Canad. J. Math. Vol. **60** (4), 2008 pp. 790–821

Types, paquets et changement de base : l'exemple de $U(2,1)(F_0)$. I. Types simples maximaux et paquets singletons

Laure Blasco

Résumé. Soit F_0 un corps local non archimédien de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle impaire. J. Rogawski a montré l'existence du changement de base entre le groupe unitaire en trois variables $U(2,1)(F_0)$, défini relativement à une extension quadratique F de F_0, et le groupe linéaire $\mathrm{GL}(3,F)$. Par ailleurs, nous avons décrit les représentations supercuspidales irréductibles de $U(2,1)(F_0)$ comme induites à partir d'un sous-groupe compact ouvert de $U(2,1)(F_0)$, description analogue à celle des représentations admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}(3,F)$ obtenue par C. Bushnell et P. Kutzko. A partir de ces descriptions, nous construisons explicitement le changement de base des représentations très cuspidales de $U(2,1)(F_0)$.

1 Introduction

Soient F_0 un corps local non archimédien et F une extension quadratique séparable de F_0. Les conjectures de Langlands prédisent l'existence d'une correspondance, appelée *changement de base*, entre les représentations lisses irréductibles d'un groupe unitaire en trois variables sur F_0, $U(2,1)(F_0)$, et celles du groupe linéaire en trois variables sur F, $\mathrm{GL}(3,F)$. J. Rogawski [Ro] a démontré l'existence de cette correspondance à l'aide de méthodes globales, dans le cas où F_0 est de caractéristique nulle. Il montre que, localement, cette correspondance est entièrement décrite par une identité de caractères et que son image est formée des représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}(3,F)$, invariantes sous l'action du groupe de Galois de F/F_0 et de caractère central trivial sur $F_0^\times$.

Il s'agit ici de décrire cette correspondance par des données locales. On dispose pour cela de l'identité de caractères, d'une description "typique" des représentations irréductibles de $U(2,1)(F_0)$ et de $\mathrm{GL}(3,F)$ [Bl, BK]. Le corps F_0 est donc supposé de caractéristique nulle [Ro] et de caractéristique résiduelle impaire [Bl].

Le changement de base (local) des séries principales de $U(2,1)(F_0)$ est entièrement décrit par J. Rogawski [Ro, 13.1], celui des représentations cuspidales de niveau 0 par J. Adler et J. Lansky ([AL] sous l'hypothèse que F n'est pas ramifiée sur F_0 et le corps résiduel est suffisamment grand). On ne s'intéresse donc qu'aux représentations cuspidales de niveau strictement positif mais aussi de niveau minimal parmi leurs tordues par un caractère grâce à la compatibilité du changement de base à la torsion par un caractère. On distingue alors les représentations *très cuspidales*, c'est-à-dire celles dont le type provient d'une strate gauche fondamentale non scindée, elle-même

Reçu par la rédaction le 14 juillet , 2005; revu le 4 juillet , 2006.
Classification (AMS) par sujet: Primary: 22E50; secondary: 11F70.

qualifiée de très cuspidale par la suite, des représentations *cuspidales scindées* dont le type provient d'une strate gauche fondamentale scindée suivant un sous-groupe de Levi non rationnel sur F_0.

Ce texte présente une description explicite du changement de base des représentations très cuspidales de $U(2,1)(F_0)$; celle du changement de base des représentations cuspidales scindées est en cours et sera le sujet d'un prochain article.

Notre démarche est la suivante. Dans un premier temps, nous construisons à partir du type (J,λ) d'une représentation très cuspidale de $U(2,1)(F_0)$ un type simple maximal $(\widetilde{J}_c,\widetilde{\lambda})$ de $\mathrm{GL}(3,F)$ [BK, Ch. 6] vérifiant trois conditions, plus ou moins imposées par le changement de base, à savoir l'invariance de $(\widetilde{J}_c,\widetilde{\lambda})$ sous l'action du groupe de Galois de F/F_0, une condition sur le caractère central de $\widetilde{\lambda}$ et une dernière sur la trace de $\widetilde{\lambda}$. Ce type simple maximal est contenu dans une unique représentation cuspidale appartenant à l'image du changement de base. Dans un deuxième temps, nous montrons que la représentation de $\mathrm{GL}(3,F)$ ainsi définie est l'image par le changement de base de la représentation initiale en comparant leurs caractères.

Notations

Soient F_0 un corps local non archimédien, de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle différente de deux et F une extension quadratique (séparable) de F_0 d'indice de ramification e_0 et dont le groupe de Galois est noté Γ : $\Gamma=\{1,{}^-\}$.

On désigne par $\mathfrak{o}_0$ (resp. $\mathfrak{o}$) l'anneau des entiers de F_0 (resp. F), $\mathfrak{p}_0$ (resp. $\mathfrak{p}$) l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_0$ (resp. $\mathfrak{o}$) et ϖ_0 (resp. ϖ) une uniformisante de $\mathfrak{p}_0$ (resp. $\mathfrak{p}$). On choisit les uniformisantes ϖ et ϖ_0 telles que : $\varpi=\varpi_0$ si $e_0=1$, ϖ est de trace nulle et de norme ϖ_0 si $e_0=2$. On note k_0 et k les corps résiduels de F_0 et F respectivement et q le cardinal de k_0.

Pour une extension E de F_0, on conserve les mêmes notations que pour F, cette fois indexées par E. Si L désigne une sous-extension de E et H un sous-groupe de $E^\times$, on note $H^1_{|L}$ le sous-groupe de H des éléments de norme 1 sur L.

On fixe un caractère additif ψ_0 de F_0, de conducteur $\mathfrak{p}_0$. Sa composée avec la trace tr_{F/F_0} est un caractère ψ de F de conducteur $\mathfrak{p}$. On fixe également un prolongement à $F^\times$ du caractère ω_{F/F_0} de $F_0^\times$ associé à $F_{|F_0}$ par la théorie du corps de classes que l'on note μ. Dans la suite, on choisit μ égal à $x\mapsto(-1)^{\mathrm{val}_F(x)}$ si F n'est pas ramifiée sur F_0, μ trivial sur $1+\mathfrak{p}$ si F est ramifiée sur F_0.

Soient V un F-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une forme hermitienne non dégénérée $\langle,\rangle$, $G=U(2,1)(F_0)$ son groupe d'isométries et $\widetilde{G}=\mathrm{GL}(3,F)$ son groupe d'automorphismes. Le groupe Γ agit sur $\widetilde{G}$: l'élément non trivial de Γ transforme un élément g de $\widetilde{G}$ en $\tau(g):=\sigma(g)^{-1}$ où σ désigne l'involution définie sur $\mathrm{End}_F V$ et associée à $\langle,\rangle$. Alors, G n'est autre que le groupe des points de $\widetilde{G}$ fixes sous Γ : $G=\widetilde{G}^\tau$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est le F_0-sous-espace propre de σ dans $\mathrm{End}_F V$ associé à la valeur propre -1. Pour toute partie A de $\mathrm{End}_F V$, on note A^- son intersection avec $\mathfrak{g}$.

En suivant [Ro], on introduit la catégorie $\mathrm{Irr}(G)$ des classes d'isomorphie de repré-

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-035-6 Published online by Cambridge University Press

sentations lisses irréductibles de G et $\mathrm{Irr}^{\tau}(\widetilde{G})$ celle des classes d'isomorphie de représentations lisses irréductibles de $\widetilde{G}$, τ-invariantes et de caractère central trivial sur $F_0^{\times}$. Dans la suite, on ne considère que les représentations cuspidales irréductibles de niveau strictement positif de G. On note $\mathrm{Irr}^{>0}_{\mathrm{cusp}}(G)$ leur ensemble.

2 Description du changement de base par une identité de caractères

Pour un élément g de $\widetilde{G}$, on note $N_\tau(g)$ l'élément $g\tau(g)$ de $\widetilde{G}$, $\mathcal{C}l_\tau(g)$ sa classe de τ-conjugaison, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\widetilde{G}$ de la forme $h^{-1}g\tau(h)$ avec $h \in \widetilde{G}$, et $\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_\tau(g)$ sa classe de τ-conjugaison stable, c'est-à-dire l'ensemble des éléments g' de $\widetilde{G}$ tel que $N_\tau(g')$ soit $\widetilde{G}$-conjugué à $N_\tau(g)$.

De façon analogue, pour un élément x de G, on désigne par $\mathcal{C}(x)$ sa classe de conjugaison et par $\mathcal{C}^{\mathrm{st}}(x)$ sa classe de conjugaison stable, c'est-à-dire, de conjugaison sous $\widetilde{G}$.

La *norme cyclique* $\mathcal{N}_\tau$ est la bijection de l'ensemble des classes de τ-conjugaison stable de $\widetilde{G}$ dans l'ensemble des classes de conjugaison stable de G qui à la classe de τ-conjugaison stable de g associe l'intersection de la classe de $\widetilde{G}$-conjugaison de $N_\tau(g)$ avec G [Ko].

J. Rogawski [Ro, Ch. 13, §1] obtient la liste des L-paquets de G que l'on range comme suit :

- *les paquets singletons* : ce sont des paquets non endoscopiques de représentations irréductibles supercuspidales, les séries principales irréductibles, les représentations de dimension 1, les représentations de Steinberg et les quotients unitaires non tempérés de séries principales réductibles ;
- *les paquets de cardinal 2* : ce sont des limites de séries discrètes ou des paquets obtenus par transfert de paquets singletons de carré intégrable de $U(1,1) \times U(1)$;
- *les paquets de cardinal 4* : ce sont les paquets obtenus par transfert de paquets de $U(1,1) \times U(1)$ de carré intégrable, eux-mêmes obtenus par transfert de paquets de $U(1) \times U(1) \times U(1)$.

On note $\Pi(G)$ l'ensemble de ces L-paquets. A l'exception des quotients unitaires non tempérés de séries principales réductibles (qui appartiennent à des A-paquets), le caractère d'un L-paquet est défini comme la somme des caractères des représentations qui le composent. C'est une fonction localement intégrable et constante sur les classes de conjugaison stable.

En excluant aussi certains paquets de séries principales irréductibles (voir [Ro, §13.2] pour une description précise de ces paquets), chaque L-paquet Π de G possède un unique relèvement $\widetilde{\pi}$ appartenant à $\mathrm{Irr}^{\tau}(\widetilde{G})$ caractérisé par [Ro, §§4.10, 12.5 et 13.2] : pour tout $g \in \widetilde{G}$ dont la norme cyclique est régulière et tout $x \in \mathcal{N}_\tau(g)$,

$$\text{(Id)} \qquad \operatorname{tr} \widetilde{\pi}(g)\widetilde{\pi}(\tau) = c_\tau(\widetilde{\pi}) \sum_{\pi \in \Pi} \operatorname{tr} \pi(x),$$

où $\widetilde{\pi}(\tau)$ est un opérateur d'entrelacement d'ordre 2 entre $\widetilde{\pi}$ et $\widetilde{\pi}^{\tau}$ et $c_\tau(\widetilde{\pi})$ un signe ne dépendant que du choix de $\widetilde{\pi}(\tau)$.

3 Construction "typique" de l'image par changement de base des représentations très cuspidales de niveau strictement positif de G

Soient $(\pi, \mathcal{V})$ une représentation irréductible très cuspidale de G de niveau strictement positif et (J, λ) un type définissant π obtenu dans [Bl, §6.1]. A partir de (J, λ), on construit un type maximal $(\widetilde{J}_c, \widetilde{\lambda})$ dans $\widetilde{G}$. Ce dernier est contenu dans une unique représentation $\widetilde{\pi}$ de $\mathrm{Irr}^{\tau}(\widetilde{G})$. À la section 4, on montre que $\widetilde{\pi}$ est le changement de base de π.

Remarque Jusqu'à la proposition 3.5, la construction est la même si l'on remplace G par un groupe unitaire quelconque.

3.1 Les fondations

Rappelons brièvement la construction de (J, λ). On se donne une strate gauche très cuspidale $\mathfrak{s} = (\mathcal{L}, n, n-1, b)$, c'est-à-dire, une chaîne autoduale de $\mathfrak{o}$-réseaux de V, $\mathcal{L}$, un entier n strictement positif et un élément b de $\mathfrak{g}$, de valuation par rapport à $\mathcal{L}$ égale à $-n$ et tel que $F[b]$ soit une extension E de F, de dimension maximale dans $\mathrm{End}_F V$ $([E{:}F] = 3)$. On note L le sous-corps de E des éléments invariants sous σ.

Rappelons qu'à $\mathcal{L}$ est associé un ordre héréditaire $\mathfrak{a}(\mathcal{L})$, de radical de Jacobson $\mathfrak{a}_1(\mathcal{L})$. On définit une filtration décroissante de $\mathrm{End}_F V$ par $\mathfrak{a}_m(\mathcal{L}) = (\mathfrak{a}_1(\mathcal{L}))^m$, $m \in \mathbb{Z}^*$ et $\mathfrak{a}_0(\mathcal{L}) = \mathfrak{a}(\mathcal{L})$. Parallèlement, on associe à $\mathcal{L}$ un sous-groupe ouvert compact de G, $U_0(\mathcal{L}) = \mathfrak{a}_0^{\times}(\mathcal{L}) \cap G$ et une filtration décroissante de ce groupe par des sous-groupes compacts ouverts distingués $U_m(\mathcal{L}) = (1 + \mathfrak{a}_m(\mathcal{L})) \cap G$, $m \in \mathbb{N}^*$.

La donnée de $\mathfrak{s}$ fournit un caractère ψ_b de $U_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L})$: $\psi_b(x) = \psi \circ \mathrm{tr}\, b(x-1)$ pour tout $x \in U_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L})$.

Considérons la suite croissante de sous-groupes ouverts compacts :

$$H_1 = (1+\mathfrak{p}_E)^1_{|L} U_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L}), \quad J_1 = (1+\mathfrak{p}_E)^1_{|L} U_{[\frac{n+1}{2}]}(\mathcal{L}), \quad J = \mathfrak{o}^1_{E|L} J_1 = \mathfrak{o}^1_{E|L} U_{[\frac{n+1}{2}]}(\mathcal{L}).$$

Pour obtenir λ (voir [Bl, §6.1]), on choisit un caractère θ de H_1 prolongeant ψ_b. Ce dernier est contenu dans une unique représentation irréductible η de J_1. La représentation λ est un prolongement de η à J.

On définit de même des sous-groupes ouverts compacts modulo le centre de $\widetilde{G}$, Γ-invariants :

$$\widetilde{H}_1 = (1+\mathfrak{p}_E)\widetilde{U}_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L}), \quad \widetilde{J}_1 = (1+\mathfrak{p}_E)\widetilde{U}_{[\frac{n+1}{2}]}(\mathcal{L}), \quad \widetilde{J}_c = \mathfrak{o}_E^{\times}\widetilde{U}_{[\frac{n+1}{2}]}(\mathcal{L}),$$
$$\widetilde{J} = E^{\times}\widetilde{U}_{[\frac{n+1}{2}]}(\mathcal{L}) = E^{\times}\widetilde{J}_c,$$

les groupes $\widetilde{U}_m(\mathcal{L})$ étant définis comme les groupes $U_m(\mathcal{L})$ précédents en remplaçant G par $\widetilde{G}$.

On construit $\widetilde{\lambda}$ par étapes, de $\widetilde{H}_1$ à $\widetilde{J}_c$, de façon analogue à λ.

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-035-6 Published online by Cambridge University Press

3.2 Le premier étage

L'application N_τ restreinte à $1+\mathfrak{p}_E$ est un homomorphisme à valeurs dans $(1+\mathfrak{p}_E)^1_{|L}$ donc la composée $\theta \circ N_\tau$ définit un caractère $\widetilde{\theta}$ de $1+\mathfrak{p}_E$. Ce caractère coïncide avec le caractère $\widetilde{\psi}_{2b}$ de $\widetilde{U}_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L})$ sur $(1+\mathfrak{p}_E) \cap \widetilde{U}_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L})$. Or, $1+\mathfrak{p}_E$ entrelace le caractère $\widetilde{\psi}_{2b}$ et normalise $\widetilde{U}_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L})$. Le caractère $\widetilde{\theta}$ se prolonge donc en un caractère, encore noté $\widetilde{\theta}$, de $\widetilde{H}_1$: si $x \in \widetilde{H}_1$ et $x = x_E(1+X)$ où $x_E \in 1+\mathfrak{p}_E$ et $1+X \in \widetilde{U}_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L})$,

$$\widetilde{\theta}(x) = \theta(N_\tau(x_E))\widetilde{\psi}_{2b}(1+X).$$

Ce caractère est τ-invariant donc constant sur les classes de τ-conjugaison. D'autre part,

Lemme 3.1 (i) *Soit $x \in \widetilde{H}_1$. Il existe $h \in \widetilde{H}_1$ tel que $N_\tau(h^{-1}x\tau(h)) \in H_1$. On note y_x l'élément $h^{-1}x\tau(h)$.*

(ii) *L'application $x \mapsto N_\tau(y_x)$ induit une bijection $\mathcal{N}_\tau$ entre les classes de τ-$\widetilde{H}_1$-conjugaison dans $\widetilde{H}_1$ et les classes de H_1-conjugaison dans H_1.*

(iii) *Les assertions précédentes restent valables quand on remplace les groupes H_1 et $\widetilde{H}_1$ par J_1 et $\widetilde{J}_1$, respectivement.*

Démonstration La transformée de Cayley $\mathcal{C}$, application définie pour tous les éléments $X \in \mathfrak{g}$ tels que $1-\frac{X}{2}$ soit inversible par :

$$\mathcal{C}(X) = \left(1+\frac{X}{2}\right)\left(1-\frac{X}{2}\right)^{-1}$$

et à valeurs dans G, coïncide avec l'application $X \mapsto N_\tau(1+\frac{X}{2})$ sur $\mathfrak{h}_1^- = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}$ où $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{p}_E + \mathfrak{a}_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L})$. Sa restriction à $\mathfrak{h}_1^-$ définit une bijection de $\mathfrak{h}_1^-$ sur H_1, d'application réciproque : $y \mapsto 2(y-1)(y+1)^{-1}$.

Grâce à la transformée de Cayley, et en écrivant x sous la forme $1+X$, $X \in \mathfrak{h}_1$, le point (i) revient à chercher deux éléments, V dans $\mathfrak{h}_1^-$ et $1+U$ dans $\widetilde{H}_1$ tels que $(1+U)(1+X)^\sigma(1+U) = 1+\frac{V}{2}$. On détermine V et U par approximation.

Pour ce faire, introduisons la filtration décroissante de $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{p}_E^i + \mathfrak{a}_{[\frac{n}{2}]+i}(\mathcal{L})$, $i \geq 1$, qui vérifie $\mathfrak{h}_i \cdot \mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{h}_{2i}$ pour tout $i \geq 1$ et $\cap_{i\geq 1}\mathfrak{h}_i = 0$.

On construit par récurrence deux suites $(X_i)_i$ et $(Y_i)_i$, la première dans $\mathfrak{h}_1^-$, la seconde dans $\mathfrak{h}_1$, telles que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

(a) $X_{i+1} = X_i \mod \mathfrak{h}_{i+1}^-$,
(b) $Y_{i+1} = Y_i \mod \mathfrak{h}_{i+1}$,
(c) $(1+Y_{i+1})(1+X)\,^\sigma(1+Y_{i+1}) = 1+\frac{X_{i+1}}{2} \mod \mathfrak{h}_{i+2}$.

