SUR CERTAINES VARIÉTÉS HOMOGÈNES COMPLEXES

YOZÔ MATSUSHIMA

Introduction. Soit V une variété complexe satisfaisant aux conditions suivantes :

1) *un groupe de Lie semi-simple connexe G opère sur V de manière transitive et holomorphe ;*

2) *la variété V admet une mesure invariante par G*[1].

On dira par abus de langage que la variété V est *semi-simple.* On se propose d'étudier dans ce travail des variétés complexes *compactes semi-simples.* Les variétés de ce genre font l'objet de deux travaux de Wang [5], [6]. Dans le mémoire [5] il a étudié le cas simplement connexe et dans [6] le cas parallélisable. Le résultat obtenu dans ce travail montre que toute variété complexe compacte semi-simple est en un certain sens une combinaison de deux types de variétés étudiées par Wang. On établit en effet le théorème suivant.

THÉORÈME 1. *Soit V une variété complexe compacte semi-simple. Alors V est un espace fibré holomorphe de base W et de fibre F. La base W est un espace homogène kählérien d'un groupe de Lie compact semi-simple connexe et la fibre F est un espace quotient d'un groupe de Lie complexe réductif connexe par un sous-groupe discret.*

Ce théorème généralise un théorème bien connu de Wang [5]. Voir également un mémoire récent de Hano et Kobayashi [3]. L'énoncé détaillé du théorème 1 sera donné au paragraphe 4 sous la forme du théorème 1′. On trouvera aussi une méthode pour construire les variétés complexes compactes semi-simples.

On déduira du théorème 1 et d'un théorème de Wang [6] le théorème suivant.

Received October 15, 1960.

[1] Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que le groupe d'isotropie de G en un point de V soit unimodulaire.

THÉORÈME 2. *Soit V une variété kählérienne compacte semi-simple. Alors V est un espace homogène kählérien d'un groupe de Lie compact semi-simple connexe.*

Ainsi dans le cas d'une variété kählérienne compacte l'existence d'une mesure invariante entraîne l'existence d'une métrique kählérienne invariante.

1. Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe G et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_k$, où $\mathfrak{a}_i\,(i = 1, \ldots, k)$ sont des idéaux simples de $\mathfrak{g}$. Soient $A_i\,(i = 1, \ldots, k)$ les sous-groupes invariants de Lie de G correspondant à $\mathfrak{a}_i$. Supposons que les sous-groupes $A_i\,(i = 1, \ldots, s)$ soient compacts et que les autres $A_j\,(j = s+1, \ldots, k)$ ne soient pas compacts. Soient $G_1 = A_1 \ldots A_s$ et $G_2 = A_{s+1} \ldots A_k$. Alors $G = G_1 \cdot G_2 = G_2 \cdot G_1$. On appellera G_1 la *composante compacte* de G et G_2 la *composante ouverte* de G.

A. Rappelons d'abord un résultat récent de Borel [1]. Soit G un groupe de Lie. On dira qu'un sous-groupe B de G possède la propriété (S) dans G si pour tout voisinage U de l'élément neutre dans G et pour tout élément g de G il existe un entier $n > 0$ tel que $g^n \in U \cdot B \cdot U$. Soient G et G' des groupes de Lie connexes et soit φ un homomorphisme de G sur G'. Soit B un sous-groupe de G possèdant la propriété (S) dans G. Alors l'image $\varphi(B)$ de B dans G' possède aussi la propriété (S) dans G'. D'aprés un lemme de Selberg, si l'espace quotient G/B possède une mesure invariante dont la mesure totale est finie, le sous-groupe B possède la propriété (S) dans G (voir [1]).

A. Borel a démontré le théorème suivant.

Théorème de Borel. Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe dont la composante compacte se réduit à l'élément neutre. Soit B un sous-groupe possèdant la propriété (S) dans G. Alors toute sous-algèbre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G qui est stable par $ad.x$ pour tout $x \in B$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Utilisant ce théorème de Borel on va démontrer un lemme sur les espaces homogènes symplectiques.

Un espace homogène $V = G/B$ d'un groupe de Lie G est dit *homogène symplectique*, s'il existe sur V une 2-forme extérieure ψ partout de rang maximal et invariante par G telle que $d\psi = 0$.

LEMME. *Soit $V = G/B$ un espace homogène symplectique d'un groupe de*

https://doi.org/10.1017/S0027763000002191 Published online by Cambridge University Press

Lie semi-simple connexe G. Supposons que G opère sur V de manière presque effective et que le sous-groupe B possède la propriété (S) dans G. Alors le groupe G est compact.

