DEMI-GROUPES SEPARATEURS

J.-C. Derdérian et G. Thierrin

(received October 5, 1965)

Un demi-groupe d'applications d'un ensemble est dit séparateur si, pour tout triple d'éléments x, y, z de l'ensemble, avec $x \neq y$, il existe une application α du demi-groupe telle que $x\alpha = z$ et $y\alpha \neq z$. Un tel demi-groupe d'applications est évidemment transitif. Tout demi-groupe isomorphe à un demi-groupe séparateur d'applications est dit un demi-groupe séparateur.

Comme l'a montré Tully ([4],[5]), les demi-groupes transitifs et séparateurs[1)] peuvent être caractérisés à l'aide de certaines congruences à droite. Après avoir rappelé le premier résultat, nous retrouvons le deuxième au moyen de certaines congruences à droite appelées séparatrices à droite dont l'étude fait l'objet de la deuxième partie de cet article. Nous montrons en particulier que les congruences à droite séparatrices sont des équivalences principales à droite associées à certains complexes appelés séparateurs à droite, définis au moyen de certaines conditions constructives, ce qui nous permet de donner une autre caractérisation des demi-groupes séparateurs. Pour terminer nous étudions les demi-groupes qui sont produits sous-directs de demi-groupes séparateurs.

1. Demi-groupes transitifs et demi-groupes séparateurs. Un demi-groupe D d'applications d'un ensemble E est dit transitif si, pour tout couple $x, y \in E$, il existe $\alpha \in D$ tel que $x\alpha = y$. Tout demi-groupe isomorphe à un demi-groupe transitif d'applications est dit transitif (à droite). Tully [4] a donné une caractérisation des demi-groupes transitifs au moyen de certaines congruences à droite de la manière suivante:

1) Tully emploie l'expression strongly disjunctive.

https://doi.org/10.4153/CMB-1966-074-3 Published online by Cambridge University Press

Rappelons d'abord qu'une congruence à droite R d'un demi-groupe D est une relation d'équivalence de D telle que $a \equiv b\ (R)$ entraîne $ax \equiv bx\ (R)$ pour tout $x \in D$. Si H est un complexe (partie non vide) de D, la relation $R:H$ définie par $a \equiv b\ (R:H) \Longleftrightarrow ha \equiv hb\ (R)$ pour tout $h \in H$ est aussi une congruence à droite et $R:H = \bigcap_{h \in H} R:h$.

Une congruence à droite R est dite modulaire s'il existe $e \in D$ tel que $ex \equiv x\ (R)$ pour tout $x \in D$. L'élément e est dit un élément unité à gauche modulo R. Dans ce cas, on a $R:D \leq R$ et $R:D$ est la plus grande congruence contenue dans R, une congruence étant une congruence à droite et à gauche.

Une congruence à droite R est dite nette à droite, si chaque classe de R est nette à droite ([2], [3]), c'est-à-dire si pour tout couple $a, b \in D$, il existe $x \in D$ tel que $ax \equiv b\ (R)$.

Un demi-groupe D d'applications de l'ensemble E est dit séparateur si pour tout triple $x, y, z \in E$, avec $x \neq y$, il existe $\alpha \in D$ tel que $x\alpha = z$, $y\alpha \neq z$. Un tel demi-groupe est évidemment transitif. Le demi-groupe de toutes les applications d'un ensemble est séparateur, de même que tout demi-groupe transitif d'applications injectives.

Un demi-groupe D est dit séparateur (à droite) s'il est isomorphe à un demi-groupe séparateur d'applications d'un ensemble.

Une congruence à droite R d'un demi-groupe D est dite séparatrice (à droite) si pour tout triple $a, b, c \in D$, avec $a \neq b\ (R)$, il existe $x \in D$ tel que $ax \equiv c\ (R)$, $bx \neq c\ (R)$.

Nous rappelons deux résultats de Tully: [4] et [5].

PROPOSITION 1. Un demi-groupe D est transitif si et seulement s'il existe une congruence à droite R de D ayant les propriétés suivantes:

(1) R est modulaire.

(2) R est nette à droite.

(3) $R:D$ est l'égalité.

