CONSTRUCTION D'UNE THEORIE PLANETAIRE AU TROISIEME ORDRE DES MASSES

J. L. Simon
Bureau des Longitudes, Paris, France

1. INTRODUCTION

Les théories planétaires avec termes séculaires ne sont valables, par suite de la présence de termes augmentant avec le temps dans les éléments métriques, que dans un intervalle de temps limité (de l'ordre de mille ans) mais on peut les construire avec une bonne précision sur cet intervalle. Les recherches récentes sur la construction de formulaires pour le développement de la fonction perturbatrice bien adaptés au calcul sur ordinateur (Iszak 1964, Brumberg 1967, Chapront 1970) et les progrès réalisés dans les méthodes de calcul utilisées (Chapront et al. 1974) nous permettent d'espérer une amélioration sensible des théories existantes et des éphémérides qui en résultent. Les théories avec termes séculaires actuellement en construction au Bureau des Longitudes sont semi-numériques. Les éléments métriques et angulaires s'expriment sous la forme :

$$x = x_0 + t(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots) + \left(\sum_{i_1 i_2} A_{i_1 i_2} \cos(i_1\lambda_1 + i_2\lambda_2 + \ldots)\right)\left(b_0 + b_1 t + \ldots\right) + \left(\sum B_{i_1 i_2} \sin(i_1\lambda_1 + i_2\lambda_2 + \ldots)\right)\left(b'_0 + b'_1 t + \ldots\right) \qquad (1)$$

Les coefficients a_i, b_i, A_{ii}, B_{ii} etc... sont des coefficients numériques; les développements sont analytiques par rapport aux longitudes moyennes des planètes ($\lambda_i = \lambda_{i0} + n_i t$), nous appellerons "arguments à longue période" ceux qui font apparaître de petits diviseurs dans l'intégration, c'est à dire ceux pour lesquels on a $i_1 n_1 + i_2 n_2 + \ldots \ll n_i$ (exemple : la grande inégalité $2\lambda_j - 5\lambda_s$ de période 1000 ans). Les théories sont entreprises avec des valeurs modernes des masses et des constantes d'intégration (qu'on améliorera par la suite éventuellement) ce qui donne déja, indépendemment des progrès en précision que l'on souhaite apporter aux théories anciennes, une actualisation de ces théories. La

V. Szebehely (ed.), Dynamics of Planets and Satellites and Theories of Their Motion, 65-75.

manière dont nous avons choisi nos constantes d'intégration est décrite par Simon et Bretagnon (1975).

La construction de théories avec termes séculaires est actuellement entreprise, au Bureau des Longitudes, par deux méthodes différentes. L'une procède ordre par ordre par rapport aux masses et l'autre par approximation successive. Nous allons donner brièvement le principe de ces deux méthodes avant de décrire plus en détail la construction d'une théorie planétaire à l'ordre trois des masses et de discuter les premiers résultats obtenus.

2. METHODES DE CONSTRUCTION D'UNE THEORIE PLANETAIRE A TERMES SECULAIRES

2. 1. Théorie ordre par ordre par rapport aux masses (type Le Verrier)

Le système à intégrer est celui des équations de Lagrange, il a la forme:

$$\frac{dx}{dt} = \mu F(x_i) \tag{2}$$

où μ est un paramètre de l'ordre des masses.
$F(x_i)$ se calcule à partir de la fonction perturbatrice et de ses dérivées par rapport aux éléments. On cherche à exprimer la solution sous la forme:

$$x = x_0 + \mu\Delta^1 x + \mu^2\Delta^2 x + \mu^3\Delta^3 x + \ldots \tag{3}$$

En substituant (3) dans (2), en développant suivant la formule de Taylor et en identifiant les deux membres en μ, on obtient:

$$\frac{d\Delta^1 x}{dt} = F(x_i^0) \tag{4}$$

d'où, par intégration,les perturbations du premier ordre $\Delta^1 x$,

$$\frac{d\Delta^2 x}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_i}\,\Delta^1 x_i \tag{5}$$

d'où le deuxième ordre $\Delta^2 x$,

$$\frac{d\Delta^3 x}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_i}\,\Delta^2 x_i + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\,\Delta^1 x_i \Delta^1 x_j \tag{6}$$

d'où le troisième ordre $\Delta^3 x$.
$F(x_i^0)$, $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ sont calculés analytiquement pour chaque argument, à partir des développements analytiques de R et de ses dérivées; on substitue ensuite les valeurs numériques des paramètres. On obtient donc dans cette méthode:

- la solution, semi-numérique, sous la forme (3)
- les expressions des séries $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ qui permettront de recalculer facilement les perturbations pour une petite modification des constantes. Notons, en particulier, que l'obtention de $\Delta^1 x$ et des $\frac{\partial F}{\partial x_i}$

https://doi.org/10.1017/S0252921100062126 Published online by Cambridge University Press

est équivalente à un premier ordre analytique.

2.2 Théorie par approximation successive

Cette méthode est mise au point par P. Bretagnon. Le système à intégrer a la forme (2) mais on utilise un formulaire qui permet d'intégrer les équations de Lagrange sous une forme fermée par rapport aux variables sans qu'il soit besoin de développer la fonction perturbatrice (Chapront et al., 1974). Il faut résoudre l'équation de Képler et les formules habituelles du mouvement képlérien pour revenir de l'anomalie vraie v à l'anomalie moyenne l. L'intégration se fait par itération, notons x^n la solution de l'itération n, nous aurons, pour la première itération:

$$\frac{dx^1}{dt} = \mu F(x_i^0) \tag{7}$$

d'où $x^1 = x^0 + \mu\Delta^1 x$ avec: $\mu\Delta^1 x = \mu\int F(x_i^0)dt$.
Le résultat de la première itération est rigoureusement identique au premier ordre de la méthode précédente. Pour la deuxième itération nous aurons:

$$\frac{dx^2}{dt} = \mu F(x^1) = \mu F(x_i^0) + \mu^2 \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta^1 x_i + \frac{\mu^3}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \Delta^1 x_i \Delta^1 x_j + \ldots \tag{8}$$

On voit que le résultat de la deuxième itération contient des termes d'ordre trois et plus par rapport aux masses et est donc différent du deuxième ordre de la méthode exposée en 2.1. A l'itération n nous aurons:

$$\frac{dx^n}{dt} = \mu F(x^{n-1}) \tag{9}$$

Nous discuterons plus loin les avantages et inconvénients respectifs de ces deux méthodes dont l'application simultanée permet, soulignons le, de précieuses comparaisons et vérifications.

3. CONSTRUCTION D'UNE THEORIE A L'ORDRE TROIS DES MASSES

Nous appliquons la méthode décrite en 2.1. La manière dont nous avons développé la fonction perturbatrice et les dérivées premières des équations de Lagrange ainsi que la façon dont a été constitué la liste d'arguments ont été décrites en détail par Simon et Chapront (1974). Le calcul des dérivées secondes des équations de Lagrange qui sert à la construction du troisième ordre sera exposé dans un article ultérieur. Nous allons nous contenter, ici, de préciser les notations et donner les caractéristiques essentiels de nos développements avant de décrire, ordre par ordre, la forme de la solution et de discuter la précision des calculs

3.1. Notations. Caractéristiques des développements

Les variables métriques sont le demi-grand axe a, l'excentricité e et le sinus de la demi-inclinaison γ; les variables angulaires, la longitude moyenne λ, la longitude du périhélie $\bar{\omega}$ et la longitude du noeud h.

https://doi.org/10.1017/S0252921100062126 Published online by Cambridge University Press

On utilisera aussi l'anomalie moyenne l et l'argument du périhélie g ($\lambda = l + g + h$; $\bar{\omega} = g + h$). Considérons deux planètes P de masse m (planète intérieure) et P' de masse m' (planète extérieure) et un argument donné:

$$\Phi = ql + q'l' + sg + s'g' + j(h-h') \tag{10}$$

q, q', s, s', j sont des entiers et l', g', h' se rapportent à la planète extérieure. On développe la fonction perturbatrice R à partir du formulaire de Brumberg (1967), suivant les méthodes de Chapront (1970) sous la forme:

$$R = \mu \sum_{qq'ss'j} A_{qq'ss'j} \cos\Phi \tag{11}$$

$A_{qq'ss'j}$ est une fonction analytique du rapport des demi-grands axes α et de e, e', γ, γ'; μ est un coefficient numérique égal à $(n\alpha m'/1+m)$ dans le cas d'une planète intérieure perturbée par une planète extérieure et à $(n'm/1+m')$ dans le cas contraire.

