Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1981), **1**, 65–76
Printed in Great Britain

Construction d'un difféomorphisme minimal d'entropie topologique non nulle

M. R. HERMAN†
Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, France

(*Received* 12 *December* 1980)

A Laurent Schwartz pour son 65ème anniversaire

Abstract. We construct a real analytic diffeomorphism F_α on a compact connected 4-dimensional manifold M, such that F_α preserves a probability measure μ defined by a smooth volume form, F_α is a minimal diffeomorphism of M and furthermore the metrical entropy of F_α with respect to the measure μ is strictly positive. By a theorem of Goodwyn the topological entropy is also strictly positive. We write down the explicit formula of F_α that depends on a parameter $\alpha \in \mathbb{T}^1$. This parameter is chosen by Baire category.

1. *Introduction*

(1.1) On considère un élément (α, A) du produit gauche $\mathbb{T}^1 \times C^\omega(\mathbb{T}^1, \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}))$, où $\mathbb{T}^1$ agit sur $C^\omega(\mathbb{T}^1, \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))$ par translations. On choisit A tel que, si $\theta \in \mathbb{T}^1$,

$$A(\theta) \equiv A_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta & -\sin 2\pi\theta \\ \sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$$

et on suppose que $\lambda > 1$ est fixé, dans la suite.

On pose, si $\alpha \in \mathbb{T}^1$ et si n est un entier $n \geq 1$, $A_\theta^n = A_{\alpha,\theta}^n = A_{\theta+(n-1)\alpha} \cdots A_{\theta+\alpha} \cdot A_\theta$. $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{T}^1$; à $\alpha \in \mathbb{T}^1$ on associe la rotation $R_\alpha(x) = x + \alpha$. Si $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, R_α est un difféomorphisme minimal et strictement ergodique de $\mathbb{T}^1$ préservant la mesure $d\theta$. Il en de même de $R_{n\alpha}$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

(1.2) $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ agit canoniquement sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ à gauche. Au produit gauche (α, A) on associe le difféomorphisme

$$(\theta, y) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \overset{G\alpha}{\to} (\theta + \alpha, A_\theta(y)) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{R}).$$

(1.3) On considère $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ un sous-groupe discret à quotient compact et on suppose, pour simplifier, que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$ est le fibré tangent unitaire à une surface compacte orientable de courbure négative constante $= -1$. Voir, par example [**7**].

On pose $M_1 = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\Gamma$. Le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ agit sur M_1 à gauche par $(g, h \cdot \Gamma) \to gh\Gamma$ préservant l'unique mesure de probabilité ν d'espace homogène de M_1, et en fait ν peut être définie par une forme volume C^ω (noter que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est unimodulaire).

† Address for correspondence: M. R. Herman, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, Plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau Cedex, France.

Soit $\mathbb{T}^1 \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\Gamma = M$; le groupe $\mathbb{T}^1 \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ agit à gauche sur M préservant la mesure $\mu = d\theta \otimes d\nu$, (α, A) agit donc sur M par $(\theta, y) \to (\theta + \alpha, A_\theta y) = F_\alpha(\theta, y)$ préservant la mesure μ.

Nous proposons de démontrer le:

THÉORÈME. *Il existe $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tel que F_α soit un difféomorphisme minimal de M et tel que l'entropie par rapport à la mesure μ vérifie $h_\mu(F_\alpha) \geq 2 \log(1/2\lambda + \lambda/2)$.*
Le théorème sera une conséquence immédiate de (5.1) et (5.3) □

On rappelle qu'un homéomorphisme h d'un espace topologique X est dit minimal si pour tout $x \in X$, $\{h^n(x) | n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans X. Le lecteur pourra consulter [**3**].

2. *Rappels sur le théorème sous additif*

(2.1) On considère un espace métrique compact X (non vide) et $g: X \to X$ un homéomorphisme strictement ergodique préservant une mesure de probabilité λ de X. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, g^k est uniquement ergodique.

On considère $a \in C^0(X, \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}))$; au couple (g, a) on associe l'homéomorphisme:

$$G: X \times \mathbb{R}^n \to X \times \mathbb{R}^n$$
$$(x, y) \to (g(x), a_x(y))$$

où si $x \in X$, $a(x) \equiv a_x$ avec

$$G^k(x, y) = (g^k(x), a_x^k(y)) \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z},$$

et si $n \in \mathbb{N}$,

$$a_x^k = a_{g^{k-1}(x)} \cdots a_{g(x)} \cdot a_x.$$

Soit $\| \quad \|$ une norme de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$. Par le théorème ergodique sous additif [**2**] [**6**], si $k \to +\infty$, et λ-presque tout x

$$\frac{1}{k} \log \|a_x^k\| \to \lambda_+(g, a) = \inf_{k \geq 1} \frac{1}{k} \int_X \log \|a_x^k\| \, d\lambda(x) \in \mathbb{R}.$$

On définit aussi

$$\lambda_-(g, a) = \inf_{k \geq 1} \frac{1}{k} \int_X \log \|a_x^{-k}\| \, d\lambda(x).$$

λ_+ et λ_- sont indépendants de la norme choisie sur $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$.

