Canad. J. Math. Vol. **58** (6), 2006 pp. 1203–1228

Orbites unipotentes et pôles d'ordre maximal de la fonction μ de Harish-Chandra

Volker Heiermann

Résumé. Dans un travail antérieur, nous avions montré que l'induite parabolique (normalisée) d'une représentation irréductible cuspidale σ d'un sous-groupe de Levi M d'un groupe p-adique contient un sous-quotient de carré intégrable, si et seulement si la fonction μ de Harish-Chandra a un pôle en σ d'ordre égal au rang parabolique de M. L'objet de cet article est d'interpréter ce résultat en termes de fonctorialité de Langlands.

Soit G le groupe des points rationnels d'un groupe réductif connexe défini sur un corps local non archimédien F. Soit P un sous-groupe parabolique de G et M un facteur de Levi de P. Notons i_P^G le foncteur d'induction parabolique normalisée. Soit σ une représentation irréductible cuspidale de M. Nous avons montré que la représentation $i_P^G\sigma$ contient un sous-quotient de carré intégrable, si et seulement si σ est un pôle d'ordre $\mathrm{rg}_{ss}(G) - \mathrm{rg}_{ss}(M)$ de la fonction μ de Harish-Chandra (où rg_{ss} désigne le rang semi-simple déployé), et que la restriction de σ sur le centre de G est un caractère unitaire [H1]. Le but de cet article est de traduire ce résultat en termes de fonctorialité de Langlands.

Plus précisément, supposons que l'on dispose d'une correspondance de Langlands pour les représentations cuspidales des sous-groupes de Levi de G, vérifiant certaines propriétés supplémentaires: notons W_F le groupe de Weil de F et ${}^LH$ le L-groupe d'un sous-groupe réductif H de G. On suppose donc en particulier que l'on sache associer à toute représentation cuspidale d'un sous-groupe de Levi M de G un homomorphisme *admissible* $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LM$. Cet homomorphisme doit par ailleurs être *discret*, ce qui signifie entre autres que son image n'est pas contenue dans un sous-groupe de Levi propre de ${}^LM$. Cet homomorphisme sera alors appelé le paramètre de Langlands de σ. (Pour plus de précisions, voir définition 2.2.)

Si la restriction à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ du paramètre de Langlands de σ est triviale, nous supposons de plus la propriété suivante: soit M_α un sous-groupe de Levi de G qui contient M et qui est minimal pour cette propriété. Notons M_α^{der} le groupe dérivé de M_α. Soit χ un caractère non ramifié de M. Supposons que la restriction de χ à $M \cap M_\alpha^{\mathrm{der}}$ ne soit pas un caractère unitaire, alors que celle au centre de M_α le soit. Si la représentation induite $i_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}(\sigma \otimes \chi)$ est réductible, alors il est bien connu que cette représentation possède un unique sous-quotient de carré intégrable. On déduit du paramètre de Langlands pour σ naturellement un paramètre de Langlands pour ce sous-quotient. Notre hypothèse supplémentaire exige que ce paramètre de Langlands soit discret.

Reçu par la rédaction le 19 juillet 2004; revu le 29 juillet 2004.
Classification (AMS) par sujet: 11F70, 11F80, 22E50.

Si la restriction à $SL_2(\mathbb{C})$ du paramètre de Langlands de σ n'est pas triviale, la situation est plus compliquée. Nous avons en quelque sorte besoin que σ et son paramètre de Langlands ne se comportent pas seulement comme une représentation cuspidale, mais également comme une représentation de carré intégrable induite par une représentation cuspidale σ_0 dont le paramètre de Langlands est la restriction à W_F du paramètre de Langlands de σ et que σ_0 vérifie l'hypothèse ci-dessus.

En fait, on va déduire cette dernière hypothèse d'une propriété (conjecturale) de la correspondance de Langlands. En effet, dans la situation ci-dessus, il est supposé qu'il existe une forme intérieure G' de G telle que l'on puisse associer à σ par la fonctorialité de Langlands (le L-paquet d') une représentation de carré intégrable non cuspidale σ' d'un certain sous-groupe de Levi de G'. Il est alors attendu que σ' soit le sous-quotient d'une représentation induite par une représentation cuspidale σ_0' dont le paramètre de Langlands est la restriction à W_F du paramètre de Langlands de σ et que σ_0' vérifie l'hypothèse ci-dessus. Nous renvoyons le lecteur à §5 et §6.1 pour plus de précisions.

Inversement, nous émettons une hypothèse, quand le L-paquet associé à un homomorphisme admissible discret devrait être formé de représentations cuspidales qui sera justifiée postérieurement.

Ces hypothèses faites, nous associons à une représentation de carré intégrable π de G un homomorphisme admissible discret $\psi_\pi\colon W_F \times SL_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ qui est, à équivalence près, uniquement déterminé par π. Nous montrons que l'on obtient ainsi tous les homomorphismes admissibles qui sont discrets. A l'aide de la classification de Langlands, nous en déduisons un procédé qui associe à chaque homomorphisme admissible $W_F \times SL_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ (le L-paquet d') une représentation irréductible lisse de G, ainsi qu'un procédé inverse.

Ce travail est donc une sorte de généralisation à un groupe réductif p-adique quelconque d'une partie des résultats classiques de Bernstein–Zelevinsky [R] pour GL_n. Nous espérons en conséquence que les résultats énoncés ici seront utiles dans ce sens dans l'avenir.

Remarquons toutefois que nous n'obtenons aucune information sur les caractères non ramifiés χ de M, tels que l'induite parabolique de $\sigma \otimes \chi$ soit réductible. Dans les cas où cette information est disponible, en particulier si G est quasi-déployé et la représentation σ est générique [S], il est pensable qu'une partie des hypothèses émises ici peut être vérifiée. Certains résultats énoncés seraient alors des théorèmes inconditionnés dans ces cas. Mais cela n'est pas encore écrit. Dans les cas des représentations lisses irréductibles génériques des groupes classiques déployés, on dispose toutefois des résultats de fonctorialité [CKPS] qui, ensemble avec la correspondance de Langlands pour GL_n [HT], permettent d'associer à toute représentation lisse irréductible générique d'un tel groupe un paramètre de Langlands, l'image de cette correspondance n'étant connue dans le cas local pour l'instant que si $G = SO_{2n+1}(F)$ [JS].

Le plan de l'article est le suivant: au paragraphe 1 nous introduisons nos notions de base et rappelons le résultat principal de [H1]. Au paragraphe 2 , nous revoyons la notion de L-groupe, ses propriétés ainsi que les notions d'homomorphisme admissible et de paramètre de Langlands. Le paragraphe 3 est consacré à la théorie des SL_2-triplets. Au paragraphe 4, on résume la théorie des orbites unipotentes d'un groupe réductif connexe complexe, on rappelle la notion de L^2-paire de G. Lusztig, on introduit la notion d'élément semi-simple q-distingué et on prouve finalement que tout élément semi-simple q-distingué peut être complété en une L^2-paire. Au paragraphe 5 nous énonçons les hypothèses qui sont nécessaires pour associer à un homomorphisme admissible discret une représentation de carré intégrable, et nous donnons quelques propriétés des homomorphismes admissibles. Les résultats principaux de l'article se trouvent alors dans le paragraphe 6.

1 Notations et préliminaires

Une bonne partie des notations et conventions introduites ci-dessous devrait être standard.

1.1 L'ensemble des caractères rationnels d'un groupe algébrique $\underline{H}$ sera noté $X^*(\underline{H})$ et celui des cocaractères $X_*(\underline{H})$. On écrira $\underline{H}^\circ$ pour la composante neutre, $C(\underline{H})$ pour le centre de $\underline{H}$ et $C_{\underline{H}}(h)$ pour le centralisateur d'un élément h de $\underline{H}$. Si on parle du centralisateur d'un sous-groupe H_1 de $\underline{H}$, on entendra par là l'intersection des $C_{\underline{H}}(h)$, h parcourant H_1.

Si $\underline{H}$ est un groupe réductif et $\underline{T}$ un tore maximal de $\underline{H}$, $\Sigma(\underline{T})$ désignera l'ensemble des racines de $\underline{T}$ dans l'algèbre de Lie de $\underline{H}$. On notera Ad l'action adjointe de $\underline{T}$ sur l'algèbre de Lie de $\underline{H}$.

Le tore maximal dans le centre de $\underline{H}$ sera noté $T_{\underline{H}}$.

1.2 Soit $\mathcal{G}$ un groupe algébrique complexe et s un élément semi-simple de $\mathcal{G}$. Fixons un sous-groupe diagonalisable minimal D de $\mathcal{G}$ qui contient s. Notons D_c (resp., D_v) le sous-groupe de D formé des éléments g de D tels que, pour tout caractère algébrique $\chi\colon D \to \mathbb{C}$, $|\chi(g)| = 1$ (resp., $\chi(g) \in \mathbb{R}^{>0}$). Alors D est canoniquement isomorphe au produit direct de D_v et D_c. Notons s_c (resp., s_v) la projection de s sur D_c (resp., D_v). On appellera s_c la partie compacte et s_v la partie hyperbolique de $\mathcal{G}$. Remarquons que la décomposition *polaire* $s = s_c s_v$ est invariante par homomorphisme de groupes algébriques.

1.3 Dans tout ce travail F désignera un corps local non archimédien, q le cardinal de son corps résiduel, $|\cdot|_F$ sa valeur absolue normalisée, v_F la valuation discrète associée et W_F son groupe de Weil. On fixera un Frobenius géométrique Fr dans W_F. En identifiant l'abélianisé de W_F avec le groupe multiplicatif de F par la théorie du corps de classes (normalisée de sorte que les uniformisantes correspondent aux automorphismes de Frobenius géométriques), on définit $v_F(\gamma)$ pour un élément γ de W_F. En particulier, $v_F(Fr) = 1$.

1.4 Le symbole G désignera le groupe des points rationnels d'un groupe réductif connexe $\underline{G}$ défini sur F. On se fixe un tore F-déployé maximal $\underline{A_0}$ dans $\underline{G}$ et un tore maximal $\underline{T}$ de $\underline{G}$ défini sur F qui contient $\underline{A_0}$. Fixons également un sous-groupe parabolique minimal $\underline{P_0}$ de $\underline{G}$ défini sur F et contenant $\underline{T}$. On notera $\underline{M_0}$ l'unique facteur de Levi de $\underline{P_0}$ défini sur F et qui contient $\underline{A_0}$.

1.5 On appellera sous-groupe parabolique semi-standard de G tout groupe qui est le groupe des points rationnels d'un sous-groupe parabolique de $\underline{G}$ défini sur F et qui contient A_0. S'il contient en outre P_0, on l'appellera un sous-groupe parabolique standard. Dans les deux cas, il existe un unique facteur de Levi défini sur F qui contient A_0. En écrivant "$P = MU$ est un sous-groupe parabolique (semi-)standard de G", on sous-entend que U est le radical unipotent de P et que M contient M_0. Un tel sous-groupe M de G sera plus simplement appelé sous-groupe de Levi (semi-)standard.

1.6 Si M est un sous-groupe de Levi semi-standard de G, on notera A_M le tore déployé maximal dans le centre de M et $\Sigma(A_M)$ l'ensemble des racines pour l'action de A_M dans l'algèbre de Lie de M. On pose $a_M^* = X^*(A_M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, et on note a_M l'espace dual. Si M' est un sous-groupe de Levi semi-standard de G qui contient M, on note $a_M^{M'*}$ le sous-espace de a_M^*, annulé par $a_{M'}$. On a donc une décomposition $a_M^* = a_{M'}^* \oplus a_M^{M'*}$. On notera $\lambda = \lambda_{M'} + \lambda_M^{M'}$ la décomposition d'un élément λ de a_M^* selon cette décomposition.

Le choix d'un sous-groupe parabolique semi-standard P de G dont M est un facteur de Levi est équivalent au choix d'un certain ordre $>_P$ sur a_M^*. On notera $\Sigma(P)$ l'ensemble des racines dans $\Sigma(A_M)$ qui sont positives pour P. Rappelons que l'on a une bijection $\alpha \mapsto M_\alpha$ entre l'ensemble des racines réduites dans $\Sigma(P)$ et celui des sous-groupes de Levi semi-standard minimaux contenant M. (Le sous-groupe de Levi M_α est le centralisateur de $(\ker \alpha)^\circ$.)

On a un procédé qui associe à un élément λ du complexifié $a_{M,\mathbb{C}}^*$ de a_M^* un certain (quasi-)caractère χ_λ de M. Si α est un caractère F-rationnel de M, et si λ est un nombre complexe, alors $\chi_{\lambda\alpha}(m) := |\alpha(m)|_F^\lambda$. Un tel caractère de M sera appelé *caractère non ramifié,* et le groupe formé de ces caractères noté $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$. Ce groupe a la structure d'une variété algébrique complexe.

1.7 Fixons un sous-groupe parabolique semi-standard $P = MU$ de G. Le groupe $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$ agit sur l'ensemble des (classes d'équivalence) de représentations cuspidales de M. Une orbite $\mathcal{O}$ pour cette action est une variété algébrique complexe. Sur $\mathcal{O}$, on a donc une notion de fonction rationnelle. La fonction μ de Harish-Chandra est une certaine fonction rationnelle $\mu = \mu^G$ définie sur une telle orbite $\mathcal{O}$ qui apparaît naturellement dans la formule de Plancherel d'un groupe p-adique [W].

