

LS-catégorie algébrique et attachement de cellules

Thomas Kahl

Résumé. Nous montrons que la A-catégorie d'un espace simplement connexe de type fini est inférieure ou égale à n si et seulement si son modèle d'Adams-Hilton est un rétracte homotopique d'une algèbre différentielle à n étages. Nous en déduisons que l'invariant $Acat$ augmente au plus de 1 lors de l'attachement d'une cellule à un espace.

Abstract. We show that the A-category of a simply connected space of finite type is less than or equal to n if and only if its Adams-Hilton model is a homotopy retract of an n -stage differential algebra. We deduce from this that the invariant $Acat$ increases by at most 1 when a cell is attached to a space.

Introduction

La catégorie de Lusternik-Schnirelmann d'un espace topologique X , notée $cat X$, est le plus petit entier n pour lequel il existe un recouvrement ouvert de X constitué de $n + 1$ ouverts contractiles dans X . La détermination directe de $cat X$ étant souvent difficile, de nombreuses approximations de cet invariant homotopique ont été introduites. Parmi ces approximations se trouvent l'invariant e de G. H. Toomer [12] et l'invariant $Acat$ de S. Halperin et J.-M. Lemaire [7] qui tous deux peuvent, pour un espace simplement connexe de type fini X , être déterminés à partir d'un modèle d'Adams-Hilton de X . Lorsqu'on considère une approximation de la catégorie, une question naturelle se pose : quelles propriétés de base de cat possède-t-elle ? L'une des propriétés fondamentales de la catégorie est qu'elle augmente au plus de 1 lors de l'attachement d'une cellule à un espace. Dans ce texte, nous montrons que l'invariant $Acat$ a également cette propriété. Plus précisément, nous montrons le théorème suivant :

Théorème A Soit $f: S \rightarrow X$ une application continue entre des espaces simplement connexes de type fini. Si S a le type d'homotopie d'une suspension, alors $Acat X \cup_f CS \leq Acat X + 1$.

Remarquons que ce comportement est conjecturé pour l'invariant de Toomer. La démonstration du Théorème A repose sur une caractérisation de $Acat$ en termes de la version algébrique suivante de la catégorie forte de T. Ganea [6] : La catégorie forte d'une algèbre de chaînes A , $Cat A$, est le plus petit entier n pour lequel A est quasi-isomorphe à une algèbre de chaînes à n étages, c-à-d une algèbre de chaînes $(T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n), d)$ satisfaisant $d(V_i) \subset T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_{i-1})$. En topologie, un théorème de Ganea [6] entraîne que $cat X \leq n$ si et seulement si X est un rétracte

Reçu par les éditeurs le 9 septembre, 1999.

Classification (AMS) par sujet: 55M30, 18G55.

Mots clés: LS-category, strong category, Adams-Hilton models, cell attachments.

©Société Mathématique du Canada 2001.

homotopique d'un espace dont la catégorie forte est $\leq n$. Notre caractérisation de Acat est l'analogie algébrique suivant de ce résultat :

Théorème B *Soit X un espace simplement connexe de type fini et TV un modèle d'Adams-Hilton de X . Alors $\text{Acat } X \leq n$ si et seulement si TV est un rétracte homotopique d'une algèbre de chaînes A avec $\text{Cat } A \leq n$.*

1 Préliminaires

Dans tout ce texte on travaille sur un corps commutatif quelconque \mathbf{k} . On écrira \otimes au lieu de $\otimes_{\mathbf{k}}$ et Hom au lieu de $\text{Hom}_{\mathbf{k}}$.

La suspension d'un espace vectoriel gradué $V = (V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est l'espace vectoriel gradué sV défini par $(sV)_n = V_{n-1}$. La désuspension de V est l'espace vectoriel gradué $s^{-1}V$ défini par $(s^{-1}V)_n = V_{n+1}$. Si V est un espace vectoriel différentiel, sV est muni de la différentielle $dsv = -s dv$; $s^{-1}V$ est muni de la différentielle $ds^{-1}v = -s^{-1}dv$. On suivra la convention de notation usuelle $V^n = V_{-n}$.