(2.2) LEMME. *On a $\lambda_+(g, a) \geq 0$.*

Démonstration. On choisit $\| \quad \|$ une norme d'algèbre de Banach sur $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Si $B \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, on a $\|B\| \|B^{-1}\| \geq 1$ mais en utilisant les cofacteurs, on a $\|B^{-1}\| \leq C\|B\|^{n-1}$ et donc, $\|B\| \geq C^{-1/n}$, où C est une constante dépendant que de la norme choisie. □

(2.3) On a aussi $\lambda_-(g, a) \geq 0$. Si $n = 2$, en utilisant un argument de convergence en probabilité et en remarquant que si $B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ alors $\|B^{-1}\| = \|B\|$ où

$$\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\| = \sup(|a|, \ldots, |d|);$$

on conclut que $\lambda_+(g, a) = \lambda_-(g, a)$.

https://doi.org/10.1017/S0143385700001164 Published online by Cambridge University Press

(2.4) PROPOSITION. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $k_0 > 0$ *tel que, si* $k \geq k_0$, $-\varepsilon \leq (1/k) \log \|a_x^k\| \leq \lambda_+(g, a) + \varepsilon$.

Démonstration. La minoration résulte de (2.2). On suppose ici que $\| \ \|$ est une norme d'algèbre de End $(\mathbb{R}^n)$. Si p et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{kp} \log \|a_x^{kp}\| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{k} \log \|a_{g^{ik}(x)}^k\|.$$

On pose $\lambda_+(g, a) = \lambda_+$.

Soit k tel que

$$\frac{1}{k} \int \log \|a_x^k\| \, d\lambda(x) < \lambda_+ + \varepsilon.$$

Par la stricte ergodicité de g^k on a uniformement en x, si $p \to +\infty$,

$$\frac{1}{pk} \log \|a_x^{kp}\| < \lambda_+ + \varepsilon.$$

Si on écrit $p_1 = pk + r$, $0 \leq r < k$, il suit que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists k_0, \qquad p_1 \geq k_0 \Rightarrow \frac{1}{p_1} \log \|a_x^{p_1}\| \leq \lambda_+ + \varepsilon. \qquad \square$$

(2.5) On en déduit que, si $k \to +\infty$,

$$\frac{1}{k} \log \|a_x^k\|_{C^0} \to \lambda_+(g, a) \quad \text{avec } \|a_x^k\|_{C^0} = \sup_x \|a_x^k\|.$$

(2.6) Si $\lambda_+(g, a) = 0$ alors, si $k \to +\infty$, $(1/k) \log \|a_x^k\| \to 0$ uniformément.

3. *On se donne* (α, A) *comme dans* (1.1)

(3.1) THÉORÈME. *Si* $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *on a* $\lambda_+(\alpha, A) \geq \log (\lambda/2 + 1/2\lambda)$.

Démonstration. Par (2.4), il suffit de démontrer, pour $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ fixé

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \log \|A_\theta^k\|_{C^0} \geq \log \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\lambda} \right).$$

On considère SL $(2, \mathbb{R}) \subsetneq$ SL $(2, \mathbb{C})$ et on considère une norme d'algèbre sur $\mathbb{C}$ de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}$ $(\mathbb{C}^2)$. Soit

$$B_\theta = U^{-1} A_\theta U \quad \text{avec} \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \qquad U^{-1} = U^*.$$

On a

$$\begin{aligned} U^{-1} A_\theta U &= U^{-1} \begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta & -\sin 2\pi\theta \\ \sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{pmatrix} U U^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} U \\ &= \begin{pmatrix} \exp(-2\pi i\theta) & 0 \\ 0 & \exp(2\pi i\theta) \end{pmatrix} \cdot \Lambda \end{aligned}$$

et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad a = \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\lambda}, \quad b = \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2\lambda}.$$

Comme U est une matrice constante, on a

$$B_\theta^n = B_{\theta+(n-1)\alpha} \cdots B_\theta = U^{-1} A_\theta^n U.$$

Soit

$$C_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(4\pi i\theta) \end{pmatrix} \cdot \Lambda;$$

on a

$$B_\theta = \begin{pmatrix} \exp(-2\pi i\theta) & 0 \\ 0 & \exp(-2\pi i\theta) \end{pmatrix} C_\theta = D_\theta C_\theta.$$

Or, D_θ est une matrice diagonale unitaire. On a donc pour tout $\theta \in \mathbb{T}^1$,

$$\|B_\theta^n\| = \|C_\theta^n\|.$$

LEMME. *Pour $n \geq 1$, on a*

$$C_\theta^n = \begin{pmatrix} a^n + P_n^1(\theta) & b_n + P_n^2(\theta) \\ P_n^3(\theta) & P_n^4(\theta) \end{pmatrix}$$

avec

$$a = \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\lambda}, \qquad b_n \in \mathbb{C} \quad et \quad P_n^k(\theta) = \sum_{\substack{p \geq 1 \\ p \in \mathbb{N}}} a_{n,p}^k \exp(4\pi i p\theta), \qquad a_{n,p}^k \in \mathbb{C},$$

et les $P_n^k(\theta)$, $1 \leq k \leq 4$, sont des polynomes trigonométriques.

