

## Représentations cristallines de torsion

NATHALIE WACH

*U.F.R. de Mathématiques et I.R.M.A., Université Louis Pasteur, 7 rue René Descartes, 67084  
Strasbourg cedex France*

Received 27 June 1995; accepted in final form 7 February 1996

**Abstract.** In this paper, we study representations of a Galois group of a local field absolutely unramified whose residue field is perfect of characteristic  $p$  and give two ways of recognize crystalline representations with weights between  $r$  and  $r + p - 1$ . The first one is the description of terms of weakly admissible filtered modules proved by J.-M. Fontaine and G. Laffaille (Ann Sc ENS 1982): here a new proof of this result is proposed (second chapter). The second criterion (third chapter) is the equivalence between crystalline representations with weights between  $r$  and  $r + p - 1$  and representations of finite ‘cr-height’  $\leq p - 1$ , result announced by J.-M. Fontaine in a paper edited a few years ago where he introduced the category of  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.

**Mathematics Subject Classifications (1991):** 11S23, 14F30, 14L05.

**Key words:** Galois representations, crystalline representations, filtered modules,  $(\varphi, \Gamma)$ -modules

### 0. Introduction

Dans tout ce travail,  $p$  est un nombre premier,  $K_0$  un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, absolument non ramifié et de corps résiduel  $k$  parfait de caractéristique  $p$ . On note  $W$  l’anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $k$ ; c’est donc aussi l’anneau de valuation de  $K_0$ . Tous trois sont munis d’une action de Frobenius, notée  $\sigma$  (on a  $\sigma(x) = x^p$  pour  $x \in k$ ). On fixe  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K_0$  et on pose  $G_{K_0} = \text{Gal}(\bar{K}/K_0)$ .

Dans [F91], J.-M. Fontaine a construit une équivalence entre la catégorie des représentations  $p$ -adiques de  $G_{K_0}$  (i.e. des  $\mathbb{Q}_p$ -espaces vectoriels de dimension finie munis d’une action linéaire et continue de  $G_{K_0}$ ) et une catégorie de nature plus élémentaire, celle des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales sur le corps  $\mathcal{E}$  (cf. ci-dessous). Une question naturelle qui se pose alors est de décrire les représentations qui interviennent en géométrie algébrique (de Hodge-Tate, de de Rham, semi-stables, cristallines) en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.

J.-M. Fontaine a donné une réponse conjecturale à cette question pour les représentations cristallines: pour tout entier  $h \geq 0$ , une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_{K_0}$  est cristalline à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $h$  si et seulement si elle est de cr-hauteur  $\leq h$  (cf. ci-dessous).

Le but principal de cet article est de prouver cette conjecture lorsque  $h \leq p - 1$  (théorème 1 ci-dessous). Remarquons que le fait que la condition soit suffisante (sans restriction sur  $h$ ) est un cas particulier d’un résultat plus général sur les

représentations potentiellement cristallines de  $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ , où  $K$  est un corps contenu dans l'extension cyclotomique de  $K_0$  (cf. [Wa]).

La démonstration conduit à étudier de façon détaillée les représentations de torsion qui sont des sous-quotients de représentations cristallines à poids de Hodge-Tate entre 0 et  $h$ , ce qui est l'objet de la partie 2. On y rappelle la construction des anneaux des périodes  $p$ -adiques  $A_{\text{cris}}$  et  $B_{\text{cris}}^+$  et on y redémontre (Théorème 2) le résultat principal de la théorie de Fontaine-Laffaille [F-L] par une méthode un peu différente (qui, en particulier, ne nécessite pas l'étude des objets simples de la catégorie des modules filtrés), en travaillant avec l'anneau  $A_{\text{cris}}$  qui est l'anneau naturel pour cette théorie (alors que J.-M. Fontaine et G. Laffaille utilisaient un anneau un peu différent).

Dans la partie A, on rappelle les résultats sur les représentations  $p$ -adiques et les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules contenus dans [F91] et utilisés par la suite. On trouvera un énoncé précis du théorème à la fin de cette partie.

Enfin, la démonstration du Théorème 1 lui-même est l'objet de la partie 3.

Je voudrais conclure cette introduction en remerciant J.-M. Fontaine, qui m'a dirigée tout au long de ce travail, pour ses nombreux conseils et ses encouragements.

## 1. Rappels sur les représentations $p$ -adiques et énoncé du résultat principal

1.1. On considère l'ensemble, noté  $R$  (cf. [F82], p. 535), des suites  $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$  vérifiant  $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$  pour tout  $n$ . C'est un anneau parfait de caractéristique  $p$ , qu'on peut munir d'une valuation; son corps résiduel s'identifie à  $\bar{k}$ , le corps résiduel de  $\bar{K}$ . Son corps des fractions est un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$  (voir le paragraphe 2.1.1.1. pour plus de détails).

Si  $A$  est une  $k$ -algèbre,  $W(A)$  désigne l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $A$  et  $W_{K_0}(A) = K_0 \otimes_W W(A) = W(A)[1/p]$ ; si  $a \in A$ , on note  $[a] = (a, 0, \dots, 0, \dots)$  le représentant de Teichmüller de  $a$  dans  $W(A)$ . On note  $\varphi$  l'endomorphisme de Frobenius de  $W(A)$  ainsi que son extension à  $W_{K_0}(A)$ ; ainsi, si  $\lambda \in W$ , on a  $\varphi(\lambda) = \sigma(\lambda)$ . En particulier ceci s'applique à  $W(R)$ ,  $W(\text{Fr } R)$  et  $W_{K_0}(\text{Fr } R)$ .

D'autre part, le groupe  $G_{K_0}$  opère par fonctorialité sur  $\text{Fr } R$ ,  $R$  et  $W(R)$  et les anneaux  $W(R)$ ,  $W(\text{Fr } R)$  et  $W_{K_0}(R)$  s'identifient à des sous-anneaux de  $W_{K_0}(\text{Fr } R)$  stables par  $G_{K_0}$  et  $\varphi$ .

On note  $\mathbb{Z}_p(1) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mu_{p^n}(\bar{K})$  le module de Tate du groupe multiplicatif et pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{Z}_p(i) = \text{Sym}_{\mathbb{Z}_p}^i \mathbb{Z}_p(1)$  et  $\mathbb{Z}_p(-i)$  son dual. Pour tout  $\mathbb{Z}_p$ -module  $T$  et pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , on pose  $T(i) = T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(i)$ .

1.2. Le module de Tate  $\mathbb{Z}_p(1) = T_p(\mathbb{G}_m)$  s'identifie au sous- $\mathbb{Z}_p$ -module du groupe multiplicatif des unités de  $R$  congrues à 1 modulo l'idéal maximal, formé des  $x$  tels que  $x^{(0)} = 1$ . Choisissons un générateur de ce module, c'est-à-dire un élément  $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in R$  tel que  $\varepsilon^{(0)} = 1$  et  $\varepsilon^{(1)} \neq 1$ , et considérons les

éléments  $[\varepsilon] = (\varepsilon, 0, \dots, 0, \dots)$  et  $\pi = [\varepsilon] - 1$  dans  $W(R)$ . Alors l'adhérence  $S$  de la sous  $W$ -algèbre de  $W(R)$  engendrée par  $\pi$  s'identifie à l'algèbre  $W[[\pi]]$  des séries formelles en  $\pi$  à coefficients dans  $W$ ; de plus  $S$  est stable par  $\varphi$  et  $G_{K_0}$ , avec les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \varphi(\pi) &= (1 + \pi)^p - 1 \quad \text{et} \\ g(\pi) &= (1 + \pi)^{\chi(g)} - 1, \end{aligned}$$

où  $\chi$  est le caractère cyclotomique, décrivant l'action de  $G_{K_0}$  sur les racines de l'unité d'ordre une puissance de  $p$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , soit  $K_n$  le sous-corps de  $\bar{K}$  engendré sur  $K_0$  par les racines  $p^n$ -ièmes de l'unité. On pose  $K_\infty = \cup_{n \geq 1} K_n$ ,  $\Gamma_{K_0} = \text{Gal}(\bar{K}/K_\infty)$  et  $H_{K_0}$  le noyau de la projection de  $G_{K_0}$  sur  $\Gamma_{K_0}$ . On dispose d'une suite exacte:

$$1 \rightarrow H_{K_0} \rightarrow G_{K_0} \rightarrow \Gamma_{K_0} \rightarrow 1.$$

Si  $p \neq 2$ , on note  $\Gamma_f$  le sous-groupe de torsion de  $\Gamma_{K_0}$  et on pose  $S_0 = S^{\Gamma_f}$ ; on montre, (cf. [F91], p 268–273) que  $S_0 = W[[\pi_0]]$ , où  $\pi_0 = -p + \sum_{a \in \mathbb{F}_p} [\varepsilon]^{[a]}$ . De plus,

$$\begin{aligned} \varphi(\pi_0) &= u\pi_0q^{p-1} \quad \text{où } u \text{ est une unité de } S_0 \text{ et } q = \pi_0 + p \quad \text{et} \\ \gamma(\pi_0) &\equiv \chi(\gamma)^{p-1}\pi_0 \quad \text{modulo } \pi_0^2 \text{ pour } \gamma \in \Gamma_{K_0}. \end{aligned}$$

Si  $p = 2$ , on convient que  $\pi_0 = \pi$ ,  $S_0 = S$  et  $q = p + \pi$ .

*Remarque.* Ces notations ne sont pas exactement les mêmes que celles de [F91] ou [F94], où  $\pi$  était noté  $\pi_\varepsilon$ ,  $S$  était noté  $S_\varepsilon$  et  $S_0$  était noté  $S$ . L'anneau qui est noté  $S_0$  ici correspond à l'anneau qui était noté  $S$  dans la deuxième partie de [F91].

On note  $\mathcal{O}_\mathcal{E}$  le complété pour la topologie  $p$ -adique de  $S[1/\pi]$ . C'est l'anneau des entiers d'un corps complet pour une valuation discrète, absolument non ramifié, noté  $\mathcal{E}$ . Comme  $\pi$  est inversible dans  $W(\text{Fr } R)$ , l'inclusion de  $S$  dans  $W(R)$  se prolonge en un plongement de  $S[1/\pi]$  dans  $W(\text{Fr } R)$  et  $\mathcal{O}_\mathcal{E}$  s'identifie à l'adhérence de  $S[1/\pi]$  dans  $W(\text{Fr } R)$ , tandis que  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_\mathcal{E}[1/p]$  s'identifie à un sous-corps de  $W_{K_0}(\text{Fr } R)$ . Alors si  $E = \mathcal{O}_\mathcal{E}/p\mathcal{O}_\mathcal{E}$ , on a

$$E = \text{Frac}(S/pS) = k((\tilde{\pi})) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_E = S/pS = k[[\tilde{\pi}]],$$

où  $\tilde{\pi}$  est la réduction modulo  $p$  de  $\pi$ . De plus, si  $\hat{\mathcal{E}}_{nr}$  désigne l'adhérence dans  $W_{K_0}(\text{Fr } R)$  de l'extension maximale non ramifiée  $\mathcal{E}_{nr}$  de  $\mathcal{E}$  contenue dans  $W_{K_0}(\text{Fr } R)$ ,  $\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}}/p\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{E}}_{nr}}$  est une clôture séparable  $E^{\text{sép}}$  de  $E$ , avec une identification des groupes de Galois

$$H_{K_0} = \text{Gal}(E^{\text{sép}}/E) = \text{Gal}(\mathcal{E}_{nr}/\mathcal{E}).$$

1.3. Soit  $A$  un anneau noethérien, muni d'une topologie, pour laquelle il est séparé et complet, d'un endomorphisme noté  $\sigma$  et d'une action d'un groupe profini  $\Gamma$

continue, compatible à la structure d'anneau et commutant à  $\sigma$ . On suppose en outre que le morphisme  $\sigma: A \rightarrow A$  est plat. Un  $\varphi$ -module sur  $A$  est un  $A$ -module muni d'un endomorphisme  $\varphi$ , semi-linéaire par rapport à  $\sigma$ ; on note  $\Phi\mathbf{M}_A$  la catégorie formée par les  $\varphi$ -modules sur  $A$ . Si  $M$  est un tel module, on note  $M^\sigma$  le  $A$ -module déduit de  $M$  par l'extension des scalaires  $\sigma: A \rightarrow A$  et on dit que  $M$  est *étale* s'il est de type fini sur  $A$  et si l'application linéaire  $\Phi: M^\sigma \rightarrow M$ , déduite de  $\varphi$  en posant  $\Phi(\lambda \otimes x) = \lambda\varphi(x)$  pour  $\lambda \in A$  et  $x \in M$ , est bijective.

Un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $A$  est un  $\varphi$ -module sur  $A$  muni en plus d'une action de  $\Gamma$ , semi-linéaire par rapport à l'action de  $\Gamma$  sur  $A$ , cette action commutant avec l'endomorphisme  $\varphi$ . On dit qu'un  $(\varphi, \Gamma)$ -module est *étale* si le  $\varphi$ -module sous-jacent l'est et si l'action de  $\Gamma$  est continue. Les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales définissent une catégorie abélienne notée  $\Gamma\Phi\mathbf{M}_A^{\text{ét}}$ . Dans la suite, on pose  $\Gamma = \Gamma_{K_0}$ .