Une algèbre sera toujours une algèbre graduée augmentée ; par *coalgèbre* on entendra toujours une coalgèbre graduée coaugmentée. Pour une (co)algèbre A (C), on notera \bar{A} (\bar{C}) le (co)idéal de (co)augmentation. Pour un espace vectoriel gradué V , on note TV la (co)algèbre tensorielle engendrée par V . Quand TV est la coalgèbre engendrée par V , on écrira, pour des éléments $v_1, \dots, v_n \in V$, $[v_1 | \dots | v_n]$ au lieu de $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$.

La *bar-construction* d'une algèbre différentielle A est la coalgèbre différentielle $BA = (T(s\bar{A}), d_1 + d_2)$ où d_1 et d_2 sont donnés par

$$d_1[sa_1 | \dots | sa_n] = - \sum_{i=1}^n (-1)^{\varepsilon(i)} [sa_1 | \dots | sda_i | \dots | sa_n],$$

$$d_2[sa_1 | \dots | sa_n] = \sum_{i=2}^n (-1)^{\varepsilon(i)} [sa_1 | \dots | sa_{i-1}a_i | \dots | sa_n].$$

Ici $\varepsilon(1) = 0$ et $\varepsilon(i) = i - 1 + \sum_{j=1}^{i-1} |a_j|$ pour $i > 1$. La *cobar-construction* d'une coalgèbre différentielle C est l'algèbre différentielle $\Omega C = (T(s^{-1}\bar{C}), d)$ où la différentielle est donnée par

$$ds^{-1}c = -s^{-1}dc + \sum (-1)^{|c_i|} s^{-1}c_i \otimes s^{-1}c'_i.$$

Ici, $\sum c_i \otimes c'_i$ est la diagonale réduite de c . La bar- et la cobar-construction sont des foncteurs adjoints entre la catégorie des algèbres différentielles et la catégorie des coalgèbres différentielles cocomplètes.

Une *algèbre de chaînes* (AGD_*) est une algèbre différentielle A pour laquelle $A_n = 0$ si $n < 0$. Une *algèbre de cochaînes* (AGD^*) est une algèbre différentielle A pour laquelle $A^n = 0$ si $n < 0$. Pour un espace pointé X , le complexe de cochaînes (normalisées) (à coefficients dans \mathbf{k}) $C^*(X) = C^*(X; \mathbf{k})$ est une AGD^* . Le complexe de chaînes (normalisées) $C_*(\Omega X) = C_*(\Omega X; \mathbf{k})$, où ΩX est l'espace de lacets de Moore

de X , est une AGD_* . Une AGD^* A est *connexe* si $A^0 = \mathbf{k}$; A est *r-connexe* si en plus $A^n = 0$ pour $1 \leq n \leq r$. La (*r*-)connexité d'une AGD_* est définie de manière analogue.

Pour une AGD_* A , le dual de la bar-construction de A , $(BA)^\vee = \text{Hom}(BA, \mathbf{k})$, est une AGD^* connexe. Pour un quasi-isomorphisme d' AGD_* $f: A \rightarrow U$ (c-à-d un morphisme induisant un isomorphisme en homologie), le morphisme d' AGD^* $(Bf)^\vee: (BU)^\vee \rightarrow (BA)^\vee$ est un quasi-isomorphisme (cf. par ex. [4]). Pour une AGD^* connexe de type fini A , la cobar-construction du dual de A , $\Omega A^\vee = \Omega \text{Hom}(A, \mathbf{k})$, est une AGD_* . Pour un quasi-isomorphisme d' AGD^* simplement connexes de type fini $f: A \rightarrow U$, le morphisme d' AGD_* $\Omega f^\vee: \Omega U^\vee \rightarrow \Omega A^\vee$ est un quasi-isomorphisme (cf. par ex. [4]).

H. Munkholm [9] a montré que la catégorie AGD_* des AGD_* et la catégorie AGD_0^* des AGD^* connexes sont des catégories modèles dans le sens de D. Quillen [10] dans lesquelles les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes, les surjections sont des fibrations et les extensions libres sont des cofibrations. Ces deux catégories sont alors équipées d'une théorie homotopique. Une description de ces théories homotopiques se trouve par exemple dans [2], [9] ou [10]. Rappelons ici que deux morphismes d' AGD_* $f, g: (TV, d) \rightarrow (A, d)$ sont homotopes dans AGD_* si et seulement si il existe une application de degré 1 $h: TV \rightarrow A$ telle que $dh + hd = f - g$, $h(xy) = f(x)h(y) + h(x)g(y)$ et $h(1) = 0$. Rappelons encore qu'un morphisme surjectif entre des AGD_* libres admet une section si et seulement s'il admet une section homotopique. Rappelons enfin le « lemme de relèvement » suivant : Étant donné un morphisme d' AGD_* $f: (TV, d) \rightarrow B$ et un quasi-isomorphisme $g: A \rightarrow B$, il existe un morphisme $\lambda: TV \rightarrow A$ tel que $g \circ \lambda \simeq f$.