Démonstration.

$$C_\theta = \begin{pmatrix} a & b \\ b\exp(4\pi i\theta) & a\exp(4\pi i\theta) \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

et le lemme suit par récurrence. □

Fin de la démonstration de (3.1). *On a*

$$\left\| \int_{\mathbb{T}^1} C_\theta^n \, d\theta \right\| \leq \int_{\mathbb{T}^1} \|C_\theta^n\| \, d\theta \equiv \int_{\mathbb{T}^1} \|B_\theta^n\| \, d\theta.$$

Or,

$$\int_{\mathbb{T}^1} C_\theta^n \, d\theta = \begin{pmatrix} a^n & b_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2\lambda}.$$

Il en résulte que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|B_\theta^n\|_{C^0} \geq \log a$$

et donc,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|A_\theta^n\|_{C^0} = \lambda_+(\alpha, A) \geq \log a.$$ □

(3.2) COROLLAIRE. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{T}^1$, on a*

$$\int_{\mathbb{T}^1} \lambda_+(\alpha, A)(\theta) \, d\theta \geq \log a \quad où \quad \lambda_+(\alpha, A)(\theta) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|A_{\alpha,\theta}^n\| \qquad \text{p.p.}$$

Démonstration. Soit $\alpha \to \phi(\alpha) = \inf_{k \geq 1} \int (1/k) \log \|A^n_{\alpha,\theta}\| \, d\theta \in \mathbb{R}_+$. L'application $\phi(\alpha)$ est semi-continue supérieurement et donc, l'ensemble

$$F = \{\alpha \in \mathbb{T}^1 | \phi(\alpha) \geq \log a\} \text{ est fermé dans } \mathbb{T}^1.$$

Si $\alpha \in \mathbb{T}^1$, on a $\phi(\alpha) = \int \lambda_+(\alpha, A)(\theta) \, d\theta$; par (3.1) on a

$$\mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset F$$

et donc $F = \mathbb{T}^1$. □

(3.3) COROLLAIRE. *Si $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, il existe θ_0 tel que si $n \to +\infty$, alors $(1/n) \log \|A^n_{p/q,\theta_0}\| \to C \geq \log a$.*

Démonstration. Pour tout $\theta \in \mathbb{T}^1$, si $n \to +\infty$, $(1/n) \log \|A^n_{p/q,\theta}\| \to \lambda_+(p/q, A)(\theta)$ et on a

$$\int_{\mathbb{T}^1} \lambda_+(p/q, A)(\theta) \, d\theta \geq \log a. \qquad \square$$

4. *Etude de G_α*

(4.1) En (1.2), au couple (α, A_θ) nous associons un difféomorphisme $G_\alpha : (\theta, y) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to (\theta + \alpha, A_\theta y)$ que nous allons étudier. Si on relève le difféomorphisme

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}\,(2, \mathbb{R}) \subsetneq \mathrm{Diff}^{\omega}_+ (\mathbb{T}^1)$$

en un difféomorphisme $f \in D^\omega(\mathbb{T}^1) = \{g \in \mathrm{Diff}^\omega (\mathbb{R}) | g - \mathrm{Id} \in C^\omega(\mathbb{T}^1)\}$ on peut relever $\theta \in \mathbb{T}^1 \to A_\theta \in \mathrm{PSL}\,(2, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}\,(2, \mathbb{R})/\{-1, 1\}$ en $\theta \in \mathbb{R} \to 2\theta + f \equiv f_\theta \in D^\omega(\mathbb{T}^1)$.

(4.2) Rappelons que si $g \in D^0(\mathbb{T}^1)$ on associe son nombre de rotation $\rho(g) \in \mathbb{R}$, l'application $g \to \rho(g)$ est continue et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $|g^k - k\rho(g) - \mathrm{Id}|_{C^0} < 1$.

Pour les propriétés du nombre de rotation cf. [**4**, II et III].

(4.3) *Remarques.* (*a*) Si on veut relever $\theta \in \mathbb{T}^1 \to A_\theta \in \mathrm{SL}\,(2, \mathbb{R})$, il faut considérer $\theta \to \theta + h$ où $h(x) = \frac{1}{2} f(2x) \in D^\omega(\mathbb{T}^1)$.

(*b*) Tout élément $A \in \mathrm{PSL}\,(2, \mathbb{R}) \subsetneq \mathrm{Diff}^\omega_+ (\mathbb{T}^1)$ est conjugué dans $\mathrm{PSL}\,(2, \mathbb{R})$ a une matrice de la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1/\mu \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}^*_+, \quad \mu \neq 1, \quad \text{appelé matrice hyperbolique;}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}^*, \quad \text{appelé matrice parabolique;}$$

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi\alpha & -\sin 2\pi\alpha \\ \sin 2\pi\alpha & \cos 2\pi\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{appelé matrice elliptique.}$$

De plus, si $\rho(A) \neq 0 \pmod 1$ alors A est une matrice elliptique. On pose $f^n_{\alpha,\theta} = f_{\theta+(n-1)\alpha} \circ \cdots \circ f_{\theta+\alpha} \circ f_\theta$, $\rho(f^n_{\alpha,\theta}) = \psi^n_\alpha(\theta)$ qui est une fonction continue de θ et α.