Appelons représentation de  $G_{K_0}$  de  $p$ -torsion (respectivement  $\mathbb{Z}_p$ -adique) la donnée d'un  $\mathbb{Z}_p$ -module de longueur finie (respectivement de type fini) muni d'une action linéaire et continue de  $G_{K_0}$ ; on note  $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p, \text{tors}}(\mathbf{G}_{K_0})$  (respectivement  $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{G}_{K_0})$ ) la catégorie des représentations de  $G_{K_0}$  de  $p$ -torsion (respectivement  $\mathbb{Z}_p$ -adiques).

J.-M. Fontaine a montré dans [F91] (p. 274) qu'il existait une équivalence de catégories entre  $\Gamma\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_E}^{\text{ét}}$  et  $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{G}_{K_0})$  induite par les foncteurs  $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_E}$  et  $\mathbf{V}_{\mathcal{O}_E}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathcal{O}_E}: \mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{G}_{K_0}) &\rightarrow \Gamma\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_E}^{\text{ét}} \\ T &\mapsto \mathbf{D}_{\mathcal{O}_E}(T) = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} T)^{H_{K_0}}, \end{aligned}$$

et son quasi-inverse

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\mathcal{O}_E}: \Gamma\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_E}^{\text{ét}} &\rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{G}_{K_0}) \\ \mathcal{N} &\mapsto \mathbf{V}_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{N}) = (\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{N})^{\varphi=1}. \end{aligned}$$

Dans la suite de ce texte, on va davantage utiliser la version contravariante de ces foncteurs. On pose

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr, \infty}} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}} / p^n \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}} = \mathcal{E}_{nr} / \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}}.$$

Pour tout objet  $T$  de  $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p, \text{tors}}(\mathbf{G}_{K_0})$ , on note  $T^\wedge$  le  $\mathbb{Z}_p$ -module des applications linéaires de  $T$  dans  $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$  sur lequel  $G_{K_0}$  agit via  $(g\eta)(t) = \eta(g^{-1}t)$  pour  $g \in G_{K_0}$ ,  $\eta \in T^\wedge$  et  $t \in T$ . L'anti-équivalence de catégories entre  $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p, \text{tors}}(\mathbf{G}_{K_0})$  et  $\Gamma\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_E, \text{tors}}^{\text{ét}}$ , sous-catégorie pleine de  $\Gamma\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_E}^{\text{ét}}$  formée des objets de torsion, est alors obtenue en associant à  $T$  le module  $\mathbf{D}_{\mathcal{O}_E}(T^\wedge)$  ou bien également décrite par:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathcal{O}_E}^*: \mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p, \text{tors}}(\mathbf{G}_{K_0}) &\rightarrow \Gamma\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_E, \text{tors}}^{\text{ét}} \\ T &\mapsto \mathbf{D}_{\mathcal{O}_E}^*(T) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[H_{K_0}]}(T, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr, \infty}}), \end{aligned}$$

tandis qu'un quasi-inverse est donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}^* : \Gamma \Phi \mathbf{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \text{tors}}^{\text{ét}} &\rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p, \text{tors}}(\mathbf{G}_{\mathbf{K}_0}) \\ \mathcal{N} &\mapsto \mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}^*(\mathcal{N}) = \text{Hom}_{\Phi \mathbf{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr}, \infty}). \end{aligned}$$

De même, si  $T$  est un objet de  $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbf{G}_{\mathbf{K}_0})$  sans  $p$ -torsion,

$$\mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}^*(T) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[H_{K_0}]}(T, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}),$$

s'identifie à

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{D}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}^*(T/p^n T),$$

et si  $\mathcal{N}$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module étale libre sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ ,

$$\mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}^*(\mathcal{N}) = \text{Hom}_{\Phi \mathbf{M}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}}_{nr}}),$$

s'identifie à

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{V}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}^*(\mathcal{N}/p^n \mathcal{N}).$$

On en déduit l'équivalence entre la catégorie des représentations  $p$ -adiques de  $G_{K_0}$  et la catégorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $\mathcal{E}$  obtenus à partir de  $\varphi$ -modules étales sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  en rendant  $p$  inversible, induite par le foncteur (cf. [F91], p 274)  $\mathbf{V}_{\mathcal{E}}$  défini par

$$\mathbf{V}_{\mathcal{E}}(\mathcal{M}) = (\widehat{\mathcal{E}}_{nr} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{M})^{\varphi=1}.$$

#### 1.4. Représentations $\mathbb{Z}_p$ -adiques de $G_{K_0}$

Soit  $\Gamma_0$  le groupe de Galois de la  $\mathbb{Z}_p$ -extension cyclotomique de  $K_0$  contenue dans  $K_{\infty}$ , si  $p \neq 2$ ; c'est à dire  $\Gamma_0 = \Gamma/\Gamma_f$ . Si  $p = 2$ , on prend  $\Gamma_0 = \Gamma$ . On a une action de  $\Gamma_0$  sur  $S_0$ . Si  $h \in \mathbb{N}$ , on note  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^h$  la sous-catégorie pleine de la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_0)$ -modules sur  $S_0$  formée des objets  $N$  vérifiant:

- (1) le  $S_0$ -module sous-jacent est de type fini et sans  $p'$ -torsion (ie, pour tout élément irréductible  $\lambda$  de  $S_0$  non associé à  $p$ ,  $N$  est sans  $\lambda$ -torsion),
- (2) le  $S_0$ -module  $N/\Phi(N^{\sigma})$  est annulé par  $q^h$ ,
- (3) le groupe  $\Gamma_0$  agit trivialement sur  $N/\pi_0 N$ .

Pour  $h < p - 1$ , la catégorie  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^h$  est abélienne (cf. [F91], p 301); pour  $h = p - 1$ , il faut se restreindre à la sous-catégorie pleine de  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^{p-1}$ , qu'on note  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^{p-1*}$ , formée des objets  $N$  n'admettant pas de sous-quotient non nul  $\bar{N}$  tel que  $\Phi(\bar{N}^\sigma) \subset q^{p-1} \bar{N}$ .

On note  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^+$  la réunion des  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^h$  pour  $h \in \mathbb{N}$ . Pour tout objet  $M$  de  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^+$ , on définit la *cr-hauteur* de  $M$  comme le plus petit entier  $h$  tel que  $M$  soit un objet de  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^h$ .

Le foncteur  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^h \rightarrow \Gamma \Phi \mathbf{M}_{\mathcal{O}_\varepsilon}^{\text{ét}}$  (cf. [F91], p. 301) qui à  $N$  associe

$$j^*(N) = \mathcal{N} = \mathcal{O}_\varepsilon \otimes_{S_0} N,$$

est exact et fidèle; si  $h \leq p - 2$  (si  $h = p - 1$ , on se restreint à  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^{p-1*}$ ), il est pleinement fidèle et induit alors une équivalence de catégories entre  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^h$  ( $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^{p-1*}$  si  $h = p - 1$ ) et son image essentielle par  $j^*$ . On note  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0, \text{tors}}^h$  la sous-catégorie pleine de  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^h$  formée des objets de  $p$ -torsion. Si  $N$  est un objet de cette catégorie, on pose

$$\mathbf{V}_{\text{cr}}^*(N) = \mathbf{V}_{\mathcal{O}_\varepsilon}^*(j^*(N));$$

c'est un  $\mathbb{Z}_p$ -module de type fini muni d'une action de  $G_{K_0}$ . On obtient ainsi un foncteur

$$\mathbf{V}_{\text{cr}}^* : \Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0, \text{tors}}^h \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p, \text{tors}}(\mathbf{G}_{K_0}),$$

qui est exact et fidèle et on note  $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p, \text{tors}, \text{cr}}^h(\mathbf{G}_{K_0})$  son image essentielle, appelée *catégorie des représentations de cr-hauteur finie  $\leq h$* . Si  $h \leq p - 2$ ,  $\mathbf{V}_{\text{cr}}^*$  est pleinement fidèle et induit donc une anti-équivalence de catégories entre  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0, \text{tors}}^h$  et  $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p, \text{tors}, \text{cr}}^h(\mathbf{G}_{K_0})$ . Si  $h = p - 1$ , on a une anti-équivalence de catégories entre  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0, \text{tors}}^{p-1}$  et son image essentielle  $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p, \text{tors}, \text{cr}}^{p-1*}(\mathbf{G}_{K_0})$ .

On se propose de montrer que les représentations de cr-hauteur finie sont des sous-quotients de représentations cristallines.

On rappelle que si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_{K_0}$ , le  $K_0$ -espace vectoriel  $(B_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{K_0}}$ , où  $B_{\text{cris}}^+$  est l'anneau défini en 2.1.2.2., est de dimension finie,  $\leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ . On dit que la représentation est cristalline si

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_{K_0} (B_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{K_0}}.$$

**THEOREME 1.** *Soit  $h$  un entier vérifiant  $0 \leq h \leq p - 1$  et soit  $T$  une représentation de  $p$ -torsion de  $G_{K_0}$ . Alors  $T$  est de cr-hauteur finie  $\leq h$  si et seulement si  $T$  est isomorphe à un sous-quotient d'une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate compris entre 0 et  $h$ .*

Remarquons que ce théorème implique que, si  $r \in \mathbb{Z}$  et si  $T$  est une représentation de  $p$ -torsion de  $G_{K_0}$ , alors  $T(r)$  est de *cr-hauteur finie*  $\leq h$  si et seulement si  $T$  est sous-quotient d'une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate dans l'intervalle  $[r, r + h]$ .

On dit qu'une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_{K_0}$  est de *cr-hauteur*  $\leq h$  s'il existe un objet  $N_0$  de  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^h$  libre de rang fini sur  $S_0$  et un isomorphisme de  $\mathcal{E} \otimes_{S_0} N_0$  sur  $\mathbf{D}_{\mathcal{E}}^*(V) = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p[H_{K_0}]}(V, \widehat{\mathcal{E}}_{nr})$ .

*Remarque:* Représentations de hauteur finie

On rappelle que si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors  $j_*(\mathbf{D}_{\mathcal{E}}^*(V))$ , défini comme le plus grand des sous- $S[1/p]$ -modules de type fini de  $\mathbf{D}_{\mathcal{E}}^*(V)$  stables par  $\varphi$ , est également stable par  $\Gamma$  et c'est un  $S$ -module libre de rang fini  $\leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ . On dit que  $V$  est de *hauteur finie* si l'on a l'égalité.

Alors, une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_{K_0}$  qui est de *cr-hauteur finie* est de *hauteur finie*.

En effet, si  $N_0$  est comme ci-dessus, comme  $S$  est un  $S_0$ -module libre et  $S_0 = S^{\Gamma_f}$ , on en déduit que

$$N = S \otimes_{S_0} N_0 \subset j_*(\mathbf{D}_{\mathcal{E}}^*(V)) \quad \text{et} \\ N_0 \subset (j_*(\mathbf{D}_{\mathcal{E}}^*(V)))^{\Gamma_f}.$$

Puisque  $j_*(\mathbf{D}_{\mathcal{E}}^*(V))$  est un  $S[1/p]$ -module libre de rang  $\leq d = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$  et contient  $N[1/p]$  qui est un  $S[1/p]$ -module libre de rang  $d$ , on obtient le fait que  $j_*(\mathbf{D}_{\mathcal{E}}^*(V))$  est de rang  $d$  sur  $S[1/p]$  et, par conséquent, que la représentation est de hauteur finie.

Le résultat suivant est alors une conséquence immédiate du théorème 1.

**COROLLAIRE:** Soient  $V$  une représentation  $p$ -adique de  $G_{K_0}$ ,  $r \in \mathbb{Z}$  et  $h$  un entier compris entre 0 et  $p - 1$ . Alors  $V$  est cristalline à poids de Hodge-Tate dans l'intervalle  $[r, r + h]$  si et seulement si  $V(r)$  est une représentation de *cr-hauteur finie*  $\leq h$ .

S'il en est ainsi,  $V$  est de *hauteur finie*.

Observons de plus que, avec les notations de la remarque ci-dessus,  $N$  est un  $S$ -module libre de rang  $d$  stable par  $\Gamma$  et tel que l'action de  $\Gamma$  soit triviale modulo  $\pi$ . On voit ainsi que le fait que, dans le corollaire, la condition soit suffisante n'est qu'un cas particulier de l'implication (4)  $\Rightarrow$  (1) du théorème de [Wa], à savoir que si  $V$  est une représentation de hauteur finie telle qu'il existe un entier  $r$  et un sous- $S$ -module  $N$  de  $j_*(\mathbf{D}_{\mathcal{E}}^*(V))$  stable par  $\Gamma$  et tel que l'action de  $\Gamma$  soit triviale (resp. finie) sur  $(N/\pi N)(-r)$ , alors la représentation  $V$  est cristalline (resp. potentiellement cristalline).

## 2. Représentations cristallines de torsion

### 2.1. CONSTRUCTION DES ANNEAUX $R$ , $W_n^{PD}(R)$ , $A_{\text{cris}}$ ET $B_{\text{cris}}^+$

Dans ce chapitre, on se place dans le cas général, où  $K$  est un corps local complet d'indice de ramification absolue  $e$  et de corps résiduel  $k$ ;  $K$  est donc une extension totalement ramifiée de  $K_0$ .  $\bar{K}$  est une clôture algébrique de  $K$  et on note  $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ .

#### 2.1.1. Les anneaux $R$ et $W_n^{PD}(R)$

##### 2.1.1.1. L'anneau $R$ (cf. [F82] ou [F94])

Posons  $S^l = \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . On définit  $R = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} S^l$ , où les applications de transition sont toutes identiques, à savoir l'application qui à  $x \in S^l$  associe  $x^p \in S^l$ . L'anneau  $R$  ainsi défini est un anneau parfait de caractéristique  $p$ .

*Remarques:* (a) on peut obtenir une autre description de  $R$  en munissant la limite projective, indexée par  $\mathbb{N}$ , des anneaux  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ , où  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  est l'anneau des entiers du complété  $\mathbb{C}$  de  $\bar{K}$  avec toujours pour applications de transition les applications  $x \mapsto x^p$ , de la structure d'anneau suivante

- la multiplication est définie par  $(xy)^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}$
- l'addition par  $(x+y)^{(n)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} (x^{(m+n)} + y^{(m+n)})^{p^m}$  où  $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $y = (y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  sont des éléments de  $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ .

La projection  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$  permet d'identifier  $R$  et  $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ . Il est alors possible de définir une valuation sur  $R$ , en posant  $v_R(x) = v_{\mathbb{C}}(x^{(0)})$  et  $R$  est complet pour cette valuation.

D'autre part  $\bar{k}$  se plonge dans  $R$  : à  $a \in \bar{k}$ , on associe son représentant de Teichmüller  $[a]$  dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ , puis sa réduction modulo  $p$  dans  $S^l$ . On obtient de cette façon une application de  $\bar{k}$  dans  $R$

$$a \in \bar{k} \rightarrow ([a^{1/p^n}])_{n \in \mathbb{N}} \in R,$$

qui est un morphisme d'anneaux et munit  $R$  d'une structure de  $\bar{k}$ -algèbre. Le corps des fractions de  $R$ , noté  $\text{Fr } R$ , est un corps valué complet, d'anneau des entiers  $R$  et de corps résiduel  $\bar{k}$ ; de plus, il est algébriquement clos.

$R$  et  $\text{Fr } R$  sont naturellement munis d'une action de  $G_K$  et d'un Frobenius, noté  $\varphi$ , qui n'est autre que l'élévation à la puissance  $p$ .

(b) Soit  $E$  le corps des normes (cf. [W]) de l'extension  $K_{\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ , où

$$K_n = K_0[\varepsilon^{(n)}] = K_{n-1}[\varepsilon^{(n)}],$$

est le corps engendré par les racines  $p^n$ -ièmes de l'unité contenu dans  $\bar{K}$ . On rappelle que  $\varepsilon^{(1)}$  est une racine primitive  $p$ -ième de l'unité dans  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$  et que les



$(\varepsilon^{(n)})$  forment un système compatible de racines de l'unité. On sait (cf. [W], chap. 2) que  $E$  est un corps local de caractéristique  $p$ , dont l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_E$  est la limite projective des anneaux  $\mathcal{O}_{K_n}/(\varepsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_n}$ , l'application de transition

$$\nu_n: \mathcal{O}_{K_n}/(\varepsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_n} \rightarrow \mathcal{O}_{K_{n-1}}/(\varepsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_{n-1}},$$

étant induite par la norme de  $K_n$  à  $K_{n-1}$ . En outre, si  $x \in \mathcal{O}_{K_n}$  et  $\bar{x}$  est son image dans  $\mathcal{O}_{K_n}/(\varepsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_n}$ ,

$$x^p - N_{K_n/K_{n-1}}(x) \in (\varepsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_n},$$

ce qui fait que  $\nu_n(\bar{x})$  est l'image de  $x^p$  dans

$$(\mathcal{O}_{K_{n-1}} + (\varepsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_n})/(\varepsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_n} = \mathcal{O}_{K_{n-1}}/(\varepsilon^{(1)} - 1)\mathcal{O}_{K_{n-1}}.$$

En fait  $\mathcal{O}_E = k[[\varepsilon - 1]] = k[[\tilde{\pi}]]$ .

Le groupe de Galois  $\text{Gal}(K_\infty/K_0) = \Gamma_{K_0} \simeq \mathbb{Z}_p^*$  agit sur  $E$  par  $g(\varepsilon) = \varepsilon^{\chi(g)}$ , où  $\chi$  est le caractère cyclotomique, et  $E_0 = E^{\Gamma_f}$  est le corps de normes de la  $\mathbb{Z}_p$ -extension cyclotomique de  $K_0$  contenue dans  $K_\infty$ . On peut voir (cf. [F91], p. 271) que  $E_0 = k((\tilde{\pi}_0))$  avec  $\tilde{\pi}_0 = \sum_{a \in \mathbb{F}_p} \varepsilon^{[a]}$  et  $\mathcal{O}_{E_0} = k[[\tilde{\pi}_0]]$ , pour  $p \neq 2$ , et, pour  $p = 2$ ,  $\tilde{\pi}_0 = -2 + \varepsilon + \varepsilon^{-1}$ .

On voit facilement que  $E$  et  $E_0$  se plongent dans  $\text{Fr } R$ ; de même,  $\mathcal{O}_{E_0}$  et  $\mathcal{O}_E$  se plongent dans  $R$ . Plus généralement (cf. [W], chap. 3), si  $L$  est une extension galoisienne finie de  $K_\infty$ , alors le corps des normes  $E_L$  de l'extension  $L/K$  est une extension galoisienne finie de  $E$ , on a

$$\text{Gal}(L/K_\infty) = \text{Gal}(E_L/E),$$

et  $E_L$  se plonge dans  $\text{Fr } R$ . Ceci permet de définir

$$E_{\bar{K}} = \varinjlim_{\substack{K_\infty \subset L \subset \bar{K} \\ L/K_\infty \text{ finie galoisienne}}} E_L,$$

qui est une clôture séparable de  $E$ , que l'on note  $E^{\text{sép}}$ , et

$$\text{Gal}(E_{\bar{K}}/E) = \text{Gal}(\bar{K}/K_\infty) = H_{K_0}.$$

Rappelons enfin (cf. [W], chap. 4) que  $\text{Fr } R$  s'identifie au complété de la clôture radicielle de  $E_{\bar{K}} = E^{\text{sép}}$ .

### 2.1.1.2. Construction de $W_n^{PD}(R)$

2.1.1.2.1. On note  $W(R)$  l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $R$  et  $W_n(R)$  l'anneau des vecteurs de Witt de longueur  $n$ .

PROPOSITION 2.1.1.2.1.: *L'application*

$$\begin{aligned} \theta: W(R) &\rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \\ x = (x_n) &\mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} p^n x_n^{(n)}, \end{aligned}$$

est un morphisme d'anneaux, qui est surjectif. Son noyau  $\text{Ker } \theta$  est un idéal principal de  $W(R)$ .

DEMONSTRATION: cf. [F82], p. 537.

*Remarque:* plus précisément, un élément  $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) \in \text{Ker } \theta$  en est un générateur, si et seulement si  $v_R(\lambda_0) = 1$ . En particulier, si  $p \neq 2$  et si  $q = \pi_0 + p$  est l'élément de  $W(R)$  introduit dans la partie 1., alors  $q' = \varphi^{-1}(q)$  est un générateur de  $\text{Ker } \theta$ . En effet, on voit facilement que  $\theta(q') = 0$  et il suffit de vérifier que  $v(\tilde{\pi}_0) = p$ . Puisque  $\tilde{\pi}$  et  $\tilde{\pi}_0$  sont des uniformisantes de  $\mathcal{O}_E$  et de  $\mathcal{O}_{E_0}$  respectivement et que l'extension  $E/E_0$  est totalement ramifiée de degré  $p - 1$ , on a

$$v_R(\tilde{\pi}_0) = (p - 1)v_R(\varepsilon - 1),$$

et d'autre part

$$v_R(\varepsilon - 1) = \frac{p}{p - 1}.$$

Si  $p = 2$ , on pose  $q = \pi + p$  et  $q' = \varphi^{-1}(q)$  est un générateur de  $\text{Ker } \theta$ .

2.1.1.2.2. De même, pour  $n$  entier  $\geq 1$ , on définit l'application

$$\theta_n: W_n(R) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n \mathcal{O}_{\bar{K}},$$

par

$$\theta_n((x_0, x_1, \dots, x_{n-1})) = \sum_{0 \leq m \leq n-1} p^m x_m^{(m)}.$$

On pose

$$\text{Ker } \theta_n = \text{Im } \text{Ker } \theta = (\lambda_{<n}),$$

en notant  $\lambda_{<n}$  l'image dans  $W_n(R)$  du générateur choisi  $\lambda$  de  $\text{Ker } \theta$ . On note  $W_n^{PD}(R)$  l'enveloppe à puissances divisées (cf. [B-O], chapitre 3) de  $W_n(R)$  relativement à  $\text{Ker } \theta_n$ , compatibles avec les puissances divisées canoniques sur  $pW_n(R)$ .

2.1.2. Description de  $W_n^{PD}(R)$

2.1.2.1. Rappels sur l'enveloppe à puissances divisées d'une  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre  $B$

Il s'agit de faire une description de l'enveloppe à puissances divisées de  $B$  relativement à un idéal  $J$ , la structure de puissances divisées devant être compatible avec la structure de puissances divisées canoniques sur  $pB$ .

On remarque que se donner les applications  $\gamma_m: J \rightarrow J$ , qui définissent la structure d'idéal à puissances divisées sur  $J$  (cf. [B-O]), revient à se donner une application  $\delta: J \rightarrow J$  telle que  $\forall x, y \in J$  et  $\forall \lambda \in A$ :

- $p\delta(x) = x^p$ ,
- $\delta(\lambda x) = \lambda^p \delta(x)$ ,
- $\delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y) + \sum_{1 \leq i \leq p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{i} x^i y^{p-i}$ .

En effet, si les puissances divisées sont données, on prend  $\delta(x) = (p - 1)! \gamma_p(x)$ .

Inversement, tout entier  $m$  s'écrit sous la forme  $m = m_0 + pm_1 + \dots + p^s m_s$ , où les entiers  $m_i$  sont compris entre 0 et  $p - 1$ . Alors, si  $B$  est une  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre sans  $p$ -torsion,

$$\begin{aligned} x^{p^i} &= p^{1+p+\dots+p^{i-1}} \delta^i(x) \\ x^m &= p^{m_1+\dots+m_s(1+p+\dots+p^{s-1})} x^{m_0} (\delta(x))^{m_1} \dots (\delta^s(x))^{m_s}; \end{aligned}$$

comme

$$v_p(m!) = m_1 + (1 + p)m_2 + \dots + (1 + p + \dots + p^{s-1})m_s,$$

on obtient

$$\gamma_m(x) = \frac{p^{v_p(m!)}}{m!} x^{m_0} (\delta(x))^{m_1} \dots (\delta^s(x))^{m_s}.$$

Si  $B$  est de  $p$ -torsion, comme  $p^{v_p(m!)}/m!$  est une unité de  $\mathbb{Z}_{(p)}$ , l'expression ci-dessus garde un sens dans  $B$ . On vérifie que les  $\gamma_m$  ainsi définis conviennent.

**EXEMPLE.** Si  $B$  est une  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre et si  $\lambda$  n'est pas diviseur de zéro, l'enveloppe à puissances divisées de  $B$  compatibles avec les puissances divisées canoniques sur  $pB$  relativement à un idéal principal  $J = (\lambda)$  est l'algèbre

$$\begin{aligned} B^{PD} &= B[(\gamma_m(\lambda))_{m \in \mathbb{N}}] \\ &= B[\delta^s(\lambda)] \text{ avec } p\delta^s(\lambda) = (\delta^{s-1}(\lambda))^p \\ &= B[Y_1, \dots, Y_s, \dots] / (pY_s - Y_{s-1}^p)_{s \geq 1} \quad \text{avec } Y_0 = \lambda. \end{aligned}$$

2.1.2.2. D'après ce qui vient d'être vu,

$$\begin{aligned} W_n^{PD}(R) &= W_n(R)[\delta(\lambda_{<n}), \dots, \delta^s(\lambda_{<n}), \dots] \\ &= W_n(R)[Y_1, \dots, Y_s \dots] / (pY_s - Y_{s-1}^p)_{s \geq 1} \quad \text{et } Y_0 = \lambda_{<n}. \end{aligned}$$

On pose

$$A_{\text{cris}} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} W_n^{PD}(R),$$

le séparé complété pour la topologie  $p$ -adique de l'enveloppe à puissances divisées de  $W(R)$  relativement à  $\text{Ker } \theta$ , compatibles avec les puissances canoniques sur  $pW(R)$  et  $B_{\text{cris}}^+ = K_0 \otimes_W A_{\text{cris}} = A_{\text{cris}}[1/p]$ .