Nous avons constitué une liste d'environ 8000 arguments Φ de la forme (10) répartis en 250 "blocs (q,q')" d'arguments correspondant à une combinaison q,q' donnée des anomalies moyennes, de façon à obtenir toutes les inégalités du premier ordre supérieures à 0",001. Pour chaque argument nous calculons les développements analytiques de $A_{qq'ss'j}$ et de ses dérivées premières, secondes et troisièmes. Les développements sont effectués à l'ordre 9 par rapport à e, e', γ, γ' pour un certain nombre d'arguments considérés comme petits diviseurs, à l'ordre 7 pour les autres. On substitue ensuite numériquement, dans les développements, les paramètres pour toutes les combinaisons de planètes (m,m') correspondant aux quatre grosses planètes et on rassemble les résultats pour chaque bloc (q,q'). L'ensemble du calcul analytique du premier ordre, des dérivées premières et secondes des équations de Lagrange, pour les quatre grosses planètes, a demandé quatre heures de calcul (dont la moitié pour les dérivées secondes) sur l'IBM 360-65 de l'INAG.

3.2. Forme de la solution

Nous allons décrire la solution en nous bornant, pour simplifier l'écriture, au cas d'une planète P de masse (m) perturbée par une planète P' de masse (m'). Dans le problème réel de l'une des quatre grosses planètes perturbée par les trois autres, la forme de la solution est identique, les séries étant à quatre arguments.

a. Le premier ordre. On intègre le système (4). F se présente sous la forme d'une série trigonométrique à deux arguments λ et λ' qui contient, sauf pour l'équation en $\Delta^1 a$, un terme constant. Après intégration le premier ordre $\Delta^1 x$ se présente donc sous la forme:

$$\Delta^1 x = x_1^1 t + X^1(\lambda, \lambda') \tag{12}$$

t représente le temps, X^1 est une série trigonométrique à deux arguments

https://doi.org/10.1017/S0252921100062126 Published online by Cambridge University Press

x_1^1, qui est le terme constant de F, est la variation séculaire du premier ordre de x. Il est nul pour le demi-grand axe a.

b. Le deuxième ordre. On intègre le système (5). $\Delta^1 x_i$ a la forme (12) et $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ est une série trigonométrique à deux arguments qui contient, éventuellement, un terme constant. L'expression à intégrer se présente sous la forme:

$$\frac{d\Delta^2 x}{dt} = b + ct + S(\lambda,\lambda') + tS'(\lambda,\lambda') \qquad (13)$$

t représente le temps, b et c sont des coefficients numériques et S et S', des séries de Fourier. L'intégration d'expressions du type $\int tS'(\lambda,\lambda')dt$ donne une nouvelle série trigonométrique et des termes mixtes de la forme $tT(\lambda,\lambda')$ où T est une série de Fourier. Ces termes seront appelés "termes en tsint". Après intégration, le deuxième ordre s'écrit:

$$\Delta^2 x = x_1^2 t + x_2^2 t^2 + X^2(\lambda,\lambda') + tY^2(\lambda,\lambda') \qquad (14)$$

x_1^2 est la variation séculaire du deuxième ordre de l'élément x, x_2^2 le terme en t^2, X^2 représente les perturbations périodiques du deuxième ordre, Y^2 les perturbations en tsint.

c. Le troisième ordre. On intègre (6). $\Delta^1 x_i$ et $\Delta^1 x_j$ ont la forme (12), $\Delta^2 x_i$, la forme (14); $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ sont des séries de Fourier avec, éventuellement, un terme constant. L'expression à intégrer est:

$$\frac{d\Delta^3 x}{dt} = b + ct + dt^2 + S(\lambda,\lambda') + tS'(\lambda,\lambda') + t^2 S''(\lambda,\lambda') \qquad (15)$$

