un système inductif de sous-espaces vectoriels de dimensions finies [Köt 69].

THÉORÈME 8. *Toute sous-algèbre de Lie CBH $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ ayant un centre $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$ de dimension finie est intégrable en un sous-groupe de Lie CBH de G. Si le centre $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$ est quelconque il est toujours possible d'affiner la topologie de $\mathcal{H}$ de sorte qu'elle reste une sous-algèbre de Lie CBH et soit intégrable en un sous-groupe de Lie CBH de G. Dans tous les cas $\mathcal{H}$ est intégrable en un groupe de Lie CBH (qui n'est peut-être pas plongé dans G).*

PREUVE. $\mathcal{H}$ est le produit semi-direct

$$\mathcal{H} = \mathcal{Z}(\mathcal{H}) \triangleleft \mathcal{H}/\mathcal{Z}(\mathcal{H}).$$

Compte tenu du Théorème 7 et de la remarque précédente, l'exponentielle restreinte à $\mathcal{H}$ est localement injective (moyennant un éventuel raffinement de la topologie du centre $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$ et donc de $\mathcal{H}$). Par suite $\mathcal{H}$ est intégrable en un (sous-)groupe de Lie CBH. ∎

4.2. *Intégrabilité des algèbres de chemins.*

4.2.1. Notion de pré-intégrabilité. La notion d'algèbre de Lie pré-intégrable proposée par Leslie est pleinement justifiée par le Théorème 1. Il semble naturel d'opter pour la définition géométrique qui suit:

DÉFINITION 5 (PRÉ-INTÉGRABILITÉ). Une algèbre de Lie $\mathcal{L}$ topologique localement convexe Hausdorff et séquentiellement complète sera dite *préintégrable* si l'algèbre de Lie de ses chemins lisses $C^\infty(I, \mathcal{L})$ munie du crochet de Lie

$$[v,w](t) = \left[\int_0^t v(\tau)\,d\tau, w(t)\right] + \left[v(t), \int_0^t w(\tau)\,d\tau\right]$$

et de la topologie de Whitney est intégrable en un groupe de Lie (au sens de Milnor).

Bien entendu une algèbre de Lie topologique pré-intégrable au sens de Leslie est pré-intégrable en ce sens géométrique. La réciproque n'est pas vraie.

4.2.2. Pré-intégrabilité dans les groupes réguliers. Nous avons déjà noté qu'une condition nécessaire pour qu'une sous-algèbre de Lie fermée $\mathcal{H}$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ d'un groupe de Lie G soit intégrable en un sous-groupe de Lie est que

$$\mathrm{Ad}\big(\mathrm{Exp}(\mathcal{H})\big)\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}.$$

Cette simple condition a permis de montrer que la sous-algèbre de Lie de $\chi^\infty(T^2)$ du contre-exemple d'Omori n'est pas intégrable. C'est que cette algèbre de Lie ne définit pas un feuilletage de Stefan sur T^2. Les résultats suivants montrent que cette condition de *stabilité* est même suffisante si l'on *abandonne* l'axiomatique des variétés (au profit par exemple de la difféologie de JM. Souriau).

PROPOSITION 3. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une sous-algèbre de Lie fermée $\mathcal{H}$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ d'un groupe de Lie G Milnor-Omori régulier engendre un sous-groupe H connexe par arcs C^∞ dans G est qu'elle soit stable, i.e.*

$$\mathrm{Ad}\big(\mathrm{Exp}(\mathcal{H})\big)\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}.$$

Si $\mathcal{H}$ est intégrable en un sous-groupe de Lie connexe H_0, alors $H = H_0$.

PREUVE. A tout chemin lisse $v\colon I \longrightarrow \mathcal{H}$ associons le chemin $\delta_v\colon I \longrightarrow G$ qui intègre l'équation logarithmique droite $\dot{g}g^{-1} = v$. La structure de groupe de Lie semi-directe de TG montre que $\delta_v \cdot \delta_w$ intègre le chemin $t \longmapsto v(t) + \mathrm{Ad}\big(\delta_v(t)\big)w(t)$. Le groupe étant Milnor-Omori régulier,

$$\delta_v(t) = \prod_t \mathrm{Exp}\big(v(t)dt\big).$$

Comme Ad est C^∞, il en résulte que

$$\mathrm{Ad}\big(\delta_v(t)\big) = \prod_t \mathrm{Ad}\,\mathrm{Exp}\big(v(t)dt\big).$$

L'hypothèse de la proposition assure que $v(t) + \mathrm{Ad}\big(\delta_v(t)\big)w(t) \in \mathcal{H}$ pour tout t. On définit alors H par

$$H = \bigcup_{v \in C^\infty(I,\mathcal{H})} \delta_v(1).$$

La proposition en découle. ∎

Avec les conditions précédentes, on a:

THÉORÈME 9. *Le groupe*

$$C_e^\infty(I,H) = \{g \in C^\infty(I,H) / g(0) = e\}$$

est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $C^\infty(I,\mathcal{H})$ admettant

$$C_{e,e}^\infty(I,H) = \{g \in C^\infty(I,H) / g(0) = g(1) = e\}$$

comme sous-groupe fermé normal.