2 La catégorie et la catégorie forte d'une AGD_*

Dans cette section nous rappelons la définition de la catégorie forte d'un espace et son lien avec la catégorie. Nous définissons la catégorie forte d'une AGD_* et montrons que, pour tout espace X , $\text{Cat } X \geq \text{Cat } C_*(\Omega X)$. Nous définissons la catégorie d'une AGD_* et montrons que, pour un espace simplement connexe de type fini X , $\text{Acat } X = \text{cat } C_*(\Omega X)$. Tout espace est supposé bien pointé et connexe par arcs. Toute application continue préserve le point base, et « homotope » signifie « homotope rel. * ». Un espace est dit de type fini s'il a le type d'homotopie faible d'un CW-complexe ayant un nombre fini de cellules en chaque dimension.

Définition 2.1 La *catégorie forte* d'un espace X , notée $\text{Cat } X$, est le plus petit entier $n \geq 0$ pour lequel il existe une suite de cofibrations homotopiques

$$Z_i \rightarrow X_i \rightarrow X_{i+1}, \quad 0 \leq i \leq n,$$

telle que X_0 a le type d'homotopie d'un point et X_n a le type d'homotopie de X . S'il n'existe pas de tel entier, on pose $\text{Cat } X = \infty$.

La catégorie forte a été introduite par T. Ganea [6]. La Définition 2.1 est en fait une variante d'une caractérisation, due à Ganea (cf. [6, 2.1]), de la catégorie forte

originale. La différence principale entre la notion de Ganea et celle que nous utilisons ici est que, pour un espace non-simplement connexe X , on a, selon notre définition, $\text{Cat } X = \infty$. Cela vient du fait que nous demandons aux espaces Z_i dans la Définition 2.1 d'être connexes par arcs. Remarquons que O. Cornea a montré qu'on peut remplacer les espaces Z_i dans la Définition 2.1 par des suspensions i -èmes [3]. La proposition suivante est un corollaire immédiat de la Proposition 2.2 de [6] :

Proposition 2.2 *Pour un CW-complexe simplement connexe X , on a $\text{cat } X \leq n$ si et seulement si X est un rétracte homotopique d'un espace Y avec $\text{Cat } Y \leq n$. ■*

Le Théorème B découlera de l'analogie pour les algèbres de chaînes de cette proposition. La catégorie forte d'une AGD_* est définie comme suit :

Définition 2.3 Une algèbre de chaînes est à 0 étages si son augmentation est un isomorphisme. On dira qu'une algèbre de chaînes (TV, d) est à n étages ($n > 0$) s'il existe une décomposition $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ telle que $d(V_i) \subset T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_{i-1})$, $1 \leq i \leq n$. La catégorie forte d'une AGD_* A , notée $\text{Cat } A$, est le plus petit entier n pour lequel A est quasi-isomorphe à une AGD_* à n étages. S'il n'existe pas de tel entier, on pose $\text{Cat } A = \infty$.

Remarquons que l'invariant Cat est l'analogie pour les algèbres de chaînes d'un invariant défini par J.-M. Lemaire et F. Sigrist pour les \mathbb{Q} -algèbres de Lie (cf. [8]). Le lien entre la catégorie forte topologique et la catégorie forte algébrique est le suivant :

Proposition 2.4 *Pour tout espace X , $\text{Cat } X \geq \text{Cat } C_*(\Omega X)$.*