Si M est un sous-groupe de Levi maximal de G et σ une représentation cuspidale unitaire de M, alors la fonction μ ne dépend que d'une seule variable complexe que l'on peut identifier avec $\sigma \otimes \chi_\lambda$, $\lambda \in a_{M,\mathbb{C}}^{G*}$. On sait que $\sigma \otimes \chi_\lambda$, $\lambda \in a_M^{G*}$, ne peut être qu'un pôle de μ, si $\mu(\sigma) = 0$. Inversement, si $\mu(\sigma) = 0$, il existe un unique $\lambda \in a_M^{G*}$, au signe près, tel que μ soit singulier en $\sigma \otimes \chi_\lambda$. Ces pôles sont d'ordre 1, alors que les zéros sont d'ordre 2. Pour que la représentation induite $\mathrm{i}_P^G(\sigma \otimes \chi_\lambda)$ soit réductible avec λ non nul dans a_M^{G*}, il faut et il suffit que $\sigma \otimes \chi_\lambda$ soit un pôle de μ. On trouvera ces résultats dus à Harish-Chandra et en partie à A. Silberger dans [Si0, Si1] (*cf.* également la remarque [H1, §4.1] relative à la simplicité des pôles de la fonction μ).

Si M n'est plus un sous-groupe de Levi maximal de G, on a une formule du produit

$\mu = \prod_\alpha \mu^{M_\alpha}$, α parcourant les racines réduites dans $\Sigma(P)$. Ces facteurs ne dépendent que d'une seule variable complexe, M étant un sous-groupe de Levi maximal de M_α. L'ordre du pôle de μ en un point $\sigma \otimes \chi$ de $\mathcal{O}$ est alors (par définition si on veut) égal à la somme des pôles des différents facteurs dans la formule du produit. On le note $\mathrm{ord}_{\sigma\otimes\chi}\, \mu$. Si ce nombre est négatif, on parlera d'un zéro.

Rappelons que le rang parabolique de M est défini par $\mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}(G) - \mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}(M)$ et signalons le théorème suivant qui est le résultat principal de [H1]:

Théorème *Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique de G et σ une représentation irréductible cuspidale de M. Pour que la représentation induite $\mathrm{i}_P^G \sigma$ possède un sous-quotient de carré intégrable, il faut et il suffit que σ soit un pôle de la fonction μ de Harish-Chandra d'ordre égal au rang parabolique de M et que la restriction de σ à A_G soit un caractère unitaire.*

2 On va résumer ci-dessous quelques propriétés du L-groupe, et on énoncera les conjectures locales de Langlands. Le lecteur trouvera plus des détails dans [B]. Seule la section 2.4 n'est peut-être pas recouverte par la littérature.

2.1 Soit $\underline{B}$ un sous-groupe de Borel de $\underline{G}$ contenu dans $\underline{P_0}$ et dont $\underline{T}$ est un sous-groupe de Levi. Notons $X^* = X^*(\underline{T})$ le groupe des caractères rationnels de $\underline{T}$ et $X_* = X_*(\underline{T})$ celui des cocaractères. Au choix de $\underline{B}$ correspond une base $\underline{\Delta}$ de $\Sigma(\underline{T})$. Notons $\Phi(\underline{G}) = (X^*, \underline{\Delta}, X_*, \underline{\Delta}^\vee)$ la donnée radicielle basique associée à $\underline{B}$ et $\underline{T}$, et $\Phi^\vee(\underline{G}) = (X_*, \underline{\Delta}^\vee, X^*, \underline{\Delta})$ la donnée radicielle basique duale. Il existe — à isomorphisme près — un unique triplet $(\widehat{G}, \widehat{B}, \widehat{T})$ formé d'un groupe réductif connexe complexe $\widehat{G}$, d'un sous-groupe de Borel $\widehat{B}$ de $\widehat{G}$ et d'un tore maximal $\widehat{T}$ de $\widehat{B}$ de donnée radicielle basique $\Phi^\vee(\underline{G})$.

2.2 Fixons une clôture séparable F^{sep} de F. Si γ est un élément de $\Gamma = \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{sep}}/F)$, alors il existe $g \in \underline{G}(F^{\mathrm{sep}})$, tel que $g^\gamma \underline{T} g^{-1} = \underline{T}$ et que $g^\gamma \underline{B} g^{-1} = \underline{B}$. L'élément g est déterminé à multiplication près par un élément de $\underline{T}(F^{\mathrm{sep}})$. On en déduit un automorphisme $\nu_{\underline{G}} \colon \Gamma \to \mathrm{Aut}(\Phi^\vee(G))$. Remarquons que, si $\underline{G'}$ est un autre groupe réductif connexe défini sur F, alors $\nu_{\underline{G}} = \nu_{\underline{G'}}$, si et seulement si $\underline{G'}$ est une forme intérieure de $\underline{G}$.

Comme $\mathrm{Aut}(\Phi(\underline{G})) = \mathrm{Aut}(\Phi^\vee(\underline{G}))$, on déduit de tout monomorphisme $\mathrm{Aut}(\Phi^\vee(\underline{G})) \to \mathrm{Aut}(\widehat{G}, \widehat{B}, \widehat{T})$ une action $\nu_{\underline{G}}$ de Γ sur $\widehat{G}$ que l'on notera $g \mapsto {}^\gamma g$. Cette action se factorise par le groupe de Galois de l'extension galoisienne minimale K/F sur laquelle $\underline{G}$ se déploie. Cette extension est de degré fini. On définit alors ${}^L G$ comme étant le produit semi-direct $\widehat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)$ déduit de cette action de $\mathrm{Gal}(K/F)$, *i.e.,* pour tout $g \in \widehat{G}$ et tout $\gamma \in \mathrm{Gal}(K/F)$, on a $\gamma g = {}^\gamma g \gamma$. Cette définition dépend du choix du monomorphisme $\mathrm{Aut}(\Phi^\vee(\underline{G})) \to \mathrm{Aut}(\widehat{G}, \widehat{B}, \widehat{T})$. Si on change ce monomorphisme, on ne change $\nu_{\underline{G}}$ toutefois que par un automorphisme intérieur $\mathrm{Int}(t)$, $t \in \underline{T}$. Le groupe ${}^L G$ est donc déterminé à isomorphisme intérieur près. C'est un groupe réductif *omplexe,* qui est connexe si et seulement si G est déployé.

2.3 Un sous-groupe parabolique de ${}^LG$ est un sous-groupe fermé de G qui est égal au normalisateur d'un sous-groupe parabolique $\widehat{P}$ de $\widehat{G}$ et dont la projection sur le deuxième facteur est $\mathrm{Gal}(K/F)$. On dit qu'il est standard, s'il contient ${}^LB := \widehat{B} \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)$. Il est alors de la forme $\widehat{P} \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)$ avec $\widehat{P} \supseteq \widehat{B}$ (en particulier $\widehat{P}$ possède un sous-groupe de Levi $\widehat{M} \supseteq \widehat{T}$).

Tout sous-groupe parabolique de ${}^LG$ est conjugué à un unique sous-groupe parabolique standard. Ainsi les classes de conjugaison des sous-groupes paraboliques de ${}^LG$ sont en bijection avec les classes de conjugaison des sous-groupes paraboliques de $\underline{G}$ stables pour l'action par $\mathrm{Gal}(K/F)$.

On obtient une injection de l'ensemble des sous-groupes paraboliques standard de G dans l'ensemble des sous-groupes paraboliques standard de ${}^LG$, en associant à un sous-groupe parabolique standard P de G le sous-groupe parabolique $\widehat{P} \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)$ de ${}^LG$. On notera ${}^LP$ l'image de P.

Cette injection est bijective si et seulement si G est quasi-déployé. Un sous-groupe parabolique de ${}^LG$ est dit *admissible,* s'il est conjugué à un sous-groupe parabolique de la forme ${}^LP$ avec P un sous-groupe parabolique standard de G. On fait une définition analogue pour un sous-groupe de Levi de ${}^LG$.

2.4 Remarquons que le tore maximal $T_{\underline{G}}$ dans le centre $C(\underline{G})$ de $\underline{G}$ est défini sur T. Son groupe des points F-rationnel est donc égal à T_G. Comme le quotient de $\underline{G}$ par son groupe dérivé est isomorphe au quotient de $C(\underline{G})$ par un sous-groupe fini, on a un morphisme surjectif de groupes algébriques $\underline{G} \longrightarrow T_{\underline{G}}$. Des propriétés de fonctorialité des L-groupes [B, §2.5], on déduit une inclusion ${}^LT_G \hookrightarrow {}^LG$, où ${}^LT_G = T_{\widehat{G}} \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)$. La composante neutre du centre de ${}^LG$ est donc égale à la composante neutre du groupe des points fixes de $T_{\widehat{G}}$ pour l'action de $\mathrm{Gal}(K/F)$. Sa donnée de racines basique est $(X^*(T_{\underline{G}})^{\mathrm{Gal}(K/F)}, \{1\}, X_*(T_{\underline{G}})^{\mathrm{Gal}(K/F)}, \{1\})$. C'est le L-groupe du tore F-déployé maximal $\underline{A}_G$ dans le centre de $\underline{G}$. En particulier, A_G et $C({}^LG)^\circ$ ont le même rang.

Plus généralement, on en déduit que, si ${}^LM$ est un sous-groupe de Levi semi-standard de ${}^LG$ (*i.e.*, ${}^LM$ contient ${}^LT$), la composante neutre du centre de ${}^LM$ correspond à un certain sous-tore de A_0 dont le centralisateur est un sous-groupe de Levi semi-standard M de G. Ainsi, on obtient une bijection entre les sous-groupes de Levi semi-standard de ${}^LG$ et de G. En particulier, si M est un tel sous-groupe de Levi de G et $\alpha \in \Sigma(A_M)$, alors ${}^LM_\alpha$ est le centralisateur de la composante neutre du noyau de la racine $\alpha^\vee$ de $\widehat{T}$ (remarquons que la coracine $\alpha^\vee$ de A_M a été définie dans [H1, §1.2]). On a ${}^LM_\alpha = \widehat{M}_\alpha \rtimes \mathrm{Gal}(K/F)$.

En particulier, l'ensemble des racines $\Sigma(A_M)$ s'identifie à un ensemble de coracines pour $T_{{}^LM}$.

Nous définissons le rang semi-simple *déployé* $\mathrm{rg}_{ss}({}^LM)$ d'un sous-groupe de Levi semi-standard ${}^LM$ de ${}^LG$ par $\mathrm{rg}_{ss}({}^LM) = \mathrm{rg}(T_{{}^LT}) - rg(T_{{}^LM})$. On appellera la différence $\mathrm{rg}_{ss}({}^LG) - \mathrm{rg}_{ss}({}^LM)$ le *rang parabolique de* ${}^LM$. Le résultat suivant est une conséquence immédiate des remarques ci-dessus:

Proposition 2.1 *Pour tout sous-groupe de Levi semi-standard M de G, ${}^LM$ et M ont le même rang parabolique.*

Définition 2.2 Un morphisme de groupes $\psi\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ est dit *admissible,* si

(i) la composition de ψ avec la projection de ${}^LG$ sur $\mathrm{Gal}(K/F)$ est égale à la projection $W_F \to \mathrm{Gal}(K/F)$;
(ii) la restriction de ψ à W_F est un morphisme de groupes continu;
(iii) la restriction de ψ à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est un morphisme de groupes algébriques;
(iv) pour tout $\gamma \in W_F$, $\psi(\gamma, 1)$ est un élément semi-simple de ${}^LG$;
(v) si ψ se factorise par un sous-groupe de Levi de ${}^LG$, alors celui-ci est admissible.

Un morphisme admissible $\psi\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ est dit *discret,* si $\psi(W_F)$ est relativement compact et si l'image de ψ n'est contenue dans aucun sous-groupe de Levi propre de ${}^LG$. Deux morphismes admissibles $\psi_1, \psi_2\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ sont dits *équivalents,* s'il existe $g \in \widehat{G}$ avec $\mathrm{Int}(g) \circ \psi_1 = \psi_2$, où $\mathrm{Int}(g)$ désigne l'automorphisme intérieur de $\widehat{G}$ associé à g.

L'homomorphisme admissible ψ est dit *non ramifié,* si sa restriction au sous-groupe d'inertie de W_F est trivial.

Conjecture 2.3 (Conjecture locale de Langlands) Les (classes d'équivalence de) représentations irréductibles lisses de G sont en bijection avec les classes d'équivalence de couples (ψ, ϕ) formés d'un homomorphisme admissible $\psi\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ et d'une certaine représentation irréductible ϕ du groupe fini $S_\psi := C_{{}^LG}\,(\mathrm{im}(\psi))\,/C_{{}^LG}\,(\mathrm{im}(\psi))^\circ$, les représentations de carré intégrable de G correspondant aux couples (ψ, ϕ) avec ψ discret.