*Remarques.* (a) pour  $n = 1$ , on a  $\lambda_{<1} = \lambda_0$ ,  $(\delta^s(\lambda_0))^p = 0$  et

$$W_1^{PD}(R) = R[Y_1, \dots, Y_s, \dots] / (Y_s^p)_{s \in \mathbb{N}} = (R/\lambda_0)[Y_1, \dots, Y_s, \dots] / (Y_s^p)_{s \geq 1}.$$

(b) La suite exacte courte

$$0 \rightarrow W_r(R) \xrightarrow{p^s} W_{r+s}(R) \rightarrow W_s(R) \rightarrow 0,$$

induit la suite exacte

$$0 \rightarrow W_r^{PD}(R) \xrightarrow{p^s} W_{r+s}^{PD}(R) \rightarrow W_s^{PD}(R) \rightarrow 0.$$

2.1.3. *Filtration sur  $W_n^{PD}(R)$*

2.1.3.1. Pour  $r \in \mathbb{N}$ , on pose

$$\text{Fil}^r W_n(R) = (\text{Ker } \theta_n)^r$$

et on note  $\text{Fil}^r W_n^{PD}(R)$  l'idéal de  $W_n^{PD}(R)$  engendré par les  $\gamma_m(\lambda_{<n})$  pour  $m \geq r$ . Le morphisme naturel de  $W_n(R)$  dans  $W_n^{PD}(R)$  envoie  $\text{Fil}^r W_n(R)$  dans  $\text{Fil}^r W_n^{PD}(R)$ .

On a également un Frobenius sur  $W_n^{PD}(R)$ , qui provient du Frobenius sur  $W_n(R)$  et vérifie  $\varphi(\delta(x)) = \delta(\varphi(x))$ . On voit que  $\text{Ker } \theta + pW(R)$  est stable par  $\varphi$  et que  $\varphi(\lambda)$  est divisible par  $p$  dans  $W_n^{PD}(R)$ . En particulier pour  $r \leq p-1$  et  $n \geq r$ , on dispose de l'inclusion suivante

$$\text{Fil}^r W_n^{PD}(R) \subset \{x \in W_n^{PD}(R) \text{ tel que } \varphi(x) \in p^r W_n^{PD}(R)\},$$

ainsi que de la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Fil}^r W_n^{PD}(R) \rightarrow \text{Fil}^r W_{n+s}^{PD}(R) \rightarrow \text{Fil}^r W_s^{PD}(R) \rightarrow 0.$$

Alors, si  $x$  est un élément de  $\text{Fil}^r W_n^{PD}(R)$ , il se relève en un élément  $\hat{x} \in \text{Fil}^r W_{n+r}^{PD}(R)$  tel que  $\varphi(\hat{x}) = p^r \hat{y}$  et  $\varphi^r(x) = \hat{y}$  modulo  $p^n$  ne dépend pas du choix du relèvement  $\hat{x}$  de  $x$ , ni du choix de  $\hat{y}$ . Ceci permet de définir des applications

$$\varphi^r : \text{Fil}^r W_n^{PD}(R) \rightarrow W_n^{PD}(R),$$

qui vérifient, pour  $r \leq p - 2$ ,

$$\varphi^r_{|\text{Fil}^{r+1}} = p\varphi^{r+1}.$$

La filtration et les applications  $\varphi^r$  ainsi définies passent à la limite projective.

2.1.3.2. L'application  $\theta: W(R) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  se prolonge en une application notée toujours  $\theta$  de  $A_{\text{cris}}$  vers  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  ou de  $B_{\text{cris}}^+$  vers  $\mathbb{C}$ . Pour tout entier  $r \geq 0$ , on note  $\text{Fil}^r B_{\text{cris}}^+$  l'adhérence de l'idéal engendré par les  $q^m/m!$  pour  $m \geq r$ . On remarque que

$$\text{Fil}^r A_{\text{cris}} = \text{Fil}^r B_{\text{cris}}^+ \cap A_{\text{cris}}.$$

D'autre part, l'élément  $t$  défini par

$$t = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{([\varepsilon] - 1)^n}{n},$$

appartient à  $B_{\text{cris}}^+$  et l'idéal engendré par  $t$  est stable par l'action de  $G_K$  et par  $\varphi$  (on a  $\varphi(t) = pt$  et  $g(t) = \chi(g)t$ , pour  $g \in G_K$ ). On pose  $B_{\text{cris}} = B_{\text{cris}}^+[1/t]$ ; c'est un anneau muni d'une application  $\varphi$ , d'une action de  $G_K$  et d'une filtration décroissante par des sous  $K_0$ -espaces vectoriels, pour  $r \in \mathbb{Z}$ :

$$\text{Fil}^r B_{\text{cris}} = \cup_{i \in \mathbb{Z}} t^{-i} \text{Fil}^{r+i} B_{\text{cris}}^+$$

2.1.3.3. Les idéaux  $\text{Fil}^r W_n^{PD}(R)$  et  $\text{Fil}^r W_n(R)$  ne sont pas stables par  $\varphi$ ; on introduit alors les idéaux (cf. [F94])

$$I^{[r]} = \left\{ x \in A_{\text{cris}} \text{ tel que } \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi}_{i \text{ fois}}(x) \in \text{Fil}^r A_{\text{cris}} \text{ pour tout } i \in \mathbb{N} \right\}$$

et

$$I^{[r]}W(R) = \left\{ x \in W(R) \text{ tel que } \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi}_{i \text{ fois}}(x) \in \text{Fil}^r W(R) \right. \\ \left. \text{pour tout } i \in \mathbb{N} \right\}.$$

On sait que  $I^{[r]}W(R)$  est un idéal principal et qu'un élément

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \in I^{[r]}W(R)$$

en est un générateur si et seulement si  $v_R(a_0) = rp/(p - 1)$ ; on en déduit que  $I^{[r]}W(R)$  est l'idéal de  $W(R)$  engendré par  $\pi^r$  et  $I^{[p-1]}W(R)$  peut être également vu comme l'idéal engendré par  $\pi_0$ , si  $p \neq 2$ . Si  $p = 2$ ,  $I^{[p-1]}W(R) = I^{[1]}W(R)$  est l'idéal engendré par  $\pi$ .

D'autre part  $I^{[1]}$  est un  $p$ -d-idéal de  $A_{\text{cris}}$  et  $I^{[r]}$  est la  $r$ -ième-puissance divisée de  $I^{[1]}$ ; plus précisément  $I^{[r]}$  est l'adhérence du  $W(R)$ -module engendré par les éléments  $t^{\{s\}} = t^{r(s)}\gamma_{m(s)}(\frac{t^{p-1}}{p})$  où  $m(s)$  et  $r(s)$  sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de  $s$  par  $p - 1$ . Comme  $\varphi(t) = pt$ , on voit facilement que, pour  $m \leq p - 1$ ,

$$\varphi^m(\text{Fil}^m A_{\text{cris}} \cap I^{[r]}) \subset I^{[r]}$$

et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\varphi^m(\text{Fil}^m W_n^{PD}(R) \cap I^{[r]}W_n^{PD}(R)) \subset I^{[r]}W_n^{PD}(R);$$

en particulier, si  $n = 1$  et  $r = p - 1$ , on a

$$\varphi^m(\text{Fil}^m W_1^{PD}(R) \cap I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)) \subset I^{[p-1]}W_1^{PD}(R).$$

2.1.3.4. *Le cas  $n = 1$ . On a:*

- $\varphi_{\text{Fil}^{r+1}}^r = 0$  pour  $0 \leq r \leq p - 2$ .
- choisissons  $\beta = (\beta^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in R$  tel que  $\beta^{(0)} = -p$ . Alors:

$$\begin{aligned} W_1^{PD}(R)/I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) &= R/\beta^p R \\ &= R/\tilde{\pi}_0 R \quad \text{si } p \neq 2 \\ &= R/\tilde{\pi} R \quad \text{si } p = 2, \end{aligned}$$

et l'application

$$\begin{aligned} u = \theta_1 \circ \varphi^{-1}: R &\rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \\ x &\mapsto x^{(1)} \bmod p, \end{aligned}$$

induit un isomorphisme d'anneaux de  $R/\beta^p R$  vers  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$  ( $\varphi^{-1}$  désigne ici l'inverse de  $\varphi$ ).

De plus, rappelons que  $R/\beta^p R$  est muni d'une filtration

$$\text{Fil}^r(R/\beta^p R) = \beta^r(R/\beta^p R),$$

pour  $r \leq p - 1$  et  $\text{Fil}^r(R/\beta^p R) = 0$  pour  $r \geq p$ , et d'applications  $\varphi^r$  définies par:

$$\begin{aligned} \varphi^r: \text{Fil}^r(R/\beta^p R) &\rightarrow R/\beta^p R \\ \beta^r x &\mapsto x^p. \end{aligned}$$

Si on définit sur  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$  la filtration suivante

$$\text{Fil}^r \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} = (\beta^{(1)})^r \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}},$$

et les applications  $\varphi^r$  par

$$\begin{aligned} \varphi^r: \text{Fil}^r \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} &\rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \\ (\beta^{(1)})^r x &\mapsto x^p, \end{aligned}$$

on constate que  $u$  respecte la filtration et commute aux applications  $\varphi^r$ . Alors, si on munit  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$  de la structure de  $k$ -espace vectoriel déduite par l'extension des scalaires  $\sigma^{-1}: k \rightarrow k$ , on voit que  $u$  est un isomorphisme de modules filtrés de  $W_1^{PD}(R)/I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)$  sur  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ .

## 2.2. LES MODULES FILTRÉS SUR $W$

2.2.1. Un module filtré sur  $W$  est un  $W$ -module  $\Lambda$  muni

- d'une filtration  $(\text{Fil}^r \Lambda)_{r \in \mathbb{Z}}$  décroissante par des sous- $W$ -modules de  $\Lambda$ , séparée et exhaustive; c'est-à-dire telle que

$$\bigcap_{r \in \mathbb{Z}} \text{Fil}^r \Lambda = 0 \quad \text{et} \quad \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} \text{Fil}^r \Lambda = \Lambda,$$

- d'applications  $\varphi^r: \text{Fil}^r \Lambda \rightarrow \Lambda$  semi-linéaires par rapport au Frobenius  $\sigma$  de  $W$  et telles que

$$\varphi^r|_{\text{Fil}^{r+1} \Lambda} = p\varphi^{r+1}.$$

On note  $\mathbf{MF}_W$  la catégorie des modules filtrés sur  $W$ , dont les morphismes sont applications  $W$ -linéaires respectant la filtration et commutant aux applications  $\varphi^r$ , et  $\mathbf{MF}_k$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{MF}_W$  formée des objets tués par  $p$ . La catégorie  $\mathbf{MF}_W$  est additive et  $\mathbb{Z}_p$ -linéaire, mais n'est pas abélienne.

### 2.2.1.1. Noyau et conoyau d'un morphisme dans $\mathbf{MF}_W$

Soient  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  des objets de  $\mathbf{MF}_W$  et  $u$  un morphisme de  $\Lambda$  vers  $\Lambda'$ . On peut définir le noyau de  $u$ : en tant que  $W$ -module,  $\text{Ker } u$  est le noyau de  $u$  considéré comme un morphisme de  $W$ -modules, qu'on munit de la filtration

$$\text{Fil}^r \text{Ker } u = \text{Ker } u \cap \text{Fil}^r \Lambda,$$

et des applications  $\varphi^r$

$$\varphi_{\text{Ker } u}^r = \varphi_{|\text{Ker } u}^r.$$

De même, un sous-objet  $\Lambda_0$  de  $\Lambda$  est un sous- $W$ -module de  $\Lambda$  tel que

$$\varphi^r(\Lambda_0 \cap \text{Fil}^r \Lambda) \subset \Lambda_0,$$

et muni de la filtration induite par l'inclusion, c'est-à-dire  $\text{Fil}^r \Lambda_0 = \Lambda_0 \cap \text{Fil}^r \Lambda$ .

On dit que le morphisme  $u: \Lambda \rightarrow \Lambda'$  est *strict* si

$$u(\text{Fil}^r \Lambda) = \text{Fil}^r \Lambda' \cap u(\Lambda),$$

pour tout  $r \in \mathbb{Z}$ . Si  $u$  est strict, on peut définir son conoyau; en tant que  $W$ -module,  $\text{Coker } u$  est le conoyau de  $u$  dans la catégorie des  $W$ -modules. On définit la filtration sur  $\text{Coker } u$  de la manière suivante:

• soient  $u_r$  la restriction de  $u$  à  $\text{Fil}^r \Lambda$  à valeurs dans  $\text{Fil}^r \Lambda'$  et  $\text{Coker } u_r$  le conoyau de  $u_r$  dans la catégorie des  $W$ -modules. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Fil}^r \Lambda & \rightarrow & \text{Fil}^r \Lambda' & \rightarrow & \text{Coker } u_r & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \Lambda & \rightarrow & \Lambda' & \rightarrow & \text{Coker } u & \rightarrow & 0 \end{array}$$

qui fournit une flèche naturelle de  $\text{Coker } u_r$  vers  $\text{Coker } u$ . Comme  $u$  est strict, cette flèche est injective et on définit  $\text{Fil}^r \text{Coker } u$  comme l'image de  $\text{Coker } u_r$  dans  $\text{Coker } u$ . Les applications  $\varphi^r$  se déduisent de celles sur  $\Lambda'$  par passage au quotient. En particulier, on déduit la notion d'objet quotient.

Si  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont des objets de  $\mathbf{MF}_k$ , alors  $\text{Ker } u$  et  $\text{Coker } u$  le sont également.