L'intégration d'expressions du type $\int t^2 S''(\lambda,\lambda')dt$ donne des séries de Fourier, des séries en tsint et des séries du type $t^2 T(\lambda,\lambda')$ où T est une série de Fourier. Ces derniers termes seront appelés "termes en t^2sint". Le troisième ordre a donc la forme:

$$\Delta^3 x = x_1^3 t + x_2^3 t^2 + x_3^3 t^3 + X^3(\lambda,\lambda') + tY^3(\lambda,\lambda') + t^2 Z^3(\lambda,\lambda') \qquad (16)$$

3.3. Précision des calculs

Le calcul du deuxième et du troisième ordre s'opère donc en multipliant entre elles des séries de Fourier. Les méthodes de programmation utilisées ont été décrites par Chapront et al. (1974). Les calculs s'effectuent avec une précision variable suivant les arguments, de la manière suivante:

a. au deuxième ordre. Le calcul du deuxième membre de l'équation (5) revient à effectuer une somme de produits de deux séries de Fourier $\sum A_i B_i$. Un terme a_i de la série A_i est égal à:

$$a_i = \alpha_i \cos\phi_i + \alpha_i' \sin\phi_i \qquad (17)$$

α_i et α_i' sont des coefficients numériques et l'argument ϕ_i est égal à: $\phi_i = \sum_{j=1,4} p_j \lambda_j$ où les p_j sont des entiers. Un élément b_i de B_i s'écrit:

https://doi.org/10.1017/S0252921100062126 Published online by Cambridge University Press

$$b_i = \beta_i \cos\psi_i + \beta'_i \sin\psi_i \qquad (18)$$

avec $\psi_i = \sum_{j=1,4} q_j\lambda_j$. Nous noterons:

$$|a_i| = |\alpha_i| + |\alpha'_i|, \ |b_i| = |\beta_i| + |\beta'_i| \qquad (19)$$

Dans la série résultat un argument est de la forme $\sum_{j=1,4} r_j\lambda_j$ les r_j étant des entiers. Si le diviseur qu'il donne dans l'intégration ($\sum_j r_j n_j$ où les n_j sont les moyens mouvements) est inférieur à une certaine limite arbitraire (fixée à 6000"/an) il est considéré comme "petit diviseur". Les séries A_i et B_i sont, avant produit, rangés par valeurs décroissantes de $|a_i|$ et $|b_i|$. Le produit s'effectue en utilisant une précision "standard" ε_0 et une précision ε_1, plus petite, pour les diviseurs. Soit a_h le h^e élément de la série A_i ordonnée suivant $|a_i|$, on effectuera tous les produits $a_h b_j$ pour lesquels on a: $|a_h||b_j| \geq \varepsilon_0$. Soit b_k le premier élément de B_i pour lequel on a: $|a_h||b_k| < \varepsilon_0$, on regardera ensuite si les arguments résultants correspondant aux produits $a_h b_l$ ($l \geq k$) et pour lesquels $|a_h||b_l| \geq \varepsilon_1$ sont des petits diviseurs. C'est seulement dans ce cas qu'on effectuera les produits. L'exploration est terminée quand on rencontre un élément b_m tel que $|a_h||b_m| < \varepsilon_1$. Cette méthode permet de calculer les petits diviseurs avec une très bonne précision, sans conserver, avant intégration, un nombre de termes trop important. Nous avons construit notre deuxième ordre avec une précision, avant intégration, de 10^{-7}" pour les petits diviseurs, 10^{-5}" pour les autres.