On pose $X_1 = X - {}^\sigma X$ et $Y_1 = -\frac{X}{2}$. Le premier est dans $\mathfrak{h}_1^-$, le second dans $\mathfrak{h}_1$ et les deux ensemble vérifient (c) avec $i = 0$.

Soient $i \in \mathbb{N}^*$, $X_i \in \mathfrak{h}_1^-$ et $Y_i \in \mathfrak{h}_1$ vérifiant (a), (b) et (c) au rang $i-1$. Par (c), il existe $X'_{i+1} \in \mathfrak{h}_{i+1}$ tel que $(1+Y_i)(1+X)\,^\sigma(1+Y_i) = 1+\frac{X_i}{2}+X'_{i+1}$. Alors les éléments X_{i+1} et Y_{i+1} définis par : $X_{i+1} = X_i + (X'_{i+1} - {}^\sigma X'_{i+1})$ et $Y_{i+1} = Y_i - \frac{1}{2}X'_{i+1}(1+Y_i)$ vérifient toutes les conditions demandées.

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-035-6 Published online by Cambridge University Press

Les deux suites $(X_i)_i$ et $(1+Y_i)_i$ sont convergentes, la première vers un élément V de $\mathfrak{h}_1^-$, la seconde vers un élément $1+U$ de $\widetilde{H}_1$, puisque $\mathfrak{h}_1^-$ et $\widetilde{H}_1$ sont des compacts de $\mathfrak{g}$ et de $\widetilde{G}$ respectivement, et leurs limites vérifient $(1+U)(1+X)\,{}^{\sigma}(1+U) = 1+\frac{V}{2}$ d'où

$$N_\tau((1+U)(1+X)\,{}^{\sigma}(1+U)) = N_\tau\Big(1+\frac{V}{2}\Big) = \mathcal{C}(V) \in H_1,$$

ce qui prouve (i).

Soient x un élément de $\widetilde{H}_1$, y_x comme en (i) et $\gamma = N_\tau(y_x)$. Montrons que l'intersection de H_1 et de la classe de $\widetilde{H}_1$-conjugaison de γ forme une seule classe de H_1-conjugaison dans H_1.

Soient $\gamma' \in H_1$ $\widetilde{H}_1$-conjugué à γ et $g \in \widetilde{H}_1$ tel que $\gamma' = g\gamma g^{-1}$. L'application de Γ dans le centralisateur de γ', $Z_{\widetilde{H}_1}(\gamma')$, définie par $\delta \mapsto \delta(g)g^{-1}$ est un élément de $H^1(\Gamma, Z_{\widetilde{H}_1}(\gamma'))$, groupe qui est trivial puisque Γ est d'ordre 2 et $Z_{\widetilde{H}_1}(\gamma')$ est un pro-p-groupe (p impair). Par suite, il existe $z \in Z_{\widetilde{H}_1}(\gamma')$ tel que $\tau(g)g^{-1} = \tau(z)z^{-1}$. L'élément $z^{-1}g$ appartient à H_1 et conjugue γ et γ'.

Ainsi, N_τ induit une application $\mathcal{N}_\tau$ de l'ensemble des classes de τ-conjugaison dans $\widetilde{H}_1$ dans celui des classes de conjugaison dans H_1.

Cette application est surjective. En effet, si $x \in H_1$, il existe un unique $X_0 \in \mathfrak{h}_1^-$ dont l'image par la transformée de Cayley est x. Alors $1+\frac{X_0}{2}$ appartient à $\widetilde{H}_1$ et son image par N_τ est x.

Supposons maintenant que $h, h' \in \widetilde{H}_1$ tels que $\mathcal{N}_\tau(h) = \mathcal{N}_\tau(h')$. Quitte à τ-$\widetilde{H}_1$-conjuguer h et h', on peut supposer que $h' = 1+V'$ où $V' \in \mathfrak{h}_1^-$ et $N_\tau(h) = N_\tau(h') \in H_1$. De plus, il existe $u \in \widetilde{H}_1$ et $V \in \mathfrak{h}_1^-$ tel que $uh\,{}^{\sigma}u = 1+V$. Mais alors, $N_\tau(h)$ et $\mathcal{C}(2V)$, tous deux dans H_1, sont $\widetilde{H}_1$-conjugués donc H_1-conjugués : il existe $u_0 \in H_1$ tel que $N_\tau(h) = u_0^{-1}\mathcal{C}(2V)u_0 = \mathcal{C}(2u_0^{-1}Vu_0)$.

Ceci entraîne que $u_0^{-1}Vu_0$ et V' sont égaux, puis que h et h' sont τ-$\widetilde{H}_1$-conjugués. ∎

Corollaire 3.2 *Pour tout* $x \in \widetilde{H}_1$, $\widetilde{\theta}(x) = \theta(\mathcal{N}_\tau(x))$.

Démonstration Puisque $\widetilde{\theta}$ est constant sur les classes de τ-conjugaison dans $\widetilde{H}_1$, il suffit de considérer les éléments x de $\widetilde{H}_1$ dont la norme cyclique $N_\tau(x)$ appartient à H_1.

Ecrivons un tel élément x sous la forme $x = x_E(1+X)$ où x_E appartient à $1+\mathfrak{p}_E$ et $1+X$ à $\widetilde{U}_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L})$. Alors $N_\tau(x) = x_E\tau(x_E)\cdot\tau(x_E)^{-1}(1+X)\tau(x_E)\tau(1+X)$. Or $N_\tau(x)$ et $x_E\tau(x_E)$ sont des éléments de H_1 donc $\tau(x_E)^{-1}(1+X)\tau(x_E)\tau(1+X)$ appartient à $\widetilde{U}_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L}) \cap H_1 = U_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L})$ d'où

$$\begin{aligned}\theta(N_\tau(x)) &= \theta(x_E\tau(x_E))\theta(\tau(x_E)^{-1}(1+X)\tau(x_E)\tau(1+X))\\ &= \theta(N_\tau(x_E))\psi\circ\operatorname{tr} b(\tau(x_E)^{-1}X\tau(x_E) - {}^{\sigma}X)\\ &= \theta(N_\tau(x_E))\widetilde{\psi}_b(1+X-{}^{\sigma}X) = \theta(N_\tau(x_E))\widetilde{\psi}_{2b}(1+X) = \widetilde{\theta}(x).\end{aligned}$$ ∎

3.3 Le deuxième étage

Le quotient $\widetilde{J}_1/\widetilde{H}_1$ s'identifie à un sous-groupe quotient de $\mathfrak{a}_{[\frac{n+1}{2}]}(\mathcal{L})/\mathfrak{a}_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L})$. C'est un p-groupe abélien sur lequel est défini l'accouplement $(x, y) \mapsto \widetilde{\theta}([x, y])$. Comme tout élément de $\widetilde{J}_1/\widetilde{H}_1$ possède un représentant dans $\widetilde{U}_{[\frac{n+1}{2}]}(\mathcal{L})$ sur lequel $\widetilde{\theta}$ coïncide avec $\widetilde{\psi}_{2b}$, on montre que cet accouplement est non dégénéré.

En conséquence, il existe une unique (à isomorphisme près) représentation irréductible $\widetilde{\eta}$ de $\widetilde{J}_1$ dont la restriction à $\widetilde{H}_1$ contienne $\widetilde{\theta}$ (en fait, est multiple de $\widetilde{\theta}$) [BF, §8].

Nécessairement, $\widetilde{\eta}$ est τ-invariante. On prolonge donc $\widetilde{\eta}$ en une représentation de $\widetilde{J}_1\Gamma$ en imposant que $\widetilde{\eta}(\tau)$ soit un opérateur d'entrelacement de $\widetilde{\eta}$ et ${}^{\tau}\widetilde{\eta}$ d'ordre 2 (on a deux choix qui diffèrent d'un signe).

Lemme 3.3 *Soient $\widetilde{\eta}(\tau)$ défini précédemment et c_τ la constante complexe $\frac{\operatorname{tr}\widetilde{\eta}(\tau)}{\dim \eta}$. Alors, pour $g \in \widetilde{J}_1$,*

$$\operatorname{tr}\widetilde{\eta}(g\tau) = c_\tau \operatorname{tr}\eta(\mathcal{N}_\tau(g)). \tag{3.1}$$

De plus, c_τ est 1 ou -1 selon le choix de $\widetilde{\eta}(\tau)$.

Démonstration Soit $g \in \widetilde{J}_1$. Par le lemme 3.1, $g\tau$ est conjugué sous $\widetilde{J}_1\Gamma$ à un élément de $\widetilde{H}_1\Gamma$ ou, de façon équivalente, g est τ-$\widetilde{J}_1$-conjugué à un élément de $\widetilde{H}_1$ si et seulement si $\mathcal{N}_\tau(g)$ est J_1-conjugué à un élément de H_1. Par conséquent, si g n'est pas τ-$\widetilde{J}_1$-conjugué à un élément de $\widetilde{H}_1$, $\operatorname{tr}\eta(\mathcal{N}_\tau(g))$ est nul [BF, §8] ainsi que $\operatorname{tr}\widetilde{\eta}(g\tau)$ [BH, proposition 13.1].

Supposons désormais que g est τ-$\widetilde{J}_1$-conjugué à un élément de $\widetilde{H}_1$. Grâce au lemme 3.1, il suffit de considérer les g dans $\widetilde{H}_1$ dont la norme $N_\tau(g)$ appartient à H_1. Alors, $\operatorname{tr}\widetilde{\eta}(g\tau) = \widetilde{\theta}(g) \cdot \operatorname{tr}\widetilde{\eta}(\tau)$ tandis que $\operatorname{tr}\eta(N_\tau(g)) = \theta(N_\tau(g)) \cdot \operatorname{tr}\eta(1) = \dim\eta \cdot \theta(N_\tau(g))$.

Par le corollaire 3.2, ceci donne l'égalité (3.1) pour ces éléments.

Calculons c_τ. Comme $\widetilde{\eta}(\tau)$ est d'ordre deux, ses valeurs propres sont ± 1 et sa trace est donc entière. Il suffit de montrer que $|\operatorname{tr}\widetilde{\eta}(\tau)|$ est égal à $\dim\eta$. Or cette dimension est $|J_1/H_1|^{\frac{1}{2}}$ tandis que $|\operatorname{tr}\widetilde{\eta}(\tau)|$ est $|(\widetilde{J}_1/\widetilde{H}_1)^\tau|^{\frac{1}{2}}$ [BH, proposition 13.1]. Il suffit donc de montrer que

$$(\widetilde{J}_1/\widetilde{H}_1)^\tau \simeq J_1/H_1.$$

Il existe un homomorphisme injectif de J_1/H_1 à valeurs dans $(\widetilde{J}_1/\widetilde{H}_1)^\tau$, donné par $jH_1 \mapsto j\widetilde{H}_1$. Fixons j dans $\widetilde{J}_1$ tel que $j\widetilde{H}_1$ est un élément τ-invariant, c'est-à-dire $j^{-1}\tau(j)$ appartient à $\widetilde{H}_1$. Le cocycle de Γ à valeurs dans $\widetilde{H}_1$ qui envoie τ sur $j^{-1}\tau(j)$ est nécessairement un cobord puisque $\widetilde{H}_1$ est un pro-p-groupe. Donc $j\widetilde{H}_1$ contient un élément de J_1 : l'homomorphisme précédent est surjectif. ■

Lemme 3.4 *Notons $\mathcal{E}_{\widetilde{G}}(\widetilde{\theta})$ et $\mathcal{E}_{\widetilde{G}}(\widetilde{\eta})$ l'entrelacement dans $\widetilde{G}$ de $\widetilde{\theta}$ et $\widetilde{\eta}$, respectivement. Alors*

$$\mathcal{E}_{\widetilde{G}}(\widetilde{\eta}) = \mathcal{E}_{\widetilde{G}}(\widetilde{\theta}) = E^\times \widetilde{J}_1.$$

Démonstration L'égalité entre $\mathcal{E}_{\widetilde{G}}(\widetilde{\theta})$ et $\mathcal{E}_{\widetilde{G}}(\widetilde{\eta})$ est un cas particulier de [BK, 5.1.1]. Il suffit de montrer la deuxième égalité.

Le caractère $\widetilde{\theta}$ prolonge le caractère $\widetilde{\psi}_{2b}$ de $\widetilde{U}_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L})$ dont l'entrelacement est $E^\times \widetilde{J}_1$ [BK, 3.3.2] : $\mathcal{E}_{\widetilde{G}}(\widetilde{\theta})$ est contenu dans $E^\times \widetilde{J}_1$. Réciproquement, un élément y de $E^\times \widetilde{J}_1$ normalise $\widetilde{H}_1$ et $\widetilde{U}_{[\frac{n}{2}]+1}(\mathcal{L})$ donc il entrelace $\widetilde{\theta}$ dès que l'application $x \mapsto \widetilde{\theta}([y,x])$ est triviale sur $1+\mathfrak{p}_E$. Or, $E^\times$ centralise $1+\mathfrak{p}_E$ et si y appartient à $\widetilde{J}_1$, $y = 1+Y$, on a pour tout $x = 1+X_E \in 1+\mathfrak{p}_E$:

$$\widetilde{\theta}(yxy^{-1}x^{-1}) = \widetilde{\psi}_{2b}(yxy^{-1}x^{-1}) = \psi \circ \operatorname{tr} 2b(-Y\sum_{k\geq 1}(-X_E)^k - X_E Y \sum_{k\geq 0}(-X_E)^k) = 1$$

car X_E commute avec b. ■

3.4 Le dernier étage

Proposition 3.5 *Soit (J,λ) un type très cuspidal de G. On note ω_λ le caractère central de λ. Il existe une unique représentation irréductible $\widetilde{\lambda}$ de $\widetilde{J}_c$ vérifiant les conditions :*

(i) *$\widetilde{\lambda}$ est τ-invariante,*
(ii) *son caractère central $\omega_{\widetilde{\lambda}}$ est $\widetilde{\omega}_\lambda := \omega_\lambda \circ N_\tau$,*
(iii) *sa restriction à $\widetilde{J}_1$ est $\widetilde{\eta}$,*
(iv) *pour tout $x \in \mathfrak{o}_E^\times$, $\operatorname{tr}\widetilde{\lambda}(x\tau) = c_\tau \operatorname{tr}\lambda(N_\tau(x))$, une fois $\widetilde{\lambda}$ prolongée à $\widetilde{J}_1 \cdot \Gamma$ en imposant $\widetilde{\lambda}(\tau) = \widetilde{\eta}(\tau)$.*

La paire $(\widetilde{J}_c, \widetilde{\lambda})$ ainsi définie est un type simple maximal dans $\widetilde{G}$ [BK, Ch. 6].

Par la suite, on note $\widetilde{\omega}$ le caractère $\widetilde{\omega}_\lambda$.

Lemme 3.6 *Soit $\widetilde{\lambda}$ la représentation de $\widetilde{J}_c$ définie précédemment. La représentation $\widetilde{\omega}\widetilde{\lambda}$ de $F^\times \widetilde{J}_c$ admet un unique prolongement à $\widetilde{J}$ qui soit τ-invariant. On le note $\widetilde{\Lambda}$.*

Démonstration D'après [BK, proposition 6.1.2], il existe exactement $e(E|F)$ extensions non entrelacées de $\widetilde{\omega}\widetilde{\lambda}$ à $\widetilde{J}$. Si E n'est pas ramifiée sur F, l'unique extension est τ-invariante et n'est autre que $\widetilde{\omega} \otimes \widetilde{\lambda}$ (puisque $\widetilde{J} = F^\times \widetilde{J}_c$).

Supposons que E soit ramifiée sur F. Le groupe Γ agit sur l'ensemble des extensions de $\widetilde{\omega}\widetilde{\lambda}$ à $\widetilde{J}$ par composition : nécessairement une de ces extensions est τ-invariante. Notons-la $\widetilde{\Lambda}$. Les autres extensions sont de la forme $\widetilde{\Lambda} \otimes \chi$ où χ est un caractère du groupe $E^\times/F^\times\mathfrak{o}_E^\times$, groupe cyclique d'ordre $e(E|F)$. L'extension $\widetilde{\Lambda} \otimes \chi$ est invariante par τ si et seulement si χ l'est, c'est-à-dire si χ est trivial sur $N_{E|L}(E^\times)$. Or, $L^\times$ s'envoie surjectivement sur $E^\times/F^\times\mathfrak{o}_E^\times = E^\times/\varpi_F^{\mathbb{Z}}\mathfrak{o}_E^\times$ puisque $e(E/F)$ et $e(E/L)$ sont premiers entre eux ($\varpi_F^{\mathbb{Z}}$ désigne le sous-groupe de $F^\times$ engendré par ϖ_F). De même, $N_{E|L}(E^\times)$, étant un sous-groupe de $L^\times$ d'indice premier à $e(E|F)$, s'envoie surjectivement sur $E^\times/F^\times\mathfrak{o}_E^\times$. Donc χ est trivial et $\widetilde{\Lambda}$ est l'unique extension τ-invariante, de $\widetilde{\omega}\widetilde{\lambda}$ à $\widetilde{J}$. ■

Théorème 3.7 *Soient π une représentation très cuspidale de G (de niveau strictement positif) et (J,λ) un type très cuspidal de G comme en section 3.1 (dont on reprend les notations) : $\pi = \operatorname{Ind}_J^G \lambda$.*

(i) *L'ensemble $\{\pi\}$ forme un L-paquet. En particulier, le caractère de π est stable.*

(ii) *Soient $(\widetilde{J}, \widetilde{\Lambda})$ la paire construite précédemment et $\widetilde{\pi} = \mathrm{Ind}_{\widetilde{J}}^{\widetilde{G}} \widetilde{\Lambda}$. Alors, $\widetilde{\pi}$ est une représentation irréductible, supercuspidale, τ-invariante, de caractère central trivial sur $F_0^\times$. Elle est l'image de π par le changement de base.*

Cette dernière affirmation et la première sont démontrées à la section 4.

Démonstration de la proposition 3.5 Comme $\widetilde{J}_c$ est contenu dans l'entrelacement de $\widetilde{\eta}$ et que le quotient $\widetilde{J}_c/\widetilde{J}_1$ est cyclique d'ordre premier à $\dim \widetilde{\eta}$, la représentation $\widetilde{\eta}$ se prolonge à $\widetilde{J}_c$.

Soit $\widetilde{\lambda}$ un prolongement de $\widetilde{\eta}$ à $\widetilde{J}_c$. Puisque $\widetilde{\eta}$ est τ-invariante, $\widetilde{\lambda}$ et ${}^\tau\widetilde{\lambda}$ sont deux prolongements de $\widetilde{\eta}$: il existe un caractère $\chi_0 \colon \mathfrak{o}_E^\times \mapsto \mathbb{C}^\times$, trivial sur $1 + \mathfrak{p}_E$ tel que ${}^\tau\widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda} \otimes \chi_0$. Nécessairement, $\chi_0 \cdot \chi_0 \circ \tau$ est trivial, c'est-à-dire, χ_0 est invariant par σ ou encore se factorise par $N_{E|L}$: il existe un caractère χ_1 de $\mathfrak{o}_E^\times$, trivial sur $1 + \mathfrak{p}_E$ tel que $\chi_0 = \chi_1 \circ N_{E|L}$. Alors $\widetilde{\lambda} \otimes \chi_1$ est τ-invariant.

