BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. 55R10, 57R30
VOL. 37 (1988) [173–177]

STRUCTURE PRESQUE-TRANSVERSE INTÉGRABLE

TONG VAN DUC

We find conditions for which a manifold endowed with an integrable almost transversal structure is the total space of a vector bundle isomorphic to the transversal bundle of a foliation.

Les variétés considérées sont connexes et paracompactes. Tous les éléments introduits sont de classe C^∞.

DÉFINITION. *Une structure presque-transverse sur une variété différentiable est une G-structure dont les éléments de G sont de la forme :*

(1)
$$\begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & D & C \end{bmatrix}$$

où $A \in Gl(p,\mathbb{R})$ et $C \in Gl(q,\mathbb{R})$.

EXEMPLE: Soit M une variété différentiable de dimension $p+q$ muni d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q. M est défini par un atlas $\mathcal{A} = \{U, x^u, x^a\}$ dont les fonctions de transition vérifient :

$$\frac{\partial x'^a}{\partial x^u} = 0$$

où $u, v, \dots = 1\dots, p$ et $a, b, \dots = 1\dots, q$.

Soit (Q, p, M) le fibré transverse du feuilletage : c'est le quotient de TM par le fibré vectoriel des vecteurs tangents aux feuilles de $\mathcal{F}$. Chaque élément $\overline{X}$ de Q a pour représentant un vecteur X de la forme :

$$X = X^u \frac{\partial}{\partial x^u} + X^a \frac{\partial}{\partial x^a}.$$

Comme X^a ne dépend que de $\overline{X}$, on prendra (x^u, x^a, X^a) comme coordonnées locales dans $p^{-1}(U)$. On obtient ainsi un atlas de Q dont les fonctions de transition sont de la forme :

$$x'^u = x'^u(x^u, x^a)\ ,\ x'^a = x'^a(x^a)\ ,\ X'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} X^b.$$

Received 31 March 1987

Les matrices jacobiennes de ces transformations sont du type (1). Ainsi la variété Q est munie d'une structure presque-transverse intégrable.

On se propose de chercher dans quelles conditions une variété munie d'une structure presque-transverse intégrable peut être considérée comme l'espace total du fibré-transverse d'un feuilletage.

Si une variété N est munie d'une structure presque-transverse , il existe sur N une structure presque-tangente J dont l'expression locale dans un repère mobile (e_u, e_a, e_{a^*}). $(a_*, b_*, \cdots = 1 \ldots, q)$ est la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0_- \end{bmatrix}.$$

Cette structure presque-tangente joue un rôle important dans la suite.

D'autre part, il existe sur N une distribution $\widetilde{\mathcal{F}}$ de dimension p dont une base locale est (e_u). L'image de J est une distribution $\mathcal{L}$ de dimension q engendrée par (e_{a*}).

Si la structure presque-transverse est intégrable, la structure presque-tangente est intégrable. Ceci est équivalent au fait que la torsion de Nijenhuis N_J de J est nulle, c'est à dire

$$N_J(X,Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] = 0$$

$\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$. De plus les distributions $\mathcal{L}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}$ sont intégrables. On désigne encore par $\mathcal{L}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}$ les feuilletages correspondants.

EXEMPLE: La variété $N = \mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^2$ où $\mathbf{T}^2$ est le tore de dimension 2 est munie d'une structure presque-transverse intégrable. Si l'on désigne par (t^u, x, y) les coordonnées locales de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^2$, la distribution $\mathcal{L}$ est engendrée par le champ $\frac{\partial}{\partial y}$ et on a une submersion $\pi : N \to M = N/\mathcal{L} = \mathbf{R}^p \times S^1$, dont les fibres sont des cercles. Ainsi N ne peut être l'espace total d'un fibré transverse d'un feuilletage.

On rappelle la définition et les propriétés d'un fibré affine qui sont utiles pour la suite.

DÉFINITION. *Soit $\pi : A \to M$ une submersion surjective. Le triplet (A, π, M) est un fibré affine modelé sur un fibré vectoriel (E, p, M) s'il existe une application différentiable $\rho : A \times_M E \to A$ telle que $\forall x \in M$, $\rho_x : A_x \times E_x \to A_x$ définisse sur A_x une structure d'espace affine modelé sur E_x.*

PROPOSITION 1. [5] *Tout fibré affine est un fibré localement trivial dont les fonctions de transition sont des applications affines. Tout fibré affine admet une section globale.*

On considère désormais une variété N munie d'une structure presque-transverse intégrable. On suppose en plus que l'espace quotient $M = N/\mathcal{L}$ est une variété différentiable. Alors le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ passe au quotient en sorte qu'on ait une submersion surjective π de N sur M et que la restriction de π à chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$ soit un difféomorphisme local. On note $\mathcal{F}$ le feuilletage induit sur M et (Q, p, M) le fibré normal de $\mathcal{F}$. Les vecteurs tangents aux fibrés de π seront appelés vecteurs verticaux.