b. <u>au troisième ordre.</u> Le calcul des $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \Delta^1 x_i \Delta^1 x_j$ revient à faire une somme de produits de trois séries. Une fois les $\Delta^1 x_i \Delta^1 x_j$ calculés on pourra appliquer la méthode précédente aux produits $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ $(\Delta^1 x_i \Delta^1 x_j)$ mais il faut calculer les $\Delta^1 x_i \Delta^1 x_j$ avec toute la précision nécessaire. Toutefois on pourra limiter le nombre de termes à conserver dans les $\Delta^1 x_i \Delta^1 x_j$ en utilisant une intéressante propriété des séries $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ dans le cas "planète extérieure perturbée par planète intérieure" (ex. Uranus-Jupiter où Uranus-Saturne). Dans ce cas en effet ces séries ont généralement deux où trois termes "extraordinaires" beaucoup plus importants, numériquement, que les autres (de dix à cent fois). Ceci est une conséquence de la présence de termes en $(1/\alpha^2)$ dans la fonction perturbatrice pour ce type de couples. On calculera donc, dans ce cas, les $\Delta^1 x_i \Delta^1 x_j$ avec deux précisions, l'une ε'_0 liée aux termes "ordinaires" de la série correspondante $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ et l'autre ε'_1 de dix à cent fois plus petite. On calculera tous les termes du produit supérieurs

https://doi.org/10.1017/S0252921100062126 Published online by Cambridge University Press

à ε'_0 et on ne calculera les termes compris entre ε'_0 et ε'_1 qu'après avoir vérifié qu'ils donneront, par combinaison avec les termes "extraordinaires" de la série $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ correspondante, des petits diviseurs dans le produit final. Dans le cas "planète intérieure perturbée par planète extérieure" (Uranus-Neptune) les séries $\partial^2 F/\partial x_i \partial x_j$ n'ont pas de coefficients numériques trop gros et le calcul des $\Delta^1 x_i . \Delta^1 x_j$ s'effectue sans problème avec une seule précision. Cette méthode permet de limiter considérablement le nombre de termes à conserver dans les produits $\Delta^1 x_i . \Delta^1 x_j$ d'où un gain important en temps de calcul et en place pour stocker les séries.

Avec ces méthodes les produits sont effectués à une précision suffisante pour que les pertes de précision dans nos calculs soient dues uniquement aux limitations en ordre de nos développements et aux limites en nombre de notre liste d'arguments de départ.

4. RESULTATS

Dans ce paragraphe les indices 1,2,3,4 se rapportent respectivement aux planètes Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune.

A l'heure actuelle le calcul des perturbations du premier et du deuxième ordre des quatre grosses planètes est terminé. Le premier ordre a été comparé avec les résultats obtenus par P. Bretagnon lors de sa première itération. L'accord est total à la précision de 0",001 (Simon et Bretagnon, 1975). Le deuxième ordre, lui, n'est pas tout à fait identique à la deuxième itération de P. Bretagnon, néanmoins les écarts, tant sur les termes périodiques que sur les termes en tsint restent faibles (quelques dixièmes de ") et de l'ordre des perturbations d'ordre supérieur sauf pour quelques arguments à longue période (en particulier $\lambda_3 - 2\lambda_4$) pour lesquels se posent, pour le moment, des problèmes de convergence dans la méthode itérative (Bretagnon, 1977). Ces résultats seront prochainement intégralement publiés. Le tableau 1 donne, à titre d'illustration, pour les variables λ et e, les deux plus gros termes (plus, eventuellement, le plus important terme à courte période) des perturbations du premier ordre $\Delta^1 x$, du deuxième ordre périodique $\Delta^2 x_P$, du deuxième ordre en tsint $\Delta^2 x_T$; (q_1, q_2, q_3, q_4) désigne l'argument $q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 + q_4\lambda_4$; c_1 et s_1 sont les coefficients du cosinus et du sinus exprimés en ". Pour les termes en tsint c_1 et s_1 représentent la contribution au bout de 1000 ans. Le premier ordre $\Delta^1 \lambda_P$ comprend environ 400 termes supérieurs à 0",001 dont une centaine supérieurs à 0",1; $\Delta^2 \lambda_P$ comprend 650 termes supérieurs à 0",001 dont 80 supérieurs à 0",1; $\Delta^2 \lambda_T$ comprend 150 termes donnant, au bout de mille ans, une contribution supérieure à 0",001 et 20 donnant une contribution supérieure à 0",1. (La planète que l'on considère ici est la planète Uranus.)