Remarque Ces conjectures ne sont connues en toute généralité que pour le groupe GL_n grâce aux travaux de M. Harris et R. Taylor [HT] (qui établissent la correspondance pour les représentations cuspidales, le prolongement à l'ensemble (des classes d'équivalence) des représentations irréductibles lisses résultant de travaux préliminaires de J. Bernstein et A. Zelevinski [R]). Dans le cas où G est simple déployé de type adjoint, les représentations irréductibles lisses correspondant à des couples (ψ, ϕ) avec ψ non ramifié ont été déterminées par G. Lusztig [L2].

Par ailleurs, comme déjà signalé dans l'introduction, la correspondance de Langlands pour les représentations irréductibles lisses génériques des groupes classiques déployés est une conséquence des résultats de fonctorialité dus à J. W. Cogdell, H. H. Kim, I. I. Piatetski-Shapiro et F. Shahidi [CKPS], joints à la correspondance de Langlands pour GL_n, l'image de cette correspondance n'étant toutefois connue pour l'instant que si $G = \mathrm{SO}_{2n+1}(F)$ [JS].

Définition 2.4 Soit π une représentation irréductible lisse de G. Si π correspond au couple (ψ, ϕ) par les conjectures locales de Langlands, alors on appellera ψ le *paramètre de Langlands* de π. Deux représentations irréductibles lisses de G sont dans le même *L-paquet* si et seulement si elles ont le même paramètre de Langlands.

2.5 Dans le cas des tores, la correspondance conjecturée en Conjecture 2.3 a été prouvée par Langlands dans [L]. Si G est un tore déployé, $G = (F^\times)^d$, elle associe au caractère non ramifié $\chi\colon G \to \mathbb{C}$, $(x_1, \dots, x_d) \mapsto |x_1|_F^{\lambda_1} \cdots |x_d|_F^{\lambda_d}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{C}$, l'homomorphisme non ramifié $W_F \to {}^LG = (\mathbb{C}^\times)^d$ qui envoie Fr sur

$$s := (q^{\lambda_1}, \dots, q^{\lambda_d}).$$

On dira que s correspond à χ (ou à λ, si $\chi = \chi_\lambda$ pour un $\lambda \in a^*_{G,\mathbb{C}}$) par la *correspondance de Langlands pour les tores,* et vice-versa. Si λ est réel (*i.e.,* $\lambda \in a^*_G$), alors la partie compacte dans la décomposition polaire de s (*cf.* §1.2) est triviale.

D'autre part, si M est un sous-groupe de Levi semi-standard d'un groupe p-adique et si α est une racine relative à A_M, alors le caractère non ramifié χ_α de M correspond à l'élément semi-simple $\alpha(q)$ de $T_{^LM}$ (où on considère α comme coracine relative à $T_{^LM}$ (*cf.* §2.4).

3

Dans cette section, on se fixe un groupe algébrique connexe complexe semi-simple $\mathcal{G}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Les résultats résumés dans le théorème 3.1, la définition 3.2 et la proposition 3.3 sont bien connus, et on renvoie le lecteur à [Ca] pour plus de précisions.

Théorème 3.1 (Jacobson-Morozow) *Soit N un élément nilpotent non nul de $\mathfrak{g}$. Alors il existe un morphisme d'algèbres de Lie $\phi\colon \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{g}$ vérifiant $\phi\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = N$.*

Définition 3.2 Un triplet $\{H, N, \overline{N}\}$ dans $\mathfrak{g}$ tel qu'il existe un morphisme d'algèbres de Lie $\phi\colon \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{g}$ vérifiant $\phi\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = N$, $\phi\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) = H$ et $\phi\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \overline{N}$ est appelé un $\mathfrak{sl}_2$-triplet.

Proposition 3.3 *Une condition nécessaire et suffisante pour que $\{H, N, \overline{N}\}$ soit un $\mathfrak{sl}_2$-triplets dans $\mathfrak{g}$, est que ses éléments vérifient les relations $[H, N] = 2N$, $[H, \overline{N}] = -2N$ et $[N, \overline{N}] = H$.*

Deux $\mathfrak{sl}_2$-triplet sont égaux, s'ils ont deux éléments en commun.

En utilisant l'application exponentielle, on déduit alors du théorème 3.1 et de la proposition 3.3 le corollaire suivant:

Corollaire 3.4 *Soit s un élément semi-simple et $u = \exp(N)$ un élément unipotent de $\mathcal{G}$. Supposons que $H = \frac{2}{\log q} \log s$ et $N = \log u$ font partie d'un $\mathfrak{sl}_2$-triplet dans l'algèbre de Lie de G.*

Alors il existe un unique morphisme de groupes algébriques $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{G}$ qui envoie $\left(\begin{smallmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{smallmatrix}\right)$ sur s et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur $\exp(N)$. Son image est un groupe réductif semi-simple de rang 1.

3.1

Une condition nécessaire pour que les hypothèses du corollaire 3.4 soient vérifiées relativement à un élément semi-simple s et un élément unipotent u de $\mathcal{G}$ est évidemment $sus^{-1} = u^q$. Mais, cette condition n'est pas suffisante. Cependant, le résultat suivant vaut:

Proposition 3.5 *Soient s un élément semi-simple et u un élément unipotent de $\mathcal{G}$ tels que $sus^{-1} = u^q$. Alors il existe un élément semi-simple s_1 dans $\mathcal{G}$ et un morphisme de groupes algébriques $\phi\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{G}$ vérifiant*

$$\phi\begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix} = s_1 \quad \textit{et} \quad \phi\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = u,$$

tels que ss_1^{-1} commute aux éléments dans l'image de ϕ. En particulier, s et s_1 commutent.

Preuve Ce résultat est contenu dans [K, §2]. Cependant ces auteurs font globalement l'hypothèse que le groupe dérivé de $\mathcal{G}$ est simplement connexe. On va reprendre les arguments de [KL] pour montrer que cette hypothèse n'intervient pas dans ce résultat: choisissons un homomorphisme de groupes algébriques $\phi\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{G}$ vérifiant $\phi\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = u$. Posons $\alpha^\vee(z) = \left(\begin{smallmatrix} z^{1/2} & 0 \\ 0 & z^{-1/2} \end{smallmatrix}\right)$,

$$M(u) = \{(g,z) \in \mathcal{G} \times \mathbb{C}^* \mid gug^{-1} = u^z\},$$

$$M_\phi = \{(g,z) \in \mathcal{G} \times \mathbb{C}^* \mid g\phi(h)g^{-1} = \phi(\alpha^\vee(z)h\alpha^\vee(z^{-1})) \text{ pour tout } h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\}.$$

Comme ϕ est uniquement déterminé à conjugaison par un élément de $C_{\mathcal{G}}(u)$ près, on montre comme dans [BV, §2.1] que M_ϕ est un groupe réductif maximal de $M(u)$. (Ni la preuve dans [BV], ni cette généralisation n'utilisent d'hypothèse sur le groupe dérivé de $\mathcal{G}$.)

Rappelons que tout groupe algébrique est le produit semi-direct d'un sous-groupe réductif maximal par son radical unipotent et que deux sous-groupes réductifs maximaux sont conjugués par un élément du radical unipotent. Les sous-groupes réductifs maximaux de $M(u)$ sont donc nécessairement de la forme M_ϕ avec ϕ comme ci-dessus. Comme (s,q) est un élément semi-simple de $M(u)$, il existe $\phi\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{G}$ vérifiant $\phi\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = u$, tel que $(s,q) \in M_\phi$. Posons $s_1 = \phi\left(\begin{smallmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{smallmatrix}\right)$. Comme $(s_1,q) \in M_\phi$, il en résulte que $(ss_1^{-1},1) \in M_\phi$. Par suite, ss_1^{-1} commute avec les éléments dans l'image de ϕ et en particulier avec s_1. ■

Définition 3.6 Soit s un élément semi-simple de $\mathcal{G}$ et N un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$. On dit que (s,N) est une *L^2-paire* relative à $\mathcal{G}$, si $\mathrm{Ad}(s)N = qN$, et si tout tore de $\mathcal{G}$ qui centralise simultanément s et N est inclus dans le centre de $\mathcal{G}$.

Remarque Cette notion est celle introduite par G. Lusztig dans [L1] pour $\mathcal{G}$ un groupe semi-simple, à la différence près que Lusztig suppose $\mathrm{Ad}(s)N = q^{-1}N$.

4

Nous continuons à noter $\mathcal{G}$ un groupe réductif complex connexe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Les notions et propriétés données ci-dessous relatives aux orbites nilpotentes et unipotentes d'un groupe réductif complexe sont bien connues. Le lecteur pourra consulter, par exemple [Ca], pour des preuves détaillées.

Définition 4.1 Un élément nilpotent N de $\mathfrak{g}$ est dit distingué, si et seulement si $\exp(N)$ n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi propre de $\mathcal{G}$.

Proposition 4.2 *Supposons $\mathcal{G}$ semi-simple de type adjoint. Soit N un élément nilpotent non nul dans $\mathfrak{g}$ et $\{H, N, \overline{N}\}$ un $\mathfrak{sl}_2$-triplet contenant N. Posons*

$$\mathfrak{g}_H(\lambda) = \{Z \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(H)Z = \lambda Z\}.$$

Alors $\dim \mathfrak{g}_H(0) \geq \dim \mathfrak{g}_H(2)$. *Pour que N soit distingué dans G, il faut et il suffit que* $\dim \mathfrak{g}_H(0) = \dim \mathfrak{g}_H(2)$. *On a alors $\mathfrak{g}_H(\lambda) = 0$ pour tout entier impair λ.*

Remarque Si la dernière propriété de la proposition est vérifiée, on dit que H et $\exp(H)$ sont *pairs*.

4.1 Supposons $\mathcal{G}$ simple de type adjoint. Fixons un sous-groupe de Borel $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{U}$ de $\mathcal{G}$ et notons Δ_1 la base correspondante du système de racines $\Sigma_1 = \Sigma(\mathcal{T})$ de $\mathcal{G}$. Soit J un sous-ensemble de Δ_1 et $n_J \colon \Sigma_1 \to \mathbb{N}$ défini par $n_J(\sum_{\alpha \in \Delta_1} \lambda_\alpha \alpha) = 2 \sum_{\alpha \in J} \lambda_\alpha$.

Le sous-groupe parabolique $\mathcal{P}_J$ de $\mathcal{G}$ associé à J est dit *distingué,* si et seulement si

$$|\{\beta \in \Sigma_1 \mid n_J(\beta) = 2\}| = \mathrm{rg}(\mathcal{G}) + |\{\beta \in \Sigma_1 \mid n_J(\beta) = 0\}|.$$

Proposition 4.3 *Soit $\mathfrak{g}_J(2)$ (resp., $\mathfrak{g}_J(0)$) la somme directe des sous-espaces de $\mathfrak{g}$ de poids α vérifiant $n_J(\alpha) = 2$ (resp., $n_J(\alpha) = 0$ et de l'algèbre de Lie de $\mathcal{T}$).*

Alors $\dim \mathfrak{g}_J(0) \geq \dim \mathfrak{g}_J(2)$.

Théorème 4.4 (Bala–Carter) *Supposons $\mathcal{G}$ simple de type adjoint. Soit $\mathcal{P} = \mathcal{M}\mathcal{U}$ un sous-groupe parabolique distingué de $\mathcal{G}$.*

Alors il existe dans l'algèbre de Lie de $\mathcal{U}$ une unique orbite pour l'action de $\mathcal{P}$ qui est dense. Elle est formée d'éléments nilpotents distingués. L'application ainsi définie induit une bijection entre les classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques distingués de $\mathcal{G}$ et les classes de conjugaison d'éléments nilpotents distingués dans $\mathfrak{g}$.

Définition 4.5 Soit s un élément semi-simple de $\mathcal{G}$. Notons $\mathfrak{g}^{\mathrm{der}}$ l'algèbre de Lie du groupe dérivé de $\mathcal{G}$. Si λ est une valeur propre de $\mathrm{Ad}(s)_{|\mathfrak{g}^{\mathrm{der}}}$, notons $\mathfrak{g}_s(\lambda)$ l'espace propre associé à cette valeur propre. Alors s est dit *q-distingué,* si $\dim(\mathfrak{g}_s(q)) \geq \dim(\mathfrak{g}_s(1))$.

Remarque Il résultera de la preuve du théorème 4.6 (*cf.* proposition 4.8) que l'inégalité ci-dessus est en fait une égalité.

4.2 La preuve du théorème suivant était l'objet du manuscrit de l'auteur.[1] Comme le manuscrit n'a pas été publié, nous la reproduisons ci-dessous.

Théorème 4.6 *Soit s un élément semi-simple de $\mathcal{G}$. Pour que s soit q-distingué, il faut et il suffit que s fasse partie d'une L^2-paire (s, N) pour $\mathcal{G}$. La composante nilpotente N est déterminée par s à multiplication par un scalaire non nul près.*

[1] *Une caractérisation semi-simple des L^2-paires de Lusztig.* Manuscrit, 1999.

La preuve résultera des propositions 4.7– 4.9 ci-dessous.

Notons $s_v s_c$ la décomposition polaire de s (*cf.* §1.2).

Proposition 4.7 *Soit s un élément q-distingué de $\mathcal{G}$. Supposons $s = s_v$. Fixons un tore maximal $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$ contenant s et un ensemble Δ_1 de racines simples relatives à $\mathcal{T}$ pour lequel s est positif. Alors toute racine α de Δ_1 vérifie ou $\alpha(s) = 1$ ou $\alpha(s) = q$. L'inégalité dans la définition* 4.5 *est en fait une égalité. Il existe un élément nilpotent distingué N dans l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}$, tel que* $\mathrm{Ad}(s)N = qN$.