Soit $u \in Q_x$. On définit le relèvement vertical u^v de u et un point $y \in \pi^{-1}(x)$ de la façon suivante. Soit $X \in T_xM$ tel que $\overline{X} = u$ et $A \in T_yN$ tel que $\pi_*(A) = X$. Alors

$$u^v = J(A)$$

u^v est bien défini car si $X' \in T_xM$ est tel que $u = X'$ et $A' \in T_yN$ tel que $\pi_*(A') = X'$, on a $X' - X = Y \in \mathcal{F}_x$ et il existe $B \in \widetilde{\mathcal{F}}_y$ tel que $\pi_*(B) = Y$. Par suite, $\pi_*(A' - A - B) = 0$. Il en résulte que $J(A') = J(A)$ puisque $J(B) = 0$. L'application : $u \to u^v$ de Q_x sur l'espace tangente en y à $\pi^{-1}(x)$ est un isomorphisme. Si $s = \overline{X}$ est une section de Q et si A est un champ de vecteurs sur N tel que $\pi_*(A) = X$, $s^v = J(A)$ sera appelé relèvement vertical de s. On remarque que les relèvements verticaux des sections de Q engendrent le module des champs verticaux de N.

Proposition 2. *$\forall s, t \in \underline{Q}$, on a :*

$$[s^v, t^v] = 0\ ,\ L_{s^v}J = 0.$$

Preuve: Soient $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ tels que $s = \overline{X}$ et $t = \overline{Y}$ et soient $A, B \in \mathcal{X}(N)$ tels que $\pi_*(A) = X$ et $\pi_*(B) = Y$. On a :

$$[s^v, t^v] = [JA, JB] = J[JA, B] + J[A, JB] = 0$$

car les champs $[JA, B]$ et $[A, JB]$ sont projetables et verticaux. $\forall C \in \mathcal{X}(N)$, $L_{s^v}J(C) = [s^v, JC] - J[s^v, C]$. Si $C = t^v$, on a $L_{s^v}J(C) = 0$ comme on vient de le voir. Si C est projetable, on a encore $L_{s^v}J(C) = 0$ pour les mêmes raisons.

Puisque la structure presque-transverse est intégrable, il existe sur N une connexion sans torsion ∇. Dans une carte (U, x^u, x^a, x^{a_*}) adaptée à la G-structure, ∇ est définie par :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0$$

$(i, j, \cdots = 1 \ldots, p + 2q)$. De plus, on a :

$$\nabla J = 0\ ,\ \nabla \underline{\widetilde{\mathcal{F}}} \subset \underline{\widetilde{\mathcal{F}}}$$

où $\underline{\widetilde{\mathcal{F}}}$ désigne le module des sections de $\widetilde{\mathcal{F}}$. ∎

https://doi.org/10.1017/S0004972700026708 Published online by Cambridge University Press

Proposition 3. *La connexion ∇ induit sur chaque fibre de la submersion $\pi : N \to M$ une connexion plate.*

Preuve: –Soit $s, t \in \underline{Q}$. Utilisant les notations dans la preuve de la proposition 2, on obtient, puisque $\nabla J = 0$:

$$\begin{aligned}\nabla_{s^v} t^v &= \nabla_{s^v}(JB) = J(\nabla_{s^v} B)\\ &= J\big(\nabla_B s^v + [s^v, B]\big) = \nabla_B(J_{s^v}) + J[s^v, B] = 0.\end{aligned}$$

Il en résulte que la courbure de la connexion induite sur chaque fibre est nulle d'après une remarque ultérieure. ∎

Théorème. *Soit N une variété différentiable munie d'une structure presque-transverse intégrable. On suppose que l'application : $N \to N/\mathcal{L}$ soit une submersion surjective. Si les fibres de la submersion sont connexes et simplement connexes et si la connexion plate induite sur chaque fibre est complète, alors N est l'espace total d'un fibré vectoriel isomorphe au fibré transverse d'un feuilletage.*

Preuve: On va montrer que la submersion $\pi : N \to M = N/\mathcal{L}$ est un fibré affine modelé sur le fibré transverse (Q, p, M). Le théorème découle alors de la proposition 1.