Nous construisons actuellement les perturbations du troisième ordre de la planète Uranus. Les théories existantes de cette planète (Gaillot, 1910) sont, en effet, moins précises que celles de Jupiter et Saturne

https://doi.org/10.1017/S0252921100062126 Published online by Cambridge University Press

et on peut espérer qu'une théorie au troisième ordre apportera une amélioration importante. Le calcul des perturbations périodiques n'a été, pour le moment, conduit qu'à une précision limitée de 0",05. Nous avons comparé la théorie au deuxième ordre des quatre grosses planètes puis cette théorie corrigée du troisième ordre provisoire d'Uranus avec une intégration numérique des quatre grosses planètes faite à partir de valeurs initiales données par la théorie,à l'aide du programme de Schubart et Stumpff (1966). Sur un intervalle de temps d'environ 200 ans la contribution des termes du troisième ordre en tsint et t^2sint, négligés pour le moment n'est pas trop importante et on a constaté, en ce qui concerne les éléments d'Uranus, que les écarts entre la théorie et l'intégration numérique étaient divisés par un facteur cinq environ lorsqu'on tenait compte du troisième ordre provisoire. Ce résultat est satisfaisant et permet de penser, en particulier, qu'aucune erreur n'a été commise dans le calcul des dérivées des équations de Lagrange.

Depuis cette comparaison nous avons calculé les termes en tsint et t^2sint du troisième ordre. Il reste à calculer la partie périodique à la précision finale et à effectuer une nouvelle comparaison à l'intégration numérique sur un intervalle de temps plus large (1000 ans). Le tableau 2 donne, pour la planète Uranus avec les mêmes conventions que le tableau 1, les valeurs des deux plus importants termes (plus, éventuellement, le plus grand terme à courte période) des séries du troisième ordre périodique, en tsint et en t^2sint pour les variables λ et e. Pour les séries en t^2sint, $\Delta^3\lambda_{T2}$ et $\Delta^3 e_{T2}$, nous donnons la valeur de la contribution de ces termes au bout de mille ans. Les vérifications n'étant pas terminées, ces résultats ne sont pas définitifs mais donnent néanmoins une bonne idée de l'importance des perturbations du troisième ordre par rapport aux ordres précédents. On notera, en particulier, l'importance des termes en tsint d'ordre trois (la série $\Delta^3\lambda_T$ contient 25 termes donnant une contribution supérieure à 0",1 au bout de mille ans) et le fait que les plus gros termes périodiques, à courte période, d'ordre trois sont de l'ordre de 1".

Nous terminerons par la remarque suivante: pour certains arguments à longue période, les contributions au troisième ordre venant de $\frac{\partial F}{\partial x_i}\Delta^2 x_i$ d'une part et de $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ d'autre part sont importantes mais voisines et de signe contraire. Ainsi pour le terme en $\lambda_3-2\lambda_4$ de la partie périodique du troisième ordre du demi-grand axe, ces deux contributions sont respectivement 15",8 $\cos(\lambda_3-2\lambda_4)$ + 0",6 $\sin(\lambda_3-2\lambda_4)$ et -15",7 $\cos(\lambda_3-2\lambda_4)$ - 0",7 $\sin(\lambda_3-2\lambda_4)$ soit un total de 0",14 $\cos(\lambda_3-2\lambda_4)$ - 0",08 $\sin(\lambda_3-2\lambda_4)$. On peut expliquer cette propriété. Notons $S(q_1,q_2,q_3,q_4)$ le terme d'argument $q_1\lambda_1+q_2\lambda_2+q_3\lambda_3+q_4\lambda_4$ d'une série S. L'équation de Lagrange en a est du type:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{a_0}\right) = \mu F \tag{20}$$

où μ est un paramètre de l'ordre des masses. Nous poserons: $\Delta^p a = \frac{1}{a_0}\delta^p a$ où $\delta^p a$ désigne les perturbations d'ordre p de a et nous noterons

