Canad. Math. Bull. Vol. **31** (1), 1988

GROUPE DE BRAUER D'UNE COURBE DE TATE

PAR
C. TOUIBI

RÉSUMÉ. Soient k un corps de séries formelles à corps résiduel fini et X une courbe elliptique définie sur k dont l'invariant modulaire j n'est pas un entier de k. On détermine le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ de X, ainsi que le groupe $\mathrm{Br}(X(q))$ où $X(q)$ est la courbe de Tate définie sur k et associée à un élément q de k^* et on établit une dualité entre $\mathrm{Br}(X)$ et $\mathrm{Pic}(X)$. On examine ensuite le cas où le corps résiduel est quasi-fini.

1. **Introduction.** Utilisant les résultats de S. Shatz [4] et S. Lichtenbaum [2], nous déterminons le groupe de Brauer d'une courbe de Tate définie sur un corps de séries formelles à corps résiduel fini. De plus, en utilisant un résultat de S. Shatz, nous étendons la dualité de Lichtenbaum [2], entre $\mathrm{Br}(X)$ et $\mathrm{Pic}(X)$ pour une courbe X définie sur un corps p-adique au cas d'une courbe de genre 1 définie sur un corps de séries formelles k à corps résiduel fini et dont l'invariant modulaire j n'est pas un entier de k. Nous examinons ensuite le cas où le corps résiduel est quasi-fini.

2. **Courbes de Tate.** Soit k un corps complet pour une valuation discrète v de rang 1. J. Tate a construit pour chaque $q \in k^*$ tel que $v(q) < 1$, une courbe elliptique canonique $X(q)$ définie sur k dont l'invariant modulaire j s'exprime en fonction de q par un développement de la forme

$$j = \frac{1}{q} + 744 + 196884\, q + \ldots$$

Ces courbes sont construites de manière universelle et pour tout $q \in k^*$ tel que $0 < v(q) < \infty$, $X(q)$ est l'unique courbe satisfaisant la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\lambda} k^* \xrightarrow{\varphi} X(q)_k \to 0$$

où λ est l'application définie par $\lambda(n) = q^n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

3. **Théorèmes de dualité sur un corps local.** Soit k un corps local de corps résiduel fini. Adaptant la méthode de Tate, valable pour les variétés abéliennes

---

Reçu par la rédaction le 6 mai 1985 et, sous une forme révisée le 13 mai 1987.
AMS Subject Classification (1980): 12B20, 12G05.

définies sur les corps p-adiques, S. Shatz [4] a montré que si X est une courbe elliptique définie sur k dont l'invariant j n'est pas un entier de k, il existe une dualité parfaite de groupes topologiques

$$\rho_0 : H^0(G, \operatorname{Pic}^0(\bar{X})) \times H^1(G, \operatorname{Pic}^0(\bar{X})) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

[Si k_s est la clôture séparable du corps k, on note $\bar{X} = X \otimes_k k_s$ et $G = \operatorname{Gal}(k_s|k)$. On rappelle d'autre part que $\operatorname{Pic}^0(\bar{X})$, le sous-groupe de $\operatorname{Pic}(\bar{X})$, formé des classes de diviseurs de degré 0, est isomorphe en tant que G-module à la jacobienne de la courbe elliptique X]. Cette dualité de S. Shatz n'est nouvelle que dans la situation où k est un corps de séries formelles à corps résiduel fini.

Dans toute la suite de ce paragraphe, on désignera par k un corps de séries formelles à corps résiduel fini, v la valuation de k et X une courbe de genre 1 définie sur k d'invariant modulaire j et on suppose que j n'est pas un entier de k. On notera $X(q)$ la courbe de Tate associée à un élément $q \in k^*$ pour lequel $0 < v(q) < \infty$. Enfin, si A est un groupe topologique abélien, on notera $A^* = \operatorname{Hom}_c(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Considérons, comme dans Lichtenbaum [2] le diagramme commutatif

$$\text{(I)}\qquad \begin{array}{lccccccc} (1) & \mathbf{Z} & \longrightarrow & H^1(G, \operatorname{Pic}^0(\bar{X})) & \longrightarrow & H^1(G, \operatorname{Pic}^0(\bar{X})) & \longrightarrow & 0 \\ & \| & & \downarrow{\scriptstyle \rho_0^*} & & \downarrow{\scriptstyle \rho^*} & & \\ (2) & \mathbf{Z} & \longrightarrow & H^0(G, \operatorname{Pic}^0(\bar{X}))^* & \longrightarrow & \operatorname{Pic}^0(X)^* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel la première ligne (1) est la suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Pic}^0(\bar{X}) \to \operatorname{Pic}(\bar{X}) \to \mathbf{Z} \to 0$$