Soient G_1 et G_2 la composante compacte et la composante ouverte de G respectivement. Soit $\tilde{G} = G_1 \times G_2$. Soit φ l'homomorphisme canonique de $\tilde{G}$ sur G défini par $\varphi(g_1, g_2) = g_1 \cdot g_2$. Soit $\tilde{B}$ l'image inverse par φ du sous-groupe B de G. On peut identifier l'espace quotient $\tilde{G}/\tilde{B}$ avec G/B par l'application $\tilde{g} \cdot \tilde{B} \to \varphi(\tilde{g}) \cdot B$. Alors $\tilde{G}/\tilde{B}$ est un espace homogène symplectique et, le noyau de l'homomorphisme φ étant discret, $\tilde{G}$ opère de manière presque effective sur $\tilde{G}/\tilde{B}$. De plus, le noyau de φ ètant dans le centre de $\tilde{G}$, le sous-groupe $\tilde{B}$ possède la propriété (S) dans $\tilde{G}$ (cf. [1]). Il suffit donc de démontrer le lemme pour l'espace homogène $\tilde{G}/\tilde{B}$. Pour simplifier les notations on supposera que $\tilde{G} = G$, c'est-à-dire que $G = G_1 \times G_2$. On désignera les algèbres de Lie des groupes G, G_1, G_2 par $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$. Alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$. Soit π_2 la projection canonique de $G = G_1 \times G_2$ sur G_2. On désignera par la même π_2 la projection canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_2$. Le sous-groupe B possède la propriété (S) dans G et par suite l'image $\pi_2(B)$ de B possède la même propriété dans G_2. Or la composante compacte du groupe semi-simple G_2 se réduit à l'élément neutre. Alors il résulte du théorème de Borel que l'algèbre $\pi_2(\mathfrak{b})$ du groupe $\pi_2(B)$ est un idéal de $\mathfrak{g}_2$. D'autre part, la variété G/B étant un espace homogène symplectique du groupe semi-simple G, l'algèbre $\mathfrak{b}$ du groupe d'isotropie B est le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ d'un élément W de $\mathfrak{g}$ (voir [2], [4]). Soit $W = W_1 + W_2$, $W_1 \in \mathfrak{g}_1$, $W_2 \in \mathfrak{g}_2$. Soit $\mathfrak{b}_i$ le centralisateur de W_i dans $\mathfrak{g}_i$ $(i = 1, 2)$. Alors $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}_i$. Par suite on a $\pi_2(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}_2$ et $\mathfrak{b}_2$ est un idéal de $\mathfrak{g}_2$ et donc de $\mathfrak{g}$. Or on a supposé que G opère de manière presque effective sur G/B. Alors l'algèbre $\mathfrak{b}$ ne contient pas d'idéal de $\mathfrak{g}$ de dimension positive. Par conséquent, on a $\mathfrak{b}_2 = (0)$ et $W_2 = 0$, car W_2 est un élément de $\mathfrak{b}_2$. Alors $W = W_1 \in \mathfrak{g}_1$ et le centralisateur $\mathfrak{b}$ de W dans $\mathfrak{g}$ contient l'idéal $\mathfrak{g}_2$. Alors $\mathfrak{g}_2 = (0)$ et par suite $G = G_1$. Le groupe G est ainsi compact.

B. *Variétés complexes parallélisables* (voir Wang [6]). Soit V une variété complexe compacte. Soit $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs analytiques sur V. On sait que $\mathfrak{a}$ est de dimension finie et engendre le plus grand groupe connexe d'automorphismes de V. Soit J le champ de tenseurs définissant la structure complexe de V. Si $X \in \mathfrak{a}$, on a $J \cdot X \in \mathfrak{a}$ et $J \cdot [X, Y] = [J \cdot X, Y] = [X, J \cdot Y]$ quels que soient $X, Y \in \mathfrak{a}$. Le tenseur J définit donc une structure d'algèbre de Lie complexe de $\mathfrak{a}$. Une variété complexe compacte V sera dite parallélisable s'il existe des champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_n$ dans $\mathfrak{a}$ (n étant la dimension complexe de V) qui sont linéairement indépendants sur les nombres complexes en chaque point de V. Cette dernière condition signifie que, si $\sum_{k=1}^{n} [a_k \cdot (X_k)_p + b_k \cdot J(X_k)_p] = 0$ en un point $p \in V$ (a_k, b_k étant des nombres réels), on a $a_1 = \cdots a_n = 0$, $b_1 = \cdots = b_n = 0$. On voit alors que $X_1, \ldots, X_n$ forment une base complexe de l'algèbre complexe $\mathfrak{a}$. Il résulte de cette définition que, si V est parallélisable et connexe, le plus grand groupe connexe d'automorphismes A_0 de V est transitif sur V et que le groupe d'isotropie de A_0 en un point de V est discret.