(4.4) LEMME. *On a $\psi^n_\alpha(\theta + \frac{1}{2}) = n + \psi^n_\alpha(\theta)$.*

Démonstration. Cela vient de: si $f \in D^0(\mathbb{T}^1)$ on a $\rho(1 + f) = 1 + \rho(f)$. □

(4.5) LEMME. *Si* $\theta_1 < \theta_2$ *on a* $\psi_\alpha^n(\theta_1) \le \psi_\alpha^n(\theta_2)$.

Démonstration. Si f et g sont dans $D^0(\mathbb{T}^1)$, on écrit $f < g$ si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) < g(x)$. Si $f_1 < g_1$ et $f_2 < g_2$ alors $f_1 \circ f_2 < g_1 \circ g_2$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $\theta_1 < \theta_2$ alors $2(\theta_1 + \alpha) + f < 2(\theta_2 + \alpha) + f$. On a donc pour $\theta_1 < \theta_2$, $f_{\alpha,\theta_1}^n < f_{\alpha,\theta_2}^n$ et donc $\psi_\alpha^n(\theta_1) \le \psi_\alpha^n(\theta_2)$. □

(4.6) LEMME. *Soit* $p/q \in \mathbb{Q}$, $(p, q) = 1$ *alors*

$$\psi_{p/q}^q(\theta + 1/q) = \psi_{p/q}^q(\theta) + 2.$$

Démonstration. Puisque ρ est un invariant de conjugaison, on a pour tout f et g dans $D^0(\mathbb{T}^1)$, $\rho(f \circ g) = \rho(g \circ f)$ et donc $\psi_{p/q}^q(\theta + p/q) = \psi_{p/q}^q(\theta) + 2p$ et le lemme suit de (4.4). □

(4.7) LEMME. *Soit* $p/q \in \mathbb{Q}$, $(p, q) = 1$; *si pour* θ_0, $A_{p/q,\theta_0}^q = \mathrm{Id} \in \mathrm{PSL}\,(2, \mathbb{R})$, *alors pour* $\theta > \theta_0$ (*resp.* $\theta < \theta_0$) *on a* $\psi_{p/q}^q(\theta) > \psi_{p/q}^q(\theta_0)$ (*resp.* $\psi_{p/q}^q(\theta_0) > \psi_{p/q}^q(\theta)$).

Démonstration. On suppose que $\theta > \theta_0$ (l'autre cas étant analogue). On a $\psi_{p/q}^q(\theta) \ge \psi_{p/q}^q(\theta_0)$; mais $f_{p/q,\theta}^q > f_{p/q,\theta_0}^q = R_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Si on avait $\psi_{p/q}^q(\theta) = \psi_{p/q}^q(\theta_0) = k$ alors $R_{-k} \circ f_{p/q,\theta}^q$ aurait un point fixe et par l'absurde, il suit que $\psi_{p/q}^q(\theta) > \psi_{p/q}^q(\theta_0)$. □

(4.8) LEMME. *Soit* $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$; *si* $A_{p/q,\theta_0}^q$ *est une matrice parabolique de* PSL $(2, \mathbb{R})$ *il est de même de* $A_{p/q,\theta_0 + i/q}^q$ *pour* $i = 1, \dots, q - 1$.

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{T}^1$ fixé. Alors pour $0 \le i \le q - 1$ les matrices $A_{p/q,\theta+i/q}^q$ sont conjuguées dans PSL $(2, \mathbb{R})$. □

(4.9) PROPOSITION. *Pour tout* $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$, *il existe* $\theta_0 \in \mathbb{T}^1$ *tel que les matrices* $A_{p/q,\theta_0+i/q}^q$ *soient des matrices paraboliques de* PSL $(2, \mathbb{R})$.

Démonstration. Par (3.3), il existe θ tel que $A_{p/q,\theta}^q$ soit une matrice hyperbolique. Par (4.3) (b) $\psi_{p/q}^q(\theta) = k \in \mathbb{Z}$.

Soit $\theta_0 = \sup\{\theta \mid \psi_{p/q}^q(\theta) = k\}$. Alors $A_{p/q,\theta_0}^q$ est une matrice parabolique. En effet, si $A_{p/q,\theta_0}^q$ est hyperbolique, alors, par (4.5) et [**4**, III], il existe $\theta_1 > \theta_0$ tel que $\psi_{p/q}^q(\theta_1) = k$, ce qui est absurde. Si $A_{p/q,\theta_0}^q = \mathrm{Id}$ alors, par (4.7), $\psi_{p/q}^q(\theta) < k$ si $\theta < \theta_0$ et il n'existerait pas de θ tel que $A_{p/q,\theta}^q$ soit hyperbolique et vérifiant $\psi_{p/q}^q(\theta) = k$, ce qui est absurde.

La proposition résulte alors de (4.8). □

5. *On considère le difféomorphisme* F_α *définie en* (1.3) *agissant sur* $M = \mathbb{T}^1 \times M_1$ *préservant la mesure* μ

(5.1) PROPOSITION. *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{T}^1$ *on a* $h_\mu(F_\alpha) \ge 2 \log(\lambda/2 + 1/2\lambda)$.