On suppose désormais que $\widetilde{\lambda}$ est un prolongement τ-invariant de $\widetilde{\eta}$. Un autre prolongement τ-invariant de $\widetilde{\eta}$ s'écrit sous la forme $\widetilde{\lambda} \otimes \chi$ où χ est un caractère de $\mathfrak{o}_E^\times$, trivial sur $1+\mathfrak{p}_E$ et sur $N_{E|L}(\mathfrak{o}_E^\times)$. La condition (ii) se traduit alors par la restriction de χ à $\mathfrak{o}^\times$ est égale à $\omega := \omega_{\widetilde{\lambda}}^{-1}\widetilde{\omega}_\lambda$.

On remarque que ω est trivial sur $1 + \mathfrak{p}$ et sur $\mathfrak{o}_0^\times$ puisque $\widetilde{\omega}_\lambda$ est égal à $\widetilde{\theta}$ sur $1 + \mathfrak{p}$ et que $\omega_{\widetilde{\lambda}}$ et $\widetilde{\omega}_\lambda$ sont triviaux sur $\mathfrak{o}_0^\times$. De plus, $N_{E|L}(\mathfrak{o}_E^\times) \cap \mathfrak{o}^\times$ est toujours contenu dans $\mathfrak{o}_0^\times$. Les trois conditions sur χ sont compatibles.

Cas ramifié: E est ramifiée sur F_0. Ces trois conditions déterminent χ uniquement : il existe un unique prolongement $\widetilde{\lambda}$ vérifiant (i)–(iii) de la proposition. De plus, quand E est ramifiée sur F, $\widetilde{J}_c$ est égal à $\mathfrak{o}^\times \widetilde{J}_1$ et $\widetilde{\lambda}$ à $\widetilde{\omega} \otimes \widetilde{\eta}$. La condition (iv) est une conséquence immédiate de (3.1).

Quand E est ramifiée sur L, tout élément de $\mathfrak{o}_E^\times$ est τ-conjugué par un élément de $\mathfrak{o}_E^\times$ à un élément de $\mathfrak{o}_0^\times(1 + \mathfrak{p}_E)$. Comme $\mathfrak{o}_E^\times$ est abélien, l'unique prolongement $\widetilde{\lambda}$ vérifiant (i)–(iii) vérifie aussi (iv).

Cas non ramifié: E n'est pas ramifiée sur F_0. Les trois conditions (i)–(iii)) de la proposition déterminent uniquement $\widetilde{\lambda}$ sur $\widetilde{J}_0 := \mathfrak{o}^\times \mathfrak{o}_L^\times \widetilde{J}_1$. Le quotient $\widetilde{J}_c/\widetilde{J}_0$ est cyclique d'ordre $d = q^2 - q + 1$. Il existe donc d prolongements $\widetilde{\lambda}$ vérifiant (i)–(iii) qui diffèrent entre eux d'un caractère de $\mathfrak{o}_E^\times$, trivial sur $1 + \mathfrak{p}_E$, d'ordre divisant d. Il en existe donc au plus un vérifiant aussi la condition (iv). Montrons qu'il en existe un. Si η est un caractère, ceci est immédiat. Examinons l'autre cas.

Notons $\widetilde{\mathfrak{X}}$ l'ensemble des caractères de $\mathfrak{o}_E^\times$, triviaux sur $1 + \mathfrak{p}_E$, d'ordre divisant d et $\mathfrak{X}$ celui des caractères de $\mathfrak{o}_{E|L}^1$, triviaux sur $(1 + \mathfrak{p}_E)_{|L}^1$ d'ordre divisant d. Ce sont deux groupes cycliques d'ordre d. On fixe κ un générateur de $\mathfrak{X}$. Alors $\kappa \circ N_\tau$ est un générateur $\widetilde{\kappa}$ de $\widetilde{\mathfrak{X}}$. Quand nécessaire, on considèrera κ (resp. $\widetilde{\kappa}$) comme un caractère de J (resp. $\widetilde{J}_c$), trivial sur $J' := F^1 J_1$ (resp. $\widetilde{J}_0$).

Soit λ un prolongement à J de $\omega \otimes \eta$. Soit K le sous-groupe $\mathfrak{o}_{E|L}^1 H_1$ de J, d'indice q^6. La restriction à K de λ est la somme de q^3 caractères égaux à $\omega \otimes \theta$ sur $\mathfrak{o}_{F|F_0}^1 H_1$. Il existe un caractère ξ de $\mathfrak{o}^1_{E|L}$ prolongeant $\omega \otimes \theta_{|(1+\mathfrak{p}_E)^1_{|L}}$ tel que

$$(3.2)\qquad \lambda_{|K} = \bigoplus_{i=0}^{d-1} m_i(\xi\kappa^i \otimes \theta) \quad \text{où } 0 \le m_0 \le m_1 \le \cdots \le m_{d-1} \text{ et } \sum_{i=0}^{d-1} m_i = q^3.$$

Soit ρ l'induite de K à J de $\xi \otimes \theta$. Par la loi de Frobenius, pour tout $0 \le i < d$, m_i est aussi la multiplicité de $\lambda\kappa^{-i}$ dans ρ et, en comparant les dimensions, on obtient que ρ est $\bigoplus_{i=0}^{d-1} m_i(\lambda\kappa^{-i})$, puis que

$$(3.3)\qquad \forall x \in \mathfrak{o}^1_{E|L},\ \operatorname{tr}\rho(x) = \Big(\sum_{i=0}^{d-1} m_i^2\Big)\xi(x) + \sum_{l=1}^{d-1}\Big(\sum_{\substack{0\le i,j<d\\ i-j\equiv l\,[d]}} m_i m_j\Big)(\kappa^l\xi)(x).$$

Mais, par la formule de Mackey :

$$\forall\, x \in \mathfrak{o}^1_{E|L},\ \operatorname{tr}\rho(x) = \sum_{\substack{y\in J/K\\ y^{-1}xy\in K}} (\xi\otimes\theta)(y^{-1}xy) = \sum_{\substack{y\in J_1/H_1\\ [y^{-1},x]\in H_1}} (\xi\otimes\theta)(y^{-1}xy).$$

Si $x \in \mathfrak{o}^1_{|F_0}(1+\mathfrak{p}_E)^1_{|L}$, la somme porte sur J_1/H_1 et la valeur de $(\xi\otimes\theta)(y^{-1}xy)$ est constante égale à $\xi(x)$; sinon, x est minimal sur F et $[y^{-1},x]$ appartient à H_1 si et seulement si y est élément de H_1. Ainsi, $\forall\, x \in \mathfrak{o}^1_{E|L}$,

$$\operatorname{tr}\rho(x) = \begin{cases} q^6\xi(x) & \text{si } x \in \mathfrak{o}^1_{|F_0}(1+\mathfrak{p}_E)^1_{|L},\\ \xi(x) & \text{si } x \in \mathfrak{o}^1_{E|L} - \mathfrak{o}^1_{F|F_0}(1+\mathfrak{p}_E)_{|L}.\end{cases}$$

En confrontant à (3.3) et en posant $\zeta = e^{2i\pi/d}$, on obtient

$$(3.4)\qquad \begin{aligned} &\Big(\sum_{i=0}^{d-1} m_i^2 - 1\Big) + \sum_{l=1}^{d-1}\Big(\sum_{i=0}^{d-1} m_i m_{i-l}\Big) = q^6 - 1,\\ &\Big(\sum_{i=0}^{d-1} m_i^2 - 1\Big) + \sum_{l=1}^{d-1}\Big(\sum_{i=0}^{d-1} m_i m_{i-l}\Big)\zeta^{kl} = 0, \quad 1 \le k < d,\end{aligned}$$

système admettant une unique solution, à savoir :

$$\Big(\sum_{i=0}^{d-1} m_i^2 - 1\Big) = \Big(\sum_{i=0}^{d-1} m_i m_{i-l}\Big) = \frac{q^6-1}{d}, \quad 0 < l < d.$$

Les m_i vérifient donc les conditions :

(a) $0 \le m_0 \le m_1 \le \cdots \le m_{d-1}$, (b) $\sum_{i=0}^{d-1} m_i = q^3$,

(c) $\sum_{i=0}^{d-1} m_i^2 = 1 + (q^3-1)(q+1)$, (d) $\sum_{i=0}^{d-1} m_i m_{i-l} = (q^3-1)(q+1),\ 0 < l < d.$

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-035-6 Published online by Cambridge University Press

Alors $\sum_{i=0}^{d-1}(q+1-m_i)^2 = d(q+1)^2 - 2(q+1)\sum_{i=0}^{d-1} m_i + \sum_{i=0}^{d-1} m_i^2 = 1$ ce qui entraîne, en imposant (a) : $m_0 = q, m_i = q+1, 0 < i < d$.

En revenant à (3.2), $\lambda_{|\mathfrak{o}^1_{E|L}} = q(\xi \otimes \theta) \oplus \bigoplus_{i=1}^{d-1}(q+1)(\xi\kappa^i \otimes \theta)$ et

$$\operatorname{tr}\lambda(x) = -\xi(x) + (q+1)\Big(\sum_{i=0}^{d-1} \kappa^i(x)\Big)\xi(x) \quad \forall x \in \mathfrak{o}^1_{E|L}. \tag{3.5}$$

Calculons maintenant la trace sur $\mathfrak{o}_E^\times\tau$ d'un prolongement τ-invariant $\widetilde{\lambda}$ de $\widetilde{\eta}$. On choisit l'opérateur $\widetilde{\eta}(\tau)$ de trace $\dim\eta = q^3$ (lemme 3.3) et on note $\widetilde{\eta}^+$ le prolongement de $\widetilde{\eta}$ ainsi obtenu pour le différencier du deuxième que l'on note $\widetilde{\eta}^-$. On utilise les mêmes conventions pour distinguer les prolongements à $\widetilde{J}_c \cdot \Gamma$ de $\widetilde{\eta}^\pm$. On introduit aussi un caractère χ de $\mathfrak{o}_E^\times$, trivial sur $\mathfrak{o}^\times(1+\mathfrak{p}_E)$, générateur du groupe de ces caractères et tel que sa puissance d'-ième soit $\widetilde{\kappa}$ avec $d' = q^2+q+1$.

Considérons les caractères $\widetilde{\xi}$ de $\mathfrak{o}_E^\times$ et $\widetilde{\theta}$ de $\widetilde{H}_1$. Ils coïncident sur $\mathfrak{o}_E^\times \cap \widetilde{H}_1$. Alors $\widetilde{\xi}\otimes\widetilde{\theta}$ définit un caractère τ-invariant de $\widetilde{K} = \mathfrak{o}_E^\times\widetilde{H}_1$ qui prolonge $\widetilde{\omega}\otimes\widetilde{\theta}$.

Posons $\widetilde{\rho} = \operatorname{Ind}_{\widetilde{K}\rtimes\Gamma}^{\widetilde{J}_c\rtimes\Gamma}(\widetilde{\xi}\otimes\widetilde{\theta})\cdot 1$. C'est une représentation de dimension $(q^6)^2$, dont la restriction à $\widetilde{J}_c$ est $\operatorname{Ind}_{\widetilde{K}}^{\widetilde{J}_c}(\widetilde{\xi}\otimes\widetilde{\theta})$, c'est-à-dire de la forme $\bigoplus_{i=0}^{dd'-1} n_i\widetilde{\lambda}\chi^i$ où $n_i \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_{i=0}^{dd'-1} n_i = q^6$. Puisque $\widetilde{\eta}(\tau)$ fixe cette décomposition, on a également $n_i = n_{dd'-iq^3}$ pour tout $0 \le i < dd'$.

On montre alors, de la même manière que précédemment, qu'il existe un, et un seul, prolongement $\widetilde{\lambda}$ de $\widetilde{\eta}$ τ-invariant vérifiant :

$$\forall x \in \mathfrak{o}_E^\times, \quad \widetilde{\lambda}(x) = q^2\widetilde{\xi}(x) \oplus (q^2-1)\Big(\bigoplus_{i=1}^{dd'-1}(\chi^i\widetilde{\xi})(x)\Big).$$

Soient $\mathcal{W}$ l'espace de $\widetilde{\lambda}$ et, pour chaque $i \in \{0,\dots,dd'-1\}$, $\mathcal{W}^i$ la composante isotypique de $\widetilde{\lambda}_{|\mathfrak{o}_E^\times}$ de type $\chi^i\widetilde{\xi}$. Comme $\widetilde{\lambda}$ est τ-invariante, chaque composante isotypique $\mathcal{W}^{d'j}$, associée au caractère τ-invariant $\widetilde{\kappa}^j\widetilde{\xi}$, est stable par $\widetilde{\eta}(\tau)$ et la restriction de $\widetilde{\eta}(\tau)$ à cette composante agit comme $\mathrm{id}_{n^+_{d'j}} \oplus (-\,\mathrm{id}_{n^-_{d'j}})$ où $n^\pm_{d'j}$ sont deux entiers de somme $n_{d'j}$. Les autres composantes isotypiques $\mathcal{W}^i$ ne sont pas stables par $\widetilde{\eta}(\tau)$ et n'interviennent pas dans la trace de $\widetilde{\lambda}^+$ sur $\mathfrak{o}_E^\times\tau$. On obtient donc :

$$\forall x \in \mathfrak{o}_E^\times, \quad \operatorname{tr}\widetilde{\lambda}^+(x\tau) = \sum_{j=0}^{d-1}(n^+_{d'j} - n^-_{d'j})(\widetilde{\kappa}^j\widetilde{\xi})(x)$$

avec

$$n_0^+ + n_0^- = q^2, \quad n^+_{d'j} + n^-_{d'j} = q^2-1, \quad 0 < j < d, \tag{a$'$}$$

$$\sum_{j=0}^{d-1}(n^+_{d'j} - n^-_{d'j}) = \operatorname{tr}\widetilde{\eta}(\tau) = q^3. \tag{b$'$}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-035-6 Published online by Cambridge University Press

Dans la suite, on pose $m'_j = n^+_{d'j} - n^-_{d'j}$, $0 \le j < d$.

Revenons à $\widetilde{\rho}$. Sa restriction à $\widetilde{J}_1 \rtimes \Gamma$ est $\mathrm{Ind}_{\widetilde{H}_1 \rtimes \Gamma}^{\widetilde{J}_1 \rtimes \Gamma}(\widetilde{\theta} \cdot 1)$. Elle contient $\widetilde{\eta}^+$ et $\widetilde{\eta}^-$, chacun avec une multiplicité égale à $\dim \mathrm{Hom}_{\widetilde{H}_1 \rtimes \Gamma}(\widetilde{\eta}^{\pm}_{|\widetilde{H}_1 \rtimes \Gamma}, \widetilde{\theta} \cdot 1)$ qui n'est autre que la multiplicité de la valeur propre ± 1 de $\widetilde{\eta}(\tau)$. Les seules représentations irréductibles de $\widetilde{J}_c \rtimes \Gamma$ contenant $\widetilde{\omega} \otimes \widetilde{\eta}^+$ (resp. $\widetilde{\omega} \otimes \widetilde{\eta}^-$) et τ-invariantes sont les prolongements $\widetilde{\lambda}^+ \widetilde{\kappa}^{-j}$ (resp. $\widetilde{\lambda}^- \widetilde{\kappa}^{-j}$), $0 \le j < d$. Ce sont les seules qui puissent intervenir dans le calcul de $\mathrm{tr}\,\widetilde{\rho}$ en un élément de $\mathfrak{o}_E^\times \tau$. Par la loi de réciprocité de Frobenius, les multiplicités de $\widetilde{\kappa}^{-j} \widetilde{\lambda}^{\pm}$ dans $\widetilde{\rho}$ sont les entiers $n^{\pm}_{d'j}$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathfrak{o}_E^\times, \quad \mathrm{tr}\,\widetilde{\rho}(x\tau) = \Big(\sum_{i=0}^{d-1} {m'_i}^2\Big)\,\widetilde{\xi}(x) + \sum_{l=1}^{d-1} \Big(\sum_{\substack{0 \le i,j < d \\ i-j \equiv l\,[d]}} m'_i m'_j\Big)\,(\widetilde{\kappa}^l \widetilde{\xi})(x).$$

Par la formule de Mackey, on a également pour tout $x \in \mathfrak{o}_E^\times$,

$$\mathrm{tr}\,\widetilde{\rho}(x\tau) = \sum_{\substack{j \in \widetilde{J}_1/\widetilde{H}_1 \\ j^{-1}x\tau(j) \in \widetilde{K}}} (\widetilde{\xi} \otimes \widetilde{\theta})(j^{-1}x\tau(j)).$$

Quand $x = 1$, la formule précédente se réduit à

$$\mathrm{tr}\,\widetilde{\rho}(\tau) = \sum_{\substack{j \in \widetilde{J}_1/\widetilde{H}_1 \\ j^{-1}\tau(j) \in \widetilde{H}_1}} (\widetilde{\xi} \otimes \widetilde{\theta})(j^{-1}\tau(j)) = \sum_{j \in J_1/H_1} (\widetilde{\xi} \otimes \widetilde{\theta})(1) = q^6.$$

On choisit maintenant x une racine primitive $(q^6 - 1)$-ième de 1 contenue dans $\mathfrak{o}_E^\times$ et r un entier compris entre 1 et $d - 1 (= q^2 - q)$. L'élément $N_\tau(x^r)$ est une racine $(q^3 + 1)$-ième de 1 dont la réduction modulo $1 + \mathfrak{p}_E$ engendre k_E sur k (sinon son ordre diviserait $(q + 1)$ et r serait divisible par $q^2 + q + 1$). Alors, pour tout $j \in \widetilde{J}_1$,

$$j^{-1}x^r\tau(j) \in \widetilde{K} \Longrightarrow j^{-1}N_\tau(x^r)j \in \widetilde{K} \Longleftrightarrow [j^{-1}, N_\tau(x^r)] \in \widetilde{H}_1 \Longleftrightarrow j \in \widetilde{H}_1.$$

Par conséquent, $\mathrm{tr}\,\widetilde{\rho}(x^r\tau)$ est égale à $\widetilde{\xi}(x^r)$.