**EXEMPLES:** (a) Si  $\Lambda$  est un réseau adapté d'un module filtré sur  $K_0$  faiblement admissible, alors on peut poser  $\varphi^r = (1/p^r)\varphi_{|\text{Fil}^r \Lambda}$  et  $\Lambda$  devient un objet de  $\mathbf{MF}_W$ .

(b) L'anneau  $A_{\text{cris}}$  tel qu'il a été décrit dans la partie précédente est muni d'une filtration  $\text{Fil}^r A_{\text{cris}}$  et d'endomorphismes  $\varphi^r: \text{Fil}^r A_{\text{cris}} \rightarrow A_{\text{cris}}$  pour  $r \leq p-1$  et vérifiant  $\varphi_{|\text{Fil}^{r+1} A_{\text{cris}}}^r = p\varphi^{r+1}$ , pour  $r \leq p-2$ . Il est nécessaire de modifier cette filtration pour que  $A_{\text{cris}}$  devienne un objet de  $\mathbf{MF}_W$ : pour cela, il suffit de poser  $\text{Fil}^r A_{\text{cris}} = 0$  pour  $r \geq p$  et de conserver la définition des  $\text{Fil}^r A_{\text{cris}}$  pour  $r \leq p-1$ . (Dans les applications, on ne s'intéressera qu'aux objets dont la longueur de la filtration est plus petite que  $p-1$  et le choix des  $\text{Fil}^r A_{\text{cris}}$ , pour  $r \geq p$ , n'intervient pas; on aurait également pu choisir

$$\text{Fil}_p^r A_{\text{cris}} = \{x \in \text{Fil}^r A_{\text{cris}} \text{ tel que } \varphi(x) \in p^r A_{\text{cris}}\},$$

mais alors, la multiplication par  $p^n$  dans  $A_{\text{cris}}$  ne serait pas un morphisme strict, pour  $n \geq 1$ .)



(c) De même,  $W_n^{PD}(R)$  est muni d'une structure d'objets de  $\mathbf{MF}_W$ ; pour  $r \leq p - 1$ ,  $\text{Fil}^r W_n^{PD}(R)$  est l'idéal de  $W_n^{PD}(R)$  défini ci-dessus, avec l'application  $\varphi^r: \text{Fil}^r W_n^{PD}(R) \rightarrow W_n^{PD}(R)$  et pour  $r \geq p$ , on pose  $\text{Fil}^r W_n^{PD}(R) = 0$ . On voit que  $W_n^{PD}(R)$  s'identifie au conoyau de l'endomorphisme strict de  $A_{\text{cris}}$  qui est la multiplication par  $p^n$ .

2.2.1.2. *Remarque:* cas où  $\Lambda$  est tué par  $p$ .

L'application  $\varphi^r$  est nulle sur  $\text{Fil}^{r+1}$ ; en d'autres termes  $\varphi^r$  se factorise en une application notée toujours

$$\varphi^r: \text{Fil}^r \Lambda / \text{Fil}^{r+1} \Lambda \rightarrow \Lambda.$$

Puisque  $\Lambda$  est muni d'une filtration décroissante, on peut considérer le module gradué  $\text{gr } \Lambda$  associé à  $\Lambda$ , c'est-à-dire le module

$$\text{gr } \Lambda = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \text{Fil}^r \Lambda / \text{Fil}^{r+1} \Lambda.$$

La donnée des applications  $\varphi^r: \text{Fil}^r \Lambda \rightarrow \Lambda$  nulles sur  $\text{Fil}^{r+1} \Lambda$  équivaut à la donnée d'une application  $\sigma$ -semi-linéaire  $\Phi: \text{gr } \Lambda \rightarrow \Lambda$ ; en effet il suffit de poser

$$\Phi(\bar{x}) = \varphi^r(x) \quad \text{pour } \bar{x} \in \text{gr}^r \Lambda = \text{Fil}^r \Lambda / \text{Fil}^{r+1} \Lambda,$$

où  $x$  est un relèvement quelconque de  $\bar{x}$  dans  $\text{Fil}^r \Lambda$ .

2.2.2. Pour  $a$  et  $b$  entiers, on considère à présent les sous-catégories pleines de  $\mathbf{MF}_W$ , qu'on notera  $\mathbf{MF}_W^{[a,b]}$  (respectivement  $\mathbf{MF}_W^+$ ) formée des objets  $\Lambda$  de type fini sur  $W$ , tels que  $\text{Fil}^a \Lambda = \Lambda$  et  $\text{Fil}^{b+1} \Lambda = \{0\}$  (respectivement des objets  $\Lambda$  de type fini sur  $W$  tels que  $\text{Fil}^0 \Lambda = \Lambda$  et tels qu'il existe un entier  $h$  vérifiant  $\text{Fil}^{h+1} \Lambda = \{0\}$ ). On impose en plus que les  $\text{Fil}^r \Lambda$  soient des facteurs directs et que

$$\Lambda = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \varphi^r(\text{Fil}^r \Lambda).$$

Si  $\Lambda$  est tué par  $p$ , ceci revient à demander que  $\Lambda$  soit de dimension finie sur  $k$  et que l'application

$$\Phi: \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} \text{Fil}^r \Lambda / \text{Fil}^{r+1} \Lambda \rightarrow \Lambda$$

soit bijective.

On note  $\mathbf{MF}_k^+$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{MF}_W^+$  formée des objets tués par  $p$ . On appelle alors *hauteur* de  $\Lambda$  le plus petit entier  $h$  tel que  $\text{Fil}^{h+1} \Lambda = \{0\}$  et on note  $\mathbf{MF}_W^h$  (respectivement  $\mathbf{MF}_k^h$ ) la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{MF}_W^+$  (respectivement de  $\mathbf{MF}_k^+$ ) formée des objets de hauteur  $\leq h$ . Tout morphisme de  $\mathbf{MF}_W^+$  (donc de  $\mathbf{MF}_k^+$ ) est strict et ces deux catégories sont abéliennes (cf. [F-L], p. 588).

*Remarque:* les sous-objets d'un objet  $\Lambda$  de  $\mathbf{MF}_W^+$  dans la catégorie  $\mathbf{MF}_W$  sont également des sous-objets dans  $\mathbf{MF}_W^+$ . De même, un quotient d'un objet de  $\mathbf{MF}_W^+$ , qui est a priori dans  $\mathbf{MF}_W$ , est en fait un quotient dans  $\mathbf{MF}_W^+$  (cf. [F-L], p. 588). Les sous-objets et quotients d'un objet de  $\mathbf{MF}_k^+$  vérifient la même propriété.

Si  $\Lambda$  est un objet de  $\mathbf{MF}_W^+$  et  $i$  un entier, on introduit le module  $\Lambda\{i\}$  défini par

$$\begin{aligned}\mathrm{Fil}^r \Lambda\{i\} &= \mathrm{Fil}^{r+i} \Lambda \\ \varphi_{\Lambda\{i\}}^r &= \varphi_{\Lambda}^{r+i}.\end{aligned}$$

Si  $\Lambda \in \mathbf{MF}_W^{[a,b]}$ , on a  $\Lambda\{i\} \in \mathbf{MF}_W^{[a-i,b-i]}$ .

*Remarque:* bases adaptées à la filtration.

Soit  $\Lambda$  un objet de  $\mathbf{MF}_k^h$  de dimension  $d$  sur  $k$  et  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  une base de  $\Lambda$ . A chaque  $e_i$ , on associe le plus grand entier  $r_i$  tel que  $e_i \in \mathrm{Fil}^{r_i} \Lambda$ .

On voit que l'on peut choisir une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  telle que  $(e_i)_{r_i \geq r}$  soit une base de  $\mathrm{Fil}^r \Lambda$  pour tout  $r$ ; on dit alors que la base est *adaptée à la filtration*. Dans ces conditions,  $(\bar{e}_i)_{1 \leq i \leq d}$  est une base de  $\mathrm{gr} \Lambda$ , où  $\bar{e}_i$  est l'image de  $e_i$  dans  $\mathrm{gr}^r \Lambda = \mathrm{Fil}^r \Lambda / \mathrm{Fil}^{r+1} \Lambda$  et on a  $\mathrm{gr}^r \Lambda = \bigoplus_{r_i=r} k \bar{e}_i$ .

De plus si

$$\varphi^{r_j}(e_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i,$$

l'application  $\Phi: \mathrm{gr} \Lambda \rightarrow \Lambda$  est décrite dans la base  $(\bar{e}_i)$  par

$$\Phi(\bar{e}_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i.$$

On constate qu'exiger que  $\Phi$  soit bijective revient à demander que la matrice  $A = (a_{ij})$  soit inversible.

### 2.2.3. Notion de suite exacte et de $\mathrm{Ext}^1$ dans les catégories $\mathbf{MF}_W$ et $\mathbf{MF}_k$

#### 2.2.3.1. Notion de suite exacte dans les catégories $\mathbf{MF}_W$ et $\mathbf{MF}_k$ .

Soient  $\Lambda, \Lambda'$  et  $\Lambda''$  des objets de  $\mathbf{MF}_W$ . La suite

$$0 \rightarrow \Lambda' \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda'' \rightarrow 0,$$

où les morphismes sont des morphismes dans  $\mathbf{MF}_W$ , est dite exacte si elle est exacte en tant que suite de  $W$ -modules et si les suites de  $W$ -modules suivantes

$$0 \rightarrow \mathrm{Fil}^r \Lambda' \rightarrow \mathrm{Fil}^r \Lambda \rightarrow \mathrm{Fil}^r \Lambda'' \rightarrow 0,$$

pour  $r \in \mathbb{Z}$ , sont exactes. Elle identifie alors  $\Lambda'$  au noyau de  $\Lambda \rightarrow \Lambda''$  et  $\Lambda''$  au conoyau du morphisme strict  $\Lambda' \rightarrow \Lambda$ .

Une suite exacte dans  $\mathbf{MF}_k$  est une suite exacte d'objets de  $\mathbf{MF}_W$  tués par  $p$ .

**EXEMPLES** (a) La suite

$$0 \rightarrow W_r^{PD}(R) \xrightarrow{p^s} W_{r+s}^{PD}(R) \rightarrow W_s^{PD}(R) \rightarrow 0$$

(rappelons que  $\text{Fil}^p W_n^{PD}(R) = 0$  pour  $n = r, s$  et  $r + s$ ), est une suite exacte dans  $\mathbf{MF}_W$ .

(b) On a vu (cf. 2.1.3.3.) que

$$\varphi^r(I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) \cap \text{Fil}^r W_1^{PD}(R)) \subset I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)$$

ce qui permet de considérer  $I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)$  comme un sous-objet de  $W_1^{PD}(R)$  dans  $\mathbf{MF}_k$ ; d'autre part

$$W_1^{PD}(R)/I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) \simeq \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$$

La suite suivante est donc une suite exacte dans  $\mathbf{MF}_k$ :

$$0 \rightarrow I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) \rightarrow W_1^{PD}(R) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \rightarrow 0.$$

### 2.2.3.2. Notion de $\text{Ext}^1$

On dit que deux extensions  $E_1$  et  $E_2$  de  $\Lambda$  par  $\Lambda'$  dans la catégorie  $\mathbf{MF}_W$  sont isomorphes s'il existe un morphisme de modules filtrés de  $E_1$  vers  $E_2$  qui rende le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Lambda' & \rightarrow & E_1 & \rightarrow & \Lambda & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \\ 0 & \rightarrow & \Lambda' & \rightarrow & E_2 & \rightarrow & \Lambda & \rightarrow & 0, \end{array}$$

et on note  $\text{Ext}_{\mathbf{MF}_W}^1(\Lambda, \Lambda')$  l'ensemble des classes d'isomorphismes d'extensions de  $\Lambda$  par  $\Lambda'$ . On munit cet ensemble de la structure de groupe suivante: soient  $E_1$  et  $E_2$  deux extensions de  $\Lambda$  par  $\Lambda'$  et  $[E_1]$  (respectivement  $[E_2]$ ) la classe d'isomorphismes de  $E_1$  (respectivement  $E_2$ ). On veut définir  $[E_1] + [E_2]$ ; les deux extensions permettent d'écrire la suite exacte

$$0 \rightarrow \Lambda' \oplus \Lambda' \rightarrow E_1 \oplus E_2 \rightarrow \Lambda \oplus \Lambda \rightarrow 0,$$

d'où

$$0 \rightarrow \Lambda' \oplus \Lambda' \rightarrow E_1 \times_{\Lambda} E_2 \rightarrow \Lambda \rightarrow 0,$$

où  $E_1 \times_{\Lambda} E_2$  est le produit fibré de  $E_1$  et  $E_2$  au-dessus de  $\Lambda$ . Alors le conoyau  $E_3$  de l'application composée

$$\begin{aligned} \Lambda' &\rightarrow \Lambda' \oplus \Lambda' \rightarrow E_1 \times_{\Lambda} E_2 \\ x &\mapsto (x, -x), \end{aligned}$$

est une extension de  $\Lambda$  par  $\Lambda'$  et  $[E_3] = [E_1] + [E_2]$ .

*Remarques.* (a) Une extension est dans la classe nulle si et seulement si elle est scindée.