Soit $u \in Q_x$; u induit un champ de vecteurs U sur $\pi^{-1}(x)$ dont la valeur en chaque point y de $\pi^{-1}(x)$ est le relèvement vertical u^v de u. On a $\nabla_U U = 0$ d'après la proposition 3. Le champ géodésique U engendre donc un groupe global de transformation à un paramètre $\{\gamma_t^u\}_{t\in\mathbf{R}}$. Pour $\forall y \in \pi^{-1}(x)$, l'application $t \to \gamma_t^u(y)$ est une courbe intégrale de U telle que $\gamma_0^u(y) = y$. On pose :

$$\rho_x(y, u) = \gamma_1^u(y).$$

Soient $u, v \in Q_x$; ils définissent sur $\pi^{-1}(x)$ deux champs de vecteurs U et V tels que $[U, V] = 0$. Par suite, leurs groupes globaux de transformation à un paramètre $\{\gamma_v^u\}_{t\in\mathbf{R}}$ et $\{\gamma_t^v\}_{t\in\mathbf{R}}$ commutent. Il en résulte que le groupe global de transformations à un paramètre $\{\gamma_t^u \circ \gamma_t^v\}_{t\in\mathbf{R}}$ engendre le champ vertical défini par $u + v$. Donc

$$\gamma_t^u \circ \gamma_t^v = \gamma_t^v \circ \gamma_t^u = \gamma_t^{u+v}.$$

Par suite

$$\rho_x\big(\rho_x(y, u), v\big) = \rho_x(y, u + v).$$

Ainsi Q_x opère sur $\pi^{-1}(x)$. Soit (u, v) un produit scalaire sur Q_x. On obtient une métrique riemannienne g sur $\pi^{-1}(x)$ en posant $g(U, V) = (u, v)$. Puisque $\nabla U = \nabla V = 0$, on a $\nabla g = 0$ et ∇ est la connexion de Levi-Civita de la métrique g. Ainsi $\big(\pi^{-1}(x), g\big)$ est une variété riemannienne complète et connexe. Soit y et z

deux éléments de $\pi^{-1}(x)$. Il existe une géodésique c qui joint y à z. On peut prendre $y = c(0)$ et en modifiant éventuellement $c(0)$, on peut supposer que $z = c(1)$. Or $c(0)$ est le relèvement vertical d'un élément u de Q_x. Ainsi c est la courbe intégrale $t \to \gamma_t^u(y)$ de U passant par y. Donc $\gamma_1^u(y) = z = \rho_x(y,u)$ et l'action de Q_x sur $\pi^{-1}(x)$ est surjective. Soit $H(y)$ le groupe d'isotropie de y sous l'action de Q_x. $H_y = \{u \in Q_x, \rho_x(y,u) = y\}$. L'application de Q_x dans $\pi^{-1}(x)$ qui à u fait correspondre $\rho_x(y,u)$ est la composition d'un isomorphisme de Q_x sur $T_y\big(\pi^{-1}(x)\big)$ et de l'application exponentielle de ∇ qui est un difféomorphisme local. Donc $H(y)$ est un sous-groupe discret de Q_x. Si $H(y)$ n'est pas trivial, il existe des vecteurs linéairement indépendants de Q_x tels que $H(y)$ est l'ensemble des combinaisons à coefficients entiers de ces vecteurs. Comme Q_x opère transitivement sur $\pi^{-1}(x)$, cette variété est difféomorphe à $\mathsf{T}^k \times \mathbb{R}^{p+q-k}$ où T^k est le tore de dimension k. Comme $\mathsf{T}^k \times \mathbb{R}^{p+q-k}$ n'est pas simplement connexe, nécessairement $H(y) = 0$ et Q_x opère librement sur $\pi^{-1}(x)$. ∎

References

[1] F. Brickell and R.S. Clark, 'Integrable almost tangent structures', *J. Diff. Geom* **9** (1974), 557–563.

[2] M. Crampin and G. Thompson, 'Affine bundles and integrable almost tangent structures', *Math. Pasc. Cambr. Phil. Soc.* **98** (1985), 61–71.

[3] T.V. Duc, 'Structure presque-transverse', *J. Diff. Geom.* **14** (1979), 215–219.

[4] T.V. Duc, 'Structure presque tangente sur le fibré transverse', preprint.

[5] G. Thompson, 'Integrable almost cotangents structures and legendrian bundles', *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.* **101** (1987), 61–78.

Laboratoire de Mathématiques
Institute Fourier
Université de Grenoble I
B.P. 74
38402 Saint-Martin d'Heres
Cedex
France.