Ainsi, les entiers m'_i, $0 \le i < d$, sont solutions du système (3.4) et vérifient donc les conditions (b), (c), et (d). La condition (a′) fixant la parité de ces entiers, on obtient $m'_0 = q$ et $m'_i = q + 1$ si $i > 0$; puis pour tout $x \in \mathfrak{o}_E^\times$,

$$\mathrm{tr}\,\widetilde{\lambda}^+(x\tau) = -\widetilde{\xi}(x) + (q+1)\Big(\sum_{j=0}^{d-1} \widetilde{\kappa}^j(x)\Big)\,\widetilde{\xi}(x) = c_\tau\,\mathrm{tr}\,\lambda(N_\tau(x))$$

en comparant à (3.5) ($c_\tau = 1$ dans ce cas). Il est clair que l'autre prolongement $\widetilde{\lambda}^-$ de $\widetilde{\lambda}$ à $\widetilde{J}_c \rtimes \Gamma$ vérifie la même identité, c_τ valant alors -1. La représentation $\widetilde{\lambda}$ de $\widetilde{J}_c$ vérifie les conditions de la proposition. ∎

4 Démonstration du théorème 3.7

Soient π et $\widetilde{\pi}$ les représentations définies au 3.4. On prolonge $\widetilde{\pi}$ à $\widetilde{G} \rtimes \Gamma$ de la façon suivante. On choisit un prolongement de $\widetilde{\eta}$ à $\widetilde{J}_1 \rtimes \Gamma$. Il détermine un prolongement de $\widetilde{\Lambda}$ à $\widetilde{J} \rtimes \Gamma$. Alors $\operatorname{Ind}_{\widetilde{J}\rtimes\Gamma}^{\widetilde{G}\rtimes\Gamma} \widetilde{\Lambda}$ est un prolongement à $\widetilde{J} \rtimes \Gamma$ de $\widetilde{\pi}$, encore noté $\widetilde{\pi}$.

4.1 La dḿonstration de l'assertion (i)

La démonstration repose sur la description des paquets endoscopiques de G à l'aide de la correspondance de Howe, due à S. Gelbart, J. Rogawski et D. Soudry [GRS], et à la description de cette dernière sur les strates gauches fondamentales, déjà étudiée par S.-Y. Pan [Pa1, Pa2]. Malheureusement, le langage de S.-Y. Pan n'est pas celui des types et son point de vue diffère de celui de [GRS]. Une étape préliminaire est donc d'accorder ces langages et points de vue : elle est détaillée en annexe.

Cela fait, d'après les travaux de Rogawski [Ro, §13.1] une représentation cuspidale de G est dans un paquet de cardinal 1 si elle n'appartient pas à un paquet endoscopique. On conclut immédiatement en confrontant la description des paquets endoscopiques donnée dans [GRS, théorème 4.3] (voir aussi §A.4) et le corollaire A.10.

4.2 L'assertion (ii): mise en équation

Montrer que $\widetilde{\pi}$ est le changement de base de π consiste à établir l'identité de caractères (Id) pour tout élément g de $\widetilde{G}$ de norme cyclique régulière. Par [Ro, 12.6], il suffit de considérer les éléments g de $\widetilde{G}$ dont la norme cyclique est régulière et elliptique. Comme π est stable et $\widetilde{\pi}$ τ-stable, on peut supposer que

(4.1) $\qquad g \in \widetilde{G}$ tel que $x := N_\tau(g) \in G$ et x est régulier et elliptique.

Alors, le centralisateur de x dans G est égal au τ-centralisateur de g dans $\widetilde{G}$ et est un tore $T(F_0)$ maximal compact de G.

La formule de Mackey fournit une première expression des traces de $\pi(x)$ et $\widetilde{\pi}(g\tau)$:

$$\operatorname{tr}\pi(x) = \sum_{\substack{y\in G/J\\ y^{-1}xy\in J}} \operatorname{tr}\lambda(y^{-1}xy) \quad \text{tandis que} \quad \operatorname{tr}\widetilde{\pi}(g\tau) = \sum_{\substack{h\in\widetilde{G}\Gamma/\widetilde{J}\Gamma\\ h^{-1}g\tau h\in\widetilde{J}\Gamma}} \operatorname{tr}\widetilde{\Lambda}(h^{-1}g\tau(h)\tau).$$

Puisque x et g sont elliptique et τ-elliptique respectivement, ces sommes n'ont qu'un nombre fini de termes. Il n'y a donc pas de souci de convergence.

Notons $\mathcal{C}_J(x)$ (resp. $\mathcal{C}_J^{\mathrm{st}}(x)$) l'ensemble des classes de J-conjugaison dans $\mathcal{C}l(x)\cap J$ (resp. $\mathcal{C}l^{\mathrm{st}}(x)\cap J$) et φ l'application de $(G/J)^x$ sur $\mathcal{C}_J(x)$, qui à yJ associe la classe de J-conjugaison de $y^{-1}xy$. Cette application est surjective. De plus, si x' appartient à $\mathcal{C}l(x)\cap J$, c'est-à-dire $x' = y^{-1}xy$ avec $y \in G$, alors un élément $y'J$ de $(G/J)^x$ a pour image x' si et seulement si

$$\begin{aligned} \exists j\in J,\ (y'j)^{-1}xyj = y^{-1}xy &\iff \exists j \in J,\ yjy'^{-1} \in T(F_0)\\ &\iff \exists t\in T(F_0),\ tyJ = y'J. \end{aligned}$$

Il s'en suit que le cardinal $c(x')$ de la fibre de φ en x' est égal à $[T(F_0):T(F_0)\cap yJy^{-1}]$. De plus, en notant $n(x)$ le nombre de classes de conjugaison dans la classe de conjugaison stable de x et puisque π est stable, $\operatorname{tr}\pi(x)$ s'écrit :

$$\operatorname{tr}\pi(x) = \sum_{x'\in\mathcal{C}_J(x)} c(x')\operatorname{tr}\lambda(x') = \frac{1}{n(x)}\sum_{x'\in\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_J(x)} c(x')\operatorname{tr}\lambda(x'). \tag{4.2}$$

De manière analogue, on note $\mathcal{C}_{\tau,\widetilde{J}}(g)$ (resp. $\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{\tau,\widetilde{J}}(g)$) l'ensemble des classes de τ-$\widetilde{J}$-conjugaison dans $\mathcal{C}l_\tau(g)\cap\widetilde{J}$ (resp. $\mathcal{C}l^{\mathrm{st}}_\tau(g)\cap\widetilde{J}$), $\widetilde{n}(g)$ le nombre de classes de τ-conjugaison dans $\mathcal{C}l^{\mathrm{st}}_\tau(g)$ et, pour $g'\in\mathcal{C}_{\tau,\widetilde{J}}(g)$, $\widetilde{c}(g')$ le cardinal de la fibre en g' de l'application de $(\widetilde{G}\rtimes\Gamma/\widetilde{J}\rtimes\Gamma)^{g\tau}$ sur $\mathcal{C}_{\tau,\widetilde{J}}(g)$ qui à $h\widetilde{J}\rtimes\Gamma$ associe la classe de τ-$\widetilde{J}$-conjugaison de $h^{-1}g\tau(h)$. Alors

$$\operatorname{tr}\widetilde{\pi}(g\tau) = \sum_{g'\in\mathcal{C}_{\tau,\widetilde{J}}(g)} \widetilde{c}(g')\operatorname{tr}\widetilde{\lambda}(g'\tau) = \frac{1}{\widetilde{n}(g)}\sum_{g'\in\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{\tau,\widetilde{J}}(g)} \widetilde{c}(g')\operatorname{tr}\widetilde{\Lambda}(g'\tau), \tag{4.3}$$

et $\widetilde{c}(g') = [T(F_0):T(F_0)\cap h\widetilde{J}h^{-1}]$ pour un $h\in\widetilde{G}$ tel que $h^{-1}g\tau(h) = g'$.

4.3 Spécificité du cas non ramifié

On est amené à considèrer tous les prolongements à J de $\omega\otimes\eta$ simultanément. Pour cela, on redéfinit π et $\widetilde{\pi}$ comme suit.

Soient λ_i, $0\leq i<d$, les d prolongements à J de $\omega\otimes\eta$. Pour chaque i, $\widetilde{\lambda}_i$ est la représentation obtenue à partir λ_i dans la proposition 3.5 et $\widetilde{\Lambda}_i$ son unique prolongement τ-invariant à $\widetilde{J}$, lui-même prolongé à $\widetilde{J}\rtimes\Gamma$ comme ci-dessus. On pose alors :

$$\pi_i = \operatorname{Ind}_J^G\lambda_i,\quad \widetilde{\pi}_i = \operatorname{Ind}_{\widetilde{J}\rtimes\Gamma}^{\widetilde{G}\rtimes\Gamma}\widetilde{\Lambda}_i,\quad 0\leq i<d,$$

et

$$\pi = \bigoplus_{i=0}^{d-1}\pi_i,\quad \widetilde{\pi} = \bigoplus_{i=0}^{d-1}\widetilde{\pi}_i.$$

Ces deux dernières représentations sont stables. Calculons leurs traces en commençant par celle de π :

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\pi(x) &= \sum_{i=0}^{d-1}\Big(\sum_{\substack{y\in G/J\\ y^{-1}xy\in J}}\operatorname{tr}\lambda_i(y^{-1}xy)\Big) = \sum_{\substack{y\in G/J\\ y^{-1}xy\in J}}\Big(\sum_{i=0}^{d-1}\kappa^i(y^{-1}xy))\operatorname{tr}\lambda_0(y^{-1}xy)\Big)\\ &= \sum_{\substack{y\in G/J\\ y^{-1}xy\in J'}} d\operatorname{tr}\lambda_0(y^{-1}xy),\end{aligned}$$

puisque J' est le noyau de κ. De plus, l'application de G/J' dans $\mathbb{C}$ qui à yJ' associe $\operatorname{tr}\lambda_0(y^{-1}xy)$ est constante sur les fibres de la projection de G/J' sur G/J et chacune

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-035-6 Published online by Cambridge University Press

de ces fibres est de cardinal d. On obtient donc :

$$\text{(4.4)} \qquad \operatorname{tr}\pi(x) = \sum_{\substack{y\in G/J' \\ y^{-1}xy\in J'}} \operatorname{tr}\lambda_0(y^{-1}xy) = \frac{1}{n(x)} \sum_{x'\in \mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{J'}(x)} c(x')\operatorname{tr}\lambda_0(x').$$

($\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{J'}(x)$ désigne l'ensemble des classes de J'-conjugaison dans $\mathcal{C}l^{\mathrm{st}}(x)\cap J'$).

Examinons $\operatorname{tr}\widetilde{\pi}(g\tau)$. On remarque que $\widetilde{J}$ est égal à $\varpi_0^{\mathbb{Z}}\widetilde{J}_c$. Le caractère $\widetilde{\kappa}$ se prolonge en un caractère de $\widetilde{J}$ en posant $\widetilde{\kappa}(\varpi_0) = 1$. Alors les représentations $\widetilde{\kappa}^i\widetilde{\Lambda}_0$, i variant de 0 à $d-1$, ne sont autres que les d prolongements $\widetilde{\Lambda}_i$. On note $\widetilde{J}'$ le noyau de $\widetilde{\kappa}$: $\widetilde{J}' = \varpi_0^{\mathbb{Z}}\widetilde{J}_0 = F^\times N_{E/L}(E^\times)\widetilde{J}_1$.

Une classe à droite modulo $\widetilde{J}$ dans $\widetilde{G}$ se casse en d classes à droite modulo $\widetilde{J}'$. De plus, s'il existe un élément h de cette classe modulo $\widetilde{J}$ pour lequel $h^{-1}g\tau(h)$ appartient à $\widetilde{J}'$, alors pour tout élément h' de cette classe $h'^{-1}g\tau(h')$ appartient à $\widetilde{J}'$. Comme précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\widetilde{\pi}(g\tau) &= \sum_{\substack{h\in\widetilde{G}/\widetilde{J} \\ h^{-1}g\tau(h)\in\widetilde{J}}} \Big(\sum_{i=0}^{d-1}\widetilde{\kappa}^i(h^{-1}g\tau(h))\Big)\operatorname{tr}\widetilde{\Lambda}_0(h^{-1}g\tau(h)\tau) \\ &= \sum_{\substack{h\in\widetilde{G}/\widetilde{J} \\ h^{-1}g\tau(h)\in\widetilde{J}'}} d\operatorname{tr}\widetilde{\Lambda}_0(h^{-1}g\tau(h)\tau),\end{aligned}$$

d'où, en notant $\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{\tau,\widetilde{J}'}(g)$ l'ensemble des classes de τ-$\widetilde{J}'$-conjugaison contenues dans $\mathcal{C}l^{\mathrm{st}}_\tau(g)\cap\widetilde{J}'$,

$$\text{(4.5)} \quad \operatorname{tr}\widetilde{\pi}(g\tau) = \sum_{\substack{h\in\widetilde{G}/\widetilde{J}' \\ h^{-1}g\tau(h)\in\widetilde{J}'}} \operatorname{tr}\widetilde{\Lambda}_0(h^{-1}g\tau(h)\tau) = \frac{1}{\widetilde{n}(g)}\sum_{g'\in\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{\tau,\widetilde{J}'}(g)} \widetilde{c}(g')\operatorname{tr}\widetilde{\Lambda}_0(g'\tau).$$

4.4 Comparaison de $\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_J(x)$ et $\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{\tau,\widetilde{J}(g)}$ via l'application N_τ

On note : $J' = F^1J_1$ et $\widetilde{J}' = F^\times N_{E/L}(E^\times)\widetilde{J}_1$ (dans le cas ramifié, J' et $\widetilde{J}'$ ne sont autres que J et $\widetilde{J}$, respectivement). Alors tout élément de $\widetilde{J}'$ est τ-$\widetilde{J}$-conjugué à un élément de $F^\times\widetilde{J}_1$.

Lemme 4.1 *Soient g et x comme en* (4.1). *On suppose que la classe de conjugaison stable de x ne rencontre pas J'. Alors* $\operatorname{tr}\widetilde{\pi}(g\tau) = c_\tau\operatorname{tr}\pi(x) = 0$.

Démonstration Montrons que $\mathcal{C}l^{\mathrm{st}}_\tau(g)\cap\widetilde{J}' = \varnothing$. Supposons le contraire. Alors $\mathcal{C}l^{\mathrm{st}}_\tau(g)$ contient un élément g' de $F^\times\widetilde{J}_1$. Par le lemme 3.1, on peut choisir g' pour que $N_\tau(g')$ soit un élément de F^1J_1 : $N_\tau(g')$ appartient à J' et est stablement conjugué à x. ■

On suppose dorénavant que la classe stable de x rencontre J'. On peut alors prendre x dans J' : $x = uj$ avec $u \in F^1$ et $j \in J_1$. Par le théorème de Hilbert 90, u est égal à $v\tau(v)$ pour un $v \in F^\times$ et par le lemme 3.1 j est égal à $N_\tau(\widetilde{j})$ avec $\widetilde{j} \in \widetilde{J}_1$. Alors $N_\tau(v\widetilde{j})$ est égal à x : g est stablement τ-conjugué à $v\widetilde{j}$, un élément de $F^\times \widetilde{J}_1 =: \widetilde{J}''$. On choisit donc g dans $\widetilde{J}''$ tel que $N_\tau(g) = x$.

Comparons $\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{\tau,\widetilde{J}'}(g)$ à $\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{\tau,\widetilde{J}''}(g)$, l'ensemble des classes de τ-$\widetilde{J}''$-conjugaison contenues dans $\mathcal{C}l^{\mathrm{st}}(g) \cap \widetilde{J}''$.

Lemme 4.2 *L'application de $\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{\tau,\widetilde{J}''}(g)$ dans $\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{\tau,\widetilde{J}'}(g)$ qui à la classe de τ-$\widetilde{J}''$-conjugaison d'un élément h de $\mathcal{C}l^{\mathrm{st}}(g) \cap \widetilde{J}''$, associe sa classe de τ-$\widetilde{J}'$-conjugaison, est une bijection.*

Démonstration Cette application est bien définie. Elle est clairement surjective dans le cas ramifié (puisque $\widetilde{J}' = \widetilde{J}$). Dans le cas non ramifié, elle est surjective car tout élément de $\mathcal{C}l^{\mathrm{st}}_\tau(g) \cap \widetilde{J}'$ est τ-$\widetilde{J}'$-conjugué à un élément de $\widetilde{J}''$.

En effet, un élément g' de $\widetilde{J}'$ est τ-$\widetilde{J}$-conjugué à un élément g'_0 de $\widetilde{J}''$. Ecrivons $g' = (j\zeta^k)^{-1} g'_0 \tau(j\zeta^k)$ avec $j \in \widetilde{J}''$, ζ une racine primitive (q^6-1)-ième de 1 contenue dans $E^\times$ et $k \in \mathbb{Z}$. Si k est pair, il existe $l, l' \in \mathbb{Z}$ tels que $k = (q^3+1)l + (q^3-1)l'$. Alors,

$$j' := \zeta^{-(q^3-1)l'} j\zeta^k = (\zeta^{-(q^3-1)l'} j \zeta^{(q^3-1)l'})\zeta^{(q^3+1)l} \in \widetilde{J}',$$

$$g'_1 := \zeta^{-(q^3-1)l'} g'_0 \tau(\zeta^{(q^3-1)l'}) \in \widetilde{J}'' \quad \text{et} \quad g' = j'^{-1} g'_1 \tau(j').$$

Si k est impair, $g' = (\zeta^{k+q^4+q^2+1} j)^{-1} g''_0 \tau(\zeta^{k+q^4+q^2+1} j)$ où $g''_0 = \zeta^{q^4+q^2+1} g'_0 \tau(\zeta^{-(q^4+q^2+1)})$ appartient à $\widetilde{J}''$; on retrouve le cas précédent.

Montrons qu'elle est injective, c'est-à-dire que deux éléments h, h' de $\widetilde{J}''$, τ-$\widetilde{J}'$-conjugués, sont τ-$\widetilde{J}''$-conjugués.

Soient h et h' deux éléments de $\widetilde{J}''$ τ-$\widetilde{J}'$-conjugués : $h' = j^{-1}h\tau(j)$, $j \in \widetilde{J}'$. Ecrivons $h = uh_0$, $h' = u'h'_0$ où $u, u' \in F^\times$, $h_0, h'_0 \in \widetilde{J}_1$. Quitte à τ-conjuguer h par un élément de $\widetilde{J}''$, on peut supposer que j appartient à $N_{E/L}(E^\times)$. Alors, $u^{-1}u' = j^{-1}\tau(j) \cdot \tau(j)^{-1} h_0 \tau(j) {h'}_0^{-1} \in L^\times \widetilde{J}_1$ d'où $u^{-1}u' \in F^\times \cap L^\times \widetilde{J}_1 = F_0^\times(1+\mathfrak{p}_F)$.

On peut donc supposer $h \in \widetilde{J}_1$ et $h' = u'h'_0 \in F_0^\times \widetilde{J}_1$. Mais alors, $u'(j^{-1}\tau(j))^{-1} = u'j^2$ est élément de $L^\times \cap \widetilde{J}_1 = 1 + \mathfrak{p}_L$ donc u' est un carré dans L. Puisque L est cubique sur F_0, u' est déjà un carré dans F_0 donc appartient à $N_{F/F_0}(F^\times)$. Par conséquent, h' est τ-conjugué par un élément de $F^\times$ à h'_0 : on suppose $u' = 1$. Alors, j^2 appartient à $1 + \mathfrak{p}_L$, c'est-à-dire $j \in \langle -1 \rangle (1 + \mathfrak{p}_L) \subset F^\times \widetilde{J}_1$. ■

Lemme 4.3 (i) *Soit $h \in \mathcal{C}l^{\mathrm{st}}_\tau(g) \cap \widetilde{J}''$. Il existe $j \in \widetilde{J}''$ tel que $N_\tau(j^{-1}h\tau(j))$ appartient à $\mathcal{C}l^{\mathrm{st}}(x) \cap J'$. Notons h_0 l'élément $j^{-1}h\tau(j)$.*

(ii) *L'application $h \mapsto N_\tau(h_0)$ induit une surjection de $\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{\tau,\widetilde{J}''}(g)$ sur $\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{J'}(x)$ dont chaque fibre est de cardinal 2. On la note $\mathcal{N}'_\tau$.*

Démonstration Du lemme 3.1, du théorème de Hilbert 90 et du fait que $F^\times$ est central, on déduit (i) et la surjectivité de l'application définie en (ii). Il reste à calculer le cardinal d'une fibre.