(après avoir remplacé $H^0(G, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ par son complété $\hat{\mathbf{Z}}$ puisqu'il est envoyé sur le sous-groupe cyclique de $H^1(G, \operatorname{Pic}^0(\bar{X}))$ engendré par la période P([2]p:120) de la courbe X) et la ligne (2) est la suite duale du début de la suite en basses dimensions

$$(3)\qquad \begin{aligned} 0 \to \operatorname{Pic}(X) \to H^0(G, \operatorname{Pic}^0(\bar{X})) \to \operatorname{Br}(k) \\ \to \operatorname{Br}(X) \to H^1(G, \operatorname{Pic}(\bar{X})) \to H^3(G, k^*) \end{aligned}$$

déduite de la suite spectrale

$$H^p(G, H^q(X, G_m)) \Rightarrow H^{p+q}(X, G_m)$$

et restreinte au sous-groupe $\operatorname{Pic}^0(X)$ (on note que $\operatorname{Br}(k) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$). On déduit du diagramme (I)

https://doi.org/10.4153/CMB-1988-002-2 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 1. *L'isomorphisme*

$$\rho_0^*: H^1(G, \mathrm{Pic}^0(\bar{X})) \to H^0(G, \mathrm{Pic}^0(\bar{X}))^*$$

déduit de la dualité ρ_0 *induit un isomorphisme*

$$\rho^*: H^1(G, \mathrm{Pic}^0(\bar{X})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}^0(X)^*.$$

COROLLAIRE. *Si* $X(q)$ *est la courbe de Tate associée à un élément* $q \in k^*$ *et si* $\hat{k}^*$ *désigne le complété de* k^* *au sens de la théorie du corps de classes local; alors on a l'isomorphisme*

$$H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X(q)})) \cong \mathrm{Ker}\{\mathrm{Hom}_c(\hat{k}^*, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\}.$$

DÉMONSTRATION. Comme toute courbe de Tate a évidemment pour période $P = 1$, la suite exacte (1) donne l'isomorphisme

$$H^1(G, \mathrm{Pic}^0(\overline{X(q)})) \cong H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X(q)})).$$

D'autre part, la suite exacte de cohomologie

$$0 \to H^1(G, \mathrm{Pic}^0(\overline{X(q)})) \to H^2(G, \mathbf{Z}) \to H^2(G, k_s^*)$$

déduite de la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z} \to k_s^* \to \overline{X(q)} \to 0$$

s'écrit dans ce cas, en utilisant l'isomorphisme de réciprocité de la théorie du corps de classes local

$$0 \to H^1(G, \mathrm{Pic}^0(\overline{X(q)})) \to \mathrm{Hom}_c(\hat{k}^*, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\theta} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$
$$f \mapsto \theta(f) = f(q)$$

elle montre que $H^1(G, \mathrm{Pic}^0(\overline{X(q)})) \cong H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X(q)}))$ n'est autre que le noyau de l'application θ.

PROPOSITION. *Soit* X *une courbe de genre* 1 *et d'indice* I. *On note* $\langle I \rangle$ *le sous-groupe de* $\mathrm{Br}(k)$ *engendré par* I. *Alors le groupe de Brauer* $\mathrm{Br}(X)$ *de la courbe* X *est une extension du groupe* $\mathrm{Br}(k)/\langle I \rangle$ *par* $\mathrm{Pic}^0(X)^*$.

DÉMONSTRATION. Puisque $\mathrm{Br}(k) \cong \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et $H^3(G, k^*) = 0$, on déduit de (3) la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Im}\{\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to \mathrm{Br}(X)\} \to \mathrm{Br}(X) \to H^1(G, \mathrm{Pic}(\bar{X})) \to 0.$$

Or, $\mathrm{Im}\{\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)\}$ est isomorphe à $\mathrm{Br}(k)/\mathrm{Ker}\{\mathrm{Ber}(k) \to \mathrm{Br}(X)\}$. Pour déterminer cette image, il suffit donc de déterminer le noyau $\mathrm{Ker}\{\mathrm{Ber}(k) \to \mathrm{Br}(X)\}$ qui n'est autre que $\mathrm{Ker}\{\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}(K)\}$, où $K = k(X)$ désigne le corps des fonctions sur X.