PROPOSITION 2. Un demi-groupe D est séparateur si et seulement s'il existe une congruence à droite R de D modulaire et séparatrice telle que $R:D$ soit l'égalité.

2. Congruences à droite séparatrices. Nous venons de voir que les congruences à droite séparatrices interviennent dans la caractérisation interne des demi-groupes séparateurs. C'est pourquoi nous allons étudier quelques propriétés de ces congruences.

Remarquons d'abord qu'une congruence à droite séparatrice est nette à droite. L'inverse est faux. Par exemple, si D est un demi-groupe de plus d'un élément vérifiant $ab = b$ pour tout $a, b \in D$, l'égalité est une congruence nette à droite, mais non séparatrice. Une congruence à droite séparatrice n'est pas nécessairement modulaire. Par exemple, si D est un demi-groupe simple à droite, simplifiable à droite et sans éléments idempotents, l'égalité est une congruence séparatrice, mais non modulaire.

Nous allons montrer maintenant que toute congruence à droite séparatrice est une équivalence principale à droite. Auparavant, nous allons rappeler quelques résultats de Dubreil ([2], [3]).

Si H et K sont deux complexes du demi-groupe D, l'ensemble $H.^{\cdot}K = \{x \mid x \in D, Kx \leq H\}$ est dit le quotient à droite de H par K. On définit de façon symétrique le quotient à gauche $H^{\cdot}.K$. L'équivalence principale à droite associée au complexe H, notée R_H, est définie par

$$a \equiv b \ (R_H) \Longleftrightarrow H.^{\cdot}a = H.^{\cdot}b$$

on montre que c'est une congruence à droite. Le résidu à droite de H, noté W_H, est l'ensemble $W_H = \{a \mid a \in D, H.^{\cdot}a = \phi\}$. Si $W_H \neq \phi$, alors W_H est une classe de R_H. Le complexe H est dit fort si $H.^{\cdot}a \cap H.^{\cdot}b \neq \phi$ entraîne $H.^{\cdot}a = H.^{\cdot}b$. On montre que, si H est fort, $H^{\cdot}.a \cap H^{\cdot}.b \neq \phi$ entraîne aussi $H^{\cdot}.a = H^{\cdot}.b$.

PROPOSITION 3. Si R est une congruence à droite séparatrice du demi-groupe D, alors $R = R_H$ pour toute classe H de R.

Preuve. On sait ([2], [3]) que $R \leq R_H$. Montrons que $R_H \leq R$. Soit $a \equiv b \ (R_H)$, c'est-à-dire $H.^{\cdot}a = H.^{\cdot}b$, et supposons que $a \not\equiv b\ (R)$. Si $h \in H$, il existe, puisque R est séparatrice à droite, un élément x tel que

$$ax \equiv h\ (R)\ , \quad bx \not\equiv h\ (R)\ .$$

D'où $x \in H.\dot{}a$ et $x \notin H.\dot{}b$, ce qui est contradictoire.

Un complexe H est dit <u>méta-fort à droite</u> si

$$\phi \neq H.\dot{}a \leq H.\dot{}b \text{ entraîne } H.\dot{}a = H.\dot{}b\ .$$

Tout complexe fort est évidemment méta-fort à droite.

PROPOSITION 4. Soit H un complexe méta-fort à droite du demi-groupe D .

(1) Toute classe A modulo R_H , distincte du résidu W_H , est de la forme

$$A = H^{\cdot}.(H.\dot{}a) \text{ pour tout } a \in A\ .$$

(2) Tout complexe A de la forme

$$A = H^{\cdot}.(H.\dot{}a) \text{ avec } a \notin W_H$$

est une classe modulo R_H , distincte de W_H .

<u>Preuve.</u> (1) On a $a \in H^{\cdot}.(H.\dot{}a)$. Si $b \in A$, alors $H.\dot{}a = H.\dot{}b$ et $H^{\cdot}.(H.\dot{}a) = H^{\cdot}.(H.\dot{}b)$. Donc $b \in H^{\cdot}.(H.\dot{}a)$ et $A \leq H^{\cdot}.(H.\dot{}a)$. Soit $r \in H^{\cdot}.(H.\dot{}a)$. On a $r(H.\dot{}a) \leq H$ et donc, $\phi \neq H.\dot{}a \leq H.\dot{}r$. Comme H est méta-fort à droite, $H.\dot{}a = H.\dot{}r$ et $r \in A$. Par conséquent $A = H^{\cdot}.(H.\dot{}a)$.