Soient $x' \in \mathcal{C}l^{\mathrm{st}}(x) \cap J'$ et h_1, h_2 deux éléments de $\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{\tau,\widetilde{J}''}(g)$ dont l'image est la classe de J'-conjugaison de x'. Quitte à τ-conjuguer h_1 et h_2 par des éléments de J', on suppose $N_\tau(h_1) = N_\tau(h_2) = x'$. Alors, pour $i = 1$ ou 2, $h_i, \tau(h_i)$ et x' commutent entre eux : h_1 et h_2 sont des éléments du centralisateur de x' dans $\widetilde{G}$, c'est-à-dire d'un tore $T'(F)$ conjugué à $T(F)$. Ainsi, $h_2 h_1^{-1}$ appartient à $\widetilde{J}'' \cap T'(F)$ qui est égal a $F^\times(\widetilde{J}_1 \cap T'(F))$ et $h_1\tau(h_1) = h_2\tau(h_2)$ si et seulement si $h_1 h_2^{-1}\tau(h_1 h_2^{-1}) = 1$ puisque $T'(F)$ est abélien. En posant $c(\tau) = h_2 h_1^{-1}$, on définit un cocycle c de Γ à valeurs dans $F^\times(\widetilde{J}_1 \cap T'(F))$. La fibre en x' est paramétrée par le groupe $H^1(\Gamma, F^\times(\widetilde{J}_1 \cap T'(F)))$ qui est isomorphe à $F_0^\times/N_{F/F_0}(F^\times)$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

En effet, soit c un cocycle de Γ à valeurs dans $F^\times(\widetilde{J}_1 \cap T'(F))$. Ecrivons $c(\tau)$ sous la forme d'un produit uj où $u \in F^\times$ et $j \in \widetilde{J}_1 \cap T'(F)$. Alors $uj\tau(uj) = 1 \Rightarrow u\tau(u) = (j\tau(j))^{-1} \in F^1_{|F_0} \cap \widetilde{J}_1 = (1+\mathfrak{p})^1_{|F_0}$.

Il existe donc $v \in 1+\mathfrak{p}$ tel que $v\tau(v) = u\tau(u) = (j\tau(j))^{-1}$. On peut choisir $u \in F^\times$ et $j \in \widetilde{J}_1 \cap T'(F)$ pour que $c(\tau) = uj$, $u\tau(u) = 1$ et $j\tau(j) = 1$. Comme $\widetilde{J}_1 \cap T'(F)$ est un pro-p-groupe, c est cohomologue à un cocycle à valeurs dans $F^\times$ d'où le résultat énoncé. ■

4.5 Comparaison des termes de (4.2) et (4.3)

Considérons une classe de τ-$\widetilde{J}''$-conjugaison appartenant à $\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{\tau,\widetilde{J}''}(g)$ et son image dans $\mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{J'}(x)$, g' et x' des représentants de ces classes choisis pour que $N_\tau(g')$ soit égal à x'. Si un élément h de $\widetilde{G}$ τ-conjugue g en g', il conjugue x en x' et les nombres $\widetilde{c}(g')$ et $c(x')$ sont clairement égaux.

D'autre part, l'ensemble des classes de τ-conjugaison contenues dans $\mathcal{C}l^{\mathrm{st}}_\tau(g)$ est paramétré par $H^1(\Gamma, T(F))$ [Ro, 3.11] tandis que celui des classes de conjugaison contenues dans $\mathcal{C}l^{\mathrm{st}}(x)$ est paramétré par le noyau de l'application naturelle de $H^1(\Gamma, T(F))$ dans $H^1(\Gamma, \widetilde{G})$ [Ro, 3.1]. Puisque g est τ-régulier et τ-elliptique, les calculs de J. Rogawski [Ro, Ch. 3] montrent que le nombre $\widetilde{n}(g)$ de classes de τ-conjugaison contenues dans $\mathcal{C}l^{\mathrm{st}}_\tau(g)$ est toujours le double du nombre $n(x)$ de classes de conjugaison contenues dans $\mathcal{C}l^{\mathrm{st}}(x)$.

4.6 L'identité (Id)

On déduit l'identité de caractères (Id) en partant de l'égalité (4.2) ou (4.4), puis en utilisant successivement le lemme 4.3, les résultats de la section 4.5, et (3.1), et pour conclure le lemme 4.2 suivi de (4.3) ou (4.5) :

$$\begin{aligned} c_\tau \operatorname{tr} \pi(x) &= \frac{1}{n(x)} \sum_{x' \in \mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{J'}(x)} c_\tau c(x') \operatorname{tr} \lambda(x') \\ &= \frac{1}{2n(x)} \sum_{g' \in \mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{\tau,\widetilde{J}''}(g)} c(N_\tau(g')) c_\tau \operatorname{tr} \omega \otimes \eta \mathcal{N}'_\tau(g') \end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-035-6 Published online by Cambridge University Press

$$= \frac{1}{\widetilde{n}(g)} \sum_{g' \in \mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{\tau,\widetilde{J}''}(g)} \widetilde{c}(g') \operatorname{tr} \widetilde{\omega} \otimes \widetilde{\eta}(g'\tau)$$

$$= \frac{1}{\widetilde{n}(g)} \sum_{g' \in \mathcal{C}^{\mathrm{st}}_{\tau,\widetilde{J}''}(g)} \widetilde{c}(g') \operatorname{tr} \widetilde{\Lambda}(g'\tau) = \operatorname{tr} \widetilde{\pi}(g\tau).$$

Ici s'achève la démonstration du théorème dans le cas ramifié.

4.7 Suite et fin du cas non ramifié

Poursuivons dans le cas non ramifié et reprenons les notations du paragraphe 4.3. Chaque $\widetilde{\pi}_i$ est l'image par le changement de base d'une représentation cuspidale irréductible π_i' de G [Ro, 13.2.2] qui est caractérisée par l'identité (Id). Par ce qui précède, pour tout $x \in G$ régulier, elliptique, de la forme $N_\tau(g)$ pour un $g \in \widetilde{G}$,

$$\sum_{i=0}^{d-1} c(\widetilde{\pi}_i) \operatorname{tr} \pi_i'(x) = \sum_{i=0}^{d-1} c_\tau \operatorname{tr} \pi_i(x).$$

Par [Ro, 3.11], N_τ est surjective de $T(F)$ sur $T(F_0)$ pour tout sous-groupe de Cartan T de $U(2,1)$: l'égalité ci-dessus est valable pour tout élément x régulier et elliptique. D'après les relations d'orthogonalité de caractères [Ro, 12.6.1] et l'indépendance des représentations π_i', $0 \le i < d$, d'une part, celle des représentations π_i, $0 \le i < d$, d'autre part, on conclut que les ensembles $\{\pi_i', 0 \le i < d\}$ et $\{\pi_i, 0 \le i < d\}$ sont égaux et que les constantes $c(\widetilde{\pi}_i)$ sont toutes égales à c_τ.

Considérons maintenant une des représentations π_i, nommée π par la suite, de type (J, λ). Son image par le changement de base appartient à $\{\widetilde{\pi}_i, 0 \le i < d\}$. Elle est caractérisée par :

la valeur de sa trace en $\zeta\tau$ est égale à $c_\tau \operatorname{tr} \pi(x)$ où $x = N_\tau(\zeta) = \zeta^{1-q^3}$

dès que $\operatorname{tr} \pi(x)$ n'est pas nul.

On montre que la représentation $\widetilde{\pi}$ de $\widetilde{G}$ définie à la section 3.4 à partir du type (J, λ) vérifie cette condition. Calculons donc $\operatorname{tr} \pi(N_\tau(\zeta))$ puis $\operatorname{tr} \widetilde{\pi}(\zeta\tau)$.

Le sous-groupe compact ouvert $U_0(\mathcal{L})$ de G contient J : π est alors l'induite à G de la représentation σ définie comme l'induite de J à $U_0(\mathcal{L})$ de λ.

De même, $\widetilde{J}$ est contenu dans le normalisateur de $\widetilde{U}_0(\mathcal{L})$, égal à $F^\times \widetilde{U}_0(\mathcal{L})$. En notant $\widetilde{\sigma}$ la représentation induite de $\widetilde{J}\Gamma$ à $F^\times \widetilde{U}_0(\mathcal{L})\Gamma$ de $\widetilde{\Lambda}$, $\widetilde{\pi}$ est l'induite de $F^\times \widetilde{U}_0(\mathcal{L})\Gamma$ à $\widetilde{J}\Gamma$ de $\widetilde{\sigma}$. Par la formule de Mackey,

$$\operatorname{tr} \pi(x) = \sum_{\substack{y \in G/U_0(\mathcal{L}) \\ y^{-1}xy \in U_0(\mathcal{L})}} \operatorname{tr} \sigma(y^{-1}xy) \quad \text{et} \quad \operatorname{tr} \widetilde{\pi}(\zeta\tau) = \sum_{\substack{h \in \widetilde{G}/F^\times \widetilde{U}_0(\mathcal{L}) \\ h^{-1}\zeta\tau(h) \in F^\times \widetilde{U}_0(\mathcal{L})}} \operatorname{tr} \widetilde{\sigma}(h^{-1}\zeta\tau h).$$

Or, si $h \in \widetilde{G}\,\tau$-conjugue ζ en un élément de $F^\times \widetilde{U}_0(\mathcal{L})$, il conjugue x en un élément de $\widetilde{U}_0(\mathcal{L})$. Mais x est très régulier au sens où sa classe dans k_E engendre l'extension k_E/k :

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-035-6 Published online by Cambridge University Press

tout élément h de $\widetilde{G}$ tel que $h^{-1}xh$ soit élément de $\widetilde{U}_0(\mathcal{L})$ appartient à $F^\times \widetilde{U}_0(\mathcal{L})$. Par conséquent, l'ensemble des éléments y de G tels que $y^{-1}xy \in U_0(\mathcal{L})$ est contenu dans $(F^\times \widetilde{U}_0(\mathcal{L}))^\tau = U_0(\mathcal{L})$. D'où :

$$\operatorname{tr}\pi(x) = \operatorname{tr}\sigma(x) = \sum_{\substack{y\in U_0(\mathcal{L})/J\\ y^{-1}xy\in J}} \operatorname{tr}\lambda(y^{-1}xy), \tag{4.6}$$

$$\operatorname{tr}\widetilde{\pi}(\zeta\tau) = \operatorname{tr}\widetilde{\sigma}(\zeta\tau) = \sum_{\substack{h\in \widetilde{U}_0(\mathcal{L})/\widetilde{J}_c\\ h^{-1}\zeta\tau(h)\in \widetilde{J}_c}} \operatorname{tr}\widetilde{\lambda}(h^{-1}\zeta\tau h).$$

De plus, dans $\widetilde{U}_0(\mathcal{L})/\widetilde{U}_1(\mathcal{L})$, quotient isomorphe à $\mathrm{GL}(3,k)$, l'image de x est régulière. Son centralisateur est le tore maximal $k_E^\times$ qui n'est autre que l'image de $\widetilde{J}_c$. Alors l'image de $h^{-1}xh$ est aussi régulière, contenue à la fois dans le tore $h^{-1}k_E^\times h$ et le tore $k_E^\times$: l'image de h normalise $k_E^\times$, c'est-à-dire appartient à $\mathrm{Gal}(k_E/k_F) \ltimes k_E^\times$. On en déduit que h appartient nécessairement à $\mathrm{Gal}(E/F) \ltimes \mathfrak{o}_E^\times \widetilde{U}_1(\mathcal{L})$. On suppose donc $h \in \mathrm{Gal}(E/F) \ltimes \widetilde{U}_1(\mathcal{L})$. On raisonne alors par approximation : pour tout m compris entre 1 et $[\frac{n+1}{2}] - 1$, si un élément h de $\mathrm{Gal}(E/F) \ltimes \widetilde{U}_m(\mathcal{L})$ conjugue x en un élément de $\widetilde{J}_c$, alors h appartient à $\mathrm{Gal}(E/F) \ltimes \widetilde{U}_{m+1}(\mathcal{L})$.

Fixons un entier m, $1 \leq m < [\frac{n+1}{2}]$, et écrivons $h = \gamma(1+u)$ avec $\gamma \in \mathrm{Gal}(E/F)$ et $1+u \in \widetilde{U}_m(\mathcal{L})$. L'hypothèse se traduit par :

$$h^{-1}xh\gamma(x)^{-1} = (1+u)^{-1}\gamma(x)(1+u)\gamma(x)^{-1} \in \widetilde{J}_c \cap \widetilde{U}_m(\mathcal{L}) = 1 + \mathfrak{p}_E^m,$$

d'où $\gamma(x)u - u\gamma(x) \in \mathfrak{p}_E^m + \mathfrak{a}_{m+1}(\mathcal{L})$.

L'endomorphisme $\alpha_{\gamma(x)}$ du k-espace vectoriel $\mathfrak{a}_m(\mathcal{L})/\mathfrak{a}_{m+1}(\mathcal{L})$ qui à $Y + \mathfrak{a}_{m+1}(\mathcal{L})$ associe la réduction de $\gamma(x)Y - Y\gamma(x)$ modulo $\mathfrak{a}_{m+1}(\mathcal{L})$ a pour noyau k_E (puisque $\gamma(x)$, comme x, est très régulier) et pour image l'orthogonal de k_E pour la forme $(Y,X) \mapsto \operatorname{tr} XY$. Par conséquent, u appartient à $\mathfrak{a}_{m+1}(\mathcal{L})$.

Ceci montre que h est nécessairement dans $\mathrm{Gal}(E/F) \ltimes \widetilde{J}_c$. Considérons h un générateur de $\mathrm{Gal}(E/F)$. Comme E n'est pas ramifiée sur F_0, $\mathrm{Gal}(E/F_0)$ est abélien, en particulier σ commute à la conjugaison par h. Il s'en suit que $h^{-1}\tau(h)$ est un élément de $E^\times$, et même de $L^\times$. Distinguons deux cas.

(i) $h^{-1}\tau(h)$ est une norme dans L. Alors, quitte à multiplier h par un élément de $E^\times$, on peut supposer que $h^{-1}\tau(h)$ est égal à 1, c'est-à-dire h appartient à G : $h^{-1}\zeta\tau(h)$ est bien dans $\widetilde{J}_c$. De plus, si $y \in U_0(\mathcal{L})$ conjugue x en un élément de J, y appartient à $(\mathrm{Gal}(E/F) \ltimes \widetilde{J}_c)^\tau$, c'est-à-dire à $\mathrm{Gal}(E/F) \ltimes J$ d'après ce qui précède. En reprenant (4.6), et d'après la propositon 3.5,

$$\operatorname{tr}\pi(x) = \sum_{\gamma\in\mathrm{Gal}(E/F)} \operatorname{tr}\lambda(\gamma(x)),$$

$$\operatorname{tr}\widetilde{\pi}(\zeta\tau) = \sum_{\gamma\in\mathrm{Gal}(E/F)} \operatorname{tr}\widetilde{\lambda}(\gamma(\zeta)\tau) = c_\tau \sum_{\gamma\in\mathrm{Gal}(E/F)} \operatorname{tr}\lambda(N_\tau(\gamma(\zeta))) = c_\tau \operatorname{tr}\pi(x).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-035-6 Published online by Cambridge University Press

Ajoutons que :

$$\operatorname{tr}\pi(x) = -\sum_{\gamma\in\mathrm{Gal}(E/F)} \xi(\gamma(x)) = -\xi(x)(1+\xi(x)^{q^2-1}+\xi(x)^{q^4-1}) \quad (3.5).$$

Rappelons que ξ est un caractère de J se factorisant par J/J', groupe d'ordre q^2-q+1. Si $q \not\equiv -1 \mod 3$, aucune puissance de $\xi(x)$ n'est une racine cubique de 1 (différente de 1) et $\operatorname{tr}\pi(x)$ est bien non nul. Sinon, $\xi(x)^{q^2-1}$ est une racine cubique de 1 si et seulement si $\xi(x)$ est lui-même une racine cubique de 1 (puisque $\operatorname{pgcd}(q^2-q+1, 3(q^2-1)) = 3$) donc $(1+\xi(x)^{q^2-1}+\xi(x)^{q^4-1})$ est égal à 3 et $\operatorname{tr}\pi(x)$ est encore non nul.

(ii) $h^{-1}\tau(h)$ n'est pas une norme dans L. On peut alors supposer que $\tau(h) = \varpi h$. Dans ce cas, $h^{-1}\zeta\tau(h)$ est égal à $\varpi h^{-1}\zeta h$ et ne peut appartenir à $\widetilde{J}_c$. La deuxième somme de (4.6) est réduite à un terme : $\operatorname{tr}\widetilde{\pi}(\zeta\tau) = \operatorname{tr}\widetilde{\lambda}(\zeta\tau)$. Mais dans ce cas, $(\mathrm{Gal}(E/F) \ltimes \widetilde{J}_c)^\tau$ est réduit à J puisque $h^{-1}\tau(h)$ n'appartient pas à J et, par suite, la première somme de (4.6) est aussi réduite à un terme : $\operatorname{tr}\pi(x) = \operatorname{tr}\lambda(x) = -\xi(x) \neq 0$.

On conclut grâce à la proposition 3.5. ∎

Remarque L'étude (en cours) du changement de base des représentations cuspidales scindées montrera que ces dernières remplissent les paquets endoscopiques. Par conséquent, on a décrit ici le changement de base de tous les paquets singletons cuspidaux, de niveau strictement positif.

A Annexe : paquets endoscopiques, correspondance de Howe et strates fondamentales.

Le but de cette annexe est de décrire les résultats de S.-Y. Pan [Pa1,Pa2] dans le langage des types. On conclut en rappelant la description des paquets endoscopiques à l'aide de la correspondance de Howe, description due à S. Gelbart, J. Rogawski et D. Soudry [GRS] que l'on exprime sous les conventions de ce papier.

A.1 Notations

Soient V et V' deux espaces vectoriels sur F munis respectivement d'une forme hermitienne non dégénérée $\langle\,,\rangle$ et d'une forme anti-hermitienne non dégénérée $\langle\,,\rangle'$. Alors $W = V \otimes_F V'$ est un espace vectoriel sur F_0 muni de la forme alternée non dégénérée :

$$\forall v_1, v_2 \in V, \forall v_1', v_2' \in V', \quad \langle\!\langle v_1 \otimes v_1', v_2 \otimes v_2' \rangle\!\rangle = \operatorname{tr}_{F/F_0}(\langle v_1, v_2\rangle \langle v_2', v_1'\rangle').$$

L'espace vectoriel W s'identifie à $\mathrm{Hom}_F(V, V')$ et $\mathrm{Hom}_F(V', V)$. Précisons ces deux identifications, φ et φ', au rôle essentiel par la suite (*cf.*[Pa1, §7]; [Pa2, §4]) : si $w = \sum_{j=1}^r v_j \otimes v_j'$ avec $r \in \mathbb{N}^*$, $v_j \in V$, $v_j' \in V'$,

$$\varphi(w) : \begin{cases} V & \to V' \\ v & \mapsto \sum_{j=1}^r \langle v, v_j\rangle v_j' \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi'(w) : \begin{cases} V' & \to V \\ v' & \mapsto \sum_{j=1}^r \langle v', v_j'\rangle' v_j \end{cases}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-035-6 Published online by Cambridge University Press

Désormais, on fixe deux entiers naturels κ et κ' tels que $\kappa + \kappa' = 1$. A partir du paragraphe 4, κ vaut 1 et κ' est nul.