D'après le théorème de Roquette [2], encore valable dans notre situation,

https://doi.org/10.4153/CMB-1988-002-2 Published online by Cambridge University Press

l'ordre du noyau $\mathrm{Ker}\{\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(K)\}$ est égal à l'indice I de la courbe X, donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\{\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)\} &\simeq \mathrm{Br}(k)/\mathrm{Ker}\{\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)\} \\ &\simeq \mathrm{Br}(k)/\mathrm{Ker}\{\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(K)\} \simeq \mathrm{Br}(k)/\langle I\rangle.\end{aligned}$$

Enfin, la proposition 1, montre que

$$H^1(G, \mathrm{Pic}(\bar{X})) \cong \mathrm{Pic}^0(X)^*.$$

Remarque. Le résultat de la proposition 2 est évidemment encore valable pour une courbe quelconque X, projective, lisse, géométriquement connexe, définie sur un corps p-adique k, ce qui est déjà contenu dans [2].

Corollaire. *Si $X(q)$ est la courbe de Tate associée à un élément $q \in k^*$, alors le groupe de Brauer* $\mathrm{Br}(X(q))$ *de la courbe $X(q)$ est une extension de* $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ *par le groupe discret* $\mathrm{Ker}\{\mathrm{Hom}_c(\hat{k}^*, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\}$.

En effet, toute courbe de Tate a évidemment pour indice $I = 1$, de plus le corollaire de la proposition 1 montre que

$$H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X(q)})) \cong \mathrm{Ker}\{\mathrm{Hom}_c(\hat{k}^*, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\}.$$

Remarque. Il résulte du diagramme commutatif suivant

$$\text{(II)}\quad \begin{array}{lccccccc} (3) & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathrm{Br}(X) & \longrightarrow & H^1(G, \mathrm{Pic}(\bar{X})) & \longrightarrow & 0 \\ & \Vert & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^*} & & \downarrow{\scriptstyle \rho^*} & & \\ (4) & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X)^* & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0(X)^* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont la deuxième ligne (4) est obtenue par dualité à partir de la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(X) \to \mathrm{Pic}(X) \to \hat{\mathbf{Z}}$$

que le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ de la courbe X est isomorphe au groupe $\mathrm{Pic}(X)^*$ (ce qui étend le résultat de Lichtenbaum [2] au cas des courbes de genre 1, et dont l'invariant modulaire j n'est pas un entier de k).

4. **Cas d'un corps quasi-local.** Un corps quasi-local est un corps complet pour une valuation discrète non archimèdienne, de rang 1, à corps résiduel quasi-fini.

Soient k un corps quasi-local, v la valuation de k, q un élément de k^* tel que $0 < v(q) < +\infty$ et $X(q)$ la courbe de Tate définie sur k et associée à q.

Par la suite exacte (1), on a encore les isomorphismes

$$H^1(G, \mathrm{Pic}^0(\overline{X(q)})) \cong H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X(q)}))$$

et

$$H^1(G, \mathrm{Pic}^0(\overline{X(q)})) \cong \mathrm{Ker}\{\mathrm{Hom}_c(\hat{k}^*, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\}$$

donc le groupe $\mathrm{Br}(X(q))$ de la courbe de Tate $X(q)$ est encore une extension de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ par $\mathrm{Ker}\{\mathrm{Hom}_c(\hat{k}^*, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\}$. Comme le groupe $H^0(G, \mathrm{Pic}(\overline{X(q)}))$ est dense dans $H^1(G, \mathrm{Pic}^0(\overline{X(q)}))^*$ [[4] Théorème 2] le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccc} H^1(G, \mathrm{Pic}^0(\overline{X(q)}))^* & \xleftarrow{\sim} & H^1(G, \mathrm{Pic}^0(\overline{X(q)}))^* & & \\ \uparrow{\scriptstyle i} & & \uparrow & & \\ H^0(G, \mathrm{Pic}^0(\overline{X(q)})) & \longleftarrow & \mathrm{Pic}^0(X(q)) & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