PREUVE. La structure de groupe de $C_e^\infty(I,H)$ est transportée, via l'application $\delta^{-1}\colon g \longmapsto \dot{g}g^{-1}$, à $C^\infty(I,\mathcal{H})$. Dans cette carte, le produit est défini par $v \star w = v + \mathrm{Ad}(\delta_v)w$, l'inverse de v étant donné par la formule: $v^{-1} = -\mathrm{Ad}(\delta_v^{-1})v$. Il est clair que ces opérations sont infiniment différentiables. Le reste de la proposition est immédiat. ∎

PROPOSITION 4. *Dans la carte précédente, le crochet de Lie est défini par*

$$[v,w](t) = \left[\int_0^t v(\tau)\,d\tau, w(t)\right] + \left[v(t), \int_0^t w(\tau)\,d\tau\right].$$

Si $C_{e,e}^\infty(I,H)$ est un sous-groupe de Lie de $C_e^\infty(I,H)$, il admet pour algèbre de Lie (dans cette même carte), l'algèbre de Lie des chemins $v\colon I \longrightarrow \mathcal{H}$ tels que

$$\int_0^1 v(t)\,dt = 0.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1997-042-7 Published online by Cambridge University Press

Dans ce cas, l'algèbre de Lie H est intégrable en un schéma de groupes de Lie.

PREUVE. La démonstration est identique à celle proposée par J. Leslie dans [Les 93] afin de traiter du troisième théorème de Lie. Dans le cas où l'algèbre de Lie des chemins $v\colon I \longrightarrow H$ tels que

$$\int_0^1 v(t)\,dt = 0$$

est intégrable, le groupe quotient

$$C_e^\infty(I,H)\big/C_{e,e}^\infty(I,H)$$

intègre H en un schéma de groupes de Lie. ■

RÉFÉRENCES

[BaD 93] A. Banyaga, P. Donato, *Some remarks on the integration of the Poisson algebra*, C.P.T Luminy Marseille, 1993, prépublication.

[Bas 64] A. Bastiani, *Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie*, J. Analyse Math. **13**(1964), 1–114.

[Bir 38] G. Birkhoff, *Analytical groups*, Tr. A.M.S. **43**(1938), 61–101.

[Bou 72] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, (Hermann, Paris) Chap. 2,3, 1972.

[BS b71] J. Bochnak, J. Siciak, *Analytic functions in topological vector spaces*, Studia Mathematica, t.XXXIX, 1971.

[Che 46] C. Chevalley, *Theory of Lie Groups, I*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[Daz 85] P. Dazord, *Feuilletages à singularités*, Nederl Akad Wetensch Proc Ser. A-88 (1), Indagationes Math. **47**(1985), 21–39.

[Daz 93] ———, *Lie groups and algebras in infinite dimension: a new approach*, XXXIII Taniguchi Symposium, Symplectic Geometry and its applications, 1993.

[Ebi 70] D. G. Ebin, J. Marsden,*Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid*, Annals of Math. (1)**92**(1970).

[Har 72] P. de la Harpe, *Classical Banach-Lie algebras and Banach-Lie groups of operators in Hilbert space*, Springer, **285**, 1972.

[Köt 69] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*, Die Grund. der Math. Wiss. **159** Springer Verlag, 1969.

[Les 67] J. Leslie, *On a differential structure for the group of diffeomorphisms*, Topology **6**(1967), 264–271.

[Les 87] ———, *On the subgroups of infinite dimensional Lie groups*, Bull. of A.M.S. (1)**16**(1987).

[Les 92] ———, *Some integrable subalgebras of the Lie algebras of infinite-dimensional Lie groups*, Trans. of the A.M.S. **333**(1992), 423–443.

[Les 93] ———, *On the integrability of some infinite dimensional Lie Algebras*, Howard University (Washington DC), preprint.

[Mil 82] J. Milnor, *On infinite dimensional Lie groups*, September, 1982 (unpublished).

[Mil 83] ———, *Remarks on infinite dimensional Lie groups*, Proceedings of Summer School on quantum Gravity, les Houches, session XL, North-Holland, 1983, p. 1007–1057.

[NRW 94] L. Natarajan, E. Rodriguez-Carrington, J. A. Wolf, *New classes of infinite-dimensional Lie groups*, Proc Sympos Pure Math (2)**56**(1994), 377–392.

[Olv 86] P. J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer-Verlag, 107, 1986.

[Omo 74] H. Omori, *Infinite dimensional Lie transformation groups*, Lecture Notes in Math. **427**, Springer-Verlag, 1974.

[Omo 73] ———, *Groups of diffeomorphisms and their subgroups*, Trans. A.M.S. **178**(1973).

[OMYK 81] H. Omori, Y. Maeda, A. Yoshioka, O. Kobayashi, *On regular Fréchet-Lie groups*, Tokyo J. Math. (2)**5**(1981), 365–397.

[Rob 94] T. Robart, *Thèse*, Université Aix-Marseille II, 1994.

[Rob 96] ———, *Groupes de Lie de dimension infinie. Second et troisième théorèmes de Lie. I - Groupes de première espèce*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.**322**, Série I, p. 1071–1074, 1996.

[RoK 97] T. Robart, N. Kamran, *Sur la théorie locale des pseudogroupes de transformations continus infinis*, Math. Annalen, 1997 (à paraître).

[Sou 85] J-M. Souriau, *Un algorithme générateur de structures quantiques*, Société Mathématique de France, Astérisque, hors série, 1985, p. 341–399.

[Stf 74] P. Stefan, *Accessibility and foliations with singularities*, Bull Am. Math. Soc. (6)**80**(1974), 1142–1145.

[Sus 73] H. J. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans Am. Math. Soc. **180**(1973), 171–188.

Department of Mathematics
McGill University
Montreal, Quebec
H3A 2K6
e-mail: robart@math.mcgill.ca