Soit maintemant L un groupe de Lie connexe opérant de manière transitive, holomorphe et presque effective sur V parallélisable. Soit $\mathfrak{l}$ l'algèbre des champs de vecteurs sur V définis par les transformations de groupes à un paramètre dans L. Alors $\mathfrak{l}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ et isomorphe à l'algèbre du groupe L. Le groupe L étant transitif sur V, la dimension réelle de $\mathfrak{l}$ est plus grande ou égale à celle de V. Or la dimension complexe de V est égale à celle de $\mathfrak{a}$. On a alors $\mathfrak{l} = \mathfrak{a}$. Le groupe L est alors un groupe de Lie complexe et le groupe d'isotropie de L en un point de V est discret.

2. *Démonstration du théorème* 1. Soit V une variété complexe compacte semi-simple. Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe opérant sur V de manière transitive, holomorphe et presque effective. On suppose que V possède une mesure invariante par G. La variété V étant compacte, la mesure totale de V est finie. Soit $V = G/B$. Alors le sous-groupe B possède la propriété (S) dans G (voir [1]). Soient G_1 et G_2 la composante compacte et la composante ouverte de G respectivement. On peut supposer sans gêner la généralité que $G = G_1 \times G_2$. D'après un résultat récent de Hano-Kobayashi [3], il existe un sous-groupe fermé L de G contenant B et possédant les deux propriétés suivantes:

A) *l'espace quotient G/L est homogène symplectique;*

B) *l'espace quotient L/B est connexe et une sous-variété complexe de G/B. De plus, L/B est parallélisable.*

https://doi.org/10.1017/S0027763000002191 Published online by Cambridge University Press

Soit maintenant M le plus grand sous-groupe connexe invariant de G contenu dans L. Alors M est fermé. Puisque L contient B et que B possède la propriété (S) dans G, L possède aussi la même propriéte dans G. Par suite le sous-groupe L/M de G/M possède la propriété (S) dans G/M. Or le groupe G/M opère de manière transitive et presque effective sur l'espace homogène symplectique G/L. Il résulte alors du lemme que le groupe G/M est compact. De plus, le groupe G/M étant compact semi-simple, le groupe L/M est connexe et coïncide avec le centralisateur d'un tore de G/M (cf. [2], [4]).

Le groupe G/M étant compact, le sous-groupe connexe invariant fermé M de G doit être de la forme $M = M_1 \times G_2$, où M_1 est un sous-groupe connexe invariant fermé du groupe compact G_1. Les groupes M et L/M étant connexe, le groupe L l'est aussi. Puisque L contient M, L est de la forme $L = L_1 \times G_2$, $L_1 \supset M_1$, où L_1 est un sous-groupe connexe fermé du groupe compact G_1.

Or la variété $F = L/B$ est une sous-variété complexe parallélisable de G/B. Soit N le plus grand sous-groupe connexe invariant de L contenu dans B. Alors N est fermé et le groupe quotient $L' = L/N$ opère de manière transitive et presque effective sur F. Par suite le groupe L' est un groupe de Lie complexe et le groupe d'isotropie de L' en un point de F est discret (cf. **1**, **B**). Or ce groupe d'isotropie est isomorphe au groupe B/N. Par conséquent, B/N est un sous-groupe discret du groupe $L' = L/N$ et ceci montre que N est égal à la composante connexe de l'élément neutre B_0 de B. On a ainsi démontré le résultat suivant: la composante connexe de l'élément neutre B_0 de B est un sous-groupe invariant de L et le groupe quotient $L' = L/B_0$ est un groupe de Lie complexe opérant de manière transitive et presque effective sur la variété complexe compacte parallélisable $F = L/B$.

Or on a supposé que le groupe G opère de manière presque effective sur G/B. Alors le groupe B_0 ne contient pas de sous-groupe invariant connexe de dimension positive de G. Le groupe B_0 étant invariant dans le groupe réductif $L = L_1 \times G_2$, B_0 est contenu dans L_1, sinon B_0 contiendrait une composante simple de G_2 qui est un sous-groupe invariant de G.

Considérons maintemant l'image dans L' du sous-groupe invariant compact L_1 de L. L'image dans L' de la partie semi-simple de L_1 est un sous-groupe invariant compact semi-simple de L'. Le groupe L' étant complexe, L' ne contient pas de sous-groupe invariant compact semi-simple de dimension positive.

Par suite l'image dans L' de la partie semi-simple de L_1 se réduit à l'élément neutre. La partie semi-simple de L_1 est donc contenue dans B_0.

Revenons maintenant au sous-groupe invariant fermé connexe M de G. On a $M = M_1 \times G_2$, $M_1 \subset L_1$. Le groupe M_1 étant invariant dans G_1, M_1 est semi-simple et donc dans la partie semi-simple de L_1. Alors M_1 est contenu dans B_0 et par suite $M_1 = (e)$, car M_1 est invariant dans G. On a ainsi montré que $M = G_2$. D'autre part, on a déjà dit que L/M est le centralisateur d'un tore de G/M. Or $L/M \cong L_1$ et $G/M \cong G_1$ et par suite L_1 est le centralisateur d'un tore de G_1.

