Canad. Math. Bull. Vol. **26** (4), 1983

LA RÈGLE DU TRAPÈZE APPLIQUÉE À QUELQUES FONCTIONS SANS DÉRIVÉES

PAR
SERGE DUBUC ET FABIAN TODOR

RÉSUMÉ. Pour chaque nombre α de $(0, 1)$, nous construisons une fonction f qui est lipschitzienne d'ordre α et dont le reste $R_n(f)$ par l'application de la règle du trapèze est précisément égal à $1/n$ lorsque n est une puissance entière et arbitraire de 2.

1. **Introduction.** Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, la règle du trapèze pour estimer $\int_0^1 f(x)\,dx$ est la fonctionnelle

$$T_n(f)=\frac{1}{2n}f(0)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2n}f(1)$$

relative à la partition de l'intervalle unité en n sous-intervalles égaux. Le reste de la règle du trapèze est la fonctionnelle

$$R_n(f)=\int_0^1 f(x)\,dx-T_n(f).$$

Si f est la primitive d'une fonction intégrable au sens de Lebesgue, alors la suite $R_n(f)$ est $o(1/n)$ (cf. Polya et Szego [3], problème 10, partie II). D'autre part, si f est un peu plus irrégulière, si f est à variation bornée, on peut néanmoins montrer que $R_n(f)$ est $O(1/n)$. Ces résultats ont amené Brass à poser la question suivante: existe-t-il une fonction continue telle que $R_n(f)=1/n$ pour $n=1, 2, 3, \ldots$? A ce jour, cette question n'est pas tranchée.

On peut diminuer la difficulté du problème en se limitant à des partitions dyadiques de $[0, 1]$, c'est-à-dire à n'appliquer la règle du trapèze, $T_n(f)$ que pour les valeurs de n qui sont des puissances entières de 2. C'est dans cet esprit que Brass [1] a démontré que pour la fonction

$$f=-\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}\cos(2^m\pi x),\qquad R_{2^n}(f)=\frac{1}{2^n}\qquad n=0, 1, 2, \ldots$$

On peut remarquer que la fonction f n'est pas monotone. Le principal résultat que nous voulons établir est le suivant.

Reçu par la rédaction le 2 juillet 1982.
AMS Subject Classification (1980): Primary 65D32; Secondary 26A27

THÉORÈME 4. *Soit α un nombre positif inférieur à un, alors il existe une fonction f croissante que appartient à la classe de Lipschitz d'ordre α et telle que* $R_{2^n}(f) = 1/2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

2. **Étude d'une relation fonctionelle.** Avant de démontrer le théorème 4 tel que cité, nous construirons une fonction f continue qui dépendra d'un paramètre p compris entre $\frac{1}{2}$ et 1. Parce que cette fonction remplira une relation fonctionnelle simple, il nous sera facile d'appliquer la règle du trapèze à cette fonction.

On introduit une suite de suites: pour un entier positif n, $\{u_{i,n}\}_{i=1}^{2^n}$ est une suite de 2^n nombres définis par récurrence sur n.

$$u_{1,1} = p \quad \text{et} \quad u_{2,1} = 1 - p = q$$

$$\left.\begin{aligned} u_{2i-1,n+1} &= pu_{i,n} \\ u_{2i,n+1} &= qu_{i,n} \end{aligned}\right\} = i = 1, 2, \ldots, 2^n$$

On pose enfin $y_{j,n} = \sum_{i=1}^{j} u_{i,n}$. On démontre facilement le lemme suivant:

LEMME 1. *Si j, k, m et n sont des entiers naturels tels que* $0 \le j/2^m = k/2^n \le 1$, *alors* $y_{j,m} = y_{k,n}$.

Ce lemme permet de définir sans ambiguité f pour toute fraction dyadique: $f(j/2^n) = y_{j,n}$. Le prochain lemme établit la continuité de f.

LEMME 2. *Si x_1 et x_2 sont deux fractions dyadiques de l'intervalle* $[0, 1]$ *et si*

$$|x_2 - x_1| \le 1/2^n, \quad \textit{alors} \quad |f(x_2) - f(x_1)| \le 2p^n.$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x_1 \le x_2$. On peut trouver un entier k tel que

$$x_1 \le x_3 \le x_2 \quad \text{où} \quad x_3 = k/2^n.$$

Trois cas peuvent se présenter:

(a) $x_3 \ne 0$, $x_3 \ne 1$. On a les inégalités $0 \le x_3 - h \le x_1 \le x_3 \le x_2 \le x_3 + h \le 1$ avec $h = 1/2^n$. La fonction f est croissante. D'où

$$0 \le f(x_2) - f(x_3) \le f(x_3 + h) - f(x_3) \tag{1}$$

$$0 \le f(x_3) - f(x_1) \le f(x_3) - f(x_3 - h) \tag{2}$$

$$f(x_3 + h) - f(x_3) = u_{k+1,n} \le p^n \tag{3}$$

$$f(x_3) - f(x_3 - h) = u_{k,n} \le p^n \tag{4}$$

En faisant la somme des inégalités (1) et (2) et en se servant ensuite de (3) et de (4), nous obtenons

$$0 \le f(x_2) - f(x_1) \le 2p^n.$$

(b) Si $x_3 = 0$, alors $x_1 = 0$ et

$$0 \le f(x_2) - f(x_1) \le f(1/2^n) \le p^n.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1983-070-7 Published online by Cambridge University Press

(c) Si $x_3=1$, alors $x_2=1$ et

$$0 \le f(x_2)-f(x_1) \le 1-f(1-1/2^n) \le p^n.$$

L'inégalité $|f(x_2)-f(x_1)| \le 2p^n$ est donc toujours valide lorsque $|x_2-x_1| \le 1/2^n$.

THÉORÈME 3. *Soit p un nombre réel de l'intervalle* $(\frac{1}{2}, 1)$, *alors il existe une et une seule fonction bornée f définie sur* $[0, 1]$ *telle que la relation fonctionnelle suivante est satisfaite:*

$$f(t)=\begin{cases} pf(2t) & \textit{si} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ p+(1-p)f(2t-1) & \textit{si} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \tag{5}$$

Cette fonction f est une fonction croissante et appartient à la classe des fonctions de Lipschitz d'ordre $\alpha=-\log p/\log 2$.

Démonstration. (a) Vérifions d'abord l'existence d'une fonction f qui remplit la relation fonctionnelle (5). On définit f pour les fractions dyadiques de $[0, 1]$ comme il est indiqué après le Lemme 1. Le Lemme 2 fait voir que f est uniformément continue. f se prolonge donc par continuité à l'intervalle $[0, 1]$, puisque les fractions dyadiques sont denses. Pour vérifier que la relation (5) a lieu, il suffit de se limiter aux valeurs de t qui sont des fractions dyadiques. Supposons donc que $t=k/2^n$. Distinguons les deux cas $t \le \frac{1}{2}$ et $t \ge \frac{1}{2}$.

(aa) Supposons d'abord que $t \le \frac{1}{2}$. On sait que $f(t)=\sum_{i \le 1}^{k} u_{i,n}$. Or on montre par induction sur n que

$$u_{i,n+1}=pu_{i,n} \quad \text{si} \quad 1 \le i \le 2^n.$$

D'où

$$f(t)=p\sum_{i=1}^{k} u_{i,n-1}=pf(2t)$$

(ab) Supposons maintenant que $t \ge \frac{1}{2}$. On montre par induction sur n que

$$u_{2^n+i,n+1}=(1-p)u_{i,n} \quad \text{si} \quad 1 \le i \le 2^n$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=1}^{k} u_{i,n} \\ &= \sum_{i=1}^{2^{n-1}} u_{i,n} + \sum_{i=2^{n-1}+1}^{k} u_{i,n} \\ &= f(\tfrac{1}{2}) + \sum_{i=1}^{k-2^{n-1}} (1-p)u_{i,n-1} \\ &= p+(1-p)f(2t-1) \end{aligned}$$

(b) Déterminons l'ordre de grandeur du module de continuité de la fonction f construite. Soit $\delta \in (0, 1]$, considérons deux fractions dyadiques de $[0, 1]$ telle que $|x_2-x_1| \le \delta$. Il existe un et un seul entier n tel que $2^{-(n+1)} < \delta \le 2^{-n}$. Le Lemme 2 permet de dire que $|f(x_2)-f(x_1)| \le 2p^n$. Posons $\alpha=-\log p/\log 2$.

Puisque $p=2^{-\alpha}$, $p^n=(2^{-n})^\alpha=(2\,2^{-(n+1)})^\alpha\leq(2\delta)^\alpha$. D'où $|f(x_2)-f(x_1)|\leq 2^{\alpha+1}\delta^\alpha$. En procédant par continuité, on obtient que $|f(x_2)-f(x_1)|\leq 2^{\alpha+1}|x_2-x_1|^\alpha$ pour tout choix de nombres réels x_1 et x_2 de l'intervalle-unité.