(b) Si  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont dans  $\mathbf{MF}_k$  et si  $\Lambda''$  est une extension de  $\Lambda$  par  $\Lambda'$  tuée par  $p$ , alors toute la classe d'isomorphismes de  $\Lambda''$  est tuée par  $p$ . On définit  $\text{Ext}_{\mathbf{MF}_k}^1(\Lambda, \Lambda')$ , le sous-groupe de  $\text{Ext}_{\mathbf{MF}_w}^1(\Lambda, \Lambda')$  formé des classes d'extensions tuées par  $p$ .

### 2.2.3.3. Suite exacte longue

**PROPOSITION 2.2.3.3.** *Si  $0 \rightarrow \Lambda' \xrightarrow{i} \Lambda \rightarrow \Lambda'' \rightarrow 0$  est une suite exacte courte dans  $\mathbf{MF}_w$  et  $\Lambda_0$  est un objet de  $\mathbf{MF}_w$ , alors les foncteurs  $\text{Hom}_{\mathbf{MF}_w}(\Lambda_0, \cdot)$  et  $\text{Hom}_{\mathbf{MF}_w}(\cdot, \Lambda_0)$  donnent lieu à deux suites exactes longues, à savoir*

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad &\text{Hom}_{\mathbf{MF}_w}(\Lambda'', \Lambda_0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{MF}_w}(\Lambda, \Lambda_0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{MF}_w}(\Lambda', \Lambda_0) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{MF}_w}^1(\Lambda'', \Lambda_0) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{MF}_w}^1(\Lambda, \Lambda_0) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{MF}_w}^1(\Lambda', \Lambda_0), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad &0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{MF}_w}(\Lambda_0, \Lambda') \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{MF}_w}(\Lambda_0, \Lambda) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{MF}_w}(\Lambda_0, \Lambda'') \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{MF}_w}^1(\Lambda_0, \Lambda') \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{MF}_w}^1(\Lambda_0, \Lambda) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{MF}_w}^1(\Lambda_0, \Lambda''). \end{aligned}$$

**DEMONSTRATION.** (a) il s'agit tout d'abord de définir le morphisme

$$\text{Hom}_{\mathbf{MF}_w}(\Lambda', \Lambda_0) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{MF}_w}^1(\Lambda'', \Lambda_0).$$

Si  $u: \Lambda' \rightarrow \Lambda_0$  est un morphisme dans  $\mathbf{MF}_w$ , alors le morphisme

$$\begin{aligned} \Lambda' &\rightarrow \Lambda_0 \oplus \Lambda \\ \lambda &\mapsto (u(\lambda), -i(\lambda)) \end{aligned}$$

est un morphisme strict, qui permet de définir  $\text{Coker } u = \Lambda_0 \amalg_{\Lambda'} \Lambda$  et on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow \Lambda_0 \rightarrow \Lambda_0 \amalg_{\Lambda'} \Lambda \rightarrow \Lambda'' \rightarrow 0.$$

Le morphisme cherché est donc l'application qui à  $\Lambda' \rightarrow \Lambda_0$  associe

$$[\Lambda_0 \amalg_{\Lambda'} \Lambda] \in \text{Ext}_{\mathbf{MF}_w}^1(\Lambda'', \Lambda_0).$$

(b) La flèche

$$\text{Hom}_{\mathbf{MF}_W}(\Lambda_0, \Lambda'') \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{MF}_W}^1(\Lambda_0, \Lambda')$$

est donné par l'application qui à un morphisme  $\Lambda_0 \rightarrow \Lambda''$  associe la classe de l'extension  $\Lambda \times_{\Lambda'} \Lambda_0$ .

La preuve de l'exactitude des deux suites longues (a) et (b) se fait alors de la même manière que dans le cadre d'une catégorie abélienne.  $\square$

*Remarque:* de la même manière, on obtient deux suites exactes longues en considérant la catégorie  $\mathbf{MF}_k$ .

### 2.3. REPRÉSENTATIONS $\mathbb{Z}_p$ -ADIQUES QUI SONT DES SOUS-QUOTIENTS DE REPRÉSENTATIONS CRISTALLINES

Posons

$$A_{\text{cris},\infty} = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} W_n^{PD}(R);$$

c'est un objet de  $\mathbf{MF}_W$  avec  $\text{Fil}^p A_{\text{cris},\infty} = 0$ ; alors, si  $\Lambda$  est un objet de  $\mathbf{MF}_W^{p-1}$  de torsion, on peut considérer le  $\mathbb{Z}_p$ -module défini par

$$\mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda) = \text{Hom}_{\mathbf{MF}_W}(\Lambda, A_{\text{cris},\infty}),$$

qui est muni d'une action de  $G_{K_0}$ . Si  $\Lambda$  est un objet de  $\mathbf{MF}_W^{p-1}$  sans  $p$ -torsion, on pose

$$\mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda/p^n \Lambda) = \text{Hom}_{\mathbf{MF}_W}(\Lambda, A_{\text{cris}});$$

c'est une représentation  $\mathbb{Z}_p$ -adique de  $G_{K_0}$ .

On se propose alors de montrer le théorème suivant où  $\mathbf{MF}_W^{p-1*}$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{MF}_W^{p-1}$  dont les objets  $\Lambda$  vérifient la propriété suivante:

\* si  $\Lambda'$  est un quotient de  $\Lambda$  tel que  $\Lambda' = \text{Fil}^{p-1} \Lambda'$  alors  $\Lambda' = 0$ .

**THEOREME 2.** *Le foncteur  $\mathbf{V}_{\text{cris}}^*$  restreint à  $\mathbf{MF}_{W,\text{tors}}^h$  pour  $h \leq p - 1$  et à valeurs dans  $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p,\text{tors}}(\mathbf{G}_{K_0})$ , est exact et fidèle. Si  $\Lambda$  est un objet de longueur finie, alors*

$$\text{long}_W \Lambda = \text{long}_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda).$$

*De plus, la restriction de  $\mathbf{V}_{\text{cris}}^*$  à  $\mathbf{MF}_{W,\text{tors}}^h$ , pour  $h \leq p - 2$ , ou bien à  $\mathbf{MF}_W^{p-1*}$  est pleinement fidèle.*

Si  $\Lambda$  est libre sur  $W$ , alors  $\mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda)$  est libre sur  $\mathbb{Z}_p$  et on a

$$\text{rang}_W \Lambda = \text{rang}_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda).$$

*Remarque:* Ce résultat a essentiellement déjà été démontré dans [F-L]; la démonstration de l'exactitude et de la fidélité de  $\mathbf{V}_{\text{cris}}^*$  proposée ici est un peu différente de celle contenue dans cet article. D'une part, elle est plus directe, car elle ne repose pas sur la classification des objets simples de la catégorie  $\mathbf{MF}_W$ , ce qui était le cas dans l'article cité; d'autre part, l'anneau utilisé n'est pas le même. En effet, un anneau  $S \subset W_K(R)$  y est introduit

$$(S = \{x \in W_K(R) \text{ tel que } v_R(x_{-n}^{(0)}) \geq np \text{ pour } n \in \mathbb{N}\},$$

où  $x = \sum_{n \gg \infty} p^n [x_n]$ ), qui est également inclus dans  $A_{\text{cris}}$ ; cette inclusion induit une application de  $S/p^n S$  vers  $A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On peut vérifier que cette application induit un isomorphisme entre les représentations construites avec le premier anneau et celles construites avec le second.

### 2.3.1. Démonstration de l'exactitude et la fidélité de $\mathbf{V}_{\text{cris}}^*$

**PROPOSITION 2.3.1.** *Soit  $h$  un entier vérifiant  $0 \leq h \leq p - 1$ . Si  $\Lambda$  est un objet de  $\mathbf{MF}_W^h$  de torsion, donc un  $W$ -module de longueur finie  $d$ , alors*

$$\text{long}_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda) = d$$

et

$$\text{Ext}_{\mathbf{MF}_W}^1(\Lambda, A_{\text{cris}, \infty}) = 0.$$

Par dévissage, il suffit de considérer le cas où  $\Lambda$  est tué par  $p$ .

2.3.1.1. On commence par remarquer que si  $\Lambda$  est un objet de  $\mathbf{MF}_W^+$  tué par  $p$ , alors, comme  $W_1^{PD}(R)$  s'identifie au noyau de la multiplication par  $p$  dans  $A_{\text{cris}, \infty}$ ,

$$\mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda) = \text{Hom}_{\mathbf{MF}_W}(\Lambda, A_{\text{cris}, \infty}) = \text{Hom}_{\mathbf{MF}_k}(\Lambda, W_1^{PD}(R)).$$

Par ailleurs,

$$\text{Ext}_{\mathbf{MF}_k}^1(\Lambda, W_1^{PD}(R)) = \text{Ext}_{\mathbf{MF}_W}^1(\Lambda, A_{\text{cris}, \infty}).$$

En effet, si  $E$  est une extension de  $\Lambda$  par  $W_1^{PD}(R)$ , le diagramme suivant est commutatif, où les lignes et les colonnes sont exactes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & W_1^{PD}(R) & \rightarrow & \text{Ker } p & \rightarrow & \Lambda \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \rightarrow & A_{\text{cris},\infty} & \rightarrow & E & \rightarrow & \Lambda \rightarrow 0 \\
 & & \times p \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & A_{\text{cris},\infty} & \rightarrow & \text{Im } p & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

ce qui permet de définir une flèche de  $\text{Ext}_{\mathbf{MF}_w}^1(\Lambda, A_{\text{cris},\infty})$  vers  $\text{Ext}_{\mathbf{MF}_k}^1(\Lambda, W_1^{PD}(R))$ ; on vérifie facilement que cette flèche est l'inverse de la flèche naturelle

$$\text{Ext}_{\mathbf{MF}_k}^1(\Lambda, W_1^{PD}(R)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{MF}_w}^1(\Lambda, W_1^{PD}(R)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{MF}_w}^1(\Lambda, A_{\text{cris},\infty});$$

elle est donc bijective.

2.3.1.2. On s'est ainsi ramené à montrer la proposition:

PROPOSITION 2.3.1.2. *Si  $\Lambda$  est un objet de  $\mathbf{MF}_k^{p-1}$ , alors*

$$\dim_{\mathbb{F}_p}(\text{Hom}_{\mathbf{MF}_k}(\Lambda, W_1^{PD}(R))) = \dim_k \Lambda$$

et

$$\text{Ext}_{\mathbf{MF}_k}^1(\Lambda, W_1^{PD}(R)) = 0.$$

Cette proposition se démontre en distinguant deux cas: le cas où  $\Lambda$  est un objet de  $\mathbf{MF}_k^{p-1*}$  (c'est-à-dire qui n'admet pas de sous-quotient  $\bar{\Lambda}$  tel que  $\text{Fil}^{p-1} \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}$ ) ou bien le cas où  $\Lambda$  vérifie  $\text{Fil}^{p-1} \Lambda = \Lambda$ . Ces deux cas sont clairement disjoints et les objets simples de la catégorie  $\mathbf{MF}_k^{p-1}$  soit sont dans  $\mathbf{MF}_k^{p-1*}$ , soit vérifient  $\Lambda = \text{Fil}^{p-1} \Lambda$ . Ainsi, par dévissage, on voit qu'il suffit de démontrer la proposition ci-dessous.

PROPOSITION 2.3.1.2.' (1) *Si  $\Lambda$  est un objet de  $\mathbf{MF}_k^{p-1*}$ , alors, pour  $i = 0, 1$ , l'application naturelle*

$$\text{Ext}_{\mathbf{MF}_k}^i(\Lambda, W_1^{PD}(R)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{MF}_k}^i(\Lambda, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$$

induite par la suite exacte

$$0 \rightarrow I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) \rightarrow W_1^{PD}(R) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \rightarrow 0$$

est injective et  $c$ 'est un isomorphisme pour  $i = 0$ .

(2) Si  $\Lambda$  est un objet de  $\mathbf{MF}_k^{p-1}$  tel que  $\mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda = \Lambda$ , alors, pour  $i = 0, 1$ , l'application naturelle

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{MF}_k}^i(\Lambda, I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbf{MF}_k}^i(\Lambda, W_1^{PD}(R))$$

est un isomorphisme.

2.3.1.2.1. DEMONSTRATION de (1). La suite exacte

$$0 \rightarrow I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) \rightarrow W_1^{PD}(R) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \rightarrow 0$$

permet de se ramener à montrer:

(a)  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF}_k}(\Lambda, I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)) = 0$  et

(b)  $\mathrm{Ext}_{\mathbf{MF}_k}^1(\Lambda, I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)) = 0$ .

(a) Soient  $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF}_k}(\Lambda, I^{[p-1]}W_1^{PD}(R))$  et  $\Lambda' = \mathrm{Ker} u$ . Puisque

$$\Lambda = \sum_{0 \leq r \leq p-1} \varphi^r(\mathrm{Fil}^r \Lambda)$$

on obtient l'égalité suivante, en utilisant le fait que  $u$  commute avec les applications  $\varphi^r$ :

$$u(\Lambda) = \sum_{0 \leq r \leq p-1} \varphi^r(u(\mathrm{Fil}^r \Lambda)).$$

Comme  $u$  a son image dans  $I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) \subset \mathrm{Fil}^{p-1}W_1^{PD}(R)$ , on déduit que

$$\varphi^r(u(\mathrm{Fil}^r \Lambda)) = 0 \quad \text{pour } r < p-1$$

et, par conséquent,

$$\Lambda = \Lambda' + \varphi^{p-1}(\mathrm{Fil}^{p-1}\Lambda).$$

Si  $\bar{\Lambda} = \Lambda/\Lambda'$ , on a  $\bar{\Lambda} = \varphi^{p-1}(\mathrm{Fil}^{p-1}\bar{\Lambda})$ , donc  $\dim_k \bar{\Lambda} \leq \dim_k \mathrm{Fil}^{p-1}\bar{\Lambda}$ , d'où  $\bar{\Lambda} = \mathrm{Fil}^{p-1}\bar{\Lambda}$ ; comme  $\Lambda$  est un objet de  $\mathbf{MF}_k^{p-1*}$ , on obtient  $\bar{\Lambda} = 0$ .