Résumons ce que on a démontré: $L = L_1 \times G_2$ *et* L_1 *est le centralisateur d'un tore de* G_1. *La composante connexe de l'élément neutre* B_0 *du groupe* B *est un sous-groupe invariant du* L_1 *contenant la partie semi-simple de* L_1. B_0 *est donc un C-sous-groupe du groupe semi-simple compact* G_1 *au sens de Wang* [5]. *Le groupe* L/B_0 *est complexe et opère de manière transitive et presque effective sur la variété complexe compacte parallélisable* $F = L/B$.

3. *Suite de la démonstration du théorème* 1. On va montrer maintenant les faits suivants:

1) la variété $L_1 \cdot B/B$ est une sous-variété complexe de G/B;

2) le groupe G_2 est un groupe complexe et la variété $G_2 \cdot B/B$ est une sous-variété complexe de G/B.

Démonstration de 1). Soit π la projection canonique de G sur G/B et soit $\pi(e) = o$, e étant l'élément neutre de G. Soit $\mathfrak{l}_1$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs analytiques sur G/B définis par les transformations de groupes à un paramètre dans L_1. La variété $L_1 \cdot B/B$ est égale à l'orbite du point o par L_1 et contenue dans $F = L/B$. L'image L_1' de L_1 dans le groupe $L' = L/B_0$ est égale au centre connexe de L'. Le groupe L' étant complexe, le centre connexe L_1' de L' est aussi complexe. Cela signifie ceci: pour tout $X \in \mathfrak{l}_1$, il existe un $Y \in \mathfrak{l}_1$ tel que $J \cdot X_p = Y_p$ pour tout $p \in F$, où J désigne le champ de tenseurs sur G/B définissant la structure complexe de G/B (cf. **1, B**; remarquons que, F étant une sous-variété complexe de G/B, le tenseur sur F définissant la structure complexe de F est égal à la restriction de J). La variété $L_1 \cdot B/B$ étant contenue dans F et égale à l'orbite du point o par L_1, il résulte de ce que on a montré que pour tout point p de $L_1 \cdot B/B$ et pour tout vecteur X_p en

p tangent à $L_1 \cdot B/B$, le vecteur $l \cdot X_p$ est tangent à $L_1 \cdot B/B$. Ceci montre que $L_1 \cdot B/B$ est une sous-variété complexe de G/B.

Démonstration de 2). On utilisera les notations introduites ci-dessus. Soit G_2' l'image de G_2 dans $L' = L/B_0$. Alors G_2' est égale à la partie semi-simple du groupe complexe réductif L'. Alors le groupe G_2' est aussi complexe. Comme on le voit facilement, G_2 est localement isomorphe à G_2'. Par suite, le groupe G_2 est aussi un groupe complexe. Le fait que $G_2 \cdot B/B$ est une sous-variété complexe de G/B peut être démontré d'une manière analogue à celle de la démontration de 1).

4. *Fin de la démonstration du théorème* 1. On va montrer maintenant les faits suivants:

1) la variété $G_1 \cdot B/B$ est une sous-variété complexe de G/B;

2) la variété G/L se munit d'une structure complexe invariante par G telle que la projection canonique de G/B sur G/L soit holomorphe.

Le groupe L_1 étant compact, il existe un sous-espace vectoriel $\mathfrak{w}_1$ de l'algèbre $\mathfrak{g}_1$ du groupe G_1 tel que

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{l}_1, \qquad \mathfrak{w}_1 \cap \mathfrak{l}_1 = (0), \qquad [\mathfrak{l}_1, \mathfrak{w}_1] \subset \mathfrak{w}_1, \tag{1}$$

où $\mathfrak{l}_1$ désigne l'algèbre du groupe L_1. Puisque l'algèbre $\mathfrak{b}$ du groupe B_0 est un idéal de $\mathfrak{l}_1$ contenant la partie semi-simple de $\mathfrak{l}_1$, il existe un sous-espace vectoriel $\mathfrak{n}_1$ dans le centre de $\mathfrak{l}_1$ tel que

$$\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{b} = (0), \qquad [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{b}] = (0). \tag{2}$$

De (1) et (2) résulte

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{w}_1, \qquad [\mathfrak{b}, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_1. \tag{3}$$

Or on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ Alors de (3) résulte

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{g}_2, \quad [\mathfrak{b}, \mathfrak{m}] = [\mathfrak{b}, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_1. \tag{4}$$

On désignera par $X_\mathfrak{m}$ la composante dans $\mathfrak{m}$ d'un élément $X \in \mathfrak{g}$ relative à la décomposition (4) de $\mathfrak{g}$. De même de $X_{\mathfrak{m}_1}$.