Preuve Notons $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{U}$ le sous-groupe de Borel de $\mathcal{G}$ correspondant à Δ_1. Posons $\mathrm{s} = s^{2\pi i/\log q}$. On a $\mathrm{s} = \mathrm{s}_c$. Le groupe $\mathcal{G}' = C_{\mathcal{G}}(\mathrm{s}_c)^\circ$ est réductif connexe de système de racines $\Sigma_1' = \{\alpha \in \Sigma_1 \mid \alpha(\mathrm{s}) = 1\} = \{\alpha \in \Sigma_1 \mid \alpha(s) \in q^{\mathbb{Z}}\}$ relatif à $\mathcal{T}$. Un sous-groupe de Borel est donné par $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cap \mathcal{G}'$. Notons Δ_1' la base de Σ_1' correspondant à $\mathcal{B}'$. Posons $J_1 = \{\alpha \in \Delta_1' \mid \alpha(s) = 1\}$ et $J_q = \{\alpha \in \Delta_1' \mid \alpha(s) = q\}$. On montrera d'abord que $\Delta_1' = J_1 \cup J_q$.

Soit $\mathcal{M}'_{\Delta_1' - (J_1 \cup J_q)}$ le sous-groupe de Levi standard de $\mathcal{G}'$ dont les racines simples sont les éléments de $J_1 \cup J_q$. On a $s \in \mathcal{M}'_{\Delta_1' - (J_1 \cup J_q)}$ et toute racine positive $\alpha \in \Sigma_1'$ qui vérifie $\alpha(s) = q$ ou $\alpha(s) = 1$ est combinaison linéaire d'éléments de $J_1 \cup J_q$.

Le quotient de $\mathcal{M}'_{\Delta_1' - (J_1 \cup J_q)}$ par son centre est homomorphe par une bijection à un groupe semi-simple de type adjoint $\mathcal{M}'^{\mathrm{ad}}$ qui lui est produit direct de groupes simples de type adjoint, $\mathcal{M}'^{\mathrm{ad}} = \mathcal{M}_1' \times \cdots \times \mathcal{M}_r'$. On a $|J_1 \cup J_q| = \mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}(\mathcal{M}'_{\Delta' - (J_1 \cup J_q)}) = \sum_i \mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}(\mathcal{M}_i')$. Notons $J_{1,i}$ (resp., $J_{q,i}$) le sous-ensemble de J_1 (resp., J_q), formé de racines pour $\mathcal{M}_i'$, Σ_i' la composante irréductible de Σ' correspondant à $\mathcal{M}_i'$ et $\mathcal{P}'_{i,J_{1,i}}$ le sous-groupe parabolique standard de $\mathcal{M}_i'$ de Levi $\mathcal{M}'_{i,J_{1,i}}$. On déduit de la proposition 4.3 que $\dim \mathfrak{g}_s(q) \leq \dim \mathfrak{g}_s(1)$, d'où

$$(*)\qquad \begin{aligned} \mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}\, \mathcal{G} &\leq \big|\{\alpha \in \Sigma^+ \mid \alpha(s) = q\}\big| - 2\big|\{\alpha \in \Sigma^+ \mid \alpha(s) = 1\}\big| \\ &\leq \sum_i |J_{1,i} \cup J_{q,i}| = |J_1 \cup J_q| \leq \mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}\, \mathcal{G}. \end{aligned}$$

On a donc l'égalité partout. En particulier, le système de racines Σ_1' a le même rang que Σ_1, $J_0 \cup J_1 = \Delta_1'$, et l'inégalité $(*)$ (et par suite l'inégalité dans la définition 4.5 est en fait une égalité.

Ceci prouve que le parabolique $\mathcal{P}'_{J_1}$ est distingué dans $\mathcal{G}$. Par le théorème de Bala–Carter (théorème 4.4), on peut donc trouver un élément nilpotent distingué dans l'algèbre de Lie du radical unipotent de $\mathcal{P}'_{J_1}$, tel que, pour un certain $\mathfrak{sl}_2$-triplet pour N, s soit un élément du tore de rang 1 de $\mathcal{G}'$ déduit de ce triplet. Comme $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ ont le même rang et qu'aucune racine α de $\Sigma \backslash \Sigma'$ ne peut vérifier $\alpha(s) = 1$, N est distingué pour $\mathcal{G}$ par la proposition 4.2. Il est donc pair. Le résultat sur s en suit. ■

Proposition 4.8 *On garde les notations et hypothèses de la proposition précédente, mais on ne suppose plus $s = s_v$.*

L'inégalité dans la définition 4.5 *est en fait une égalité. Il existe un élément nilpotent N dans l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}$, tel que (s, N) soit une L^2-paire.*

Preuve Soient $\mathcal{B}$ et Σ_1 comme dans la proposition 4.7. La composante neutre $\mathcal{G}'$ du centralisateur de s_c dans $\mathcal{G}$ est un groupe réductif connexe de système de racines $\Sigma_1' = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(s_c) = 1\}$. Le groupe $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cap \mathcal{G}'$ est un sous-groupe de Borel de $\mathcal{G}$ pour lequel s est positif et distingué. On a $\alpha(s) = \alpha(s_v)$ pour tout $\alpha \in \Sigma_1'$. On déduit de la proposition 4.7 et de son inégalité $(*)$ que $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ ont le même rang semi-simple et que l'inégalité dans la définition 4.5 est en fait une égalité. En particulier, le groupe $\mathcal{G}'/C(\mathcal{G})$ est semi-simple.

Grâce à la proposition 4.7, on peut choisir un élément nilpotent distingué dans l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}'$ qui vérifie $\mathrm{Ad}(s)N = qN$. Il reste à voir qu'aucun sous-tore non trivial de $G/C(G)$ ne peut centraliser simultanément s et N. En effet, comme la décomposition polaire $s = s_v s_c$ est invariante par homomorphismes de groupes algébriques, un tel tore S centraliserait s_c. Par suite, $S \subset \mathcal{G}'/C(\mathcal{G})$. Comme S centralise également N et que N est distingué, on en déduit $S = 1$. ■

Proposition 4.9 *Soit (s, N) une L^2-paire relative à q. Alors s est q-distingué. L'élément nilpotent N est déterminé par s à multiplication par un scalaire non nul près.*

Preuve Quitte à remplacer $\mathcal{G}$ par son quotient par le centre, on peut supposer $\mathcal{G}$ semi-simple. Comme (s, N) est une L^2-paire, le centralisateur connexe $\mathcal{G}'$ de la partie compacte de s est semi-simple. En particulier, $\mathcal{G}$ est de même rang que $\mathcal{G}'$. La relation $\mathrm{Ad}(s)N = qN$ prouve que N est dans l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}'$. Comme (s, N) est une L^2-paire, N est un élément nilpotent distingué de l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}'$. Il est prouvé dans [L1, exemple 2.4] que s_v est un élément du tore S de rang 1 déduit d'un certain $\mathfrak{sl}_2$-triplet pour N dans l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}'$. Il en résulte que s est q-distingué.

Choisissons un tore maximal $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}'$ contenant S et un ensemble Δ_1 de racines simples relatives à $\mathcal{T}$ pour lequel s est positif. On déduit de la proposition 4.2 que toute racine α dans Δ_1 vérifie $\alpha(s) \in \{1, q\}$ et que le parabolique standard $\mathcal{P}_J'$, $J = \{\alpha \mid \alpha(s) = 1\}$, est celui associé à N par le théorème de Bala–Carter. Il est donc distingué. L'unicité de N à multiplication par un scalaire près résulte alors de la théorie des orbites unipotentes (*cf.* [Ca, proposition 5.8.5]). ■

4.3 En considérant $\mathcal{G}$ comme le dual d'un certain groupe réductif connexe déployé défini sur F, on obtient le résultat suivant:

Proposition 4.10 *Soit (s, N) une L^2-paire relative à $\mathcal{G}$. Supposons que s soit un élément du groupe dérivé de $\mathcal{G}$ et que la partie compacte de s dans sa décomposition polaire soit triviale. Alors il existe un morphisme de groupes algébriques $\phi\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{G}$ qui vérifie*

$$\phi\begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix} = s \quad \textit{et} \quad \phi\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(N).$$

Il est admissible et discret et, à équivalence près, uniquement déterminé par s.

Preuve Par la proposition 3.5, on peut choisir $\phi\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{G}$ et un élément semi-simple s_1 de $\mathcal{G}$ tel que $\phi\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \exp(N)$, $\phi\left(\begin{smallmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{smallmatrix}\right) = s_1$ et que $z_1 := s s_1^{-1}$ com-

https://doi.org/10.4153/CJM-2006-043-8 Published online by Cambridge University Press

mute aux éléments dans l'image de ϕ. L'élément s_1 appartient nécessairement au groupe dérivé de $\mathcal{G}$ et la partie compacte dans la décomposition polaire de s_1 est triviale, celle-ci étant invariante par morphisme de groupes algébriques. Il en est donc de même de z_1. Il suffit de montrer qu'en fait $z_1 = 1$ sous nos hypothèses. Écrivons $N = \sum_\alpha N_\alpha$, où N_α est un élément de l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ de poids α. Notons n le rang semi-simple de $\mathcal{G}$. Comme N est distingué, il doit y être n racines linéairement indépendantes α telles que $N_\alpha \neq 0$. Ces racines vérifient $\alpha(z_1) = 1$. Comme z_1 est un élément du groupe dérivé de $\mathcal{G}$ dont la partie compacte est trivial, ceci prouve que $z_1 = 1$.

Le morphisme est discret, puisque (s, N) est une L^2-paire, et il est alors immédiat qu'il est admissible. L'unicité vient du corollaire 3.4. ■

5

On va maintenant introduire les hypothèses dont nous aurons besoin. Rappelons que le symbole G désigne le groupe des points F-rationnels d'un groupe réductif connexe défini sur F.

5.1

Le résultat suivant est bien connu. Par manque de référence, nous en donnons une preuve:

Lemme 5.1 *Soit $\psi\colon W_F \to {}^LG$ un homomorphisme admissible. Alors on peut écrire $\psi = \psi_{nr}\psi_f$ où ψ_f est un homomorphisme admissible à image finie et ψ_{nr} un homomorphisme admissible non ramifié (donc trivial sur le groupe d'inertie) à valeurs dans le centralisateur de l'image de ψ.*

Remarque Le morphisme ψ_{nr} devrait être lié, par la conjecture locale de Langlands (voir conjecture 2.3), au caractère central d'une représentation de G de paramètre de Langlands ψ.

Preuve Le groupe W_F est un produit semi-direct du sous-groupe d'inertie I_F avec le sous-groupe cyclique engendré par l'automorphisme de Frobenius Fr, $W_F = I_F \rtimes \langle Fr\rangle$. Le groupe I_F étant compact, $\psi(I_F)$ est fini. (C'est une propriété bien connue des topologies profinies et complexes.) Il existe donc une extension de degré fini K/F telle que ψ se factorise par $I_K \rtimes \langle Fr\rangle$. Considérons l'homomorphisme induit $\overline{\psi}\colon I_F/I_K \rtimes \langle Fr\rangle \to {}^LG$. L'automorphisme intérieur du groupe fini $\overline{\psi}(I_F/I_K)$ induit par $\overline{\psi}(Fr)$ est évidemment d'ordre fini. Il existe donc un entier $k \geq 1$, tel que $s = \overline{\psi}(Fr^k)$ centralise $\overline{\psi}(I_F/I_K)$. Par suite, il centralise également l'image de ψ. Comme le nombre de composantes connexes d'un groupe algébrique est fini, il existe un entier l tel que $s^l \in \widehat{G}$. Le centralisateur connexe d'un élément semi-simple dans un groupe réductif connexe étant réductif, le centralisateur de s^l dans ${}^LG$ est un groupe réductif ${}^LG_1$ qui contient l'image de ψ. Notons D un sous-groupe algébrique diagonalisable contenu dans le centre de ${}^LG_1$ et contenant s^l. On a $D = D_d \times D_f$, où D_f est un sous-groupe fini et D_d un tore. Notons m l'ordre de D_f. Alors s^{lm} appartient à D_d. Il existe donc $s_1 \in D_d$ tel que $s_1^{klm} = s^{lm}$. L'homomorphisme $\psi_f\colon I_F \rtimes \langle Fr\rangle \to {}^LG$, $(h, Fr^j) \mapsto \psi(h, Fr^j)s_1^{-j}$ est bien défini, continu et à image finie. On en déduit le lemme. ■

https://doi.org/10.4153/CJM-2006-043-8 Published online by Cambridge University Press

Le résultat suivant est crucial pour la suite. Il a déjà été remarqué dans [K]. Nous présentons ci-dessous une preuve légèrement différente.

Proposition 5.2 *Soit $\psi\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ un homomorphisme admissible. Alors le centralisateur de $\psi(W_F)$ dans ${}^LG$ est un groupe réductif.*

Preuve Par le lemme, on peut écrire $\psi = \psi_{nr}\psi_f$. Rappelons que l'on a fixé un Frobenius Fr dans W_F. On a $\psi_f(Fr)^k = 1$ pour un certain entier $k > 0$. Le centralisateur de $\psi(W_F)$ est donc contenu dans celui du groupe cyclique engendré par $\psi_{nr}(Fr)^k = \psi(Fr)^k$. Le nombre de composantes connexes de ${}^LG$ étant fini, il existe un entier positif m, tel que $\psi_{nr}(Fr)^{km} \in \widehat{G}$.