Démonstration On peut supposer que X est simplement connexe. On montre par récurrence que, si $\text{Cat } X \leq n$, alors $\text{Cat } C_*(\Omega X) \leq n$. Pour $n = 0$ cela est évident. Si $\text{Cat } X \leq 1$, alors X a le type d'homotopie d'une suspension ΣZ . Grâce au théorème de Bott-Samelson, l'algèbre à un étage $T(\tilde{H}_*Z)$ est un modèle libre de $C_*(\Omega X)$. On a alors $\text{Cat } C_*(\Omega X) \leq 1$. Soit $n > 1$ et $\text{Cat } X \leq n$. Grâce au théorème de Cornea [3] déjà mentionné, il existe une application continue $f: \Sigma Z \rightarrow Y$ telle que $\text{Cat } Y \leq n - 1$ et $X \simeq C_f = Y \cup_f C\Sigma Z$. Par le théorème de Bott-Samelson, l' AGD_* $(T(\tilde{H}_*Z), 0)$ est un modèle libre de $C_*(\Omega\Sigma Z)$. Par hypothèse de récurrence, il existe une AGD_* à $n - 1$ étages $T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-1})$ qui est quasi-isomorphe à $C_*(\Omega Y)$. Par le lemme de relèvement, il existe un morphisme d' AGD_*

$$\phi: T(\tilde{H}_*Z) \rightarrow T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-1})$$

qui est un modèle de $C_*(\Omega f)$. Puisque le foncteur $C_*\Omega$ préserve les sommes amalgamées homotopiques d'espaces simplement connexes (cf. [1], [2, I.7.29]), la cofibre homotopique de ϕ , l' AGD_* à n étages $T(V_1 \oplus \cdots \oplus V_{n-1} \oplus s\tilde{H}_*Z)$, est un modèle de $C_*(\Omega X)$. Cela montre que $\text{Cat } C_*(\Omega X) \leq n$. ■

Nous définissons maintenant la catégorie d'une algèbre de chaînes. Dans la définition nous utilisons la notation suivante : Pour une algèbre graduée différentielle (A, d) , on note $B_n A$ la sous-coalgèbre différentielle $T^{\leq n}(s^{-1}\tilde{A})$ de BA et $p_n(A)$:

$\Omega B_n A \rightarrow A$ la restriction du morphisme d'adjonction $p(A): \Omega B A \rightarrow A$. Remarquons encore que, pour $n > 0$, A est canoniquement un sous-espace vectoriel différentiel de $\Omega B_n A$. Puisque la restriction de $p_n(A): \Omega B_n A \rightarrow A$ à ce sous-espace vectoriel différentiel est l'identité, le morphisme $p_n(A)$ ($n > 0$) est à la fois surjectif et surjectif en homologie.

Définition 2.5 La catégorie d'une $AGD_* A$, notée $cat A$, est le plus petit entier n tel que, pour un (de manière équivalente : pour tout) modèle libre (TV, d) de A , il existe une section homotopique du morphisme $p_n(TV): \Omega B_n TV \rightarrow TV$ (c-à-d un morphisme d'algèbres différentielles $s: TV \rightarrow \Omega B_n TV$ vérifiant $p_n(TV) \circ s \simeq id_{TV}$). S'il n'existe pas de tel n , on pose $cat A = \infty$.

Nous voulons montrer que, pour un espace simplement connexe de type fini X , $Acat X = cat C_*(\Omega X)$. Rappelons la définition de $Acat$:

Définition 2.6 ([7]) La A -catégorie d'un espace simplement connexe X , notée $Acat X$, est le plus petit entier n tel que, pour un (de manière équivalente : pour tout) modèle libre $TV \xrightarrow{\sim} C^*(X)$ où TV est connexe, il existe un diagramme commutatif dans AGD_0^*

$$\begin{array}{ccc} TV & \xlongequal{\quad} & TV \\ \downarrow & \searrow & \uparrow \\ TV/T^{>n}V & \xleftarrow{\sim} & U. \end{array}$$

Remarquons qu'un tel diagramme existe si et seulement si, pour toute factorisation du morphisme $TV \rightarrow TV/T^{>n}V$ en une extension libre $j: TV \rightarrow TV \amalg TW$ et un quasi-isomorphisme $r: TV \amalg TW \xrightarrow{\sim} TV/T^{>n}V$, l'extension libre j admet une rétraction.

Proposition 2.7 Soit X un espace simplement connexe de type fini. Alors $Acat X = cat C_*(\Omega X)$.