Remarquons que le groupe B étant un sous-groupe de $L = L_1 \times G_2$, on a $\mathrm{ad.}\, x \cdot \mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}_1$, $\mathrm{ad.}\, x \cdot \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_1$ et $\mathrm{ad.}\, x \cdot \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_2$ pour tout $x \in B$. Par suite, $\mathrm{ad.}\, x \cdot \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_1$ et $\mathrm{ad.}\, x \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ pour tout $x \in B$. Maintenant la structure complexe invariante

https://doi.org/10.1017/S0027763000002191 Published online by Cambridge University Press

de G/B définit un automorphisme I de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}$ avec les propriétés suivantes:

1) $I^2 = -1$;

2) $\mathrm{ad.}\,x(I\cdot X) = I(\mathrm{ad.}\,x\cdot X)$, $x\in B$, $X\in\mathfrak{m}$ et en particulier $[Y, I\cdot X] = I[Y, X]$, $Y\in\mathfrak{b}$, $X\in\mathfrak{m}$;

3) $I\cdot[X, Y]_{\mathfrak{m}} - [I\cdot X, Y]_{\mathfrak{m}} - [X, I\cdot Y]_{\mathfrak{m}} - I\cdot[I\cdot X, I\cdot Y]_{\mathfrak{m}} = 0$, $X, Y\in\mathfrak{m}$.

Les variétés $L_1\cdot B/B$ et $G_2\cdot B/B$ étant des sous-variétés complexes de G/B, on a

4) $I\cdot\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_1$;

5) $I\cdot\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_2$.

Pour montrer que $G_1\cdot B/B$ est une sous-variété complexe de G/B, il suffit de montrer que $I\cdot\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_1$. Soit $I\cdot X = I_1\cdot X + f(X)$ pour tout $X\in\mathfrak{m}_1$, où $I_1\cdot X$ (resp. $f(X)$) désigne la composante de $I\cdot X\in\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{m}_1$ (resp. $\mathfrak{g}_2$) relative à la décomposition $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{g}_2$. Alors I_1 est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}_1$ et f est une application linéaire de $\mathfrak{m}_1$ dans $\mathfrak{g}_2$. On va montrer que $f(X) = 0$ pour tout $X\in\mathfrak{m}_1$. De 4) résulte que

4′) $f(X) = 0$, $X\in\mathfrak{n}_1$.

Par un calcul facile, on obtient de 1), 2) et 3) les egalités suivantes:

1′) $I_1^2\cdot X = -X$, $X\in\mathfrak{m}_1$;

2′) $[Y, I_1\cdot X] = I_1\cdot[Y, X]$, $Y\in\mathfrak{b}$, $X\in\mathfrak{m}_1$;

3′) $I_1\cdot[X, Y]_{\mathfrak{m}_1} - [I_1\cdot X, Y]_{\mathfrak{m}_1} - [X, I_1\cdot Y]_{\mathfrak{m}_1} - I_1\cdot[I_1\cdot X, I_1\cdot Y]_{\mathfrak{m}_1} = 0$, $X, Y\in\mathfrak{m}_1$;

1″) $f([Y, X]) = 0$, $Y\in\mathfrak{b}$, $X\in\mathfrak{m}_1$;

2″) $f([X, Y]_{\mathfrak{m}_1}) = f([I_1\cdot X, I_1\cdot Y]_{\mathfrak{m}_1}) + I[f(X), f(Y)]$, $X, Y\in\mathfrak{m}_1$.

Les égalités 1′), 2′) et 3′) montrent que l'automorphisme I_1 de $\mathfrak{m}_1$ définit une structure complexe invariante de G_1/B_0.

Soit maintenant $\mathfrak{h}_{\mathfrak{b}}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{b}$ et soit $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{h}_{\mathfrak{b}}$. Alors $\mathfrak{h}_1$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_1$. Soit $\mathfrak{g}_1^c$ la complexification de $\mathfrak{g}_1$. Soit D l'ensemble des racines non nulles de $\mathfrak{g}_1^c$ relatives à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_1^c$. Prolongeons I_1 en un automorphisme de l'espace vectoriel complexe $\mathfrak{m}_1^c$. Soit $\mathfrak{m}_1^+$ (resp. $\mathfrak{m}_1^-$) le sous-espace de $\mathfrak{m}_1^c$ des éléments $X\in\mathfrak{m}_1^c$ tels que

https://doi.org/10.1017/S0027763000002191 Published online by Cambridge University Press