(b) Pour montrer que  $\mathrm{Ext}_{\mathbf{MF}_k}^1(\Lambda, I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)) = 0$ , il s'agit de vérifier qu'une suite exacte

$$0 \rightarrow I^{[p-1]}W_1^{PD}(R) \rightarrow E \rightarrow \Lambda \rightarrow 0$$

est scindée.



Soient  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  une base de  $\Lambda$  adaptée à la filtration et, pour tout  $i$ ,  $r_i$  le plus grand entier tel que  $e_i \in \text{Fil}^{r_i} \Lambda$ . Choisissons un relèvement  $\hat{e}_i$  de  $e_i$  dans  $\text{Fil}^{r_i} E$ ; alors si  $(a_{ij})$  est la matrice représentant les  $\varphi^r$  dans la base  $(e_i)$ , c'est-à-dire si

$$\varphi^{r_j}(e_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i,$$

il existe des éléments  $b_j \in I^{[p-1]} W_1^{PD}(R)$  tels que

$$\varphi^{r_j}(\hat{e}_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} \hat{e}_i + b_j \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq d.$$

On cherche à montrer l'existence d'une section  $\Lambda \rightarrow E$  respectant la filtration et commutant aux  $\varphi^r$ , ce qui revient à montrer l'existence d'éléments  $\alpha_j$  de  $I^{[p-1]} W_1^{PD}(R)$  tels que

$$\varphi^{r_j}(\hat{e}_j + \alpha_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij}(\hat{e}_i + \alpha_i) \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq d.$$

Comme  $\text{Fil}^{p-1} I^{[p-1]} W_1^{PD}(R) = I^{[p-1]} W_1^{PD}(R)$  et puisque  $\varphi^r(x) = 0$ , pour tout  $x \in \text{Fil}^r I^{[p-1]} W_1^{PD}(R)$  et pour tout  $r \leq p-2$ , on est ramené à résoudre le système d'équations:

$$\begin{cases} \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} \alpha_i = b_j & \text{pour } j \text{ tel que } r_j \neq p-1, \\ \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} \alpha_i = \varphi^{p-1}(\alpha_j) + b_j & \text{pour } j \text{ tel que } r_j = p-1, \end{cases}$$

qui est équivalent au système suivant, où la matrice  $(a'_{ij})$  est la matrice inverse de  $(a_{ij})$ ,

$$\begin{cases} \rho_j = b_j & \text{pour } j \text{ tel que } r_j \neq p-1, \\ \rho_j - \sum_{1 \leq i \leq d} (a'_{ij})^p \varphi^{p-1}(\rho_i) = b_j & \text{pour } j \text{ tel que } r_j = p-1. \end{cases}$$

Comme le montre le lemme suivant, la condition \* implique que ce système a une unique solution. □

**LEMME 2.3.1.2.2.** *Soit  $\Lambda$  un objet de  $\mathbf{MF}_k^{p-1}$  n'admettant pas de quotient  $\bar{\Lambda}$  tel que  $\text{Fil}^{p-1} \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}$ ; on se place dans une base  $(e_1, \dots, e_d)$  adaptée à la filtration, ordonnée de telle sorte que  $(e_1, \dots, e_m)$  soit une base de  $\text{Fil}^{p-1} \Lambda$ , on note  $r_j$  le plus grand entier tel que  $e_j \in \text{Fil}^{r_j} \Lambda$ ,  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$  la matrice telle que*

$$\varphi^{r_j}(e_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i$$

et  $A' = A^{-1}$ . Alors la matrice  $B = (a'_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$  extraite de la matrice  $A'$  est nilpotente.

DEMONSTRATION. Si la matrice n'est pas nilpotente, alors on peut trouver une base de  $\text{Fil}^{p-1}\Lambda$  telle que dans cette base, la matrice  $A'$  soit de la forme

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}$$

où  $C$  est une matrice carrée inversible d'ordre  $d' \geq 1$ .

On définit un objet  $\bar{\Lambda}$  de  $\mathbf{MF}_k^{p-1}$  tel que  $\text{Fil}^{p-1}\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}$ , de base  $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{d'})$  vérifiant  $\bar{e}_j = \sum_{1 \leq i \leq d'} a'_{ij} \varphi^{p-1}(\bar{e}_i)$  et on va construire un morphisme surjectif de  $\Lambda$  vers  $\bar{\Lambda}$  ce qui contredira l'hypothèse faite sur  $\Lambda$ . Soit  $u$  l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} u: \Lambda &\rightarrow \bar{\Lambda} \\ e_j &\mapsto \sum_{1 \leq i \leq d'} a'_{ij} \varphi^{p-1}(\bar{e}_i); \end{aligned}$$

$u$  respecte la filtration et il reste à vérifier que  $u$  commute bien aux applications  $\varphi^{r_j}$ , c'est-à-dire

$$u(\varphi^{r_j}(e_j)) = \varphi^{r_j}(u(e_j)) \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq d.$$

Puisque  $A'$  est inversible, il est équivalent de vérifier que

$$\sum_{1 \leq i \leq d} a'_{ij} u(\varphi^{r_i}(e_i)) = \sum_{1 \leq i \leq d} a'_{ij} \varphi^{r_i}(u(e_i)) \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq d.$$

Comme  $u$  est linéaire,

$$\sum_{1 \leq i \leq d} a'_{ij} u(\varphi^{r_i}(e_i)) = u \left( \sum_{1 \leq i \leq d} a'_{ij} \varphi^{r_i}(e_i) \right) = u(e_j),$$

d'autre part, puisque  $\varphi^{r_i}(x) = 0$  pour  $r_i \leq p-2$  et  $x \in \bar{\Lambda}$ ,

$$\sum_{1 \leq i \leq d} a'_{ij} \varphi^{r_i}(u(e_i)) = \sum_{1 \leq i \leq m} a'_{ij} \varphi^{p-1}(u(e_i))$$

et, par choix de la base, pour  $j$  tel que  $d' + 1 \leq j \leq m$ ,

$$u(e_j) = \sum_{1 \leq i \leq d'} a'_{ij} \varphi^{p-1}(\bar{e}_i) = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq d} a'_{ij} \varphi^{r_i}(u(e_i)) &= \sum_{1 \leq i \leq d'} a'_{ij} \varphi^{p-1}(u(e_i)) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq d'} a'_{ij} \varphi^{p-1}(\bar{e}_i) = u(e_i). \end{aligned} \quad \square$$

2.3.1.2.3. DEMONSTRATION de (2). La même suite exacte que précédemment permet de se ramener à montrer que, pour  $i = 0, 1$

$$\text{Ext}_{\mathbf{MF}_k}^i(\Lambda, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}) = 0.$$

(a) Pour montrer que  $\text{Hom}_{\mathbf{MF}_k}(\Lambda, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}) = 0$ , on montre que

$$\left\{ x \in \text{Fil}^{p-1}(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}) \text{ tel que } \underbrace{\varphi^{p-1} \circ \dots \circ \varphi^{p-1}}_{i \text{ fois}} \text{ pour tout } i \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

En effet,  $\text{Fil}^{p-1}\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$  est l'image de

$$\left\{ x \in \mathcal{O}_{\bar{K}} \text{ tel que } v(x) \geq \frac{p-1}{p} \right\}$$

et on voit que, pour  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\left\{ x \in \text{Fil}^{p-1}(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}) \text{ tel que } \underbrace{\varphi^{p-1} \circ \dots \circ \varphi^{p-1}}_{i \text{ fois}}(x) \in \text{Fil}^{p-1}(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}) \right\}$$

est l'image de

$$\{x \in \mathcal{O}_{\bar{K}} \text{ tel que } v(x) \geq (p-1)(1/p + \dots + 1/p^i)\}.$$

On en déduit que

$$\left\{ x \in \text{Fil}^{p-1}\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \text{ tel que } \underbrace{\varphi^{p-1} \circ \dots \circ \varphi^{p-1}}_{i \text{ fois}} \text{ pour tout } i \in \mathbb{N} \right\}$$

est l'image de

$$\{x \in \mathcal{O}_{\bar{K}} \text{ tel que } v(x) \geq 1\}$$

c'est-à-dire  $p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ .

(b) Soit  $E$  une extension de  $\Lambda$  par  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ ; on se place dans une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  de  $\Lambda$  et on note  $\varphi^{p-1}(e_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij}e_i$ , où la matrice  $(a_{ij})$  est inversible. On choisit  $\hat{e}_i$  un relèvement de  $e_i$  dans  $\text{Fil}^{p-1}E$ , alors

$$\varphi^{p-1}(\hat{e}_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij}\hat{e}_i + b_j,$$

où  $b_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ ; dire que l'extension est triviale revient à dire qu'il existe des éléments  $(x_i)_{1 \leq i \leq d}$  de  $\text{Fil}^{p-1}\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$  tels que

$$\varphi^{p-1}(\hat{e}_j + x_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij}(\hat{e}_i + x_i),$$

c'est-à-dire qui vérifient

$$\varphi^{p-1}(x_j) - \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij}x_i = b_j \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq d.$$

Soient  $\hat{a}_{ij}$  un relèvement de  $a_{ij}$  dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  et  $\hat{b}_i$ , pour  $1 \leq i \leq d$ , des éléments de  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ ; alors le système

$$\frac{\hat{x}_j^p}{(-p)^{p-1}} - \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij}\hat{x}_i = \hat{b}_j \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq d,$$

admet toujours des solutions dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  (la démonstration repose sur le fait que l'algèbre

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_d]/(X_j - p^{p-1} \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij}X_i - p^{p-1}\hat{b}_j)_{1 \leq j \leq d}$$

est étale, cf. ci-dessous, 2.3.2.4.), d'où le fait que le système modulo  $p$  admet toujours des solutions.  $\square$

On est alors ramené à montrer les deux propositions suivantes

**PROPOSITION 1.** *Si  $\Lambda$  est un objet de  $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{p-1*}$ , alors*

$$\dim_{\mathbf{k}} \Lambda = \dim_{\mathbb{F}_p} \text{Hom}_{\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}}(\Lambda, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}),$$

$$\text{Ext}_{\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}}^1(\Lambda, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}) = 0.$$

**PROPOSITION 2.** *Si  $\Lambda$  est un objet de  $\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{p-1}$  tel que  $\text{Fil}^{p-1}\Lambda = \Lambda$  alors,*

$$\dim_{\mathbf{k}} \Lambda = \dim_{\mathbb{F}_p} \text{Hom}_{\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}}(\Lambda, I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)),$$

$$\text{Ext}_{\mathbf{MF}_{\mathbf{k}}}^1(\Lambda, I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)) = 0.$$

2.3.2. *Démonstration de la proposition 1 dans le cas où  $h \leq p - 2$*

On se place dans une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  de  $\Lambda$  adaptée à la filtration; pour chaque  $i$ , soit  $r_i$  l'entier tel que  $\bar{e}_i$  appartienne à une base de  $\text{gr}^{r_i} M$ , alors

$$\varphi^{r_j}(e_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i,$$

où la matrice  $A = (a_{ij})$  est inversible à coefficients dans  $k$ .

2.3.2.1. Soit  $u \in \text{Hom}_{\mathbf{MF}_k}(\Lambda, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$ ; on pose  $u(e_i) = x_i \in \text{Fil}^{r_i} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . On doit alors avoir

$$\forall j, \quad 1 \leq j \leq d, \quad u(\varphi^{r_j}(e_j)) = \varphi^{r_j}(x_j).$$

En d'autres termes, si l'on choisit des relèvements  $\hat{a}_{ij} \in W(k)$  des  $a_{ij}$ ,  $\mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda)$  est l'ensemble des solutions  $(\hat{x}_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^d$  du système de congruence

$$\frac{\hat{x}_j^p}{(-p)^{r_j}} \equiv \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij} \hat{x}_i \pmod{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}$$

pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq d$ ,

où  $\hat{x}_i$  est un relèvement de  $x_i$  dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  et vérifie donc  $v_{\mathbb{C}}(\hat{x}_i) \geq r_i/p$ .