Démonstration Soit $A = (TV, d)$ un modèle d'Adams-Hilton de X (ou un modèle libre de l' $AGD_* C_*(\Omega X)$) tel que A est connexe et de type fini. Il suit de [7] (ou de [5]) que $(BA)^\vee$ (où on note $^\vee$ le foncteur $Hom(-, \mathbf{k})$) est un modèle libre de l'algèbre de cochaînes $C^*(X)$ et donc que $Acat X$ est le plus petit n pour lequel il existe un diagramme commutatif d'algèbres de cochaînes

$$\begin{array}{ccccc} T(s\bar{A}^\vee) & \xlongequal{\quad} & (BA)^\vee & \xlongequal{\quad} & (BA)^\vee \\ & & \downarrow & \searrow & \uparrow \\ T(s\bar{A}^\vee)/T^{>n}(s\bar{A}^\vee) & \xlongequal{\quad} & (B_n A)^\vee & \xleftarrow{\sim} & (BA)^\vee \amalg T(W) \end{array}$$

où le triangle de gauche est le modèle minimal (cf. [7]) de la projection $(BA)^\vee \rightarrow (B_nA)^\vee$.

Montrons que $\text{Acat } X \leq n$ si et seulement si $\text{cat } C_*(\Omega X) \leq n$. Pour $n = 0$ cela est clair. Soit $n > 0$. Supposons d'abord que $\text{Acat } X \leq n$. Il existe alors un diagramme comme ci-dessus. Comme A est connexe et $n > 0$, on a que $H^i(BA)^\vee \rightarrow H^i(B_nA)^\vee$ est un isomorphisme pour $i = 0, 1, 2$. Comme A est de type fini, il en résulte que $(BA)^\vee \amalg T(W)$ est 1-connexe et de type fini. On peut alors appliquer le foncteur Ω^\vee au diagramme ci-dessus. Cela donne le diagramme commutatif suivant d'algèbres de chaînes :

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega BA & \xlongequal{\quad} & \Omega BA \\
 \uparrow & \swarrow & \downarrow \\
 \Omega B_n A & \xrightarrow{\sim} & \Omega((BA)^\vee \amalg T(W))^\vee
 \end{array}$$

Comme le morphisme d'adjonction $p(A): \Omega BA \rightarrow A$ est un quasi-isomorphisme (cf. par ex. [4]), il en découle que $\text{cat } C_*(\Omega X) = \text{cat } A \leq n$.

Inversement supposons $\text{cat } C_*(\Omega X) \leq n$ ($n > 0$). Il existe alors une section homotopique σ de $p_n(A): \Omega B_n A \rightarrow A$. Comme $p_n(A)$ est surjectif, on peut supposer que σ est une vraie section. En appliquant le foncteur ${}^\vee B$ on obtient le diagramme suivant d'algèbres de cochaînes connexes:

$$\begin{array}{ccc}
 (BA)^\vee & \xlongequal{\quad} & (BA)^\vee \\
 \downarrow & \searrow^{(Bp_n(A))^\vee} & \uparrow (B\sigma)^\vee \\
 (B_nA)^\vee & \xleftarrow{\sim} & (B\Omega B_n A)^\vee
 \end{array}$$

Il en découle que $\text{Acat } X \leq n$. ■

3 Preuve des Théorèmes A et B

Dans cette section nous prouvons les deux théorèmes énoncés dans l'introduction. Nous montrons d'abord que la catégorie d'une $\text{AGD}_* A = TV$ est inférieure ou égale à n si et seulement si A est un rétracte homotopique d'une $\text{AGD}_* U$ avec $\text{Cat } U \leq n$. Le Théorème B est un corollaire immédiat de ce résultat. En utilisant le Théorème B, nous établissons ensuite le Théorème A.

Notation Soit (V, d) un espace vectoriel gradué différentiel. On note $CV = C(V, d)$ le cône sur (V, d) , c-à-d l'espace vectoriel gradué différentiel $(V \oplus sV, d)$ où $dv = dv$ et $dsv = v - sdv$. Le cône CV est acyclique, et l'augmentation de TCV est un quasi-isomorphisme.