Si L est un $\mathfrak{o}$-réseau de V, on définit deux $\mathfrak{o}$-réseaux duaux de L, notés L^* [Pa2] et $L^\sharp$ [BK], par : $L^* = \{v \in V \mid \langle v, L\rangle \subset \mathfrak{p}^\kappa\}$ et $L^\sharp = \{v \in V \mid \langle v, L\rangle \subset \mathfrak{o}\}$. Ils vérifient $L^* = \varpi^\kappa L^\sharp$.

Si Λ est une suite autoduale de $\mathfrak{o}$-réseaux dans V, de période paire et d'invariant impair (au sense de S. Stevens), il existe une numérotation de ses réseaux telle que $\forall i \in \mathbb{Z}, \Lambda(i)^* = \Lambda(-1-i)$.

Toute suite autoduale de période paire et d'invariant impair sera implicitement numérotée de cette façon. On fait de même dans V'.

Pour un $\mathfrak{o}_0$-réseau B de W, son dual B^* est $B^* = \{w \in W \mid \langle\langle w, B\rangle\rangle \subset \mathfrak{p}_0\}$. En particulier, si L et L' sont des $\mathfrak{o}$-réseaux de V et V' respectivement, alors $L \otimes_{\mathfrak{o}} L'$ définit un $\mathfrak{o}_0$-réseau de W dont le dual dans W est $L^* \otimes_{\mathfrak{o}} L'^*$.

Soient $U(V)$, $U(V')$ et $Sp(W)$ les groupes d'isométries de V, V' et W respectivement. On plonge les deux premiers dans le dernier par :

$$\begin{aligned} \iota_{V'} : U(V) &\to Sp(W) \\ g &\mapsto g \otimes \mathrm{id}_{V'} \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \iota_V : U(V') &\to Sp(W) \\ g &\mapsto \mathrm{id}_V \otimes g. \end{aligned}$$

Soient $H(W)$ le groupe de Heisenberg de W et $(\rho, \mathcal{S})$ l'unique (à isomorphisme près) représentation irréductible de $H(W)$ de caractère central ψ_0. Le groupe métaplectique $\widetilde{Sp(W)}$ est le sous-groupe topologique de $Sp(W) \times \mathrm{GL}(\mathcal{S})$ formé des couples (g, M) vérifiant l'équation :

$$\forall (w,t) \in H(W),\ M \circ \rho((w,t)) \circ M^{-1} = \rho(g(w), t).$$

La représentation de Weil ω_{ψ_0} de $\widetilde{Sp(W)}$ est juste la projection de $\widetilde{Sp(W)}$ sur $\mathrm{GL}(\mathcal{S})$.

A.2 Modèles mixtes de la représentation de Weil de $\widetilde{Sp(W)}$.

Soit A un $\mathfrak{o}_0$-réseau de W, contenu dans son dual A^* et contenant $\varpi_0 A^*$. Il engendre donc une suite $\mathcal{A}$ autoduale de période 2 dans W. On note $K_{\mathcal{A}}$ le sous-groupe parahorique de $Sp(W)$ stabilisant $\mathcal{A}$ et $K^1_{\mathcal{A}}$ son radical pro-unipotent. Le groupe $K_{\mathcal{A}}$ agit naturellement sur le k_0-espace vectoriel A^*/A en conservant la forme alternée $(a, a') \mapsto \langle\langle a, a'\rangle\rangle \mod \mathfrak{p}_0$. On note $K'_{\mathcal{A}}$ le noyau de cette action :

$$K'_{\mathcal{A}} = \{g \in K_{\mathcal{A}} \mid (g - \mathrm{id})A^* \subset A\}.$$

Alors $K_{\mathcal{A}}/K'_{\mathcal{A}}$ s'identifie au groupe $Sp(A^*/A)$.

On définit un modèle $\mathcal{S}(A)$ de la représentation de Weil de $\widetilde{Sp(W)}$ de la façon suivante [Pa2, §2]. On note $\bar{\psi}_0$ le caractère de k_0 défini par $\bar{\psi}_0(x) = \psi_0(x')$ si $x \in k_0$ et $x' \in \mathfrak{o}_0$ d'image x dans k_0.

Soient $H(A^*/A)$ le groupe de Heisenberg associé à l'espace A^*/A, $(\bar{\rho}_{\bar{\psi}_0}, S)$ l'unique (à isomorphisme près) représentation irréductible de $H(A^*/A)$ de caractère central

$\bar{\psi}_0$ et $(\bar{\omega}_{\bar{\psi}_0}, S)$ la représentation de Weil de $Sp(A^*/A)$. On définit :

$$\begin{array}{rcccl} \widetilde{\rho}_{\psi_0} : A^* \times \mathfrak{p}_0 & \to & H(A^*/A) & \to & \mathrm{GL}(S) \\ (x, t\varpi) & \mapsto & (\bar{x}, \bar{t}) = (x + A, t + \mathfrak{p}_0) & \mapsto & \bar{\rho}_{\bar{\psi}_0}(\bar{x}, \bar{t}). \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcccl} \widetilde{\omega}_{\psi_0} : K_{\mathcal{A}} & \to & Sp(A^*/A) & \to & \mathrm{GL}(S) \\ k & \mapsto & \bar{k} = k + K'_{\mathcal{A}} & \mapsto & \bar{\omega}_{\bar{\psi}_0}(\bar{k}). \end{array}$$

L'espace $\mathcal{S}(A)$ est formé des fonctions f de W dans S, localement constantes, à support compact telles que

$$\forall w \in W, \forall x \in A^*, \quad f(x+w) = \psi_0\big(\tfrac{1}{2}\langle\langle w, x\rangle\rangle\big)\, \widetilde{\rho}_{\psi_0}(x) f(w).$$

Le support d'une fonction f de $\mathcal{S}(A)$ est une réunion finie de classes modulo A^*. Pour tout sous-ensemble Q de W, réunion finie de classes modulo A^*, on note $\mathcal{S}(A)_Q$ le sous-espace de $\mathcal{S}(A)$ formé des fonctions à support dans Q. Quand $Q = w + A^*$ ($w \in W$), on note plus simplement cet espace $\mathcal{S}(A)_w$.

Au-dessus de chaque élément g de $Sp(W)$, on définit un élément $(g, M(g))$ de $\widetilde{Sp(W)}$, réalisé comme sous-groupe de $Sp(W) \times \mathrm{GL}(\mathcal{S}(A))$, par

$$\forall f \in \mathcal{S}(A), \forall w \in W, \quad M(g)\cdot f(w) = \int_{A^*} \psi_0\big(\tfrac{1}{2}\langle\langle x, w\rangle\rangle\big)\, \widetilde{\rho}_{\psi_0}(x^{-1}) \cdot f(g^{-1}(x+w))\, dx$$

où dx est une mesure de Haar sur A^* normalisée pour que

$$\text{(A.1)} \qquad \forall k \in K_{\mathcal{A}}, \forall f \in \mathcal{S}(A), \forall w \in W, \quad M(k)\cdot f(w) = \widetilde{\omega}_{\psi_0}(k) \cdot f(k^{-1}w).$$

On obtient un scindage s_A de $\widetilde{Sp(W)}$ au-dessus de $K_{\mathcal{A}}$: $s_A(k) = (k, M(k))$, $k \in K_{\mathcal{A}}$.

Lemme A.1 *Soit A un réseau de W tel que $\varpi_0 A^* \subset A \subset A^*$. Soit s_A le scindage au-dessus de $K_{\mathcal{A}}$ défini précédemment. Alors*

(i) *la restriction de s_A à $K'_{\mathcal{A}}$ est à valeurs dans $\widehat{Sp(W)}$, le revêtement à deux feuillets de $Sp(W)$;*

(ii) *la restriction de s_A à un pro-p-sous-groupe de $K'_{\mathcal{A}}$ ne dépend pas du choix de A. On la note donc s.*

Démonstration (i) Elle consiste à plagier la démonstration du [MVW, lemme II.10] énonçant un résultat analogue dans le modèle latticiel.

De (i), on déduit que la restriction de s_A à un pro-p-sous-groupe de $K'_{\mathcal{A}}$ est un scindage à valeurs dans l'extension centrale de degré 2 de ce sous-groupe, et puisque p est impair, un tel scindage est unique. Ceci établit (ii). ∎

Dorénavant, on fixe deux $\mathfrak{o}$-réseaux L et L' dans V et V' respectivement, tels que $\varpi L^* \subset L \subset L^*$ et $\varpi L'^* \subset L' \subset L'^*$. On forme le $\mathfrak{o}_0$-réseau B de W : $B = L^* \otimes L' \cap L \otimes L'^*$. Il engendre une suite autoduale $\mathcal{B} : \varpi B^* \subset B \subset B^*$. On note s_B le scindage de $\widetilde{Sp(W)}$ au-dessus de $K_{\mathcal{B}}$ décrit précédemment.

On considère dans $Sp(W)$ la paire duale réductive $(U(W), U(F))$ formée du groupe unitaire $U(W)$ de la forme anti-hermitienne Φ définie sur W par

$$\forall v_1, v_2 \in V, \forall v_1', v_2' \in V', \quad \Phi(v_1 \otimes v_1', v_2 \otimes v_2') = \langle v_1, v_2\rangle \langle v_2', v_1'\rangle'$$

et du groupe unitaire $U(F)$ de la forme hermitienne N_{F/F_0} sur F. On considère dans le F-espace vectoriel W muni de sa structure anti-hermitienne, le réseau B vu comme un $\mathfrak{o}$-réseau et dans F le $\mathfrak{o}$-réseau $\mathfrak{o}$. Ils vérifient que $\varpi B^* \subset B \subset B^*$ et $\varpi \mathfrak{o}^* \subset \mathfrak{o} \subset \mathfrak{o}^*$.

Par [Pa, théorème A], il existe un scindage β_F^B au-dessus de $U(W)$ dont la restriction au stabilisateur de B est égale à $s_B \otimes \zeta$ où ζ est un caractère d'ordre 2, et par suite, dont la restriction à un pro-p-sous-groupe de $K_{\mathcal{B}}$ est s.

Dans ce qui suit, on fixe un tel scindage, noté $\widetilde{s}$. On identifie tout sous-groupe de $U(W)$ à un sous-groupe de $\widetilde{Sp(W)}$ via ce scindage.

En particulier, $U(V)$ et $U(V')$ (ou plus précisément leurs images via $\iota_{V'}$ et ι_V respectivement) sont des sous-groupes de $U(W)$, donc aussi de $\widetilde{Sp(W)}$ via $\widetilde{s}$. On fixe I et I' deux sous-groupes d'Iwahori, le premier de $U(V)$, le second de $U(V')$, contenus respectivement, dans les stabilisateurs de L et de L'. C'est relativement à eux et au scindage $\widetilde{s}$ que l'on définit les strates fondamentales pour le groupe métaplectique (*cf.* [Pa1, §3.6]).

Remarque Soient Λ une suite autoduale de V (ou V') et d un entier strictement positif. Il existe $g \in U(V)$ tel que $gU_d(\Lambda)g^{-1} = U_d(g\Lambda) \subset I$. Comme $\widehat{Sp(W)}$ est un sous-groupe distingué de $\widetilde{Sp(W)}$, $\widetilde{s}(U_d(\Lambda))$ est encore contenu dans $\widehat{Sp(W)}$.

Soient Λ et Λ' des suites autoduales de réseaux de V et V' respectivement, de même période paire e et d'invariant impair.

On étudie maintenant la restriction de ω_{ψ_0} à $U_d(\Lambda)$ et $U_d(\Lambda')$.

Pour chaque entier d pair, on note μ_d l'entier $\frac{e+d}{2} + 1$ et on définit un $\mathfrak{o}_0$-réseau $B(\Lambda, \Lambda', d)$ de W par $B(\Lambda, \Lambda', d) = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \Lambda(i) \otimes \Lambda'(-\mu_d - i)$.

Lemme A.2 (i) *Pour tout $d \in 2\mathbb{N}$, $B(\Lambda, \Lambda', d)^* \subset B(\Lambda, \Lambda', d)$.*

(ii) *Si $d_1, d_2 \in 2\mathbb{Z}$ et $d_1 < d_2$, alors $B(\Lambda, \Lambda', d_1) \subset B(\Lambda, \Lambda', d_2)$.*

(iii) *Si $d_1, d_2 \in 2\mathbb{Z}$ et $d_1 + d_2 \leq -2$, alors $B(\Lambda, \Lambda', d_1) \subset B(\Lambda, \Lambda', d_2)^*$.*
En particulier, $\varpi_0 B(\Lambda, \Lambda', 0) \subset B(\Lambda, \Lambda', 0)^*$ et si $d \in -2\mathbb{N}^*$, $B(\Lambda, \Lambda', d) \subset B(\Lambda, \Lambda', 0)^*$.

Démonstration (i) Pour tout $d \in 2\mathbb{Z}$,

$$B(\Lambda, \Lambda', d)^* = \sum_{i=0}^{e-1} (\Lambda(i) \otimes \Lambda'(-\mu_d - i))^* = \sum_{i=0}^{e-1} \Lambda(-1-i) \otimes \Lambda'(-1+\mu_d+i)$$
$$= \sum_{i=0}^{e-1} \Lambda(i) \otimes \Lambda'\Big(-i + \frac{e+d}{2} - 1\Big).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-035-6 Published online by Cambridge University Press

Or pour chaque i et pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{Bmatrix} \Lambda(i) \subset \Lambda(j) \\ \Lambda'(-i + \frac{e+d}{2} - 1) \subset \Lambda'(-\mu_d - j) \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} j \leq i \\ -i + \frac{e+d}{2} - 1 \geq -\mu_d - j \end{Bmatrix}$$
$$\iff i - (e+d) \leq j \leq i.$$

Si $d \geq 0$, il existe donc un système de représentants J_i de $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ tel que le réseau $\Lambda(i) \otimes \Lambda'(-i + \frac{e+d}{2} - 1)$ soit contenu dans $\Lambda(j) \otimes \Lambda'(-\mu_d - j)$ pour tout $j \in J_i$ et par suite, $B(\Lambda, \Lambda', d)^*$ est contenu dans $B(\Lambda, \Lambda', d)$.

L'assertion (ii) est immédiate.

Prouvons l'assertion (iii). Soient $w_k \in B(\Lambda, \Lambda', d_k)$, $k = 1$ ou 2. On peut supposer $w_k = l_k \otimes l'_k$ avec $l_k \in \Lambda(i_k)$ et $l' \in \Lambda'(-\mu_{d_k} - i_k - 1 + e)$ pour un entier i_k convenable. Alors $\langle\!\langle w_1, w_2 \rangle\!\rangle = \mathrm{tr}_{F/F_0}(\langle l_1, l_2 \rangle \overline{\langle l'_1, l'_2 \rangle'}) \in \mathfrak{p}_0^m$ avec

$$\begin{aligned} m &= \kappa + \left[\frac{i_1 + i_2 + 1}{e}\right] + \kappa' + \left[\frac{-\mu_{d_1} - \mu_{d_2} - i_1 - i_2 - 1 + 2e}{e}\right] \\ &= 1 + \left[\frac{i_1 + i_2 + 1}{e}\right] + 1 + \left[-\frac{\frac{d_1+d_2}{2} + 2}{e} - \frac{i_1 + i_2 + 1}{e}\right] \\ &\geq 1 + \left(1 + \left[-\frac{\frac{d_1+d_2}{2} + 2 + r}{e}\right]\right), \end{aligned}$$

où $r = \frac{i_1+i_2+1}{e} - [\frac{i_1+i_2+1}{e}]$ est compris entre 0 et $e-1$.

Par conséquent, $\langle\!\langle B(\Lambda, \Lambda', d_1), B(\Lambda, \Lambda', d_2) \rangle\!\rangle$ est contenu dans $\mathfrak{p}_0$ dès que

$$1 + \left[-\frac{\frac{d_1+d_2}{2} + 2 + e - 1}{e}\right] \geq 0 \iff \frac{\frac{d_1+d_2}{2} + 1 + e}{e} \leq 1 \iff d_1 + d_2 \leq -2.$$

Sous cette condition, le dual de $B(\Lambda, \Lambda', d_2)$ contient donc $B(\Lambda, \Lambda', d_1)$. En particulier, $\varpi_0 B(\Lambda, \Lambda', 0)$ n'est autre que $B(\Lambda, \Lambda', -2e_0e)$ et $-2e_0e + 0 \leq -2$ donc $\varpi_0 B(\Lambda, \Lambda', 0)$ est contenu dans $B(\Lambda, \Lambda', 0)^*$. ■

On pose alors

$$A = B(\Lambda, \Lambda', 0)^*. \tag{A.2}$$

C'est un $\mathfrak{o}_0$-réseau de W, contenu dans son dual A^* et contenant $\varpi_0 A^*$ (par ce qui précède). On retrouve donc la situation de décrite au début du paragraphe.

Lemme A.3 *Soient $d \in 2\mathbb{N}$ et $\delta \in \mathbb{N}^*$.*

(i) *L'image de $U_\delta(\Lambda)$ par le plongement $\iota_{V'}$ est contenue dans K'_A.*

(ii) *Si $g \in U_\delta(\Lambda)$ et $\delta \geq d > 0$, $(g-1)B(\Lambda, \Lambda', d) \subset B(\Lambda, \Lambda', d-2)^* \subset A$.*

(iii) *Si $g \in U_\delta(\Lambda)$ et $\delta > d$, $(g-1)B(\Lambda, \Lambda', d) \subset B(\Lambda, \Lambda', d)^*$.*

(iv) *Des résultats semblables sont vérifiés par $U_\delta(\Lambda')$.*

Démonstration Soient $d \in 2\mathbb{N}$, $\delta \in \mathbb{N}^*$ et $g \in U_\delta(\Lambda)$. Alors

$$(g-1)\otimes \mathrm{id}_{V'}\, B(\Lambda,\Lambda',d) \subset \bigcap_i \Lambda(i+\delta)\otimes\Lambda'\Big(-i-\frac{e+d}{2}-1\Big) = B(\Lambda,\Lambda',d-2\delta).$$

Par conséquent, en prenant $d=0$ et en utilisant le lemma A.2(iii), on obtient (i). Sous les hypothèses énoncées, les résultats (ii) et (iii) se déduisent de cette inclusion par cette même propriété. ■

Corollaire A.4 *Soit $d \in 2\mathbb{N}$. Dans la réalisation de la représentation de Weil de $\widetilde{Sp(W)}$ sur $\mathcal{S}(A)$, $U_{d+1}(\Lambda)$ agit trivialement sur le sous-espace $\mathcal{S}(A)_{B(\Lambda,\Lambda',d)}$ tandis que $U_{\frac{d}{2}+1}(\Lambda)$ laisse globalement invariant chaque sous-espace $\mathcal{S}(A)_w$ où w est un élément de $B(\Lambda,\Lambda',d)$ si $d>0$. Sous cette hypothèse, si $w \in B(\Lambda,\Lambda',d)$ et $f \in \mathcal{S}(A)_w$, alors*

$$\forall g \in U_{\frac{d}{2}+1}(\Lambda), \forall w' \in w+A^*, \quad \omega_{\psi_0}(g)\cdot f(w') = \psi_0\big(\tfrac12\langle\!\langle (g-1)w,w\rangle\!\rangle\big)\cdot f(w')\,,$$

où $\psi_w\colon g \mapsto \psi_0(\frac12\langle\!\langle (g-1)w,w\rangle\!\rangle)$ est un caractère de $U_{\frac{d}{2}+1}(\Lambda)$ trivial sur $U_{d+1}(\Lambda)$.