Démonstration. Puisque la mesure μ est de densité C^ω par rapport à la mesure de Lebesgue, on a, par Pesin [**5**],

$$h_\mu(F_\alpha) \ge \inf_{n \ge 1} \frac{1}{n} \int_M \log \|DF_\alpha^n(x)\| \, d\mu(x)$$

où $DF_\alpha^n(x) : T_x(M) \to T_{F_\alpha^n(x)}(M)$ est l'application tangente de F_α^n (en x). (Dans l'exemple ici considéré, on peut vérifier [**5**] à titre d'exercice: l'existence et l'absolue continuité des feuilletages stables et instables.)

DF_α laisse invariant le sous-fibré ξ de $T(M)$ des vecteurs tangents aux fibres de la fibration $M_1 \to (\mathbb{T}^1 \times M_1) \to \mathbb{T}^1$.

Comme $M_1 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$ (i.e. $h\Gamma$) et que pour $\tilde{F}_\alpha : \mathbb{T}^1 \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \circlearrowleft$ définie par $\tilde{F}_\alpha(\theta, y) = (\theta + \alpha, A_\theta \cdot y)$, l'action de $D\tilde{F}_\alpha$ sur ξ s'identifie à l'action de Φ:

$$\mathbb{T}^1 \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times T_y(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})) \xrightarrow{\Phi} \mathbb{T}^1 \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times T_{A_\theta \cdot y}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}))$$

$$(\theta, y, v) \to (\theta + \alpha, A_\theta \cdot y, (DL_{A_\theta})_y v)$$

où $L_g(h) = gh$ et $R_g(h) = hg$.

Si on identifie $T_y(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}))$ aux champs de vecteurs invariants par les translations à droites de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \equiv \mathrm{SL}$ = algèbre de Lie de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, on est ramené à étudier le produit gauche:

$$\mathbb{T}^1 \times \mathrm{SL} \to \mathbb{T}^1 \times \mathrm{SL}$$
$$(\theta, v) \to (\theta + \alpha, Ad_{A_\theta}(v))$$

où Ad_{A_θ} est l'application tangente en $h = \mathrm{Id}$ de l'application $h \to A_\theta \cdot h \cdot A_\theta^{-1}$.

Comme en tout point $x = (\theta, g) \in M$ on a

$$\frac{1}{n} \log \|DF_\alpha^n(x)\| \geq \frac{1}{n} \log \|Ad_{A_{\theta+(n-1)\alpha}} \cdots Ad_{A_\theta}\|.$$

Il suit du lemma 5.2 que

$$\frac{1}{n} \log \|DF_\alpha^n(x)\| \geq \frac{1}{n} 2 \log \|A_{\alpha,\theta}^n\|$$

et donc,

$$\int_M \frac{1}{n} \log \|DF_\alpha^n(x)\| \, d\mu(x) \geq 2 \int_{\mathbb{T}^1} \frac{1}{n} \log \|A_{\alpha,\theta}^n\| \, d\theta$$

et il suffit d'appliquer (3.1) et (3.2) pour conclure. □

(5.2) LEMME. *On choisit pour base de* SL,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

alors

$$Ad_C = \begin{pmatrix} ad + bc & -ac & bd \\ -2ab & a^2 & -b^2 \\ 2cd & -c^2 & d^2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{R}).$$

Si on choisit pour norme de $B = (a_{ij}) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\|B\| = \sup |a_{ij}|$ *alors on a*

$$2\|C\|^2 \geq \|Ad_C\| \geq \|C\|^2.$$

Démonstration. Soit $v \in \mathrm{SL}$, $\exp(tv)$ le groupe à un paramètre associé à v. Alors

$$Ad_C(v) = \frac{d}{dt}(C \exp(tv) C^{-1})|_{t=0} \in \mathrm{SL}.$$

Puis il suffit de faire le calcul . □

https://doi.org/10.1017/S0143385700001164 Published online by Cambridge University Press

(5.3) THÉORÈME. *Il existe $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tel que le difféomorphisme F_α de M soit minimal.*

Démonstration. Nous allons montrer par catégorie de Baire qu'il existe $G \subset \mathbb{T}^1$, G est un G_δ dense, tel que si $\alpha \in G$ alors F_α soit un difféomorphisme minimal de M.

Commençons par remarquer que l'application $\alpha \to F_\alpha \in$ Homéo (M) est continue pour la topologie compacte ouverte. $F_\alpha \in$ Homéo (M) est minimal si et seulement si, pour tout ouvert $U_i \neq \emptyset$ ($(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base d'ouverts non vide de M) il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\bigcup_{0\leq p\leq n} F_\alpha^p(U_i) = M$.

Pour i fixé, posons $W_i = \{\alpha \in \mathbb{T}^1 | \exists n \in \mathbb{N}, \bigcup_{0\leq p\leq n} F_\alpha^p(U_i) = M\}$. Par [**3**], W_i est ouvert. Si on montre que W_i est dense dans $\mathbb{T}^1$ alors $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} W_i = G$ est un G_δ dense et si $\alpha \in G$, alors F_α est un difféomorphisme minimal de M. On note W_i aussi par W_{U_i}.

Tout revient à voir que l'ouvert W_i est dense. On est ramené à étudier le cas où $U_i = I \times V$, $I =]a, b[\subset \mathbb{T}^1$ et V est ouvert non vide de M_1 (difféomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^3$).