$I_1 \cdot X = i \cdot X$ (resp. $I_1 \cdot X = -i \cdot X$, $i^2 = -1$). On a alors $\mathfrak{m}_1^c = \mathfrak{m}_1^+ + \mathfrak{m}_1^-$. Soient $\mathfrak{n}_1^+ = \mathfrak{n}_1^c \cap \mathfrak{m}_1^+$ et $\mathfrak{n}_1^- = \mathfrak{n}_1^c \cap \mathfrak{m}_1^-$. De (4) résulte que $\mathfrak{n}_1^c = \mathfrak{n}_1^+ + \mathfrak{n}_1^-$. Soit $D(\mathfrak{m}_1^+)$ (resp. $D(\mathfrak{m}_1^-)$) l'ensemble des racines $\alpha \in D$ telles que $E_\alpha \in \mathfrak{m}_1^+$ (resp. $E_\alpha \in \mathfrak{m}_1^-$), où E_α désigne un élément de $\mathfrak{g}_1^c$ tel que $[H, E_\alpha] = \alpha(H) \cdot E_\alpha$ pour tout $H \in \mathfrak{h}_1^c$. Soit $\mathfrak{w}_1^+$ (resp. $\mathfrak{w}_1^-$) le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{m}_1^+$ (resp. $\mathfrak{m}_1^-$) engendré linéairement par les E_α avec $\alpha \in D(\mathfrak{m}_1^+)$ (resp. $\alpha \in D(\mathfrak{m}_1^-)$). On a alors $\mathfrak{w}_1^c = \mathfrak{w}_1^+ + \mathfrak{w}_1^-$ (voir [3]). Puisque $\mathfrak{m}_1^c = \mathfrak{n}_1^c + \mathfrak{w}_1^c$, on a $\mathfrak{m}_1^c = \mathfrak{n}_1^+ + \mathfrak{w}_1^+ + \mathfrak{n}_1^- + \mathfrak{w}_1^-$, $\mathfrak{m}_1^+ = \mathfrak{n}_1^+ + \mathfrak{w}_1^+$, $\mathfrak{m}_1^- = \mathfrak{n}_1^- + \mathfrak{w}_1^-$. Prolongeons f en une application linéaire complexe de $\mathfrak{m}_1^c$ dans $\mathfrak{g}_2^c$. Montrons que $f(X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{m}_1^c$. De 4') résulte que $f(X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{n}_1^c$. Prenons un élément E_α avec $\alpha \in D(\mathfrak{m}_1^+)$. Alors $E_\alpha \in \mathfrak{w}_1^+$. Soit $H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{b}}^c$. Alors il résulte de 1'') que $f([H, E_\alpha]) = 0$. Or $f([H, E_\alpha]) = \alpha(H)$ $f(E_\alpha)$ et par suite

$$(*) \qquad \alpha(H) f(E_\alpha) = 0, \qquad H \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{b}}^c,$$

Soit maintenant $H \in \mathfrak{n}_1^+$. Alors $f(H) = 0$ et de 2'') résulte que $f([H, E_\alpha]) = f([I_1 \cdot H, I_1 \cdot E_\alpha])$. Puisque $H \in \mathfrak{n}_1^+$ et $E_\alpha \in \mathfrak{w}_1^+$, on a $I_1 \cdot H = i \cdot H$ et $I_1 \cdot E_\alpha = i \cdot E_\alpha$. Par suite $f([H, E_\alpha]) = -f([H, E_\alpha])$ et ceci entraîne $f([H, E_\alpha]) = \alpha(H) f(E_\alpha) = 0$. On a donç

$$(**) \qquad \alpha(H) f(E_\alpha) = 0, \qquad H \in \mathfrak{n}_1^+.$$

De $(*)$ et $(**)$ résulte que $\alpha(H) f(E_\alpha) = 0$ pour tout $H \in \mathfrak{h}_1^+ = \mathfrak{n}_1^+ + \mathfrak{h}_{\mathfrak{b}}^c$. Or on sait que, si $\alpha \neq 0$, il existe un élément $H \in \mathfrak{h}_1^+$ tel que $\alpha(H) \neq 0$ (voir [3], Lemma 7.1). On a alors $f(E_\alpha) = 0$. Puisque $\mathfrak{w}_1^+$ est engendré linéairement par E_α, on a $f(X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{w}_1^+$. Par un raisonnement analogue on peut montrer que $f(X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{w}_1^-$. Par suite $f(X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{w}_1^c$. Il résulte de ce que on a démontre que $f(X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{m}_1^c$. Alors on a $I \cdot \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_1$. La variété $G_1 \cdot B/B$ est ainsi une sous-variété complexe de G/B.