Comme le centralisateur d'un élément semi-simple dans un groupe réductif connexe est réductif, le centralisateur de $\psi_{nr}(Fr)^{km}$ dans ${}^LG$ est un sous-groupe réductif $\mathcal{G}$ de ${}^LG$. Comme $\psi_{nr}(Fr)$ est contenu dans $\mathcal{G}$, l'automorphisme intérieur défini par $\psi_{nr}(Fr)$ induit un automorphisme de $\mathcal{G}$. Il est d'ordre fini. Comme $\psi_f(W_F)$ est également contenu dans $\mathcal{G}$, le centralisateur de $\psi(W_F)$ dans ${}^LG$ est égal au groupe des points fixes des automorphismes intérieurs de $\mathcal{G}$ définis par les éléments semi-simples $\psi_{nr}(\gamma)\psi_f(\gamma)$, $\gamma \in W_F$. Or, par ce qui précédait, ces automorphismes forment par restriction un sous-groupe fini du groupe des automorphismes du groupe réductif connexe complexe $\mathcal{G}^\circ$. Il est bien connu (*cf.*, par exemple [PY]) que le groupe des points fixes d'un tel groupe fini d'automorphismes est un groupe réductif. Ceci prouve la proposition. ■

Proposition 5.3 *Soit $\psi\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ un homomorphisme admissible et soit ${}^LM_\psi$ un sous-groupe de Levi minimal de ${}^LG$ qui contient $\psi(W_F)$. Le tore maximal $\widehat{T}_\psi$ contenu dans le centre de ${}^LM_\psi$ est un tore maximal du centralisateur de $\psi(W_F)$ dans ${}^LG$.*

Preuve Le tore maximal $\widehat{T}_\psi$ contenu dans le centre de ${}^LM_\psi$ est inclus dans le centralisateur de $\psi(W_F)$. Il reste à voir qu'il est maximal. Notons $\widehat{T}^\psi$ un tore maximal du centralisateur de $\psi(W_F)$ qui le contient. Le centralisateur de $\widehat{T}^\psi$ dans ${}^LG$ contient $\psi(W_F)$. Il se projette donc sur $\mathrm{Gal}(K/F)$. Par suite, c'est un sous-groupe de Levi de ${}^LG$ (*cf.* [B, §3.5]) qui est nécessairement contenu dans ${}^LM_\psi$. Par minimalité de ${}^LM_\psi$, on a l'égalité, d'où $\widehat{T}_\psi = \widehat{T}^\psi$. ■

5.2 Nous fixons pour la suite de cette section un sous-groupe parabolique semi-standard $P = MU$ de G.

Nous dirons qu'une représentation irréductible cuspidale unitaire (σ, E) de M vérifie l'hypothèse (LM), si l'assertion suivante est vérifiée.

(LM) On peut associer à σ un homomorphisme admissible discret

$$\psi_\sigma\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LM$$

ayant les propriétés suivantes: tout d'abord on suppose que ψ_σ ait été choisi tel que l'on puisse trouver un sous-groupe de Levi minimal ${}^LM_\sigma$ de ${}^LM$ qui contienne $\psi_\sigma(W_F)$ qui soit semi-standard et qui contienne

$$\psi_\sigma\begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2}\end{pmatrix} =: s_\sigma.$$

Notons ${}^LM^\sigma$ le centralisateur de $\psi_\sigma(W_F)$ dans ${}^LG$ et $\widehat{M}^\sigma$ sa composante neutre. Fixons ensuite une forme intérieure G_0 de G tel que ${}^LM_\sigma$ soit un sous-groupe de Levi admissible pour G_0. Notons M_0 le sous-groupe de Levi semi-standard de G_0 qui correspond à ${}^LM$ et M_σ celui qui correspond à ${}^LM_\sigma$. Fixons un sous-groupe parabolique P_σ de Levi M_σ de G_0. Notons χ_{λ_σ} l'élément de $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M_\sigma)$ qui correspond à s_σ par la correspondance de Langlands pour les tores. (Remarquons que $\lambda_\sigma \in a_M^*$, puisque la partie compacte de s_σ est nécessairement triviale.) Alors on demande de plus que l'on peut choisir G_0 tel que les conditions suivantes soient vérifiées:

(a) il existe une représentation irréductible cuspidale unitaire σ_0 de M_σ, tel que $\mathrm{i}_{P_\sigma\cap M_0}^{M_0}(\sigma_0\otimes\chi_{\lambda_\sigma})$ possède un sous-quotient de carré intégrable π_0, de sorte que, identifiant $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M_0)$ et $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$ par la correspondance de Langlands pour les tores, π_0 et σ ont même fonction μ;

(b) pour toute racine réduite α dans $\Sigma(P_\sigma)$, on a la propriété suivante: remarquons que $(\widehat{M}^\sigma\cap\widehat{M_\alpha})^\circ$ est égal au centralisateur connexe de $\psi_\sigma(W_F)$ dans ${}^LM_\alpha$. Pour que $\lambda\mapsto\mu^{M_{\sigma,\alpha}}(\sigma_0\otimes\chi_{\lambda\alpha})$ ait un pôle en $\lambda>0$, il faut et il suffit que $\alpha(q)^\lambda$ soit un élément q-distingué de $(\widehat{M}^\sigma\cap\widehat{M_\alpha})^\circ$ et que ce groupe ne soit pas un tore.

Remarque (i) Si la restriction de ψ_σ à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est triviale, alors ${}^LM_\sigma = {}^LM$. On peut donc choisir $G_0=G$, $\sigma_0=\sigma$ et la condition (a) est trivialement vérifiée.

Il reste la condition (b): celle-ci est motivée par le fait qu'une représentation réductible de M_α paraboliquement induite par une représentation cuspidale non unitaire de M possède un unique sous-quotient de carré intégrable.

En effet, si $\mathrm{i}_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}(\sigma\otimes\chi_{\lambda\alpha})$ est réductible, $\lambda>0$, cette représentation possède un unique sous-quotient de carré intégrable, et, notant ψ_σ le paramètre de Langlands de σ, il doit alors exister un homomorphisme admissible discret $\psi\colon W_F\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\to {}^LM_\alpha$ tel que $\psi_{|W_F}=\psi_{\sigma|W_F}$ et que $\psi\left(\begin{smallmatrix} q^{1/2} & 0\\ 0 & q^{-1/2}\end{smallmatrix}\right)=\alpha(q)^\lambda$ (*cf.* §6.2). Ceci implique la propriété (b). Inversement, nous pouvons déduire d'un homomorphisme admissible discret $\psi\colon W_F\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})\to {}^LM_\alpha$ dont la restriction à W_F est donnée par celle de ψ_σ une représentation de carré intégrable de M_α qui doit être un sous-quotient de $\mathrm{i}_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}(\sigma\otimes\chi_{\lambda\alpha})$ pour un certain nombre réel $\lambda>0$ (*cf.* §6.3).

(ii) Remarquons que, quitte à remplacer ψ_σ par un homomorphisme admissible qui lui est équivalent, on peut toujours trouver un sous-groupe de Levi minimal de ${}^LM$ qui contient $\psi_\sigma(W_F)$ et qui est semi-standard. Il est alors uniquement déterminé par ψ_σ, puisque l'intersection de deux sous-groupes de Levi semi-standard est contenu dans un sous-groupe de Levi semi-standard propre (de chacun des deux sous-groupes de Levi). Si ${}^LM_\sigma$ est admissible pour G, on peut choisir $G_0=G$. Si la restriction de ψ_σ sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est non triviale, il est supposé qu'il existe une représentation de carré intégrable π_0 de M correspondant au même paramètre ψ_σ et que celle-ci peut être obtenue à partir d'une représentation cuspidale σ_0 de M_σ comme décrit ci-dessus. Comme π_0 et σ correspondent au même paramètre ψ_σ, leurs fonctions μ sont supposées être égales [S, §9]. La condition (b) s'explique alors comme dans (i).

(iii) En général, on peut toujours choisir pour G_0 l'unique forme intérieure de G qui est quasi-déployée sur F: tout sous-groupe de Levi de ${}^LG$ est admissible pour G_0. Par la correspondance de Langlands pour les formes intérieures (qui n'est connue dans une certaine mesure que pour $\underline{G}_0$ un groupe linéaire général), on associe à σ une représentation de carré intégrable π_0 de M_0. Les fonctions μ de σ et π_0 devraient être égales [S, §9]. En fait, π_0 correspondrait au même paramètre ψ_σ (cette fois pris relatif au groupe M_0). Les autres conditions s'expliquent comme dans (ii) (en partant de π_0).

(iv) Il est possible que l'on puisse établir l'hypothèse ci-dessus dans une certaine mesure dans le cas où la localisation des points de réductibilité est connue (*cf.* [S]) ou la déduire d'autres propriétés conjecturales de ces points de réductibilité [M, Z].

(v) On pourrait penser à renforcer la condition (b) dans l'hypothèse (LM). Désignons pour un nombre complexe λ par $\widehat{M}^{\sigma,\lambda\alpha}$ le centralisateur connexe de l'image de W_F par l'application $W_F \to {}^LM_\alpha$, $\gamma \mapsto \alpha(q)^{\nu_F(\gamma)\Im(\lambda)}\psi_\sigma(\gamma)$. Si on remplace la dernière phrase dans la condition (b) par "Pour que $\lambda \mapsto \mu^{M_{\sigma,\alpha}}(\sigma_0 \otimes \chi_{\lambda\alpha})$ ait un pôle en *un nombre complexe* λ, il faut et il suffit que $\alpha(q)^{\Re(\lambda)}$ soit un élément q-distingué de $\widehat{M}^{\sigma,\lambda\alpha}$ et que ce groupe ne soit pas un tore", alors l'hypothèse (LM) serait en quelque sorte invariante par torsion par un caractère non ramifié unitaire, *i.e.,* si σ vérifie (LM), alors, pour tout λ dans a_M^*, $\sigma \otimes \chi_{\sqrt{-1}\lambda}$ vérifierait également (LM).

En effet, notant s_λ l'élément de $T_{{}^LM}$ qui correspond à λ par la correspondance de Langlands pour les tores, on peut prendre comme paramètre de Langlands de $\sigma \otimes \chi_{\sqrt{-1}\lambda}$ l'homomorphisme admissible $\psi_{\sigma,\sqrt{-1}\lambda}\colon W_F \times SL_2(\mathbb{C}) \to {}^LM$, $(\gamma, h) \mapsto (s_\lambda)^{\sqrt{-1}\nu_F(\gamma)}\psi(\gamma, h)$. Il est immédiat qu'il a la propriété demandée. (Il faudrait éventuellement faire l'hypothèse supplémentaire que l'égalité $\psi_{\sigma,\sqrt{-1}\lambda} = \psi_\sigma$ équivaut à dire que σ et $\sigma \otimes \chi_{\sqrt{-1}\lambda}$ sont isomorphes. Ceci fait partie des conjectures de Langlands pour les représentations cuspidales.)

5.3 Pour établir des résultats d'unicité nous aurons besoin de l'hypothèse suivante:

(LMU) Soient M_1 et M_2 deux sous-groupes de Levi semi-standard de G. Si σ_1 et σ_2 sont des représentations irréductibles cuspidales unitaires de M_1 et de M_2 respectivement qui vérifient (LM) et qui sont conjuguées par un élément de G, alors leurs paramètres de Langlands sont conjugués (à l'intérieur de ${}^LG$) par un élément de $\widehat{G}$.

Remarque Si on conjugue le paramètre de Langlands d'une représentation irréductible cuspidale unitaire σ de M à l'intérieur de ${}^LG$ par un élément de $\widehat{G}$, on obtient un homomorphisme admissible relatif à un autre sous-groupe de Levi semi-standard M_1 de ${}^LG$. Cet homomorphisme admissible devrait être le paramètre de Langlands d'une représentation irréductible cuspidale unitaire σ_1 de M_1. Il résulte alors de l'invariance de la fonction μ de Harish-Chandra par conjugaison (*cf.* [W]) que cette représentation cuspidale σ_1 doit également vérifier l'hypothèse (LM).

5.4 On suppose l'hypothèse (LM) et on garde les notations précédentes. On désignera par $\widehat{T}_\sigma$ le tore maximal dans le centre de ${}^L M_\sigma$. Notons Σ_{σ_0} le sous-ensemble de $\Sigma(A_{M_\sigma})$ formé des racines réduites α tel que $\mu^{M_{\sigma,\alpha}}(\sigma_0) = 0$. Rappelons que c'est un système de racines [Si2, §3.5].