Soit $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$, vérifiant $1/q < (b-a)/2$. Par (4.9), il existe $\theta_0 \in]a, b[$ tel que $A^q_{p/q,\theta_0}$ soit une matrice parabolique; elle est donc conjuguée au temps $t \neq 0$ du flot horocyclique sur $\{\theta_0\} \times M_1$. Il suite de (7.3) que le difféomorphisme $y \to F^q_{p/q}(\theta_0, y)$ de $\{\theta_0\} \times M_1$ est minimal.

Il en résulte qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que l'ouvert $U = \bigcup_{0\leq k\leq n} F^{kq}_{p/q}(I \times V)$ vérifie $U \supset \{\theta_0\} \times M_1$.

Soit $K = [a_1, b_1] \times M_1$, $a_1 \neq b_1$, tel que $K \subset U$ et $\theta_0 \in]a_1, b_1[$. Soient $(C_k)_{0\leq k\leq n}$ des ensembles compacts ($\neq \emptyset$) tels que $\bigcup_{0\leq k\leq n} (C_k \cap K) = K$ et vérifiant $C_k \subset F^{kq}_{p/q}(I \times V)$.

Soit l'ouvert (défini par une condition ouverte pour la topologie compacte ouverte): $V_k = \{\alpha \in \mathbb{T}^1 | F_\alpha^{-kq}(C_k) \subset I \times V\}$; $V_k \neq \emptyset$ puisque $p/q \in V_k$.

Si $\alpha \in \bigcap_{0\leq k\leq n} V_k \neq \emptyset$, on a

$$\bigcup_{0\leq k\leq n} F_\alpha^{kq}(I \times V) \supset (]a_1, b_1[\times M_1).$$

Si de plus, $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_\alpha^n(]a_1, b_1[\times M_1) = M$$

et donc, $\alpha \in W_{I\times V}$.

Nous avons ainsi démontré que $W_{I\times V}$ est dense puisqu'il contient dans son adhérence tous les $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ vérifiant $(p, q) = 1$, $1/q < (b-a)/2$. □

6. *Etude du difféomorphisme G_α*

On considère le difféomorphisme

$$G_\alpha : (\theta, y) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to (\theta + \alpha, A_\theta(y)) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{R}).$$

(6.1) THÉORÈME. *Il existe $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tel que le difféomorphisme G_α soit minimal sur $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Nous laissons le lecteur vérifier que la démonstration de (5.3) s'adapte en utilisant la remarque suivante. Pour tout $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ il existe $\theta_0 \in \mathbb{T}^1$, tel que pour $0 \leq i \leq q-1$ les difféormorphismes $y \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to G^q_{p/q}(\theta_0 + (i/q), y) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ sont conjugués à une rotation irrationelle (et donc minimale). Il suffit d'utiliser la continuité de $\psi^q_{p/q}(\theta)$ et d'appliquer (4.3) (b), (4.4) et (4.5). □

(6.2) PROPOSITION. *Si $\alpha \in \mathbb{T}^1 - (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ le difféomorphisme G_α a deux mesures de probabilités invariantes et ergodiques.*

Démonstration. Si μ est une mesure invariante, alors $p_*(\mu) = d\theta$ où $p: \mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{T}^1$ est la première projection.

Puisque $\lambda_+(\alpha, A) > 0$, par le théorème d'Osedelec [**6**], pour $d\theta$-presque tout θ il existe v^+_θ et v^-_θ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ (i.e. des directions de $\mathbb{R}^2$) tel que

$$\lim_{k \to \pm\infty} \frac{1}{|k|} \sum_{i=0}^{k-1} \phi \circ G^i_\alpha(\theta, v^+_\theta) = \lambda_+(\alpha, A)$$

$$\lim_{k \to \pm\infty} \frac{1}{|k|} \sum_{i=0}^{k-1} \phi \circ G^i_\alpha(\theta, v^-_\theta) = -\lambda_+(\alpha, A)$$

où $\phi(\theta, v) = \log (\|A_\theta v\|/\|v\|)$ est une fonction continue de $(\theta, v) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$.

De plus, pour $d\theta$-presque tout θ et tout v_θ, $v_\theta \neq v^+_\theta$ ou v^-_θ, on a

$$\lim_{k \to \pm\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \phi \circ G^i_\alpha(\theta, v_\theta) = \lambda_+(\alpha, A) \tag{$*$}$$

ou si $k \leq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $\sum_{i=0}^{k-1} \phi \circ G^i_\alpha = \sum_{i=0}^{-(k-1)} \phi \circ G^{-i}_\alpha$.

(Noter que

$$\sum_{i=0}^{k-1} \phi \circ G^i_\alpha(\theta, v) = \begin{cases} \log (\|A^k_{\alpha,\theta} v\|/\|v\|) & \text{si } k \geq 1 \\ -\log (\|A^{k-1}_{\alpha,\theta} v\|/\|v\|) + \phi(\theta, v) & \text{si } k \leq 0.) \end{cases}$$

Il suit qu'il existe deux mesures de probabilités μ_+ et μ_- ayant pour supports boréliens les graphes des applications $d\theta$-mesurables $\theta \to v^+_\theta$ et $\theta \to v^-_\theta$. Comme μ_+ et μ_- se projettent sur $d\theta$, μ_+ et μ_- sont ergodiques pour G_α et vérifient $\int_{\mathbb{T}^2} \phi \, d\mu_\pm = \pm\lambda_+(\alpha, A)$.