On va montrer maintenant que la variété G/L se munit d'une structure complexe invariante par G telle que la projection canonique de G/B sur G/L soit holomorphe. On utilisera les notations introduites ci-dessus. L'automorphisme I de $\mathfrak{m}$ laisse le sous-espace $\mathfrak{w}_1$ invariant. Soit I' la restriction de I à $\mathfrak{w}_1$. On désignera par $X_{\mathfrak{w}_1}$ la composante de $X \in \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{w}_1$ relative à la décomposition $g = \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{l}$ $(\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{g}_2)$. On a alors les égalités suivantes :

a) $I'^2 = -1$;

https://doi.org/10.1017/S0027763000002191 Published online by Cambridge University Press

b) $[Y, I'\cdot X] = I'\cdot[Y, X]$, $Y\in\mathfrak{l}$, $Y\in\mathfrak{w}_1$;

c) $I'\cdot[X, Y]_{\mathfrak{w}_1} - [I'\cdot X, Y]_{\mathfrak{w}_1} - [X, I'\cdot Y]_{\mathfrak{w}_1} - I'\cdot[I'\cdot X, I'\cdot Y]_{\mathfrak{w}_1} = 0$, $X, Y\in \mathfrak{w}_1$.

(cf. [3]). L'automorphisme I' de $\mathfrak{w}_1$ définit donc une structure complexe invariante de G/L. Il est facile de voir que la projection canonique de G/B sur G/L est holomorphe. Puisque $G = G_1\times G_2$, $L = L_1\times G_2$, le groupe G_1 est transitif sur $W = G/L$ et le groupe d'isotropie de G_1 est égal à L_1. Le groupe L_1 étant le centralisateur d'un tore de G_1, W est un espace homogène kählérien du groupe compact semi-simple G_1 (voir [2]).

On a ainsi démontré le théoréme suivant.

Théorème 1'. *Soit V une variéte complexe compacte et soit G un groupe de Lie semi-simple connexe opérant sur V de manière transitive, holomorphe et presque effective. Supposons que V admette une mesure invariante par G. Soit $V = G/B$ et soit B_0 la composante connexe de l'élément neutre de B. Soient G_1 et G_2 la composante compacte et la composante ouverte de G. Alors G_2 est un groupe de Lie complexe. De plus, il existe un sous-groupe compact connexe L_1 du groupe compact G_1 avec les propriétés suivantes:*

a) *le groupe L_1 est le centralisateur d'un tore de G_1 dans G_1 et B_0 est un sous-groupe invariant de L_1 contenant la partie semi-simple de L_1. Le groupe B_0 est donc un C-sous-groupe de G_1 au sens de Wang;*

b) *soit $L = L_1\cdot G_2$. Alors le groupe B est contenu dans L et l'espace quotient $F = L/B$ est une sous-variété compacte complexe parallélisable de $V = G/B$. Le groupe $L' = L/B_0$ est un groupe complexe réductif et F est un quotient de L' par un sous-groupe discret:*

c) *l'espace quotient $W = G/L$ est un espace homogène kählérien du groupe compact semi-simple G_1;*

d) *la variété V est un espace fibré holomorphe de base W et de fibre F.*

5. *Construction des variétés complexes compactes semi-simples.* Soit G_1 un groupe de Lie compact semi-simple connexe et soit G_2 un groupe de Lie semi-simple complexe connexe et soit $G = G_1\times G_2$. Soit L_1 le sous-groupe de G_1 qui est le centralisateur d'un tore de G_1. Soit B_0 un sous-groupe fermé connexe de L_1 contenant la partie semi-simple de L_1 tel que $\dim L_1 - \dim B_0$ soit pair. Alors B_0 est un sous-groupe invariant de L_1 et le groupe quotient L_1/B_0

est un tore. Prenons un sous-groupe discret D du groupe $L' = L_1/B_0 \times G_2$ tel que l'espace quotient L'/D soit compact. Soit B l'image inverse de D dans $L = L_1 \times G_2$ par l'homomorphisme canonique de L sur L'. Alors B est un sous-groupe fermé de G contenu dans L et l'espace quotient G/B est compact. On voit facilement que le groupe B est unimodulaire et donc que l'espace quotient G/B admet une mesure invariante par G. On va montrer maintenant que l'espace G/B admet une structure complexe invariante par G. Dans ce but on utilisera les notations introduites au paragraphe 4. Soit donc

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{b},\ \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{g}_2,\ \ \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{w}_1,\ \ \mathfrak{l}_1 = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{b},\ \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{w}_1 + \mathfrak{l}_1.$$

On sait qu'il existe une structure complexe invariante de l'espace quotient G_1/B_0 vérifiant les propriétés suivantes (coir [3] et [5]): Soit I_1 l'automorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}_1$ defini par cette structure. Alors

1) $I_1 \cdot \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_1$;

2) $I_1 \cdot \mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}_1$ et la restriction I' de I_1 à $\mathfrak{w}_1$ définit une structure complexe invariante de G_1/L_1.