(2) Par hypothèse, la classe modulo R_H contenant a est distincte du résidu W_H . Donc cette classe est, d'après (1), de la forme $H^{\cdot}.(H.\dot{}a)$ et le complexe A est une classe modulo R_H .

PROPOSITION 5. Si R est une congruence à droite séparatrice du demi-groupe D , toute classe H modulo R est un complexe méta-fort à droite. Un complexe A de D est une classe modulo R si et seulement si $A = H^{\cdot}.(H.\dot{}a)$.

<u>Preuve.</u> Soit $\phi \neq H.\dot{}a \leq H.\dot{}b$ et supposons que $H.\dot{}a \neq H.\dot{}b$. Alors $a \not\equiv b\ (R_H)$. D'après la proposition 3, $R = R_H$. Donc $a \not\equiv b\ (R)$. Soit $h \in H$. Comme R est séparatrice, il existe x tel que

https://doi.org/10.4153/CMB-1966-074-3 Published online by Cambridge University Press

$$ax \equiv h\ (R)\ , \quad bx \not\equiv h\ (R)\ .$$

D'où $x \in H.^{\cdot}a$ et $x \notin H.^{\cdot}b$, ce qui est en contradiction avec

$$H.^{\cdot}a \leq H.^{\cdot}b\ .$$

La seconde partie de la proposition découle de la première partie, des propositions 3 et 4 et du fait que toute classe H de R est nette à droite.

PROPOSITION 6. Un complexe H est méta-fort à droite si et seulement si les relations

$H.^{\cdot}a \neq \phi$, $H.^{\cdot}b \neq \phi$, $H^{\cdot}.(H.^{\cdot}a) \cap H^{\cdot}.(H.^{\cdot}b) \neq \phi$ entraînent $H.^{\cdot}a = H.^{\cdot}b$.

Preuve. La condition est nécessaire. D'après la proposition 4, $H^{\cdot}.(H.^{\cdot}a)$ et $H^{\cdot}.(H.^{\cdot}b)$ sont des classes modulo R_H . Comme ces deux classes ont une intersection non vide, elles sont donc identiques. D'autre part, $a \in H^{\cdot}.(H.^{\cdot}a)$ et $b \in H^{\cdot}.(H.^{\cdot}b)$. Donc $a \equiv b\ (R_H)$ et $H.^{\cdot}a = H.^{\cdot}b$.

La condition est suffisante. Soit $\phi \neq H.^{\cdot}a \leq H.^{\cdot}b$. De $b(H.^{\cdot}b) \leq H$ suit $b(H.^{\cdot}a) \leq H$. Par conséquent $b \in H^{\cdot}.(H.^{\cdot}a) \cap H^{\cdot}.(H.^{\cdot}b)$ et $H.^{\cdot}a = H.^{\cdot}b$.

Un complexe H du demi-groupe D est dit séparateur à droite s'il a les propriétés suivantes:

(a) H est net à droite et méta-fort à droite.

(b) $H^{\cdot}.(H.^{\cdot}a)$ est net à droite pour tout $a \in D$.

(c) La relation $(H^{\cdot}.(H.^{\cdot}c)).^{\cdot}a \leq (H^{\cdot}.(H.^{\cdot}c)).^{\cdot}b$ entraîne $H.^{\cdot}a = H.^{\cdot}b$.

PROPOSITION 7. (1) Toute classe H d'une congruence à droite séparatrice R est un complexe séparateur à droite et l'on a $R = R_H$.

(2) Si H est un complexe séparateur à droite du demi-groupe D , l'équivalence principale à droite R_H est une congruence à droite séparatrice.