Par ($*$), μ_+ et μ_- sont les seules mesures ergodiques de G_α. □

(6.3) PROPOSITION.† *Soit α tel que G_α est un difféomorphisme minimal de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$; alors l'ensemble*

$$G = \left\{ (\theta, v) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \,\middle|\, \textit{si } k \to +\infty, \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \phi \circ G^i_\alpha(\theta, v) \textit{ n'a pas de limite} \right\}$$

contient un G_δ dense de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$.

Démonstration. Puisque G_α est minimal et par ce nous avons rappelé dans la démonstration de (6.2), alors les ensembles

$$G_\pm = \left\{ x \,\middle|\, \liminf_{k \to +\infty} \left| \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \phi \circ G^i_\alpha(x) \pm \lambda_+(\alpha, A) \right| = 0 \right\}$$

sont des G_δ dense, et $G \supset G_+ \cap G_-$. □

† Voir aussi, R. A. Johnson, *J. Diff. Eq.* **28**, (1978), 23–34.

(6.4) PROPOSITION. *Soit α tel que G_α est un difféomorphisme minimal. Alors il existe $\theta \in \mathbb{T}^1$ tel que, si $k \to +\infty$, $(1/k) \log \|A^k_{\alpha,\theta}\|$ n'a pas de limite.*

Démonstration. Il résulte de la démonstration de [**6**] que, si $\theta \in \mathbb{T}^1$ et $k \to +\infty$, $(1/k) \log \|A^k_{\alpha,\theta}\|$ converge, alors pour tout $v \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, si $k \to +\infty$,

$$\frac{1}{k} \log (\|A^k_{\alpha,\theta} v\|/\|v\|) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \phi \circ G^i_\alpha(\theta, v) \text{ a une limite.}$$

La proposition résulte alors de (6.3). □

(6.5) *Description du difféomorphisme G_α*

On suppose que G_α est minimal et que μ_+ est la mesure ergodique invariante associée à $\lambda_+(\alpha, A)$. G_α a deux exposants de Lyapunov: $-2\lambda_+(\alpha, A) < 0$ et 0 (i.e. les exposants de (G_α, μ_+) pour le produit gauche de la dérivée de G_α, DG_α, sur le fibré tangent de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$). Pour presque tout θ, la variété stable en $(\theta, v^+_\theta) \in \operatorname{supp}(\mu_+)$ est $\{\theta\} \times (\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) - v^-_\theta)$.

Le lemme suivant montre en certain sens qu'il n'existe pas de variété invariante par G_α tangente à la direction neutre.

LEMME. *Soit $I \subset \mathbb{T}^1 \times \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ un arc de courbe plongé et se projectant sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{T}^1$, $a \neq b$. Alors les intervalles $G^i_\alpha(I)$ s'intersectent une infinité de fois, si $i \to +\infty$.*

Démonstration. Quitte à remplacer I par $G^p_\alpha(I)$, $0 \leq p \leq n_0$, n_0 étant tel que $\bigcup_{0 \leq p \leq n_0} R_{p\alpha}(]a, b[) = \mathbb{T}^1$, en utilisant (4.5) et (4.6) on peut supposer qu'il existe un arc $J \subset I$ se projectant sur $[c, d] \subset]a, b[$, $c \neq d$, et une suite d'entiers (n_i) tel que si $i \to +\infty$, $n_i \to +\infty$ et vérifiant $n_i\alpha \to 0 (\text{mod } 1)$ et $\psi^{n_i}_\alpha(d) - \psi^{n_i}_\alpha(c) \to +\infty$. On conclut alors en remarquant si $\theta \in]c, d[$ on a $\sup_x |f^{n_i}_{\alpha,\theta}(x) - \psi^{n_i}_\alpha(\theta) - x| < 1$ et donc, si $i \to +\infty$, $G^{n_i}_\alpha(J)$ doit récupérer I une infinité de fois et $G^{n_i}_\alpha(J)$ n'est pas inclus dans I (figure 1). □

7. *Rappels sur le flot horocyclique*

(7.1) Soit Γ_1 un groupe discret de PSL $(2, \mathbb{R})$ à quotient compact:

$$M_1 = \mathrm{PSL}\,(2, \mathbb{R})/\Gamma_1 = \mathrm{SL}\,(2, \mathbb{R})/\Gamma.$$

Soit g_t le groupe à paramètre

$$g_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad g_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

g_t définit un flot ou action de $\mathbb{R}$ sur M_1 définie par $h\Gamma \to g_t h\Gamma$.

(7.2) On montre que le flot horocyclique g_t sur M_1 est une action minimale de $\mathbb{R}$ sur la variété compacte M_1 qui est ergodique pour la mesure ν d'espace homogène [**1**].

(7.3) Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, g_t est un difféomorphisme minimal de M_1 (i.e. le flot g_t est totalement minimal).

En effet, il existe un $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que g_{t_0} (et donc g_{-t_0}) soit un difféomorphisme minimal de M_1.