Proposition 5.4 *Le système de racines $\Sigma^\sigma(\widehat{T}_\sigma)$ de $\widehat{M}^\sigma$ relatif à $\widehat{T}_\sigma$ est isomorphe à $\Sigma_{\sigma_0}^\vee$, sauf éventuellement si Σ_{σ_0} possède des facteurs de type B_n ou C_n. Dans ce cas, $\Sigma^\sigma(\widehat{T}_\sigma)$ se décompose toujours en facteurs irréductibles selon la décomposition de Σ_{σ_0}, mais les facteurs irréductibles de $\Sigma^\sigma(\widehat{T}_\sigma)$ qui correspondent à des facteurs de type B_n ou C_n de Σ_{σ_0} peuvent aussi bien être de type B_n que C_n.*

Preuve Les racines de $\widehat{T}_\sigma$ dans l'algèbre de Lie de $\widehat{M}^\sigma$ forment un sous-ensemble Σ' de $\Sigma(\widehat{T}_\sigma) = \Sigma(A_{M_\sigma})^\vee$. Par la condition (b) de l'hypothèse (LM), une racine $\beta^\vee$ appartient à Σ', si et seulement si β est le multiple d'une racine réduite α dans $\Sigma(A_{M_\sigma})$, telle que $\chi \mapsto \mu^{M_{\sigma,\alpha}}(\sigma_0 \otimes \chi)$ ait un pôle χ_λ avec λ *réel.* Par les propriétés de la fonction μ de Harish-Chandra (*cf.* 1.7), ceci équivaut à dire que $\mu^{M_{\sigma,\alpha}}(\sigma_0) = 0$, *i.e.*, $\alpha \in \Sigma_{\sigma_0}$.

Le système de racines $\Sigma^\sigma(\widehat{T}_\sigma)$ est donc formé de multiples de racines dans $\Sigma_{\sigma_0}^\vee$. En particulier, $\Sigma^\sigma(\widehat{T}_\sigma)$ se décompose en facteurs irréductibles selon la décomposition de Σ_{σ_0}. Par ailleurs, la classification des systèmes de racines irréductibles réduites [Bo] montre qu'un système de racines irréductibles, formé de multiples d'un autre système de racines irréductibles, ne peut en différer en type que si ce dernier système est de type B_n ou C_n. Et alors ce système de racines ne peut être que de type B_n ou C_n. ■

Corollaire 5.5 *Pour que l'on ait l'égalité $C(\widehat{M}^\sigma)^\circ = C({}^L G)^\circ$, il faut et il suffit que le rang semi-simple de $\widehat{M}^\sigma$ soit égal au rang parabolique de ${}^L M_\sigma$. Ce nombre est une borne maximale pour le rang semi-simple de $\widehat{M}^\sigma$.*

Preuve On a $C(\widehat{M}^\sigma)^\circ = (\bigcap_\alpha \ker \alpha)^\circ$, où α parcourt les racines de $\widehat{M}^\sigma$ relatives à $\widehat{T}_\sigma$. Par la proposition ci-dessus et les faits résumés dans le paragraphe 2.4, ce dernier groupe est égal à $T_{{}^L G}$, si et seulement si le rang de Σ_{σ_0} est égal à $\mathrm{rg}(\widehat{T}_\sigma) - \mathrm{rg}(T_{{}^L G})$. Ce nombre est la borne maximale pour le rang de Σ_{σ_0}. Ceci prouve le corollaire. ■

6

Continuons à fixer jusqu'à la fin de la preuve de la proposition 6.2 un sous-groupe parabolique standard $P = MU$ de G. En outre fixons une représentation irréductible cuspidale unitaire (σ, E) de M vérifiant l'hypothèse (LM). On notera $\psi_\sigma \colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^L M$ l'homomorphisme admissible associé à (σ, E), et on garde les notations du paragraphe précédent relatives à ψ_σ. En particulier, $\widehat{M}^\sigma$ désignera la composante neutre du centralisateur de $\psi_\sigma(W_F)$ dans ${}^L G$, et ${}^L M_\sigma$ le sous-groupe de Levi minimal de ${}^L M$ contenant $\psi_\sigma(W_F)$ qui est semi-standard. En outre, pour $\lambda \in a_{M,\mathbb{C}}^*$, on notera s_λ l'élément semi-simple de $T_{{}^L M}$ qui lui correspond par la correspondance de Langlands pour les tores (*cf.* §2.5).

https://doi.org/10.4153/CJM-2006-043-8 Published online by Cambridge University Press

6.1 La propriété de ψ_σ dont on aura besoin pour prouver notre théorème principal est résumée dans le lemme ci-dessous. On la déduira de l'hypothèse (LM).

Lemme 6.1 *Soit α une racine réduite dans $\Sigma(P)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et posons $s_{\sigma,\lambda\alpha} = s_\sigma \alpha(q)^\lambda$. Notons $\mathfrak{u}_{\pm\alpha^\vee}$ la somme directe des algèbres de Lie des sous-groupes unipotents de $\widehat{M}^\sigma$ associées à des poids de $T_{^LM}$ égaux à un multiple non nul de $\alpha^\vee$. (Cet espace peut éventuellement être réduit à zéro.)*

Considérons $\mathrm{Ad}(s_{\sigma,\lambda\alpha})$ comme un endomorphisme de $\mathfrak{u}_{\pm\alpha^\vee}$. Alors, la différence des dimensions des espaces propres associés aux valeurs propres q et 1 de $\mathrm{Ad}(s_{\sigma,\lambda\alpha})$ (cette dimension étant égale à 0, si q (resp., 1) n'est pas une valeur propre) est égale à l'ordre du pôle de $\mu^{M_\alpha}(\sigma\otimes\chi)$ en $\chi = \chi_{\lambda\alpha}$. Plus précisément, notant $\mathfrak{u}_{\pm\alpha^\vee,\lambda\alpha}(z)$ l'espace propre associé à une valeur propre z (et $\mathfrak{u}_{\pm\alpha^\vee,\lambda\alpha}(z) = 0$, si z n'est pas une valeur propre), on a

$$\dim(\mathfrak{u}_{\pm\alpha^\vee,\lambda\alpha}(q)) - \dim(\mathfrak{u}_{\pm\alpha^\vee,\lambda\alpha}(1)) = \begin{cases} -2 & \textit{si } \mu^{M_\alpha}(\sigma\otimes\chi_{\lambda\alpha}) = 0, \\ 1 & \textit{si } \sigma\otimes\chi_{\lambda\alpha} \textit{ est un pôle de } \mu^{M_\alpha}, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Preuve Avec les notations du paragraphe 5.2, on déduit de l'hypothèse (LM) et de la formule du produit pour la fonction μ de Harish-Chandra que

$$\begin{aligned} \mu^{M_\alpha}(\sigma\otimes\chi_{\lambda\alpha}) &= \mu^{M_{0,\alpha}}(\pi_0\otimes\chi_{\lambda\alpha}) = (\mu^{M_{0,\alpha}}/\mu^{M_0})(\sigma_0\otimes\chi_{\lambda_\sigma}\otimes\chi_{\lambda\alpha}) \\ &= \prod_\beta \mu^{M_{\sigma,\beta}}(\sigma_0\otimes\chi_{\lambda_\sigma}\otimes\chi_{\lambda\alpha}), \end{aligned}$$

où β parcourt les racines réduites dans $\Sigma(P_\sigma)$ de restriction à A_M égale à un multiple de α.

Notons $\Sigma^\sigma(\widehat{T}_\sigma)$ le système de racines de $\widehat{M}^\sigma$ relatif au tore maximal $\widehat{T}_\sigma$ dans le centre de $\widehat{M}_\sigma$. La condition (b) de l'hypothèse (LM) et les propositions 5.3 et 5.4 (y inclus la preuve de la proposition 5.4) impliquent que $\mu^{M_{\sigma,\beta}}(\sigma_0\otimes\chi_{\lambda_\sigma}\otimes\chi)$ a un pôle en $\chi = \chi_{\lambda\alpha}$, si et seulement si $\beta\in\Sigma_{\sigma_0}$ et si toute racine γ dans $\Sigma^\sigma(\widehat{T}_\sigma)$ qui est un multiple de $\beta^\vee$ vérifie $\gamma(s_{\sigma,\lambda}) \in \{q^{-1}, q\}$. Les pôles de μ relatifs à une représentation cuspidale sont nécessairement d'ordre 1 (*cf.* §1.7). Il résulte par ailleurs des propriétés de la fonction μ que $\mu^{M_{\sigma,\beta}}(\sigma_0\otimes\chi_{\lambda_\sigma}\otimes\chi_{\lambda\alpha}) = 0$, si et seulement si $\Re(\langle\beta^\vee, \lambda_\sigma+\lambda\alpha\rangle) = 0$ (ce qui équivaut à $|\beta^\vee(s_{\sigma,\lambda\alpha})| = 1$), et si $\mu^{M_{\sigma,\beta}}(\sigma_0\otimes\chi_{\lambda_\sigma}\otimes\chi)$ a un pôle en $\chi = \chi_{\lambda\alpha+\lambda'\beta}$ pour un certain réel $\lambda' > 0$. Ceci équivaut par ce qui précédait à dire que $\beta\in\Sigma_{\sigma_0}$ et que $\gamma(s_{\sigma,\lambda}) = 1$ pour toute racine γ dans $\Sigma^\sigma(\widehat{T}_\sigma)$ qui est un multiple de $\beta^\vee$. Les zéros de la fonction μ relatifs à une représentation cuspidale sont nécessairement d'ordre 2 (*cf.* §1.7). ■

Proposition 6.2 *Soit $\lambda \in a_M^{G*}$. Pour que $\sigma\otimes\chi_\lambda$ soit un pôle de la fonction μ de Harish-Chandra d'ordre égal au rang parabolique de M, il faut et il suffit que le rang semi-simple de $\widehat{M}^\sigma$ soit égal au rang parabolique de $^LM_\sigma$ et que $s_{\sigma,\lambda} = s_\sigma s_\lambda$ soit q-distingué dans $\widehat{M}^\sigma$.*

Preuve Remarquons d'abord que le centralisateur connexe de $\psi_\sigma(W_F)$ dans ${}^LM$ est égal à $(\widehat{M}\cap\widehat{M}^\sigma)^\circ$. Par proposition 5.3, le tore maximal $\widehat{T}_\sigma$ contenu dans le centre de ${}^LM_\sigma$ est un tore maximal de $\widehat{M}^\sigma$.

Notons $\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma,\pm}$ (resp., $\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma\cap\widehat{M},\pm}$) le sous-espace vectoriel de l'algèbre de Lie de $\widehat{M}^\sigma$ (resp., $(\widehat{M}^\sigma\cap\widehat{M})^\circ$) engendré par les éléments nilpotents. Considérons $\mathrm{Ad}(s_{\sigma,\lambda})$ comme endomorphisme de ces espaces vectoriels. Notons $\mathfrak{u}_\bullet(q)$ et $\mathfrak{u}_\bullet(1)$ respectivement les espaces propres associés aux valeurs propres q et 1 (ces espaces étant égaux à 0, si q (resp., 1) n'est pas une valeur propre). Remarquons que $s_{\sigma,\lambda}$ est q-distingué dans $\widehat{M}^\sigma$, si et seulement si $\dim(\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma,\pm}(q))-\dim(\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma,\pm}(1))=\mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}(\widehat{M}^\sigma)$.

Tenant compte de l'inégalité $\mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}(\widehat{M}^\sigma)\leq\mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}({}^LG)-\mathrm{rg}({}^LM_\sigma)$ (*cf.* §5.4) et de la remarque suivant la définition 4.5, tout revient à montrer que

$$\dim(\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma,\pm}(q))-\dim(\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma,\pm}(1))=\mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}({}^LG)-\mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}({}^LM_\sigma)\tag{1}$$

équivaut à

$$\mathrm{ord}_{\sigma\otimes\chi_\lambda}\,\mu=\mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}(G)-\mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}(M).\tag{2}$$

Avec les notations dans la preuve du lemme 6.1, on a

$$\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma,\pm}=\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma\cap\widehat{M},\pm}\oplus\bigoplus_{\alpha^\vee}\mathfrak{u}_{\pm\alpha},\tag{3}$$

où $\alpha^\vee$ parcourt les racines réduites dans $\Sigma(P)$.

On déduit du lemme 6.1 et de la formule du produit pour la fonction μ que

$$\sum_{\alpha^\vee}(\dim(\mathfrak{u}_{\pm\alpha}(q))-\dim(\mathfrak{u}_{\pm\alpha}(1)))=\mathrm{ord}_{\sigma\otimes\chi_\lambda}\,\mu.\tag{4}$$

Supposons d'abord $\widehat{M_\sigma}=\widehat{M}$, ce qui implique que le rang parabolique de ${}^LM_\sigma$ est égal à celui de M (*cf.* §2.4). On a $\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma\cap\widehat{M},\pm}=0$, et on déduit de (3) et (4) que

$$\dim(\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma,\pm}(q))-\dim(\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma,\pm}(1))=\mathrm{ord}_{\sigma\otimes\chi_\lambda}\,\mu.$$

L'équivalence de (1) et (2) est alors immédiate.