Preuve. (1) C'est une conséquence des propositions 3 et 5 et du fait que toute classe d'une congruence à droite séparatrice est un complexe net à droite.

https://doi.org/10.4153/CMB-1966-074-3 Published online by Cambridge University Press

(2) Soient $a, b, c \in D$ et $a \not\equiv b\ (R_H)$. Si C est la classe modulo R_H contenant c, C est, d'après la proposition 4, de la forme $C = H^{\cdot}.(H.^{\cdot}c)$. Comme H est séparateur à droite, C est net à droite. D'autre part, $C.^{\cdot}a \not\leq C.^{\cdot}b$; en effet, si $C.^{\cdot}a \leq C.^{\cdot}b$, alors $H.^{\cdot}a = H.^{\cdot}b$ et $a \equiv b\ (R_H)$ contre l'hypothèse. Par conséquent, il existe $x \in D$ tel que $ax \in C$ et $bx \notin C$, c'est-à-dire $ax \equiv c\ (R_H)$ et $bx \not\equiv c\ (R_H)$. Donc R_H est une congruence à droite séparatrice.

COROLLAIRE. Si H est un complexe séparateur à droite, alors $H^{\cdot}.(H.^{\cdot}a)$ est un complexe méta-fort à droite pour tout $a \in D$.

<u>Preuve.</u> En effet, $H^{\cdot}.(H.^{\cdot}a)$ est une classe modulo R_H d'après la proposition 4. Comme R_H est séparatrice, cette classe est un complexe méta-fort à droite d'après la proposition 5.

Rappelons qu'un sous-demi-groupe S d'un demi-groupe D est dit <u>unitaire à gauche</u> ([2], [3]) si la relation $sx \in S$ avec $s \in S$ entraîne $x \in S$.

PROPOSITION 8. (1) Si R est une congruence à droite séparatrice et modulaire du demi-groupe D, il existe un sous-demi-groupe S de D séparateur à droite et unitaire à gauche tel que $R = R_S$.

(2) Si S est un sous-demi-groupe de D séparateur à droite et unitaire à gauche, l'équivalence principale à droite R_S est séparatrice et modulaire.

<u>Preuve.</u> (1) Soit e un élément unité à gauche modulo R et soit S la classe modulo R contenant e. D'après la proposition 7, S est séparateur à droite et $R = R_S$. Pour tout $s \in S$, on a $e \equiv s\ (R)$ et donc $x \equiv ex \equiv sx\ (R)$ pour tout $x \in D$. Par conséquent, S est un sous-demi-groupe unitaire à gauche.

(2) R_S est séparatrice à droite d'après la proposition 7. Montrons qu'elle est modulaire. Soient $s \in S$ et $a \in D$. Comme S est séparateur à droite, on a $S.^{\cdot}sa \neq \phi$. Si $x \in S.^{\cdot}sa$, alors $sax \in S$ et donc $ax \in S$ puisque S est unitaire à gauche. Par conséquent $\phi \neq S.^{\cdot}sa \leq S.^{\cdot}a$, ce qui entraîne $S.^{\cdot}sa = S.^{\cdot}a$, car S est méta-fort à droite. Donc $sa \equiv a\ (R_S)$ et R_S est

modulaire.

PROPOSITION 9. Pour qu'un demi-groupe D soit séparateur, il faut et il suffit qu'il existe un sous-demi-groupe S de D séparateur à droite et unitaire à gauche, tel que la relation $S.\dot{}xa = S.\dot{}xb$ pour tout $x \varepsilon D$ entraîne $a = b$.

Preuve. La condition est nécessaire. D'après la proposition 2, il existe une congruence à droite R de D, modulaire et séparatrice, telle que $R : D$ soit l'égalité. Donc, d'après la proposition 8, il existe un sous-demi-groupe S séparateur à droite et unitaire à gauche tel que $R = R_S$. Si $S.\dot{}xa = S.\dot{}xb$ pour tout $x \varepsilon D$, alors $xa \equiv xb \ (R_S = R)$, c'est-à-dire $a \equiv b \ (R : D)$. Donc $a = b$.

La condition est suffisante. D'après la proposition 8, R_S est une congruence à droite séparatrice et modulaire. Si $a \equiv b \ (R_S : D)$, on a $xa \equiv xb \ (R_S)$ pour tout $x \varepsilon D$, c'est-à-dire $S.\dot{}xa = S.\dot{}xb$. Donc $a = b$ et $R_S : D$ est l'égalité, ce qui entraîne que D est séparateur, d'après la proposition 2.