TABLEAU 1. Résultats du premier et du deuxième ordre d'Uranus

	(q_1,q_2,q_3,q_4)	c_1	s_1
$\Delta^1\lambda_P$	0 0 1 -2	233,48	-2954,99
	1 0 -1 0	-0,06	704,72
$\Delta^2\lambda_P$	0 0 1 -2	-19,12	-133,00
	2 -6 +3 0	7,31	31,80
	1 0 -2 +2	-0,40	-5,10
$\Delta^2\lambda_T$	0 0 1 -2	-43,53	10,35
	0 1 -3 0	-11,78	-8,87
	0 1 -2 0	1,60	2,78
$\Delta^1 e_P$	1 0 0 0	-561,20	76,02
	0 0 1 -2	417,98	56,15
$\Delta^2 e_P$	1 0 -1 +2	12,13	-3,32
	1 0 +1 -2	-12,46	0,02
$\Delta^2 e_T$	1 0 0 0	-1,05	-7,99
	0 0 1 -2	0,81	-5,96

TABLEAU 2. Résultats du troisième ordre d'Uranus

	(q_1,q_2,q_3,q_4)	c'_1	s_1
$\Delta^3\lambda_P$	0 0 1 -2	4,98	6,99
	0 0 2 -4	2,49	3,33
	1 0 -2 +2	0,03	-0,25
$\Delta^3\lambda_T$	2 -6 +3 0	5,57	-4,17
	0 0 1 -2	-5,14	2,27
	0 1 -2 0	0,44	0,57
$\Delta^3\lambda_{T2}$	0 1 -3 0	-0,06	1,01
	0 0 1 -2	0,59	0,03
	0 1 -2 0	0,14	-0,11
$\Delta^3 e_P$	0 0 2 -4	-0,91	-0,16
	1 0 0 0	0,80	-0,11
$\Delta^3 e_T$	0 1 -3 0	-1,09	0,56
	2 -6 +3 0	0,68	0,35
	1 0 0 0	-0,06	-0,68
$\Delta^3 e_{T2}$	0 1 -3 0	0,17	0,31
	0 0 1 -2	-0,05	0,05
	1 0 0 0	0,06	0,04

https://doi.org/10.1017/S0252921100062126 Published online by Cambridge University Press

$\{1\}$ la contribution provenant de $\partial F/\partial x_i . \Delta^2 x_i$, $\{2\}$ la contribution venant de $\partial^2 F/\partial x_i \partial x_j . \Delta^1 x_i \Delta^1 x_j$. On constate, numériquement, que $\{1\}$ provient essentiellement du produit: $\{1\} \simeq \frac{\partial F^1}{\partial a_3}(1,0,-1,0)\left(\Delta^2 a_3(1,0,0,-2) + \Delta^2 a_3\right.$ $\left.(1,0,-2,2)\right)$, la quantité entre crochets provenant, elle même, essentiellement de l'intégration:

$$\int \frac{\partial F^1}{\partial \lambda_3}(1,0,-1,0).\Delta^1 \lambda_3(0,0,1,-2)dt$$

$\{2\}$ provient principalement du produit $\{2\} \simeq \frac{\partial^2 F^1}{\partial a_3 \partial \lambda_3}(1,0,-1,0).\Delta^1 a_3(1,$ $0,-1,0)\Delta^1 \lambda_3(0,0,1,-2)$. L'argument $\lambda_3 - 2\lambda_4$ variant lentement avec le temps on peut admettre que: $\{1\} \simeq \frac{\partial F^1}{\partial a_3}(1,0,-1,0).\Delta^1 \lambda_3(0,0,1,-2).\int \frac{\partial F^1}{\partial \lambda_3}(1,0,-1,0)dt$

De (20) on déduit: $\int \frac{\partial F^1}{\partial \lambda_3}(1,0,-1,0) = \frac{\partial}{\partial \lambda_3}\Delta^1 a_3(1,0,-1,0)$. Posons:

$A = \frac{\partial F^1}{\partial a_3}(1,0,-1,0)$, $B = \Delta^1 a_3(1,0,-1,0)$, nous pouvons écrire:

$\{1\} \simeq \Delta^1 \lambda_3(0,0,1,-2).A\frac{\partial B}{\partial \lambda_3}$, $\{2\} \simeq \Delta^1 \lambda_3(0,0,1,-2).B\frac{\partial A}{\partial \lambda_3}$

On vérifie aisément que $A\frac{\partial B}{\partial \lambda_3}$ et $B\frac{\partial A}{\partial \lambda_3}$ ont des termes constants opposés et, par suite, $\{1\} \simeq -\{2\}$.