Proposition 3.1 *Pour toute $\text{AGD}_* A$, $\text{Cat } \Omega B_n A \leq n$.*

Démonstration On procède par récurrence sur n . $\Omega_{B_0}A = \mathbf{k}$ est une AGD_* à 0 étages. Soit $n > 0$. Choisissons un quasi-isomorphisme d'espaces vectoriels gradués différentiels $\rho: H\bar{A} \rightarrow \bar{A}$ et formons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 T(s^{-2}(sH\bar{A})^{\otimes n}) & \xrightarrow{\sim} & T(s^{-2}(s(\bar{A}, d))^{\otimes n}) & \xrightarrow{\delta} & \Omega_{B_{n-1}}A \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 T(C(s^{-2}(sH\bar{A})^{\otimes n})) & \xrightarrow{\sim} & T(C(s^{-2}(s(\bar{A}, d))^{\otimes n})) & \longrightarrow & \Omega_{B_n}A
 \end{array}$$

où δ est défini par

$$\begin{aligned}
 \delta s^{-2}[sa_1 \mid \cdots \mid sa_n] &= d_{\Omega_{B_n}A} s^{-1}[sa_1 \mid \cdots \mid sa_n] \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n (-1)^{\varepsilon(i)} s^{-1}[sa_1 \mid \cdots \mid sda_i \mid \cdots \mid sa_n].
 \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, il existe une AGD_* à $n - 1$ étages $U = (T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_{n-1}), d)$ qui est quasi-isomorphe à $\Omega_{B_{n-1}}A$. Par le lemme de relèvement, il existe alors un morphisme $\delta': T(s^{-2}(sH\bar{A})^{\otimes n}) \rightarrow U$ lequel est un modèle de δ . Comme le carré de droite du diagramme ci-dessus est une somme amalgamée, on a, par le lemme de recollement (cf. [2, II.1.2]), que $\Omega_{B_n}A$ est quasi-isomorphe à la cofibre de δ' laquelle est l' AGD_* à n étages

$$U \amalg T(s^{-1}(sH\bar{A})^{\otimes n}) = T(W_1 \oplus \cdots \oplus W_{n-1} \oplus s^{-1}(sH\bar{A})^{\otimes n}).$$

Cela montre que $\text{Cat } \Omega_{B_n}A \leq n$. ■

Il s'ensuit qu'une $AGD_* A = TV$ est un rétracte homotopique d'une $AGD_* U$ avec $\text{Cat } U \leq n$ si la catégorie de A est inférieure ou égale à n . Pour la réciproque, il suffit de savoir qu'on a $\text{cat } A \leq \text{Cat } A$. C'est essentiellement la proposition suivante de H. Scheerer et D. Tanré qui nous garantira cela.

Proposition 3.2 ([11]) Soit A une AGD_* . Pour tout entier $n > 0$, l'application $H_*(\ker p_n(A)) \rightarrow H_*(\ker p_{n+1}(A))$ induite par l'inclusion $\ker p_n(A) \hookrightarrow \ker p_{n+1}(A)$ est nulle. ■

Lemme 3.3 Considérons le diagramme commutatif suivant d'algèbres de chaînes :

$$\begin{array}{ccc}
 T(V, 0) & \xrightarrow{f} & E \\
 \downarrow & \nearrow \lambda & \downarrow \pi \\
 TC(V, 0) & \xrightarrow{h} & B.
 \end{array}$$

Si π est surjectif et surjectif en homologie, alors il existe un morphisme d'AGD* λ rendant le diagramme commutatif si et seulement si $[fv] = 0$ pour tout $v \in V$.

Démonstration Il est clair que, si λ existe, $[fv] = 0$ pour tout $v \in V$.

Supposons que $[fv] = 0$ pour tout $v \in V$. Soit \mathcal{B} une base de V . Pour $v \in \mathcal{B}$, il existe $e_v \in E$ tel que $de_v = fv$. Comme $\pi e_v - hsv$ est un cycle et $H_*\pi$ est surjectif, il existe un cycle $\hat{e}_v \in E$ tel que $[\pi\hat{e}_v] = [\pi e_v - hsv]$. Comme $\pi\hat{e}_v - \pi e_v + hsv$ est un bord et π est surjectif, il existe $\bar{e}_v \in E$ tel que $d\pi\bar{e}_v = \pi\hat{e}_v - \pi e_v + hsv$. Alors $\hat{e}_v - d\bar{e}_v$ est un cycle et $\pi(\hat{e}_v - d\bar{e}_v) = \pi e_v - hsv$. On peut maintenant définir λ par $\lambda v = fv$ et $\lambda sv = e_v - \hat{e}_v + d\bar{e}_v$. Il est clair que λ commute à la différentielle et rend commutatif le diagramme. ■

Théorème 3.4 Pour une AGD* $A = (TV, d)$, on a $\text{cat } A \leq n$ si et seulement si A est un rétracte homotopique d'une AGD* U avec $\text{Cat } U \leq n$.