Remarquons que cette inégalité décrit assez bien le module de continuité de f: si $x_1=0$ et $x_2=2^{-n}$, $f(x_2)-f(x_1)=p^n=|x_2-x_1|^\alpha$.

(c) Montrons que f est la seule fonction bornée qui remplit la relation fonctionnelle (5). Soit g une seconde fonction bornée, solution de la relation (5). Posons $h(t)=g(t)-f(t)$. La fonction h satisfait la relation

$$h(t)=\begin{cases} ph(2t) & \text{si} \quad 0\leq t\leq\frac{1}{2} \\ (1-p)h(2t-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases}$$

D'où

$$|h(t)|\leq p\sup\{|h(u)|:0\leq u\leq 1\}.$$

$$\|h\|_\infty\leq p\,\|h\|_\infty.$$

Alors $\|h\|_\infty=0$, ce qui revient à dire que $h\equiv 0$ et que $g\equiv f$. CQFD

REMARQUE. Lors du VIéme Congrès des Mathématiciens d'Expression Latine à Luxembourg, le premier auteur [2] a présenté un modèle de courbes irrégulières, dites hyperboliques. La courbe $(x(t), y(t))$ construite selon les deux vecteurs $(\frac{1}{2}, p)$, $(\frac{1}{2}, 1-p)$ donne par la seconde composante la fonction f alors que $x(t)\equiv t$.

3. **Utilisation de la règle trapèze pour des partitions dyadiques.** Dans cette section nous présentons la démonstration du théorème 4 citée dans l'introduction. Soit α un nombre positif inférieur à 1, posons $p=2^{-\alpha}$ et pour cette valeur de p, retenons la fonction croissante f décrite par le théorème 3 et qui remplit la relation (5). Cette relation permet le calcul par récurrence de $T_{2^n}(f)$, la règle du trapèze pour les partitions dyadiques. $T_1(f)=\frac{1}{2}(f(0)+f(1))=\frac{1}{2}$.

$$T_{2^{n+1}}(f)=\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{f(0)}{2}+\sum_{i=1}^{2^{n+1}-1}f(1/2^{n+1})+\frac{f(1)}{2}\right)$$

Selon la relation (5),

$$f(i/2^{n+1})=\begin{cases} pf(i/2^n) & \text{si} \quad 0\leq i\leq 2^n \\ p+(1-p)f((i-2^n)/2^n) & \text{si} \quad 2^n\leq i\leq 2^{n+1}\end{cases}$$

D'où

$$\tfrac{1}{2}f(0)+\sum_{i=1}^{2^n-1}f(i/2^{n+1})+\tfrac{1}{2}f(\tfrac{1}{2})=p\left(\tfrac{1}{2}f(0)+\sum_{i=1}^{2^n-1}f(i/2^n)+\tfrac{1}{2}f(1)\right)$$

$$\tfrac{1}{2}f(\tfrac{1}{2})+\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}-1}f(i/2^{n+1})+\tfrac{1}{2}f(1)=2^np+(1-p)\left(\tfrac{1}{2}f(0)+\sum_{i=1}^{2^n-1}f(i/2^n)+\tfrac{1}{2}f(1)\right)$$

$$T_{2^{n+1}}(f)=p/2+\tfrac{1}{2}T_{2^n}(f)$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1983-070-7 Published online by Cambridge University Press

Les nombres $T_{2^n}(f)$ satisfont une relation linéaire de récurrence d'ordre un dont la solution est

$$T_{2^n}(f) = p(1-2^{-n}) + 2^{-(n+1)}.$$

Evaluons l'intégrale de f sur $[0, 1]$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} T_{2^n}(f) = p.$$

Le reste dans la règle du trapèze sera

$$R_{2^n}(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - T_{2^n}(f) = (p-\tfrac{1}{2})2^{-n}.$$

Soit g la fonction f divisée par la quantité $(p-\frac{1}{2})$, alors $R_{2^n}(g) = 1/2^n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ Le théorème 4 est ainsi démontré.

Bibliographie

1. H. Brass *Der wertebereich des trapezverfahrens*. Numerische Integration (Tagung, Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1978) pp. 98–108. Internat. Ser. Numer. Math. 45.

2. S. Dubuc, *Une foire de courbes sans tangentes*. Actes VIe Congrès du groupement des mathématiciens d'expression latine. Gauthier-Villars, Paris (1982).

3. G. Polya et G. Szegö, *Problems and Theorems in analysis*. Springer-Verlag New York (1972).

Département Mathématiques et de Statistique
Université de Montréal
Montréal, Québec
H3C 3J7
Canada

https://doi.org/10.4153/CMB-1983-070-7 Published online by Cambridge University Press