Pour la variable λ, à cause de la double intégration, ce phénomène donne des résultats remarquables, le terme d'ordre trois en $(\lambda_3 - 2\lambda_4)$ qui est de l'ordre d'une dizaine de " s'obtenant par différence de deux termes de l'ordre de 1200". Ce phénomène explique les difficultés de convergence pour l'argument $\lambda_3 - 2\lambda_4$ rencontrées dans la méthode itérative; en effet on voit d'après (8) que les termes en $\partial^2 F/\partial x_i \partial x_j\ \Delta^1 x_i \Delta^1 x_j$ apparaissent dès la deuxième itération, sans évidemment, les termes en $\partial F/\partial x_i\ \Delta^2 x_i$. Cette propriété se reproduit pour d'autres arguments à longue période et pour toutes les variables en utilisant, éventuellement, d'autres dérivées (en particulier les dérivées de F^1 par rapport à e et $\bar{\omega}$). Notons que la vérification numérique de ce phénomène donne une bonne présomption d'exactitude du calcul de nos dérivées.

5. CONCLUSION

Les résultats obtenus nous permettent d'espérer obtenir avec une bonne précision, tant sur les arguments à courte période que sur les petits diviseurs, les perturbations du troisième ordre d'Uranus. Les dérivées secondes des équations de Lagrange ont été calculées pour tous les couples correspondant aux quatre grosses planètes et il sera facile de calculer ensuite les troisièmes ordres des autres grosses planètes. A ce stade les perturbations à courte période seront connues avec une précision de quelques centièmes de ". En revanche, sur les termes à longue période, il manquera des termes d'ordre quatre qui peuvent attein-

https://doi.org/10.1017/S0252921100062126 Published online by Cambridge University Press

dre quelques " sur la variable λ. Un quatrième ordre, par cette méthode, est tout à fait envisageable mais risque d'être assez lourd. On peut penser que la méthode itérative, dont la mise en oeuvre n'est pas plus compliquée d'itération en itération, donnera plus rapidement ces termes à longue période avec la même précision que les autres.

REMERCIEMENTS

Je remercie vivement Monsieur J. Chapront qui m'a prodigué conseils et encouragements tout au long de ce travail et Monsieur P. Bretagnon dont les travaux m'ont permis de précieuses vérifications et de fructueuses discussions. Je remercie également Monsieur J. Schubart qui nous a donné son programme d'intégration numérique et Monsieur R. Dvorak qui nous a aidé à utiliser ce programme.

'Construction of a Planetary Theory to the Third Order of the Disturbing Masses' by J.L. Simon

ABSTRACT. We recall briefly the sense which is given to a planetary theory of the Le Verrier type (i.e., with secular variations in the metrical elements. The solutions are developed with elliptical coordinates. We discuss the results obtained, order by order till the third order of the masses.

REFERENCES

Bretagnon, P. 1977, same issue
Brumberg, V. 1967, Bull. Inst. Theor. Astron. T11, 125
Chapront, J. 1970, Astronom. & Astrophys. 7,175
Chapront, J., Chapront, M., Simon, J.L. 1974, Astron. & Astrophys. 31,151
Chapront, J., Bretagnon, P., Mehl, M. 1975, Celes. Mech. Vol 11, 379
Gaillot, A. 1910, Ann. Obs. Paris, Vol 28
Iszak, I.G. 1964, Smithsonian Astrophys. Observ. Special report 140
Le Verrier, U.J.J. 1855, Ann. Obs. Paris, Vol 1
Schubart, J., Stumpff, P. 1966, Veröffentlichungen des Astronomischen Rechen-instituts. Heidelberg. Nr 18
Simon, J.L., Bretagnon, P. 1975, Astron. & Astrophys. 42,259
Simon, J.L., Bretagnon, P. 1975, Astron. & Astrophys. Suppl. 22,107
Simon, J.L., Chapront, J. 1974, Astron. & Astrophys. 32,51