montre alors que l'application $i^*: H^1(G, \mathrm{Pic}^0(\overline{X(q)})) \to H^0(G, \mathrm{Pic}^0(\overline{X(q)}))^*$ duale de i, est une surjection et par suite l'application

$$\rho^*: H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X(q)})) \to \mathrm{Pic}^0(X(q))^*$$

n'est plus un isomorphisme comme dans la proposition 1, mais seulement une surjection; il en résulte que le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X(q))$ de la courbe $X(q)$, s'envoie surjectivement sur le group $\mathrm{Pic}(X(q))^*$ extension de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ par $\mathrm{Pic}^0(X(q))^*$.

NOTE(*). Aprés avoir soumis cet article au Bulletin Canadien de Mathématiques S. Saito [3.b] a démontré un théorème du dualité pour les variétés abéliennes quelconques définies sur un corps local, ainsi qu'un théorème de dualité entre $\mathrm{Pic}(X)$ et $\mathrm{Br}(X)$ pour une courbe X propre, lisse et géométriquement connexe définie sur un corps local sans l'hypothèse d'existence d'un point rationnel.

Plus précisément, soient k un corps local (i.e. un corps complet pour une valuation discrète, de corps résiduel fini), X une courbe projective lisse géométriquement connexe définie sur k, K le corps des fonctions de X et P l'ensemble des points fermés de X. Pour $p \in P$, on note K_p le complété de K en p et R_p l'anneau des entiers de K_p. Utilisant la K-théorie, S. Saito [3 .a et .b] établit une dualité entre $\mathrm{Pic}(X)$ et $\mathrm{Br}(X)$. Alors que notre dualité entre $\mathrm{Pic}(X(q))$ et $\mathrm{Br}(X(q))$ (où $X(q)$ est la courbe de Tate associée à un élément $q \in k^*$) se déduit de celle de S. Shatz [4], valable pour les courbes elliptiques (i.e. les courbes de genre 1, munies d'un point rationnel), la dualité de Saito se déduit de l'accomplement canonique

$$\langle , \rangle_K : \mathrm{Br}(K) \times C_K \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

où C_K est le groupe des classes d'idèles de K, cet accouplement étant lui-même obtenu par globalisation du "pairing" canonique construit par K. Kato [1]:

$$\langle , \rangle_{K_p} : \mathrm{Br}(K_p) \times K_p^* \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

(*) Cette note m'a été suggérée par le referee.

https://doi.org/10.4153/CMB-1988-002-2 Published online by Cambridge University Press

De la dualité entre Pic(X) et Br(X) pour la courbe X considérée (sans l'hypothèse d'existence d'un point rationnel) S. Saito en déduit la dualité entre $H^1(k, J)$ et $J(k)$ où J est la jacobienne de la courbe X et de là, il généralise aux variétés abéliennes.

On peut résumer la situation par le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Br}(K) & \times & C_k \arrow[d] \arrow[r] & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\
\mathrm{Br}(X) \arrow[u, hook] \arrow[d] & \times & \mathrm{Pic}(X) \arrow[ur] & \\
H^1(k, J) & \times & J(k) \arrow[u, hook] \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

Les résultats de S. Saito généralisent ainsi ceux que nous obtenons pour la courbe de Tate.

Remerciements. Je tiens à exprimer mes remerciements au professeur J. C. Douai qui a été à l'origine de ce travail ainsi qu'au referee pour ses suggestions.

References

1. K. Kato, *A generalisation of local class field theory by using K-groups*, I. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA **26** (1979), pp. 303-376. II. ibid **27** (1980), pp. 602-683. III. ibid **29** (1982), pp. 31-43.

2. S. Lichtenbaum, *Duality theorems for curves over p-adic fields*, Inventiones Math. **7** (1969), pp. 120-136.

3.a. S. Saito, *Class field theory for curves over local fields*, Journal Number Theory **21** (1985), pp. 44-80.

3.b. S. Saito, *Arithmetic on two dimensional local rings*, Inventiones Math. **85** (1986), pp. 379-414.

4. S. Shatz, *The cohomology of certain elliptic curves over local and quasi-local fields*, Illinois Jour. of Math. (1967), pp. 234-241.

Chédly Touibi
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Campus Universitaire
1060 Tunis, Tunisia