Supposons maintenant $\widehat{M_\sigma}\neq\widehat{M}$. Par l'hypothèse (LM), il existe une forme intérieure G_0 de G, des sous-groupes de Levi semi-standard M_σ et M_0 de G_0, $M_\sigma\subseteq M_0$, tels que M_0 et M_σ correspondent respectivement aux sous-groupes de Levi ${}^LM$ et ${}^LM_\sigma$ de ${}^LG$, ainsi qu'une représentation cuspidale σ_0 de M_0 et $\lambda_\sigma\in a_{M_\sigma}^{M_0*}$, tels que, identifiant $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M_0)$ et $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$ par la correspondance de Langlands pour les tores, on ait $(\mu/\mu^{M_0})(\sigma\otimes\chi_{\lambda_\sigma}\otimes\chi)=\mu(\sigma\otimes\chi)$ pour tout $\chi\in\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$. Par ailleurs, fixant un sous-groupe parabolique P_σ de G_0 de facteur de Levi M_σ, $i_{P_\sigma\cap M_0}^{M_0}(\sigma_0\otimes\chi_{\lambda_\sigma})$ possède un sous-quotient de carré intégrable et donc, par le résultat principal de [H1] rappelé en 1.7, μ^{M_0} a un pôle d'ordre $\mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}(M_0)-\mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}(M_\sigma)$ en $\sigma_0\otimes\chi_{\lambda_\sigma}$. De plus, le paramètre de Langlands de σ_0 est donné par l'homomorphisme admissible $W_F\to{}^LM_\sigma$, $\gamma\mapsto\psi_\sigma(\gamma,1)$, et il vérifie l'hypothèse (LM).

Le cas traité ci-dessus, appliqué à M_0, σ_0 et λ_σ, nous montre que

$$\dim(\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma\cap M,\pm}(q)) - \dim(\mathfrak{u}_{\widehat{M}^\sigma\cap M,\pm}(1)) = \mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}({}^LM) - \mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}({}^LM_\sigma). \tag{5}$$

En addition (5) et (4) et en utilisant (3), on trouve que le côté gauche de (1) vaut $\mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}({}^LM) - \mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}({}^LM_\sigma) + \mathrm{ord}_{\sigma\otimes\chi_\lambda}\,\mu$. L'équivalence de (1) et de (2) est alors une conséquence de la proposition 2.1 et de l'égalité élémentaire

$$\mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}({}^LG) - \mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}({}^LM_\sigma) = (\mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}({}^LG) - \mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}({}^LM)) + (\mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}({}^LM) - \mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}({}^LM_\sigma)). \qquad \blacksquare$$

6.2 Soit π une représentation de carré intégrable de G. Il existe alors un sous-groupe parabolique standard $P = MU$ de G, une représentation irréductible cuspidale unitaire σ de M et $\lambda \in a_M^*$, $\lambda_G = 0$, tel que π soit un sous-quotient de $i_P^G(\sigma\otimes\chi_\lambda)$. Par le résultat principal de [H1, §8.2] rappelé en 1.7, $\sigma\otimes\chi_\lambda$ est un pôle de la fonction μ de Harish-Chandra d'ordre égal au rang parabolique de M.

Supposons que σ vérifie l'hypothèse (LM). On sait donc lui associer un paramètre de Langlands $\psi_\sigma\colon W_F\times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LM$ avec les propriétés énoncées dans (LM). Alors, par la proposition 6.2, le rang semi-simple de $\widehat{M}^\sigma$ est égal au rang parabolique de ${}^LM_\sigma$, et $s_{\sigma,\lambda} := s_\sigma s_\lambda$ est un élément q-distingué du centralisateur connexe $\widehat{M}^\sigma$ de $\psi_\sigma(W_F)$ dans ${}^LG$. Par construction, il est contenu dans le groupe dérivé de $\widehat{M}^\sigma$. La partie compacte dans la décomposition polaire de $s_{\sigma,\lambda}$ est triviale, puisque il en est ainsi pour s_σ et s_λ. Choisissons à l'aide du paragraphe 4.2 un élément nilpotent $N_{\sigma,\lambda}$ de l'algèbre de Lie de $\widehat{M}^\sigma$ tel que $(s_{\sigma,\lambda}, N_{\sigma,\lambda})$ soit une L^2-paire dans $\widehat{M}^\sigma$.

Comme remarqué dans la preuve de la proposition 4.10, on peut en déduire un homomorphisme admissible et discret $\phi_{\sigma,\lambda}\colon\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to\ \widehat{M}^\sigma$, vérifiant $\phi_{\sigma,\lambda}\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \exp(N_{\lambda,\sigma})$ et $\phi_{\sigma,\lambda}\left(\begin{smallmatrix}q^{1/2}&0\\0&q^{-1/2}\end{smallmatrix}\right) = s_{\sigma,\lambda}$.

On pose

$$\psi_\pi(\gamma,h) = \psi_\sigma(\gamma,1)\phi_{\sigma,\lambda}(h).$$

Théorème 6.3 *L'application $\psi_\pi\colon W_F\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$, $(\gamma,h)\mapsto\psi_\pi(\gamma,h)$, ci-dessus est bien définie. C'est un homomorphisme admissible et discret. Si on admet de plus l'hypothèse* (*LMU*) *du paragraphe* 5.3*, alors ψ_π est, à conjugaison près, uniquement déterminé par π.*

Preuve L'application ψ_π est évidemment bien définie. Montrons que son image n'est contenue dans aucun sous-groupe de Levi propre de ${}^LG$. Le centralisateur de l'image de ψ_π est égal à l'intersection du centralisateur de $\psi_\sigma(W_F)$ et de celui de l'image de $\phi_{\sigma,\lambda}$. Par conséquence, tout tore de ${}^LG$ qui centralise l'image de ψ_π doit être contenu dans $\widehat{M}^\sigma$ et centraliser l'image de $\phi_{\sigma,\lambda}$. Or, comme remarqué ci-dessus, $\phi_{\sigma,\lambda}$ est discret. Un tel tore doit donc être inclus dans le centre de $\widehat{M}^\sigma$. Mais, par le corollaire 5.5, comme le rang semi-simple de $\widehat{M}^\sigma$ est égal au rang parabolique de ${}^LM_\sigma$, ceci implique qu'il est inclus dans le centre de ${}^LG$. Il ne peut donc y avoir de sous-groupe de Levi propre de ${}^LG$ qui contient l'image de ψ_π.

Ceci prouve que ψ_π est discret, et, en particulier, que la propriété (v) dans la définition 2.2 d'un homomorphisme admissible est vérifiée. Les autres propriétés de cette définition sont immédiates.

Quant à l'unicité, on sait par la théorie des représentations des groupes p-adiques que le triplet (σ, M, λ) est, à conjugaison par un élément de G près, uniquement déterminé par π. Soit (σ', M', λ') un autre triplet qui lui est conjugué par un élément de G. Alors le paramètre de Langlands $\psi_{\sigma'}$ de σ' est par l'hypothèse (LMU) conjugué à ψ_σ par un élément de $\widehat{G}$. On peut modifier cet élément convenablement, pour qu'il conjugue également s_λ et $s_{\lambda'}$ ainsi que $\exp(N_{\sigma,\lambda})$ et $\exp(N_{\sigma',\lambda'})$, puisque ces éléments sont contenus dans le centralisateur de $\psi_\sigma(W_F)$ et de $\psi_{\sigma'}(W_F)$, respectivement. Il est alors immédiat que l'homomorphisme admissible discret que l'on déduit de (σ', M', λ') par le procédé ci-dessus est équivalent à ψ_π. ■

6.3 Pour montrer la réciproque de 6.2, *i.e.,* que tout homomorphisme admissible discret provient d'une représentation de carré intégrable de G comme décrit dans 6.2, nous avons besoin de l'hypothèse supplémentaire ci-dessous qui caractérise les homomorphismes admissibles correspondant à des L-paquets formés de représentations cuspidales. Cette hypothèse est justifiée par le théorème 6.3 et les constructions qui précèdent. En effet, ils montrent que les homomorphismes admissibles discrets considérés dans l'hypothèse (LC) ne peuvent pas correspondre, sous l'hypothèse (LM), à une représentation admissible irréductible de carré intégrable non cuspidale.

(LC) Soit M un sous-groupe de Levi semi-standard de G et soit $\psi\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LM$ un homomorphisme admissible discret. Supposons qu'il n'existe aucun sous-groupe de Levi propre admissible de ${}^LM$ qui contienne $\psi(W_F)$ et dans lequel $\psi\big(1, \left(\begin{smallmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2}\end{smallmatrix}\right)\big)$ soit un élément q-distingué du centralisateur connexe de $\psi(W_F)$.
Alors, il existe une représentation irréductible cuspidale unitaire σ de M telle que ψ soit le paramètre de Langlands de σ et que σ et ψ vérifient (LM) et (LMU).

Théorème 6.4 *Supposons l'hypothèse* (LC) *vérifiée pour tout sous-groupe de Levi semi-standard de G. Alors, tout homomorphisme admissible discret* $\psi\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ *est équivalent à un homomorphisme admissible* ψ_π *pour une certaine représentation de carré intégrable* π *de G.*

Preuve Comme ψ est discret, $T_{{}^LG}$ doit être le tore maximal contenu dans le centre du centralisateur connexe $\widehat{M}^\psi$ de $\psi(W_F)$. On déduit alors de la proposition 5.3 que le rang semi-simple de $\widehat{M}^\psi$ est égal au rang parabolique d'un sous-groupe de Levi minimal ${}^LM_\psi$ de ${}^LG$ qui contient $\psi(W_F)$. Choisissons un sous-groupe de Levi admissible minimal ${}^LM$ de ${}^LG$ qui contient $\psi(W_F)$ et tel que $s := \psi\big(1, \left(\begin{smallmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2}\end{smallmatrix}\right)\big)$ soit q-distingué dans le centralisateur connexe de $\psi(W_F)$ dans ${}^LM$. (Si ${}^LM_\psi$ est admissible, alors on peut évidemment poser ${}^LM = {}^LM_\psi$, tout élément d'un tore complexe étant trivialement q-distingué.)

Quitte à conjuguer ψ, on peut choisir ${}^LM$ tel que ${}^LM \supseteq {}^LM_\psi \supseteq {}^LT$ et que s soit contenu dans le tore maximal $\widehat{T}_\psi$ contenu dans le centre de ${}^LM_\psi$. Notons M le sous-groupe de Levi semi-standard de G qui correspond à ${}^LM$. On a déjà remarqué que la partie compacte de s dans la décomposition polaire doit être triviale. Comme $\widehat{T}_\psi$ est un tore maximal de $\widehat{M}^\psi$ et qu'il contient $T_{{}^LM}$, on peut écrire $s = s_M s^M$ avec $s_M \in T_{{}^LM}$ et $s^M \in \widehat{T}_\psi \cap (\widehat{M}^\psi \cap {}^LM)^{\circ\,\mathrm{der}}$ tel que $\chi(s_M) = \chi(s)$ pour tout caractère algébrique $\chi\colon (\widehat{M}^\psi \cap {}^LM)^\circ \to \mathbb{C}^\times$. Par choix de M, l'élément s^M est q-distingué dans $(\widehat{M}^\psi \cap {}^LM)^\circ$. Le rang semi-simple de $(\widehat{M}^\psi \cap {}^LM)^\circ$ est égal au rang parabolique de ${}^LM_\psi$ relatif à ${}^LM$, puisque ${}^LM$ est semi-standard et que le rang semi-simple de $\widehat{M}^\psi$ est égal au rang parabolique de ${}^LM_\psi$ relatif à ${}^LG$.

Comme s^M fait partie d'une L^2-paire pour $(\widehat{M}^\psi \cap {}^LM)^\circ$ qui vérifie, par ce qui précède, les hypothèses de la proposition 4.10, on en déduit par une construction analogue à celle utilisée dans le paragraphe 6.2, un homomorphisme admissible discret $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LM$ dont la restriction à W_F est donnée par ψ et qui envoie $\left(\begin{smallmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2}\end{smallmatrix}\right)$ sur s^M. Par l'hypothèse (LC) et par choix de M, cet homomorphisme admissible discret est le paramètre de Langlands d'une représentation irréductible cuspidale unitaire σ de M. Notons-le ψ_σ et désignons par λ l'élément de a_M^* qui correspond à s_M par la correspondance de Langlands pour les tores.

Comme σ et ψ_σ vérifient par hypothèse l'hypothèse (LM) et que s est q-distingué dans $\widehat{M}^\psi$, on déduit de la proposition 6.2 que $\sigma \otimes \chi_\lambda$ est un pôle de la fonction μ de Harish-Chandra d'ordre égal au rang parabolique de M. Il suit alors du résultat principal de [H1] rappelé en 1.7 que $\mathrm{i}_P^G(\sigma \otimes \chi_\lambda)$ possède un sous-quotient de carré intégrable π. Quitte à choisir un élément nilpotent convenable dans la construction de ψ_π dans 6.2, on obtient bien $\psi = \psi_\pi$. ■

Remarque

(i) Remarquons qu'il existe bien des cas où $\psi\left(1, \left(\begin{smallmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2}\end{smallmatrix}\right)\right)$ n'est pas q-distingué relatif au sous-groupe de Levi admissible minimal qui contient $\psi(W_F)$ (*e.g.*, $\psi(W_F) = \{1\}$ et G un certain groupe non quasi-déployé de type B_n).