Démonstration Par la Proposition 3.1, si $\text{cat } A \leq n$, alors A est un rétracte homotopique d'une AGD* U avec $\text{Cat } U \leq n$. Supposons inversement que A est un rétracte homotopique d'une AGD* U avec $\text{Cat } U \leq n$. On a alors que A est un rétracte homotopique d'une AGD* à n étages $(T(W_1 \oplus \dots \oplus W_n), d)$. Pour prouver que $\text{cat } A \leq n$, il suffit de montrer que $\text{cat } T(W_1 \oplus \dots \oplus W_n) \leq n$. Pour $n = 0$, cela est évident. Pour $n = 1$, comme d est nulle sur W_1 , la section d'algèbres de $p_1(T(W_1))$ induite par l'inclusion $W_1 \rightarrow \Omega B_1 T W_1$ est une section d'AGD*. Pour $n > 1$, on a, par récurrence, une section σ de $p_{n-1}(T(W_1 \oplus \dots \oplus W_{n-1}))$. Afin d'alléger la notation, nous écrirons dans la suite p_k au lieu de $p_k(T(W_1 \oplus \dots \oplus W_n))$. Formons le diagramme commutatif suivant dans lequel $\delta s^{-1}w_n = dw_n$, le carré de gauche est une somme amalgamée, $\bar{\delta}$ est l'extension de cobase de δ et i et j sont les inclusions évidentes :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Omega B_{n-1} T(W_1 \oplus \dots \oplus W_{n-1}) & \xrightarrow{\Omega B_{n-1} i} & \Omega B_{n-1} T(W_1 \oplus \dots \oplus W_n) \\
 & \nearrow & \uparrow \sigma & & \downarrow j \\
 T(s^{-1}W_n, 0) & \xrightarrow{\delta} & T(W_1 \oplus \dots \oplus W_{n-1}) & \xrightarrow{p_{n-1}} & \Omega B_n T(W_1 \oplus \dots \oplus W_n) \\
 \downarrow & & \downarrow i & \nearrow p_n & \\
 TC(s^{-1}W_n, 0) & \xrightarrow{\bar{\delta}} & T(W_1 \oplus \dots \oplus W_n) & &
 \end{array}$$

Considérons un élément $w_n \in W_n$. Puisque $H_* p_{n-1}[\Omega B_{n-1} i \circ \sigma \circ \delta(s^{-1}w_n)] = [dw_n] = 0$, on a $[\Omega B_{n-1} i \circ \sigma \circ \delta(s^{-1}w_n)] \in \ker H_* p_{n-1}$. Puisque le morphisme p_{n-1} est surjectif en homologie, le connectant de la longue suite exacte en homologie associée à la courte suite exacte d'espaces vectoriels différentiels

$$0 \rightarrow \ker p_{n-1} \rightarrow \Omega B_{n-1} A \xrightarrow{p_{n-1}} A \rightarrow 0$$

est nulle. On a donc des courtes suites exactes

$$0 \rightarrow H_*(\ker p_{n-1}) \rightarrow H_*(\Omega B_{n-1}A) \xrightarrow{H_*(p_{n-1})} H_*A \rightarrow 0.$$

Il s'ensuit que $H_*(\ker p_{n-1}) = \ker H_*p_{n-1}$ et donc que $[\Omega B_{n-1}i \circ \sigma \circ \delta(s^{-1}w_n)] \in H_*(\ker p_{n-1})$. Par la Proposition 3.2, on a alors $[j \circ \Omega B_{n-1}i \circ \sigma \circ \delta(s^{-1}w_n)] = 0$. Puisque p_n est surjectif et surjectif en homologie, il existe, par le Lemme 3.3, un morphisme $\lambda: TC(s^{-1}W_n, 0) \rightarrow \Omega B_n T(W_1 \oplus \dots \oplus W_n)$ tel que $\lambda|_{T(s^{-1}W_n)} = j \circ \Omega B_{n-1}i \circ \sigma \circ \delta$ et $p_n \circ \lambda = \bar{\delta}$. Comme le carré de gauche dans le diagramme ci-dessus est une somme amalgamée, λ et $j \circ \Omega B_{n-1}i \circ \sigma$ induisent une section de p_n . On a donc $\text{cat } T(W_1 \oplus \dots \oplus W_n) \leq n$. ■

Le Théorème B est un corollaire immédiat du théorème précédent et de la Proposition 2.7.