COROLLAIRE. Si S est un sous-demi-groupe de D séparateur à droite et unitaire à gauche, le demi-groupe-quotient $D/R_S : D$ est séparateur.

3. Demi-groupe semi-séparateurs. Un demi-groupe D est dit semi-séparateur (à droite) s'il est isomorphe à un produit sous-direct de demi-groupes séparateurs. Pour cela, il faut et il suffit qu'il existe une famille de congruences R_i de D dont l'intersection est l'égalité et telles que les demi-groupes-quotients D/R_i soient séparateurs.

PROPOSITION 10. Si R est une congruence à droite séparatrice du demi-groupe D, alors $R : a$ est une congruence à droite séparatrice et modulaire.

Preuve. Soient $x, y, z \varepsilon D$ et $x \not\equiv y \ (R : a)$, c'est-à-dire $ax \not\equiv ay \ (R)$. Comme R est séparatrice, il existe $t \varepsilon D$ tel que

$$axt \equiv az \quad (R), \qquad ayt \not\equiv az \quad (R).$$

D'où $xt \equiv z \ (R : a)$ et $yt \not\equiv z \ (R : a)$, ce qui montre que $R : a$ est séparatrice.

La solution c de $ac \equiv a\ (R)$ nous donne un élément unité modulo $R : a$.

PROPOSITION 11. L'intersection T de toutes les congruences à droite séparatrices et modulaires R_i du demi-groupe D est une congruence de D et D/T est un demi-groupe semi-séparateur.

Preuve. D'après la proposition précédente $R_i : a$ est une congruence à droite séparatrice et modulaire. D'autre part, $R_i : D = \bigcap_{a \varepsilon D} R_i : a$ est une congruence et le demi-groupe-quotient $D/R_i : D$ est séparateur d'après le corollaire de la proposition 2. La proposition découle alors du fait que $T = \bigcap R_i = \bigcap R_i : D$.

COROLLAIRE. Un demi-groupe D est semi-séparateur si et seulement si l'intersection de toutes les congruences à droite séparatrices et modulaires de D est l'égalité.

Remarquons qu'un demi-groupe commutatif est semi-séparateur si et seulement s'il est isomorphe à un produit sous-direct de groupes. Par exemple, le demi-groupe additif des entiers positifs est semi-séparateur.

PROPOSITION 12. Pour qu'un demi-groupe D soit semi-séparateur, il faut et il suffit que pour tout couple $a, b \varepsilon D$, $a \neq b$, il existe un sous-demi-groupe séparateur à droite et unitaire à gauche S de D tel que $S.^{\cdot}a \neq S.^{\cdot}b$.

Preuve. La condition est nécessaire. D'après le corollaire de la proposition précédente, il existe une congruence à droite séparatrice et modulaire R de D telle que $a \not\equiv b\ (R)$. D'après la proposition 8, il existe un sous-demi-groupe séparateur à droite et unitaire à gauche S tel que $R = R_S$. De $a \not\equiv b\ (R = R_S)$ suit alors $S.^{\cdot}a \neq S.^{\cdot}b$.

La condition est suffisante. D'après la proposition 8, R_S est une congruence à droite séparatrice et modulaire. Comme $S.^{\cdot}a \neq S.^{\cdot}b$, on a $a \not\equiv b\ (R_S)$. Par conséquent, l'intersection de toutes les congruences à droite séparatrices et modulaires de D est l'égalité et D est semi-séparateur.

BIBLIOGRAPHIE

1. A.H. Clifford and G.B. Preston, The algebraic theory of semigroups. Math. Surveys, No. 7, Amer. Math. Soc., Providence, (1961).

2. P. Dubreil, Contribution à la théorie des demi-groupes. Mém. Acad. Sci. 63 (1941), pages 1-52.

3. P. Dubreil, Algèbre I, 2e édition. Gauthier-Villars, Paris (1954).

4. E.J. Tully, Jr., Thèse. Tulane University, (1960).

5. E.J. Tully, Jr., Representation of a semigroup by transformations acting transitively on a set. Amer. J. Math. (1961), pages 533-541.

State University of New York at Buffalo
et
Université de Montréal.

https://doi.org/10.4153/CMB-1966-074-3 Published online by Cambridge University Press