(ii) Si on veut de plus que le L-paquet de π soit uniquement déterminé par la classe d'équivalence de ψ, il faut ajouter l'hypothèse suivante:

(LCU) (a) Soit $\psi\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ un homomorphisme admissible discret. Alors deux sous-groupes de Levi admissibles ${}^LM_1$ et ${}^LM_2$ de ${}^LG$ qui sont minimaux pour la propriété qu'ils contiennent ${}^LM_\psi$ et que

$$s_\psi := \psi\left(1, \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2}\end{pmatrix}\right)$$

soit q-distingué dans le centralisateur connexe de $\psi(W_F)$ dans ${}^LM_1$ (resp., ${}^LM_2$) sont conjugués par un élément de $\widehat{G}$ qui centralise $\psi(W_F)$ et s_ψ.

(b) Supposons que M et M' soient deux sous-groupes de Levi semi-standard de G et que $\psi\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LM$, $\psi'\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LM'$ soient deux homomorphismes admissibles qui sont conjugués par un élément de $\widehat{G}$. Alors, si ψ est le paramétre de Langlands d'une représentation irréductible cuspidale unitaire σ de M et que les propriétés (LM) et (LMU) sont vérifiées, alors ψ' est le paramétre de Langlands d'une représentation irréductible cuspidale unitaire σ' de M' et σ et σ' sont conjugués par un élément de G. En particulier, les propriétés (LM) et (LMU) sont vérifiées relatives à σ'.

La partie (a) de l'hypothèse (LCU) devrait se laisser vérifier à la main (il faut comparer les diagrammes des paraboliques distingués avec ceux des systèmes de racines des groupe réductifs non quasi-déployés), mais nous avons effectué cette vérification seulement dans des cas particuliers, repoussant le cas général à un autre moment.

6.4 Admettons toutes nos hypothèses (LM), (LMU), (LC) et (LCU) et de plus l'hypothèse

(LP) Deux représentations irréductibles cuspidales d'un sous-groupe de Levi semi-standard de G sont dans le même L-paquet, si et seulement si les homomorphismes admissibles discrets qui leur sont associées par l'hypothèse (LM) sont équivalents.

Par ailleurs, si σ est une représentation irréductible cuspidale d'un sous-groupe de Levi semi-standard M de G dont le L-paquet contient une représentation irréductible de carré intégrable non cuspidale π (*i.e.,* l'homomorphisme admissible discret ψ_σ qui lui est associé ne vérifie pas l'hypothèse dans (LC)), alors l'homomorphisme admissible ψ_π déduit de π par les constructions de 6.2 relatives à M est équivalent à ψ_σ, et, inversement, si ψ_σ et ψ_π sont équivalents, alors σ et π sont dans un même L-paquet.

Terminons en décrivant sommairement un procédé, bien connu des spécialistes, qui utilise la classification de Langlands et qui associe, à partir des résultats précédents sur les homomorphismes admissibles et les représentations de carré intégrable, à tout homomorphisme admissible $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ (le L-paquet d') une représentation irréductible lisse de G, ainsi qu'un procédé inverse associant à toute représentation irréductible lisse de G un homomorphisme admissible $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$.

Soit ψ un homomorphisme admissible $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$. Notons ${}^LM'$ un sous-groupe de Levi admissible minimal de ${}^LG$ contenant l'image de ψ. Il est uniquement déterminé à conjugaison près par un élément du centralisateur de $\psi(W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ dans $\widehat{G}$ (*cf.* [B, §3.6]). Quitte à remplacer ψ par un homomorphisme admissible qui lui est équivalent, on peut supposer ${}^LM'$ semi-standard. L'homomorphisme $\psi^{M'}\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LM'$, obtenu par restriction à droite de ψ se décompose en un produit $\psi_{M',nr}\psi_{rc}^{M'}$, où $\psi_{rc}^{M'}\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LM'$ est discret et où $\psi_{M',nr}\colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LM'$ est trivial sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, non ramifié sur W_F et à image dans le groupe des éléments semi-simples hyperboliques de la composante neutre du centre de ${}^LM'$ (ceci résulte de 5.1, en utilisant la décomposition polaire d'un élément semi-simple).

Par 6.3 et (LCU), $\psi_{rc}^{M'}$ est égal à un homomorphisme $\psi_{\tau_0}^{M'}$ associé à une représentation irréductible de carré intégrable τ_0 de M' dont le L-paquet est uniquement déterminé par $\psi_{rc}^{M'}$.

Notons $\lambda_{M'}$ un élément de $a_{M'}^*$, tel que $\chi_{\lambda_{M'}}$ corresponde à $\psi_{M',nr}(Fr)$ par la correspondance de Langlands pour les tores et M'' le sous-groupe de Levi semi-standard de G qui contient M' et qui est engendré par les racines α dans $\Sigma(A_{M'})$

qui vérifient $\langle \alpha^\vee, \Re(\lambda_{M'})\rangle = 0$. Notons $\lambda_{M'} = \lambda_{M'}^{M''} \oplus \lambda_{M''}$ la décomposition de $\lambda_{M'}$ selon la décomposition $a_{M'}^* = a_{M'}^{M''*} \oplus a_{M''}^*$. Il existe un sous-groupe parabolique P'' de G de facteur de Levi M'' tel que $\lambda_{M''} >_{P''} 0$. Choisissons un sous-groupe parabolique P' de M'' de facteur de Levi M'. La représentation induite $\mathrm{i}_{P'}^{M''} \tau_0$ est une somme directe de représentations tempérées. Choisissons-en une sous-représentation irréductible τ.

On définit alors π_ψ comme étant la représentation irréductible lisse déduite de $P'', \tau, \lambda_{M''}$ par la classification de Langlands. Le L-paquet de π_ψ est par construction uniquement déterminé par ψ.

Décrivons le procédé inverse de celui décrit ci-dessus, en admettant toutes nos hypothèses: soit π une représentation irréductible lisse de G. Par la classification de Langlands, celle-ci est associée à un sous-groupe parabolique semi-standard $P'' = M''U''$ de G, une représentation tempérée τ de M'' et un élément $\lambda_{M''}$ de $a_{M''}^*$ qui est strictement positif dans la chambre de Weyl associée à P''. (Si π est, à torsion près, une représentation tempérée, on prend $P'' = G$ et la dernière condition est vérifiée pour tout $\lambda \in a_G^*$.) Ces données sont uniquement déterminées à conjugaison près. On peut trouver un sous-groupe parabolique semi-standard $P' = M'U'$ de M'' et une représentation de carré intégrable τ_0 de M' tels que τ soit une sous-représentation de $\mathrm{i}_{P'}^{M''} \tau_0$. Par 6.2, on déduit de τ_0 un homomorphisme admissible discret $\psi_{\tau_0}^{M'} \colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LM'$. Notons $s_{M''}$ l'élément semi-simple dans $C({}^LM'')^\circ$ qui correspond à $\lambda_{M''}$ par la correspondance de Langlands pour les tores. Alors on définit $\psi_\pi \colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ par $(\gamma, h) \mapsto s_{M''}^{\nu_F(\gamma)} \psi_{\tau_0}^{M'}(\gamma, h)$. C'est un homomorphisme admissible.

Il ne dépend que du L-paquet de π: on se ramène à vérifier que, si deux représentations de carré intégrables π_1 et π_2 d'un sous-groupe de Levi semi-standard M de G sont dans un même L-paquet, alors leurs paramètres de Langlands ψ_{π_1} et ψ_{π_2} sont équivalents. C'est une conséquence immédiate des constructions, si elles ont même support cuspidal ou si leurs supports cuspidaux contiennent des éléments qui sont dans un même L-paquet. Pour les autres cas, on peut se ramener sans perte de généralité à la situation suivante: il existe des sous-groupes paraboliques semi-standard $P_1 = M_1U_1$ et $P_2 = M_2U_2$ de M, $P_1 \supseteq P_2$, ainsi que des représentations irréductibles cuspidales σ_1 et σ_2 de M_1 et M_2 respectivement, tels que π_1 soit un sous-quotient de $\mathrm{i}_{P_1}^M \sigma_1$, π_2 un sous-quotient de $\mathrm{i}_{P_2}^M \sigma_2$ et que $\mathrm{i}_{P_2 \cap M_1}^{M_1} \sigma_2$ contienne un sous-quotient $\pi_{1,2}$ qui soit, à torsion près, de carré intégrable et qui se trouve dans le même L-paquet que σ_1. Suite à l'hypothèse (LP), les paramètres de Langlands respectifs ψ_{σ_1} et $\psi_{\pi_{1,2}}$ de σ_1 et $\pi_{1,2}$ sont équivalents. On peut donc supposer $\psi_{\sigma_1} = \psi_{\pi_{1,2}}$, et on obtient $\psi_{\pi_1} = \psi_{\pi_2}$ par la construction 6.2.

On a donc finalement prouvé le théorème suivant.

Théorème 6.5 *Admettons toutes les hypothèses* (LM), (LMU), (LC), (LCU) *et* (LP) *relatives à G et aux sous-groupes de Levi semi-standard de G.*

Les constructions ci-dessus associent à une représentation irréductible lisse π de G un homomorphisme admissible $\psi_\pi \colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$, et inversement à un homomorphisme admissible $\psi \colon W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^LG$ une représentation irréductible lisse π_ψ de G. Elles induisent des bijections entre l'ensemble des L-paquets de représentations *irréductibles lisses de G et celui des classes d'équivalence d'homomorphismes admissibles* $W_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to {}^L G$.

Ces bijections sont inverses l'une de l'autre.

Remerciements L'auteur a séjourné durant des étapes préliminaires à ce travail à l'Institut for Advanced Study à Princeton (cofinancé par une bourse Feodor-Lynen de la fondation Humboldt et la bourse DMS 97-29992 de la NSF) et à l'IHÉS à Bures-sur-Yvette.

Il remercie particulièrement G. Lusztig, G. Prasad et F. Shahidi pour des discussions sur différents aspects de l'article, l'Université Purdue pour son hospitalité lors de l'aboutissement de ce travail et A.-M. Aubert pour quelques remarques supplémentaires.

Références

[B] A. Borel, *Automorphic L-functions.* Dans: Automorphic Forms, Representations and L-Functions. American Mathematical Society, Providence, RI, 1979, pp. 27–61.

[Bo] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique.*Ch. 4–6: Groupes et algèbres de Lie. Masson, Paris.

[BV] D. Barbash et D. Vogan, *Unipotent representations of complex semisimple groups.* Ann. of Math. **121**(1985), 41–110.

[Ca] R. W. Carter, *Finite groups of Lie type. Conjugacy classes and complex characters.* John Wiley, New York, 1985.

[CKPS] J. W. Cogdell, H. H. Kim, I. I. Piatetski-Shapiro, et F. Shahidi, *Functoriality for the classical groups.* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **99**(2004), 163–233.

[HT] H. T. M. Harris et R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties.* Annals of Mathematics Studies 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[H1] V. Heiermann, *Décomposition spectrale et représentations spéciales d'un groupe réductif p-adique.* J. Inst. Math. Jussieu **3**(2004), no. 3, 327–395.

[JS] D. Jiang et D. Soudry, *The local converse theorem for* $\mathrm{SO}(2n+1)$ *and applications.* Ann. of Math. **157**(2003), no. 3, 743–806.

[KL] D. Kazhdan et G. Lusztig, *Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras.* Invent. Math. **87**(1987), no. 1, 153–215.

[K] R. Kottwitz, *Stable trace formula: cuspidal tempered terms.* Duke Math. J. **51**(1984), no. 3, 611–650.

[L] R. P. Langlands, *Representations of abelian algebraic groups.* Pacific J. Math. **Special Issue**(1977) 231–250.

[L1] G. Lusztig, *Some examples of square integrable representations of semi-simple p-adic groups.* Trans. Amer. Math. Soc. **277**(1983), no. 2, 623–653.

[L2] ———, *Classification of unipotent representations of simple p-adic groups.* Internat. Math. Res. Notices (1995), no. 11, 517–589.

[M] C. Mœglin, *Normalisation des opérateurs d'entrelacement et réductibilité des induites de cuspidales; le cas des groupes classiques p-adiques.* Ann. of Math. **151**(2000), no. 2, 817–847.

[PY] G. Prasad et J.-K. Yu, *On finite group actions on reductive groups and buildings.* Invent. Math. **147**(2002), no. 3, 545–560.

[R] F. Rodier, *Représentations de* $\mathrm{GL}(n,\ k)$ *où k est un corps p-adique.* Dans: Séminaire Bourbaki 1981/1982 Astérisque 92-93, Soc. Math. France, Paris, 1982, pp. 201–218.

[S] F. Shahidi, *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups.* Ann. of Math. **132**(1990), no. 2, 273–330.

[Si0] A. Silberger, *Introduction to harmonic analysis on reductive p-adic groups.* Mathematical Notes 23, Princeton University, Princeton, NJ, 1979.

[Si1] ———, *Special representations of reductive p-adic groups are not integrable.* Ann. of Math. **111**(1980), no. 3, 571–587.

[Si2] ———, *Discrete series and classification for p-adic groups. I.* Amer. J. Math. **103**(1981), no. 6, 1241–1321.

[W] J.-L. Waldspurger, *La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques (d'après Harish-Chandra).* J. Inst. Math. Jussieu **2**(2003), no. 2, 235–333.

[Z] Z. Zhang, *L-packets and reducibilities.* J. Reine Angew. Math. **510**(1999), 83–102.

Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin,
Unter den Linden 6
10099 Berlin
Allemagne
e-mail: heierman@mathematik.hu-berlin.de