Démonstration Rappelons que $\varpi_0 A^* \subset A \subset A^* \subset B(\Lambda,\Lambda',d)$. Alors, par [Pa1, lemme 8.3], le groupe $U_{\frac{d}{2}+1}(\Lambda)$ stabilise $\mathcal{S}(A)_{B(\Lambda,\Lambda',d)}$ puisqu'il stabilise $B(\Lambda,\Lambda',d)$. De plus, pour tout $\delta \geqslant \frac{d}{2}+1$, si $g \in U_\delta(\Lambda)$ et $f \in \mathcal{S}(A)_{B(\Lambda,\Lambda',d)}$ alors, par (A.1) et le lemme A.3(i), le lemme A.2(iii), pour tout $w \in B(\Lambda,\Lambda',d)$,

$$\begin{aligned}\omega_{\psi_0}(g)\cdot f(w) &= f((g^{-1}-1)w+w)\\ &= \psi_0\big(\tfrac12\langle\!\langle w,(g^{-1}-1)w\rangle\!\rangle\big)\,\widetilde{\rho}_{\psi_0}((g^{-1}-1)w)\cdot f(w)\\ &= \psi_0\big(\tfrac12\langle\!\langle w,(g^{-1}-1)w\rangle\!\rangle\big)\,f(w).\end{aligned}$$

On en déduit, d'une part grâce au lemme A.3(iii), que si g est élément de $U_{d+1}(\Lambda)$, $\omega_{\psi_0}(g)$ laisse invariante chaque fonction de $\mathcal{S}(A)_{B(\Lambda,\Lambda',d)}$; d'autre part, que pour chaque $w \in B(\Lambda,\Lambda',d)$, $\mathcal{S}(A)_w$ est invariant par $U_{\frac{d}{2}+1}(\Lambda)$ et l'action de $U_{\frac{d}{2}+1}(\Lambda)$ sur $\mathcal{S}(A)_w$ est donnée par la formule annoncée si $d>0$. C'est encore du lemme A.2(iii) que l'on déduit que ψ_w est un caractère de $U_{\frac{d}{2}+1}(\Lambda)$. ■

A.3 Correspondance de Howe et strates gauches fondamentales

A.3.1 Un résultat fondamental

Citons [Pa1, propositions 6.3, 6.5] dans une variante utilisant les suites de réseaux autoduales, de période paire et d'invariant impair. On note $\mathcal{Q}(V)$ l'ensemble de telles suites dans V et $\mathcal{Q}_e(V)$ le sous-ensemble des suites de $\mathcal{Q}(V)$ de période e ($e \in 2\mathbb{N}^*$).

Proposition A.5 **([Pa1])** *Soient $(U(V),U(V'))$ une paire duale réductive de type* I *de $Sp(W)$ et $(\omega_{\psi_0},\mathcal{S})$ un modèle de la représentation de Weil de $\widetilde{Sp(W)}$. Soient d un*

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-035-6 Published online by Cambridge University Press

entier pair strictement positif et Λ' *une suite de réseaux dans* V'*, de période paire e et d'invariant impair. Alors*

$$\mathcal{S}^{U_{d+1}(\Lambda')} = \omega_{\psi_0}(\mathcal{H}) \cdot \sum_{\Lambda \in \mathcal{Q}_e(V)} \mathcal{S}^{B(\Lambda,\Lambda',d)^*}$$

où $\mathcal{H}$ *est l'algèbre de Hecke de* $\widetilde{U(V)}$*, c'est-à-dire l'algèbre de convolution des fonctions* f *définies sur* $\widetilde{U(V)}$ *dont la restriction à* $\widetilde{U(V)} \cap \widetilde{Sp(W)}$ *est localement constante, à support compact et vérifiant* $\forall \widetilde{g} \in \widetilde{U(V)}, \forall z \in \mathbb{C}^\times$, $f(z\widetilde{g}) = z^{-1} f(\widetilde{g})$.

En vue de préciser les variantes de la preuve, étudions l'effet des deux applications φ et φ' introduites en A.1 sur les suites Λ et Λ'. [Pa1, §7], [Pa2, §4].

Lemme A.6 *Soient* Λ, Λ'*des suites de réseaux de* V *et* V' *respectivement, de même période paire e et d'invariant impair, d un entier pair, et* $w \in B(\Lambda, \Lambda', d)$.

(i) *Pour tout* $i \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi(w)\Lambda(i) \subset \Lambda'\Big(i - \frac{d}{2} + \Big(\kappa - \frac{1}{2}\Big)e\Big) \quad \text{et} \quad \varphi'(w)\Lambda'(i) \subset \Lambda\Big(i - \frac{d}{2} + \Big(\kappa' - \frac{1}{2}\Big)e\Big).$$

(ii) *Pour tout* $i, j \in \mathbb{Z}$ *tels que* $i + j + (\kappa - 1)e + 2 \geq d + 1$ *(resp.* $i + j + (\kappa' - 1)e + 2 \geq d + 1$*),*

$$\langle \varphi(w)\Lambda(i), \varphi(w)\Lambda(j)\rangle \subset \mathfrak{p} \quad (\text{resp. } \langle \varphi'(w)\Lambda'(i), \varphi'(w)\Lambda'(j)\rangle' \subset \mathfrak{p}).$$

Démonstration Montrons la première inclusion de (i), la seconde s'obtenant en échangeant les rôles de φ et φ', Λ et Λ', ... Il suffit de démontrer cette inclusion pour un élément w de la forme $v \otimes v'$, $v \in V$ et $v' \in V'$. Il existe alors $i_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $v \in \Lambda(i) - \Lambda(i+1)$ et $v' \in \Lambda'(-\mu_d - i_0 - 1 + e)$. Soit $i \in \mathbb{Z}$ et écrivons $i + i_0 + 1$ sous la forme $i + i_0 + 1 = qe + r$ avec $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < e$. Alors, $\Lambda(i)$ est contenu dans $\varpi^q \Lambda(i_0)^*$ d'où

$$\begin{aligned}\varphi(w)\Lambda(i) \subset \varpi^{q+\kappa}\Lambda'(-\mu_d - i_0 - 1 + e) &= \Lambda'\Big(i - \frac{d}{2} + \Big(\frac{1}{2} + \kappa\Big)e - r\Big) \\ &\subset \Lambda'\Big(i - \frac{d}{2} + \Big(\kappa - \frac{1}{2}\Big)e\Big).\end{aligned}$$

(ii) On démontre la première inclusion, la seconde s'obtenant de la même manière. Pour $x \in V$ et $y \in V$, on considère l'élément $c_{x,y}$ de $\mathfrak{g}$ défini par

$$\forall v \in V, c_{x,y}(v) = \langle v, y\rangle x - \langle v, x\rangle y.$$

Si en outre, $x \in \Lambda(i)$ et $y \in \Lambda(j)$, $c_{x,y}$ appartient à $\mathfrak{a}^-_{i+j+(\kappa-1)e+2}(\Lambda)$.

En effet, pour tout $r \in \mathbb{Z}$ et tout $v \in \Lambda(r)$,

$$\langle v, y\rangle \in \mathfrak{p}^{\kappa + [\frac{j+r+1}{e}]} \quad \text{et} \quad \langle v, x\rangle \in \mathfrak{p}^{\kappa + [\frac{i+r+1}{e}]}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-035-6 Published online by Cambridge University Press

ce qui implique que

$$\langle v, y\rangle x \in \Lambda\Big(i + \kappa e + \Big[\frac{j+r+1}{e}\Big] e\Big) \quad \text{et} \quad \langle v, x\rangle y \in \Lambda\Big(j + \kappa e + \Big[\frac{i+r+1}{e}\Big] e\Big)$$

et aussi $c_{x,y}(v) \in \Lambda(r+i+j+(\kappa-1)e+2)$, soit $c_{x,y} \in \mathfrak{a}_{i+j+(\kappa-1)e+2}(\Lambda)$.

On note $g_{x,y}$ la transformée de Cayley de $c_{x,y}$. C'est un élément de G. De plus, $g_{x,y}$ est un élément de $U_{d+1}(\Lambda)$ si $i+j+(\kappa-1)e+2 \geq d+1 =: \delta$.

Par le corollaire A.4, le caractère $g \mapsto \psi_0(\langle\!\langle (g-1)w, w\rangle\!\rangle)$ est trivial sur $U_\delta(\Lambda)$, ce qui entraîne si $i+j+(\kappa-1)e+2 \geq \delta$:

$$\begin{aligned} &\forall x \in \Lambda(i), y \in \Lambda(j), \langle\!\langle (g_{x,y}-1)w, w\rangle\!\rangle \in \mathfrak{p}_0 \\ &\quad \Leftrightarrow \forall x \in \Lambda(i), y \in \Lambda(j), \langle\!\langle c_{x,y}w, w\rangle\!\rangle \in \mathfrak{p}_0 \\ &\quad \Leftrightarrow \forall x \in \Lambda(i), y \in \Lambda(j), 2\operatorname{tr}_{F/F_0}\langle \varphi(w)x, \varphi(w)y\rangle \in \mathfrak{p}_0 \\ &\quad \Leftrightarrow \langle \varphi(w)\Lambda(i), \varphi(w)\Lambda(j)\rangle \subset \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

■

Remarque Le résultat (ii) reste vrai en remplaçant $d+1$ par un entier δ tel que $4\delta \geq d+2$ et le caractère $g \mapsto \psi_0(\langle\!\langle (g-1)w, w\rangle\!\rangle)$ est trivial sur $U_\delta(\Lambda)$.

Corollaire A.7 *On conserve les hypothèses du lemme* A.6. *Posons* $b_w = -\frac{1}{2}\varphi'(w) \circ \varphi(w)$ *et* $b'_w = \frac{1}{2}\varphi(w) \circ \varphi'(w)$. *Alors,* b_w *appartient à* $\mathfrak{a}^-_{-d}(\Lambda)$ *et le caractère* ψ_{b_w} *de* $U_{\frac{d}{2}+1}(\Lambda)$ *coïncide avec le caractère* ψ_w *de* $U_{\frac{d}{2}+1}(\Lambda)$ *défini au corollaire* A.4.

De même, b'_w *appartient à* $\mathfrak{a}^-_{-d}(\Lambda')$ *et le caractère* $\psi_{b'_w}$ *de* $U_{\frac{d}{2}+1}(\Lambda')$ *coïncide avec le caractère* ψ_w *de* $U_{\frac{d}{2}+1}(\Lambda')$.

Démonstration Un simple calcul à partir des expressions de $\varphi(w)$ et $\varphi'(w)$ montre que pour tout w de W, $\varphi'(w)\circ\varphi(w)$ appartient à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ donc b_w appartient à $\mathfrak{g}$. De plus, b_w appartient à $\mathfrak{a}_{-d}(\Lambda)$ car w appartient à $B(\Lambda, \Lambda', d)$ (lemme A.6(i)). Alors, l'égalité des caractères ψ_{b_w} et ψ_w s'obtient par des calculs analogues à [Pa2, 5.5] ou matriciels.

De la même manière, on démontre les assertions sur b'_w. ■

Remarque Les applications définies sur W par $w \mapsto b_w$ et $w \mapsto b'_w$, à valeurs dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ respectivement, sont, à multiplication près par une unité de $\mathfrak{o}_0$, les applications moments $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ de [Pa2].

A.3.2 Quelques précisions sur la preuve de la proposition A.5

Les grandes lignes sont celles de la démonstration de S.-Y. Pan [Pa1, §10], seuls varient les raisonnements sur les réseaux. On distingue trois étapes.

(i) On démontre l'inclusion $\omega_{\psi_0}(\mathcal{H}) \cdot \sum_{\Lambda \in \mathcal{Q}_e(V)} \mathcal{S}^{B(\Lambda,\Lambda',d)^*} \subset \mathcal{S}^{U_{d+1}(\Lambda')}$. On fixe $\Lambda \in \mathcal{Q}_e(V)$, on définit A par l'egalité (A.2) et on choisit le modèle $\mathcal{S}(A)$ de ω_{ψ_0}. Puisque A^* est contenu dans $B(\Lambda, \Lambda', d)$, $\mathcal{S}(A)^{B(\Lambda,\Lambda',d)^*}$ est égal à $\mathcal{S}(A)_{B(\Lambda,\Lambda',d)}$ [Pa1, lemme 8.2]. On conclut grâce au corollaire A.4 et la commutativité entre $\widetilde{U(V)}$ et $\widetilde{U(V')}$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-035-6 Published online by Cambridge University Press

(ii) On démontre l'autre inclusion quand $d \geq e+2$. Il existe un réseau Γ' dans V' tel que $\varpi\Gamma'^* \subset \Gamma' \subset \Gamma'^* \subset \Lambda'(-1)$ et Γ'^*/Γ' est anisotrope. Soit Γ un réseau de V tel que $\varpi\Gamma^* \subset \Gamma \subset \Gamma^*$ et Γ^*/Γ est anisotrope. On pose :

- $\mathcal{Q}_e(V,\Gamma) = \{\Lambda \in \mathcal{Q}_e(V) | \Lambda(0) \subset \Gamma \subset \Lambda(-1)\}$,
- $A = \Gamma^* \otimes \Gamma' \cap \Gamma \otimes \Gamma'^*$ qui vérifie $\varpi_0 A^* \subset A \subset A^* \subset B(\Lambda,\Lambda',d)$ pour tout $\Lambda \in \mathcal{Q}_e(V,\Gamma)$ ($d \geq e+2$),
- $M = N = \Lambda'(0)$ d'où $B_{M,N} = \Gamma^* \otimes \Lambda'(-1)$ contient A^* (avec les notations de [Pa1, proposition 5.3]).

On considère le modèle $\mathcal{S} = \mathcal{S}(A)$ de la représentation de Weil. Par [Wa, corollaire III.2], on sait que

$$\mathcal{S}(A)^{U_{d+1}(\Lambda')} \subset \omega_{\psi_0}(\mathcal{H}) \cdot (\mathcal{S}(A)_{B_{M,N}})^{U_{d+1}(\Lambda')}.$$

Alors, comme dans [Pa1, §10.5], il suffit de montrer que

$$(\mathcal{S}(A)_{B_{M,N}})^{U_{d+1}(\Lambda')} \subset \sum_{\Lambda \in \mathcal{Q}_e(V,\Gamma)} \mathcal{S}(A)_{B(\Lambda,\Lambda',d)}$$

ou plus simplement, qu'il existe $\Lambda \in \mathcal{Q}_e(V,\Gamma)$ telle que $B_{M,N} \subset B(\Lambda,\Lambda',d)$. Or, la suite de réseaux de V, Λ, obtenue en multipliant $e/2$ fois la suite de période 2 engendrée par $\Gamma \subset \Gamma^*$ est une suite de $\mathcal{Q}_e(V,\Gamma)$. De plus, comme $d \geq e+2$, le réseau $B(\Lambda,\Lambda',d)$ de W obtenu avec cette suite Λ, contient $B_{M,N}$. On conclut alors que $(\mathcal{S}(A)_{B_{M,N}})^{U_{d+1}(\Lambda')}$ est contenu dans $\mathcal{S}(A)_{B(\Lambda,\Lambda',d)}$.

(iii) On démontre la même inclusion lorsque $d \leq e$ par récurrence descendante sur d. Supposons donc qu'elle soit prouvée pour d, entier pair compris entre 4 et $e+2$. Alors,

$$\mathcal{S}^{U_{d-1}(\Lambda')} = (\mathcal{S}^{U_{d+1}(\Lambda')})^{U_{d-1}(\Lambda')} = \omega_{\psi_0}(\mathcal{H}) \cdot \sum_{\Lambda \in \mathcal{Q}_e(V)} (\mathcal{S}^{B(\Lambda,\Lambda',d)^*})^{U_{d-1}(\Lambda')},$$

puisque $U_{d-1}(\Lambda')$ stabilise $B(\Lambda,\Lambda',d)$ [Pa1, 8.2,3,4]. Il suffit donc de montrer que pour toute suite $\Lambda \in \mathcal{Q}_e(V)$,

$$(\mathcal{S}^{B(\Lambda,\Lambda',d)^*})^{U_{d-1}(\Lambda')} \subset \sum_{\widetilde{\Lambda} \in \mathcal{Q}_e(V)} \mathcal{S}^{B(\widetilde{\Lambda},\Lambda',d-2)^*}.$$

Fixons une suite Λ, réintroduisons le réseau A de W défini par (A.2) et considèrons le modèle $\mathcal{S} = \mathcal{S}(A)$ de la représentation de Weil. Puisque $B(\Lambda,\Lambda',d)$ contient A^* et est stable sous l'action de $U_{d-1}(\Lambda')$,

$$\mathcal{S}(A)^{B(\Lambda,\Lambda',d)^*} = \sum_{w \in B(\Lambda,\Lambda',d)} \mathcal{S}(A)_{A^*+U_{d-1}(\Lambda')w}.$$

De plus, $U_{d-1}(\Lambda')$ stabilise aussi A^* donc chaque sous-espace $\mathcal{S}(A)_{A^*+U_{d-1}(\Lambda')w}$ est stable sous $U_{d-1}(\Lambda')$:

$$(\mathcal{S}(A)^{B(\Lambda,\Lambda',d)^*})^{U_{d-1}(\Lambda')} = \sum_{w \in B(\Lambda,\Lambda',d)} (\mathcal{S}(A)_{A^*+U_{d-1}(\Lambda')w})^{U_{d-1}(\Lambda')}.$$

Lemme A.8 *Soit $w \in B(\Lambda, \Lambda', d)$ tel que $(\mathcal{S}(A)_{A^*+U_{d-1}(\Lambda')w})^{U_{d-1}(\Lambda')}$ soit non nul. Il existe une suite de réseaux $\widetilde{\Lambda}$ de $\mathcal{Q}_e(V)$ telle que $B(\widetilde{\Lambda}, \Lambda', d-2)$ contienne w et A^*.*

Démonstration On démontre tout d'abord l'analogue de [Pa1, lemme 10.1]. Soit $(M_i)_i$ une suite décroissante de $\mathfrak{o}$-modules libres, périodique de période e telle que

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}, \langle M_i, M_j \rangle \subset \mathfrak{p}^{\kappa + [\frac{i+j+1}{e}]}. \tag{A.3}$$

Alors il existe une suite autoduale $\widetilde{\Lambda}$ de $\mathcal{Q}_e(V)$ telle que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $M_i \subset \widetilde{\Lambda}(i)$.