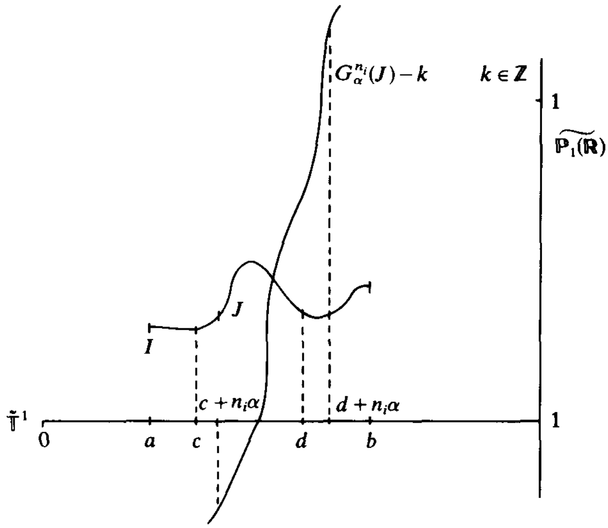

FIGURE 1. Dessin dans le revêtement universel $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{T}^1\times\widetilde{\mathbb{P}_1(\mathbb{R})}$.

Puis il suffit de remarquer que les flots g_t et g_{k^2t}, $k\in\mathbb{R}^*$ sont conjugués dans $\mathrm{Diff}^\omega(M_1)$: on a

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & k^2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k^{-2}t & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suit de (4.3), que toute matrice parabolique de PSL $(2,\mathbb{R})$ définit un difféomorphisme minimal de M_1.

(7.4) On suppose que V est une surface compacte orientable de courbure négative constante $=-1$. Comme le revêtement universel est isométriquement le disque de Poincaré, on peut choisir $\Gamma_1=\pi_1(V)$ et tel que $M_1=\mathrm{PSL}\ (2,\mathbb{R})/\Gamma_1$ soit le fibré tangent unitaire de V.

On suppose que V a une involution isométrique renversant l'orientation S. Bien qu'en général, une surface V comme ci-dessus ne possède pas d'involution S; on peut très simplement construire V avec une involution S, en supposant par exemple, que le domaine fondamental de V dans le disque de Poincaré est un polygone régulier.

LEMME. *Sous les hypothèses ci-dessus le flot horocyclique g_t de M_1 est conjugué dans* $\mathrm{Diff}^\omega(M_1)$ *au flot g_{-t}.*

Démonstration. S définit un élément $S\in\mathrm{PGL}\,(2,\mathbb{R})=\mathrm{GL}\,(2,\mathbb{R})/\{\lambda\mathrm{Id},\ \lambda\in\mathbb{R}^*\}$, PGL $(2,\mathbb{R})$ étant le groupe des isométries (y compris ceux qui renversent l'orientation) du disque de Poincaré. Après conjugaison dans PSL $(2,\mathbb{R})$ on peut supposer que S est l'image de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a $S\Gamma_1 S = \Gamma_1$ et donc S définit un difféomorphisme $\mathbb{R}$-analytique de M: $h\Gamma_1 \to ShS\Gamma_1$.

Comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et que tous les groupes à un paramètre parabolique sont conjugués dans PSL $(2, \mathbb{R})$ soit à

$$t \to \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit à

$$t \to \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

le résultat suit. □

(7.5) La proposition suivante est une source de difficultés pour des généralisations. On se donne M_1 comme en (7.4) avec un automorphisme S tel que $Sg_tS^{-1} = g_{-t}$.

PROPOSITION. *Soit l'action de* $\mathbb{R}^2$ *sur* $M_1 \times M_1$ *définie par* $f_t(x, y) = g_{t_1} \times g_{t_2}(x, y) = (g_{t_1}(x), g_{t_2}(y)) \in M_1 \times M_1$ *pour* $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. *Cette action est minimale. Si* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *est un homomorphisme continu alors l'action de* $\mathbb{R}$, $g_{\psi(t)}$ *sur* $M_1 \times M_1$ *n'est jamais minimale.*

Démonstration. $\psi(t) = (at, bt)$ a et $b \in \mathbb{R}$. On peut supposer que $ab \neq 0$. Alors, par (7.3) et (7.4), $f_{\psi(t)}$ est conjugué à l'action de $g_t \times g_t$ sur $M_1 \times M_1$ qui n'est pas minimale. □

REFERENCES

[1] L. Auslander, L. Green & F. Hahn. *Flows on Homogeneous Spaces*, Ann. of Math. Studies No. 53. Princeton University Press: Princeton 1963. (Voir aussi dans cette référence, G. A. Hedlund 1.)

[2] Y. Derriennic. Sur le théorème ergodique sous additif. *C. R. Acad. Sc. Paris* **281** (1975), 985–988.

[3] A. Fathi & M. R. Herman. Existence de difféomorphismes minimaux. *Proc. Conf. Systèmes dynamiques, Varsovie (1977)*, Astérisque **49** (1979), 37–59.

[4] M. R. Herman. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Publ. de l'I. H. E. S.* **49**, (1979), 5–234.

[5] J. B. Pesin. Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russian Math. Surveys* **32** (4) (1977), 55–114.

[6] D. Ruelle. Ergodic theory of differentiable dynamical systems. *Publ. de l'I. H. E. S.* **50** (1980), 27–58.

[7] C. L. Siegel. *Topics in Complex Function Theory*, vol. 2. Wiley-Interscience: New York, 1971.