On voit facilement que $\mathrm{ad}.x \cdot \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_1$, $\mathrm{ad}.x \cdot \mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}_1$ et $\mathrm{ad}.x \cdot \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_2$ pour tout $x \in B$. On va montrer maintemant que $\mathrm{ad}.x(I_1 \cdot X) = I_1(\mathrm{ad}.x \cdot X)$ pour tout $x \in B$ et tout $X \in \mathfrak{m}_1$. Puisque B est un sous-groupe de $L = L_1 \times G_2$, tout élément x de B s'écrit $x = x_1 \cdot x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in G_2$. Pour tout $X \in \mathfrak{m}_1$ on a $\mathrm{ad}.x \cdot X = \mathrm{ad}.x_1 \cdot X$. Soit $X \in \mathfrak{n}_1$. L'espace vectoriel $\mathfrak{n}_1$ étant dans le centre de $\mathfrak{l}_1$, on a $\mathrm{ad}.x_1 \cdot X = X$ pour tout $X \in \mathfrak{n}_1$. Par suite $\mathrm{ad}.x_1(I_1 \cdot X) = I_1 \cdot X$ et $I_1(\mathrm{ad}.x_1 \cdot X) = I_1 \cdot X$ et donc $\mathrm{ad}.x_1(I_1 \cdot X) = I_1(\mathrm{ad}.x_1 \cdot X)$. Soit maintenant $X \in \mathfrak{w}_1$. Puisque la restriction de I_1 à $\mathfrak{w}_1$ définit une structure complexe invariante de G_1/L_1, on a $\mathrm{ad}.y_1(I_1 \cdot X) = I_1(\mathrm{ad}.y_1 \cdot X)$ pour tout $y_1 \in L_1$ et tout $X \in \mathfrak{w}_1$. En particulier $\mathrm{ad}.x_1(I_1 \cdot X) = I_1(\mathrm{ad}.x_1 \cdot X)$. Puisque $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{w}_1$, il résulte de ce que on a montré que $\mathrm{ad}.x(I \cdot X) = I(\mathrm{ad}.x \cdot X)$ pour tout $x \in B$ et $X \in \mathfrak{m}_1$.

D'autre part, le groupe G_2 étant un groupe complexe, il existe un automorphisme I_2 de l'algèbre $\mathfrak{g}_2$ tel que $I_2^2 = -1$ et que $\mathrm{ad}.y(I_2 \cdot X) = I_2(\mathrm{ad}.y \cdot X)$ pour tout $y \in G_2$ et tout $X \in \mathfrak{g}_2$. Soit maintenant I un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{g}_2$ défini par $I(X_1 + X_2) = I_1 \cdot X + I_2 \cdot X_2$, $X_1 \in \mathfrak{m}_1$, $X_2 \in \mathfrak{g}_2$. Il est facile de voir que I définit une structure complexe invariante de G/B. L'espace quotient G/B est ainsi une variété complex compacte semi-simple. Il résulte de ce que on a déjà montré que toute variété complexe compacte semi-

https://doi.org/10.1017/S0027763000002191 Published online by Cambridge University Press

simple se construit de cette manière.

6. *Démonstration du théorème* 2. Supposons maintenant que la variété $V=G/B$ soit kählérienne. Alors, la variété $F=L/B$ étant une sous-variété complexe de V, F est aussi kählérienne. Or F est parallélisable. D'après un théorème de Wang [6], F est alors un tore complexe. Un groupe de Lie complexe semi-simple de dimension positive ne peut pas opérer sur un tore complexe de manière holomorphe et presque effective, car le plus grand groupe connexe d'automorphismes d'un tore complexe est abélien. Par suite on a $G_2=(e)$ et donc $G=G_1$. Le groupe G est ainsi compact. Alors V admet une métrique kählérienne invariante par G et par suite V est un espace homogène kählérien du groupe compact semi-simple G. Le théorème 2 est ainsi démontré.

Bibliographie

[1] A. Borel, Density properties for certain subgroups of semi-simple groups without compact components, Ann. of Math., **72** (1960), p. 179–188.

[2] A. Borel, Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups, Proc. Nat. Acad. U.S.A., **75** (1954), p. 1147–1151.

[3] J. Hano and S. Kobayashi, A fibering of a class of homogeneous complex manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., **94** (1960), p. 233–243.

[4] Y. Matsushima, Sur les espaces homogènes kählériens d'un groupe de Lie réductif, Nagoya Math. Journ., **11** (1957), p. 53–60.

[5] H. C. Wang, Closed manifolds with homogeneous complex structure, Amer. Journ. Math., **76** (1954), p. 1–32.

[6] H. C. Wang, Complex parallisable manifolds, Proc. Amer. Math. Soc., **5** (1954), p. 771–776.

Institut de Mathématiques
Université d'Osaka

https://doi.org/10.1017/S0027763000002191 Published online by Cambridge University Press