En effet, on peut supposer que $(M_i)_i$ est une suite de réseaux. Par (A.3), M_0 est contenu dans son dual. Il existe un réseau Γ tel que $\varpi\Gamma^* \subset \Gamma \subset \Gamma^* \subset M_0^*$ et Γ^*/Γ est anisotrope. On pose $\widetilde{\Lambda}(i) = M_i + \Gamma^*$ si $-\frac{e}{2} \leq i < 0$, $\widetilde{\Lambda}(i) = (M_i + \Gamma^*)^*$ si $0 \leq i < \frac{e}{2}$. Alors, on vérifie que $\varpi(M_{-\frac{e}{2}} + \Gamma^*)$ est contenu dans $(M_{-\frac{e}{2}} + \Gamma^*)^*$. On prolonge $\widetilde{\Lambda}$ en une suite périodique de période e. La suite obtenue possède toutes les propriétés voulues.

Soit $w \in B(\Lambda, \Lambda', d)$ tel que $(\mathcal{S}(A)_{A^*+U_{d-1}(\Lambda')w})^{U_{d-1}(\Lambda')}$ soit non nul. Soit f une fonction non nulle dans $(\mathcal{S}(A)_{A^*+U_{d-1}(\Lambda')w})^{U_{d-1}(\Lambda')}$. Elle est nécessairement non nulle en w. Son invariance sous $U_{d-1}(\Lambda')$ qui est contenu dans K'_A, implique via le lemme A.3 ($d \geq 4$), que pour tout $g \in U_{d-1}(\Lambda')$, $\langle\langle w, (g^{-1} - 1)w \rangle\rangle \in \mathfrak{p}_0$. Mais alors, pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$ tels que $i + j + (\kappa' - 1)e + 2 \geq d - 1$,

$$\langle \varphi'(w)\Lambda'(i), \varphi'(w)\Lambda'(j) \rangle' \subset \mathfrak{p} \tag{$*$}$$

(lemme A.6(i), remarque et $d \geq 2$).

Posons pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $M_i = \varphi'(w)\Lambda'(i + \mu_d - 2 - \kappa' e)$. C'est un $\mathfrak{o}$-module libre contenu dans $\Lambda(i-1)$. La suite $(M_i)_i$ est décroissante, périodique de période e et puisque $\kappa' e \leq i + j + 1 < (\kappa' + 1)e$ autrement dit que $d - 1 \leq (i + \mu_d - 2 - \kappa' e) + (j + \mu_d - 2 - \kappa' e) + 2 + (\kappa' - 1)e < d - 1 + e$, $(*)$ s'écrit :

$$\forall i, j \in \mathbb{Z}, \quad \kappa' e \leq i + j + 1 < (\kappa' + 1)e, \quad \langle M_i, M_j \rangle \subset \mathfrak{p}^{\kappa + [\frac{i+j+1}{e}]}.$$

Cette condition s'étend à tous les couples d'entiers (i, j) par périodicité. La suite $(\widetilde{M}_i)_i$ définie par $\widetilde{M}_i = M_i + \Lambda(i+1)$ $(i \in \mathbb{Z})$ vérifie les mêmes propriétés que $(M_i)_i$. Par l'analogue de [Pa, 10.1], il existe $\widetilde{\Lambda} \in \mathcal{Q}_e(V)$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{M}_i \subset \widetilde{\Lambda}(i)$. Alors, $\varphi'(w)\Lambda'(i)$ est contenu dans $\widetilde{\Lambda}(i - \mu_d + 2 + \kappa' e)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ce qui signifie que $w \in B(\widetilde{\Lambda}, \Lambda', d-2)$.

De plus, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{\Lambda}(i)$ contient $\Lambda(i+1)$ donc $A^* = B(\Lambda, \Lambda', 0)$ est contenu dans $B(\widetilde{\Lambda}, \Lambda', -2)$, lui-même contenu dans $B(\widetilde{\Lambda}, \Lambda', d-2)$ $(d > 0)$. ∎

On note $\mathcal{Q}_e(V, A)$ le sous-ensemble de $\mathcal{Q}_e(V)$ formé des suites $\widetilde{\Lambda}$ telles que A^* soit contenu dans $B(\widetilde{\Lambda}, \Lambda', d-2)$. Pour chaque suite $\widetilde{\Lambda}$ de $\mathcal{Q}_e(V, A)$, $B(\widetilde{\Lambda}, \Lambda', d-2)$ est stable par $U_{d-1}(\Lambda')$ et on obtient

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}^{B(\Lambda,\Lambda',d)^*})^{U_{d-1}(\Lambda')} &\subset \sum_{\widetilde{\Lambda} \in \mathcal{Q}_e(V,A)} \sum_{w \in B(\widetilde{\Lambda},\Lambda',d-2)} \mathcal{S}(A)_{A^*+U_{d-1}(\Lambda')w} \\ &\subset \sum_{\widetilde{\Lambda} \in \mathcal{Q}_e(V,A)} \mathcal{S}_{B(\widetilde{\Lambda},\Lambda',d-2)} = \sum_{\widetilde{\Lambda} \in \mathcal{Q}_e(V,A)} \mathcal{S}^{B(\widetilde{\Lambda},\Lambda',d-2)^*}.\end{aligned}$$

Ceci termine l'esquisse de la démonstration de la proposition.

A.3.3 Correspondance de Howe

Soient $(\pi, \mathcal{V})$ et $(\pi', \mathcal{V}')$ deux représentations de $U(V)$ et $U(V')$, respectivement. Il existe une unique représentation admissible $\widetilde{\pi}$ (resp. $\widetilde{\pi}'$) de $\widetilde{U(V)}$ (resp. $\widetilde{U(V')}$) telle que $\forall z \in \mathbb{C}^{\times}, \forall \widetilde{g} \in \widetilde{U(V)}$ (resp. $\widetilde{g} \in \widetilde{U(V')}$), $\widetilde{\pi}(z\widetilde{g}) = z\widetilde{\pi}(\widetilde{g})$ (resp. $\widetilde{\pi}'(z\widetilde{g}) = z\widetilde{\pi}'(\widetilde{g})$) et $\forall g \in U(V)$ (resp. $U(V')$), $\widetilde{\pi}(\widetilde{s}(g)) = \pi(g)$ (resp. $\widetilde{\pi}'(\widetilde{s}(g)) = \pi'(g)$).

On suppose que les représentations π et π' de $U(V)$ et $U(V')$ sont image l'une de l'autre par la correspondance de Howe relativement au caractère ψ_0, au sens où les représentations $\widetilde{\pi}$ et $\widetilde{\pi}'$ associées sont image l'une de l'autre par la correspondance de Howe relativement au caractère ψ_0. On note ou bien $\pi = H_{\psi_0}(\pi', U(V'), \widetilde{s})$ ou bien $\pi' = H_{\psi_0}(\pi, U(V), \widetilde{s})$.

Soient $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s}'$ deux strates gauches fondamentales, la première contenue dans π, la seconde dans π'. Elles sont alors contenues dans $\widetilde{\pi}$ et $\widetilde{\pi}'$ respectivement et elles ont même niveau [Pa1, théorème 6.6].

Posons $\mathfrak{s}' = (\Lambda', d, d-1, b')$. Quitte à doubler Λ', sa période e est paire et l'entier d également. Par A.3.1 (ou [Pa2, 3.5]), il existe une suite Λ de $\mathcal{Q}_e(V)$ telle que l'image de $\mathcal{S}^{B(\Lambda,\Lambda',d)^*}$ dans $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}'$ soit non nulle.

On note alors $A = B(\Lambda, \Lambda', 0)^*$ et $\mathcal{S}(A)$ le modèle mixte de la représentation de Weil de $\widetilde{Sp(W)}$ associé. Il existe $w \in B(\Lambda, \Lambda', d)$ et un élément $f \in \mathcal{S}(A)_w \subset \mathcal{S}(A)^{B(\Lambda,\Lambda',d)^*}$ d'image non nulle dans $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}'$, tels que $\mathbb{C}f$ est stable par $U_{\frac{d}{2}+1}(\Lambda)$ et $U_{\frac{d}{2}+1}(\Lambda')$ et l'action de $U_{\frac{d}{2}+1}(\Lambda)$, resp. $U_{\frac{d}{2}+1}(\Lambda')$, sur cet espace est décrite par le caractère ψ_w, resp. ψ'_w (corollaire A.4), c'est-à-dire par ψ_{b_w}, resp. $\psi_{b'_w}$ (corollaire A.7). Les strates gauches $(\Lambda, d, d-1, b_w)$ de $U(V)$ et $(\Lambda', d, d-1, b'_w)$ de $U(V')$ sont donc contenues, la première dans $\widetilde{\pi}$ ou π, la deuxième dans $\widetilde{\pi}'$ ou π', et sont fondamentales à cause de leur niveau.

Proposition A.9 **(variante de [Pa2, théorème 5.5])** *Soient $(\pi, \mathcal{V})$ une représentation (admissible) irréductible de $U(V)$ et $(\pi', \mathcal{V}')$ une représentation (admissible) irréductible de niveau strictement positif de $U(V')$. On suppose que π et π' sont image l'une de l'autre par la correspondance de Howe relativement à ψ_0.*

(i) *π et π' ont même niveau.*

(ii) *Soit $\mathfrak{s}' = (\Lambda', d, d-1, b')$ une strate gauche fondamentale contenue dans π' où Λ' est une suite autoduale de période paire e, d'invariant impair et d un entier pair strictement positif. Il existe une suite autoduale Λ de réseaux de V de période e et d'invariant impair, et un élément w de $B(\Lambda, \Lambda', d)$ défini modulo $B(\Lambda, \Lambda', d-2)$ tels que les strates gauches $(\Lambda, d, d-1, b_w)$ de $U(V)$ et $(\Lambda', d, d-1, b'_w)$ de $U(V')$ soient fondamentales, la première contenue dans π, la seconde dans π'. De plus, π (resp. π') contient le caractère ψ_{b_w} (resp. $\psi_{b'_w}$) par restriction à $U_{\frac{d}{2}+1}(\Lambda)$ (resp. $U_{\frac{d}{2}+1}(\Lambda')$).*

Corollaire A.10 *On suppose que V est de dimension strictement supérieure à celle de V'. Soit π une représentation irréductible de G, de niveau strictement positif. On suppose que π appartient à l'image de la correspondance de Howe $H_{\psi_0}(\cdot, U(V'), \widetilde{s})$. Alors, π contient une strate fondamentale scindée. En particulier, si π est cuspidale, π contient une strate fondamentale cuspidale scindée dont le polynôme caractéristique est divisible par $X^{\dim V - \dim V'}$ exactement.*

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-035-6 Published online by Cambridge University Press

Démonstration Puisque π est dans l'image de la correspondance de Howe, il existe des suites autoduales de réseaux de V et V', Λ et Λ', respectivement, de même période paire e et d'invariant impair, un élément w de $B(\Lambda, \Lambda', d)$ tels que la strate gauche $\mathfrak{s} = (\Lambda, d, d-1, b_w)$ de $U(V)$ soit fondamentale et contenue dans π. Puisque la dimension de V est strictement supérieure à celle de V', le sous-espace Ker $\varphi(w)$ est non nul, stable par b_w. Le polynôme caractéristique de la strate $\mathfrak{s}$ est donc divisible par X mais non par $X^{\dim V}$: $\mathfrak{s}$ est scindée. ■

A.4 Paquets endoscopiques et strates gauches fondamentales

On reprend les notations de l'introduction : V est le F-espace vectoriel de dimension 3, muni de la forme hermitienne non dégénérée $\langle\,,\rangle$ et $G = U(V)$. Le F-espace vectoriel V' est un plan muni d'une forme anti-hermitienne $\langle\,,\rangle'$, d'indice de Witt 1 ou 0. On note G'_a son groupe d'isométries où $a \in F_0^\times/N_{F|F_0}(F^\times)$ est la classe du déterminant de $\langle\,,\rangle'$. Ainsi G'_1 est la forme quasi-déployée tandis que G'_{α_0} est la forme anisotrope.

A la suite de [GRS, §1], fixons le caractère γ de $F^\times$ égal à μ^{-1} et considérons le scindage $s_{\psi_0,\gamma}$. Ce dernier est à valeurs dans le groupe métaplectique $\widetilde{Sp(W_\delta)}$, associé à l'espace W muni de la forme symplectique $\langle\!\langle\,,\rangle\!\rangle_\delta$ définie par :

$$\langle\!\langle u\otimes u', v\otimes v'\rangle\!\rangle_\delta = \mathrm{tr}_{F|F_0}(\langle u,v\rangle\langle \delta v', \delta u'\rangle')$$

où δ est un élément de $\mathrm{GL}(V')$ tel que $\forall u', v' \in V'$, $\langle \delta u', \delta v'\rangle' = \langle v', u'\rangle'$ (il en existe par [MVW, Ch. 4, I.2]). De l'isométrie φ entre W et W_δ qui à $v\otimes v'$ associe $v\otimes \delta^{-1}v'$, on déduit un isomorphisme Φ de $\widetilde{Sp(W)}$ dans $\widetilde{Sp(W_\delta)}$ dont la restriction à $U(V)\times U(V')$ est $(g\otimes g', M) \in \widetilde{Sp(W)} \to (g\otimes \delta^{-1}g\delta, M) \in \widetilde{Sp(W_\delta)}$.

À a fixé, les scindages $\Phi\circ\widetilde{s}$ et $s_{\psi_0,\gamma}$ au-dessus de $U(W)$, diffèrent d'un caractère de ce groupe, c'est-à-dire un caractère de la forme $\nu_a \circ$ dét où ν_a est un caractère de $F^1_{|F_0}$. Définissons le caractère ν_{aF} de $F^\times$ par : $\forall x \in F^\times$, $\nu_{aF}(x) = \nu_a(\frac{x}{\bar{x}})$. On obtient $\Phi\circ\widetilde{s} = s_{\psi_0,\gamma}\otimes \nu_a\circ \text{dét} = s_{\psi_0,\gamma\nu_{aF}}$.

Par conséquent, deux représentations π et π' de $U(V)$ et $U(V')$ respectivement se correspondent au sens de [GRS] si et seulement si $\pi\otimes\nu_a^2$ et la contragrédiente $(\pi'\otimes\nu_a^3)^\vee$ de $\pi'\otimes\nu_a^3$ se correspondent au sens introduit plus haut (en utilisant [MVW, Ch. 4, théorème II.1]).

Rappelons les résultats de [GRS] évoqués à la section 3. Notons γ_1 la restriction de γ à $F^1_{|F_0}$ et H le groupe endoscopique $H = U(1,1)(F_0)\times U(1)(F_0)$, identifié à un sous-groupe de G comme stabilisateur d'un plan hyperbolique de V.

Théorème A.11 **([GRS, théorèmes 4.3, 3.1])** *Soient Π un paquet endoscopique de G et $\widehat{\Pi}$ l'ensemble des paquets ρ de H dont l'image par le transfert ξ_H est Π. Choisissons $\rho \in \widehat{\Pi}$. Il s'écrit $\rho = \rho_1 \times \chi_2$ où ρ_1 est un L-paquet de G'_1 et χ_2 un caractère de $F^1_{|F_0}$. Posons $\chi = \chi_2\gamma_1^{-1}$ et notons $\Sigma = \rho_1\otimes\chi^{-1}$, Σ' son image par la correspondance de Jacquet–Langlands de G'_1 à G'_{α_0} et $\widetilde{\Sigma}_0$ le sous-ensemble de $\Sigma\cup\Sigma'$ des représentations σ telles que : $H_{\psi_0}(\sigma^\vee\otimes\nu_a^{-3}, G'_a, \widehat{s}) \neq 0$.*

https://doi.org/10.4153/CJM-2008-035-6 Published online by Cambridge University Press

(i) *Le paquet* Π *est paramétré par* $\widetilde{\widetilde{\Sigma}}_0$ *de la façon suivante :*

$$\Pi = \{H_{\psi_0}(\sigma^\vee \otimes \nu_a^{-3}, G'_a, \widetilde{s}) \otimes \chi\nu_a^{-2}, \sigma \in \widetilde{\widetilde{\Sigma}}_0\}.$$

De plus, si Π *est de carré intégrable,* $\widetilde{\widetilde{\Sigma}}_0$ *est égal à* $\Sigma \cup \Sigma'$ *[Ro, proposition 13.1.2(a)].*

(ii) *Soit* $\pi \in \Pi$ *:* $\pi = H_{\psi_0}(\sigma^\vee \otimes \nu_a^{-3}, G'_a, \widetilde{s}) \otimes \chi\nu_a^{-2}$. *Alors,* $\langle \rho, \pi \rangle = \omega_{F|F_0}(a)$.

Références

[AL] J. Adler et J. Lansky, *Depth-zero base change for unramified* $U(2,1)$. J. Number Theory **114**(2005), no. 2, 324–360.

[Bl] L. Blasco. *Description du dual admissible de* $U(2,1)(F)$ *par la théorie des types de C. Bushnell et P. Kutzko.* Manuscripta Math. **107**(2002), no. 2, 151–186.

[BF] C. Bushnell et A. Fröhlich, *Gauss sums and* p*-adic division algebras.* Lecture Notes in Mathematics 987, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[BH] C. Bushnell et G. Henniart, *Local tame lifting for* $\mathrm{GL}(N)$*. I. Simple characters.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 83, 1996, pp. 105–233.

[BK] C. Bushnell et P. Kutzko, *The admissible dual of* $\mathrm{GL}(N)$ *via open compact subgroups.* Annals of Mathematics Studies 129. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[GRS] S. Gelbart, J. Rogawski, et D. Soudry, *Endoscopy, theta liftings and period integrals for unitary group in three variables.* Ann. of Math. **145**(1997), no. 3, 419–476.

[Ko] R. Kottwitz, *Rational conjugacy classes on reductive groups.* Duke Math. J. **49**(1982), no. 4, 785–806.

[MVW] C. Mœglin, M.-F. Vignéras et J.-L. Waldspurger, *Correspondances de Howe sur un corps* p*-adique.* Lecture Notes in Mathematics 1291, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Pa] S.-Y. Pan, *Splittings of the metaplectic covers of some reductive dual pairs.* Pacific J. Math. **199**(2001), no. 1, 163–226.

[Pa1] ———, *Depth preservation in local theta correspondence.* Duke Math. J. **113**(2002), no. 3, 531–592.

[Pa2] ———, *Local theta correspondence and minimal* K*-types of positive depth.* Israel J. Math. **138**(2003), 317–352.

[Ro] J. Rogawski, *Automorphic representations of unitary groups in three variables.* Annals of Mathematics Studies 123, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[Wa] J.-L. Waldspurger, *Démonstration d'une conjecture de dualité de Howe dans le cas* p*-adique,* $p \neq 2$. Israel Math. Conf. Proc. 2, Weizman, Jerusalem, 1990, pp. 267–324.

Département de Mathématiques, U.M.R. 8628 C.N.R.S., Université Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France
courriel: Laure.Blasco@math.u-psud.fr