Démonstration du Théorème A On peut choisir comme modèle du morphisme d'AGD*

$$C_*\Omega X \rightarrow C_*\Omega(X \cup_f CS)$$

une extension libre de la forme $(TV, d) \rightarrow (T(V \oplus \tilde{H}_*S), d)$ où $d(\tilde{H}_*S) \subset TV$. Supposons que $\text{Acat } X \leq n$. Par le Théorème B, cela signifie que TV est un rétracte homotopique d'une AGD* à n étages $T(W_1 \oplus \dots \oplus W_n)$. Il existe alors un morphisme $i: TV \rightarrow T(W_1 \oplus \dots \oplus W_n)$ et un morphisme $r: T(W_1 \oplus \dots \oplus W_n) \rightarrow TV$ tels que $r \circ i \simeq \text{id}_{TV}$. Formons le diagramme commutatif suivant dans lequel les deux carrés sont des sommes amalgamées :

$$\begin{array}{ccccc} (TV, d) & \xrightarrow{i} & (T(W_1 \oplus \dots \oplus W_n), d) & \xrightarrow{r} & (TV, d) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (T(V \oplus \tilde{H}_*S), d) & \twoheadrightarrow & (T(W_1 \oplus \dots \oplus W_n \oplus \tilde{H}_*S), d) & \twoheadrightarrow & (T(V \oplus \tilde{H}_*S), d') \end{array}$$

On ne peut pas supposer que la différentielle d' est la même que la différentielle d . Puisque $r \circ i \simeq \text{id}$, on a néanmoins que le composé du bas est un quasi-isomorphisme. Il en découle que $(T(V \oplus \tilde{H}_*S), d)$ est un rétracte homotopique de l'AGD* à $n + 1$ étages $(T(W_1 \oplus \dots \oplus W_n \oplus \tilde{H}_*S), d)$. Par le Théorème B, cela montre que $\text{Acat } X \cup_f CS \leq n + 1$. ■

Références

- [1] J. F. Adams and P. J. Hilton, *On the chain algebra of a loop space*. Comment. Math. Helv. **30**(1955), 305–330.
- [2] H. J. Baues, *Algebraic Homotopy*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
- [3] O. Cornea, *Strong LS category equals Cone-length*. Topology (2) **34**(1995), 377–381.

- [4] Y. Félix, S. Halperin et J.-C. Thomas, *Adams' cobar equivalence*. Trans. Amer. Math. Soc. **329**(1992), 531–549.
- [5] ———, *Differential graded algebras in topology*. Handbook of Algebraic Topology (ed. I. M. James), North-Holland, 1995.
- [6] T. Ganea, *Lusternik-Schnirelmann category and strong category*. Illinois J. Math. **11**(1967), 417–427.
- [7] S. Halperin et J.-M. Lemaire, *Notions of category in differential algebra*. Algebraic Topology—Rational Homotopy, Lecture Notes in Math. **1318**, Springer-Verlag, 1988, 138–154.
- [8] J.-M. Lemaire et F. Sigrist, *Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la L.S. catégorie*. Comment. Math. Helv. **56**(1981), 103–122.
- [9] H. Munkholm, *DGA algebras as a Quillen model category*. J. Pure Appl. Alg. **13**(1978), 221–232.
- [10] D. Quillen, *Homotopical Algebra*. Lecture Notes in Math. **43**, Springer-Verlag, 1967.
- [11] H. Scheerer et D. Tanré, *Lusternik-Schnirelmann category and algebraic R-local homotopy theory*. Canad. J. Math. (4) **50**(1998), 845–862.
- [12] G. H. Toomer, *Lusternik-Schnirelmann category and the Moore spectral sequence*. Math. Z. **138** (1974), pp. 123–143.

UMR CNRS 8524
U.F.R. de Mathématiques
Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
France
courriel: kahl@agat.univ-lille1.fr