2.3.2.2. Soit  $E$  une extension de  $\Lambda$  par  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . Pour tout  $i$ , notons  $\hat{e}_i$  un relèvement de  $e_i$  dans  $\text{Fil}^{r_i} E$  et, pour tout  $j$ , soit  $b_j$  l'élément de  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$  tel que

$$\varphi^{r_j}(\hat{e}_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} \hat{e}_i + b_j.$$

Pour montrer que cette suite est scindée, il s'agit de montrer qu'il existe pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , des éléments  $x_i$  dans  $\text{Fil}^{r_i} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$  tels que

$$\varphi^{r_j}(\hat{e}_j + x_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij}(\hat{e}_i + x_i),$$

c'est-à-dire, si  $\hat{b}_j$  désigne un relèvement de  $b_j$  dans  $W(k)$ , de résoudre le système suivant:

$$\frac{\hat{x}_j^p}{(-p)^{r_j}} \equiv \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij} \hat{x}_i + \hat{b}_j \pmod{p\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}$$

pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq d$ .

où  $\hat{x}_i$  est un relèvement de  $x_i$  dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  et vérifie donc  $v_{\mathbb{C}}(\hat{x}_i) \geq r_i/p$ .

2.3.2.3. Commençons par établir le lemme suivant.

LEMME 2.3.2.3. Si  $(x_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^d$  est un  $d$ -uplet vérifiant le système

$$\frac{x_j^p}{(-p)^{r_j}} \equiv \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij} x_i + \hat{b}_j \pmod{\beta_1^n}, \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq d$$

pour  $n \geq p$ , alors il existe  $(\mu_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^d$ , où  $\mu_i$  est unique modulo  $\beta_1$ , tel que  $(x_i + \beta_1^n \mu_i)_{1 \leq i \leq d}$  vérifie le même système de congruence modulo  $\beta_1^{n+1}$ .

DEMONSTRATION.

Soit  $n \geq p$ ; pour  $0 \leq r \leq p-2$ , calculons  $(x + \beta_1^n \mu)^p / (-p)^r$ , où  $v(x) \geq r/p$  et  $x = \beta_1^r x'$  avec  $x' \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ .

$$\begin{aligned} \frac{(x + \beta_1^n \mu)^p}{(-p)^r} &= (x' + \beta_1^{n-r} \mu)^p \\ &= x'^p + p x'^{p-1} \beta_1^{n-r} \mu + \cdots + p x' (\beta_1^{n-r} \mu)^{p-1} + \beta_1^{p(n-r)} \mu^p \end{aligned}$$

or

$$\begin{cases} v(p x'^{p-1} \beta_1^{n-r} \mu + \cdots + p x' (\beta_1^{n-r} \mu)^{p-1}) \geq 1 + \frac{n-r}{p} \geq \frac{n+1}{p} \\ v(\beta_1^{p(n-r)} \mu^p) \geq n-r \geq \frac{n+1}{p}. \end{cases}$$

Dans ce cas, où  $h \leq p-2$  et par conséquent  $r_j \leq p-2$  pour tout  $j$ , les équations à résoudre sont les suivantes

$$\forall j, \quad 1 \leq j \leq d, \quad \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij} (x_i + \beta_1^n \mu_i) \equiv \frac{x_j^p}{(-p)^{r_j}} - \hat{b}_j \pmod{\beta_1^{n+1}}.$$

Puisque

$$\sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij} x_i - \frac{x_j^p}{(-p)^{r_j}} + \hat{b}_j \in \beta_1^n \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$$

pour tout  $j$  par hypothèse, on peut écrire

$$\sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij} x_i - \frac{x_j^p}{(-p)^{r_j}} + \hat{b}_j = \beta_1^n \nu_j$$

avec  $\nu_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ .

Il s'agit maintenant de résoudre

$$\sum_{1 \leq i \leq d} \widehat{a}_{ij} \mu_i \equiv -\nu_j \pmod{\beta_1} \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq d.$$

Comme la matrice  $(a_{ij})$  est inversible, la matrice  $(\widehat{a}_{ij})$  l'est également, d'où l'existence et l'unicité modulo  $\beta_1$  des  $\mu_i$ .  $\square$

2.3.2.4. Comme  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  est séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique, donc  $\beta_1$ -adique, le lemme précédent montre que:

- prouver la nullité de  $\text{Ext}_{\mathbf{MF}_k}^1(\Lambda, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$  revient à prouver que le système

$$\frac{\widehat{x}_j^p}{(-p)^{r_j}} = \sum_{1 \leq i \leq d} \widehat{a}_{ij} \widehat{x}_i + \widehat{b}_j \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq d. \tag{1}$$

a toujours au moins une solution dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ ,

- prouver que

$$\dim_k \Lambda = \dim_{\mathbb{F}_p} \text{Hom}_{\mathbf{MF}_k}(\Lambda, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$$

revient à montrer que le système ci-dessus a exactement  $p^d$  solutions lorsque les  $\widehat{b}_j$  sont tous nuls.

Il suffit donc de vérifier que le système a toujours  $p^d$  solutions. Tout d'abord, on constate que toute solution du système

$$x_j^p = p^{r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} \widehat{a}_{ij} x_i + p^{r_j} \widehat{b}_j \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq d,$$

dans  $\mathbb{C}^d$  est solution dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^d$  du même système, car  $\widehat{a}_{ij} \in W$  et

$$W[X_1, \dots, X_d] \Big/ \left( X_j^p - p^{r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} \widehat{a}_{ij} X_i - p^{r_j} \widehat{b}_j \right)_{1 \leq j \leq d}$$

est une  $W$ -algèbre finie.

On note  $E = \{(x_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{C}^d \text{ tel que } x_j^p = p^{r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} \widehat{a}_{ij} x_i + p^{r_j} \widehat{b}_j\}$ . Cet ensemble est en bijection avec les morphismes de  $\mathbb{C}$ -algèbres de  $\Sigma$  dans  $\mathbb{C}$ , où

$$\Sigma = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d] \Big/ \left( X_j^p - p^{r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} \widehat{a}_{ij} X_i - p^{r_j} \widehat{b}_j \right)_{1 \leq j \leq d}$$

est une algèbre finie sur  $\mathbb{C}$  de dimension  $p^d$ , de base les images de  $\prod_{1 \leq i \leq d} X_i^{\alpha_i}$  pour  $0 \leq \alpha_i \leq p - 1$ . Il suffit donc de montrer que  $\Sigma$  est étale, c'est-à-dire que  $\Omega_{\Sigma/\mathbb{C}}^1 = 0$ . Soient  $\gamma \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$  tel que  $\gamma^p = p$  et posons  $X_j = \gamma^{r_j} Y_j$ ; alors

$$\Sigma = \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_d] \left/ \left( Y_j^p - \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij} \gamma^{r_i} Y_i - \hat{b}_j \right)_{1 \leq j \leq d} \right.$$

On note  $y_i$  l'image de  $Y_i$  dans  $\Sigma$ , alors  $\Omega_{\Sigma/\mathbb{C}}^1$  est engendré par les  $dy_i$  avec pour relations:

$$py_j^{p-1} dy_j - \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij} \gamma^{r_i} dy_i = 0.$$

Le déterminant de la matrice, dont les coefficients sont  $\gamma^{r_i} (\gamma^{p-r_j} y_j^{p-1} \delta_{ij} - \hat{a}_{ij})$ , est inversible dans  $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_d]$  puisque la matrice  $(\hat{a}_{ij})$  est inversible; donc  $\Omega_{\Sigma/\mathbb{C}}^1 = 0$ . L'algèbre  $\Sigma$  est non ramifiée sur le corps  $\mathbb{C}$ , donc étale.

L'exactitude et la fidélité du foncteur  $\mathbf{V}_{\text{cris}}^* : \mathbf{MF}_{\mathbb{k}}^{p-2} \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathbb{F}_p}(\mathbf{G}_{\mathbb{K}_0})$  se déduisent directement de ce résultat.

2.3.3. *Démonstration de la proposition 1 dans le cas où  $h = p - 1$*

2.3.3.1. On a défini  $\mathbf{MF}_{\mathbb{k}}^{p-1*}$  de la manière suivante: ses objets sont les modules filtrés  $\Lambda$  sur  $k$  de hauteur  $\leq p - 1$  et tels que si  $\Lambda'$  est un quotient de  $\Lambda$  vérifiant  $\Lambda' = \text{Fil}^{p-1} \Lambda'$ , alors  $\Lambda' = 0$ .

Le théorème se démontre de la même manière que dans le cas précédent en passant par le lemme suivant, dont la démonstration est un peu plus pénible.

LEMME 2.3.3.1. *Si  $(\hat{x}_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^d$  est un  $d$ -uplet vérifiant le système (1) modulo  $\beta_1^n$ , pour  $n \geq p$ , alors il existe  $(\mu_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^d$ , où  $\mu_i$  est unique modulo  $\beta_1$ , tel que  $(\hat{x}_i + \beta_1^n \mu_i)_{1 \leq i \leq d}$  vérifie le système de congruence modulo  $\beta_1^{n+1}$ .*

2.3.3.2. DEMONSTRATION. Le système à résoudre, compte-tenu des remarques du paragraphe précédent, s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij} (\hat{x}_i + \beta_1^n \mu_i) \equiv \frac{\hat{x}_j^p}{(-p)^{r_j}} - \hat{b}_j \pmod{\beta_1^{n+1}} \\ \text{pour } j \text{ tel que } e_j \notin \text{Fil}^{p-1} \Lambda \\ \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij} (\hat{x}_i + \beta_1^n \mu_i) \equiv \frac{\hat{x}_j^p}{(-p)^{p-1}} + (-p)^{n-(p-1)} \mu_j^p - \hat{b}_j \pmod{\beta_1^{n+1}} \\ \text{pour } j \text{ tel que } e_j \in \text{Fil}^{p-1} \Lambda, \end{array} \right.$$



ce qui s'écrit modulo  $\beta_1$ :

$$\begin{cases} \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij} \mu_i \equiv -\nu_j & \text{pour } j \text{ tel que } e_j \notin \text{Fil}^{p-1} \Lambda \\ \sum_{1 \leq j \leq d} \hat{a}_{ij} \mu_i - \beta_1^{(n-p)(p-1)} \mu_j^p \equiv -\nu_j & \text{pour } j \text{ tel que } e_j \in \text{Fil}^{p-1} \Lambda. \end{cases}$$

- Si  $n > p$ , on conclut immédiatement à l'existence et à l'unicité des  $\mu_i$  modulo  $\beta_1$ .
- Si  $n = p$ , il reste à résoudre le système suivant modulo  $\beta_1$

$$\begin{cases} \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij} \mu_i \equiv -\nu_j & \text{pour } j \text{ tel que } e_j \notin \text{Fil}^{p-1} \Lambda, \\ \sum_{1 \leq i \leq d} \hat{a}_{ij} \mu_i - \mu_j^p \equiv -\nu_j & \text{pour } j \text{ tel que } e_j \in \text{Fil}^{p-1} \Lambda. \end{cases}$$

Puisque la matrice  $(\hat{a}_{ij})$  est inversible, on peut transformer le système à résoudre en le système suivant, où  $(\hat{a}'_{ij}) = (\hat{a}_{ij})^{-1}$

$$\begin{cases} \rho_j \equiv -\nu_j \pmod{\beta_1} & \text{pour } j \text{ tel que } e_j \notin \text{Fil}^{p-1} \Lambda \\ \rho_j - \sum_{1 \leq i \leq d} (\hat{a}'_{ij})^p \rho_i^p \equiv -\nu_j \pmod{\beta_1} & \text{pour } j \text{ tel que } e_j \in \text{Fil}^{p-1} \Lambda. \end{cases}$$

On conclut en utilisant à nouveau le lemme 2.3.1.2.2.: d'après ce lemme, la matrice  $(a'_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$  est nilpotente. On en déduit l'existence et l'unicité des  $\rho_i$  modulo  $\beta_1$  et, par conséquent celle des  $\mu_i$ . □

### 2.3.4. Démonstration de la proposition 2

Il s'agit de voir à présent que si  $\Lambda$  est un objet de  $\mathbf{MF}_k^{p-1}$  tel que  $\text{Fil}^{p-1} \Lambda = \Lambda$  alors

$$\begin{aligned} \dim_k \Lambda &= \dim_{\mathbb{F}_p} \text{Hom}_{\mathbf{MF}_k}(\Lambda, I^{[p-1]} W_1^{PD}(R)) \quad \text{et} \\ \text{Ext}_{\mathbf{MF}_k}^1(\Lambda, I^{[p-1]} W_1^{PD}(R)) &= 0. \end{aligned}$$

Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  une base de  $\Lambda$  et  $\varphi^{p-1}(e_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i$  où la matrice  $(a_{ij})$  est inversible à coefficients dans  $k$ ; comme précédemment et comme  $\text{Fil}^{p-1}(I^{[p-1]} W_1^{PD}(R)) = I^{[p-1]} W_1^{PD}(R)$ , on se ramène à vérifier que l'ensemble des solutions dans  $I^{[p-1]} W_1^{PD}(R)$  du système

$$\varphi^{p-1}(x_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} x_i - b_j \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq d$$

où  $a_{ij} \in k$  et  $b_j \in I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)$ , est de cardinal  $p^d$ .

Si  $p \neq 2$ , un élément  $x$  de  $I^{[p-1]}W_1^{PD}(R)$  s'écrit sous la forme

$$x = \sum_{n \geq p-1} x^{(n)} \tilde{t}^{\{n\}} \quad \text{avec } x^{(n)} \in R/\tilde{\pi}_0 R,$$

où  $\tilde{t}^{\{n\}}$  est l'image dans  $W_1^{PD}(R)$  de  $t^{\{n\}} = t^{r(n)} \gamma_{m(n)}(t^{p-1}/p)$  et  $r(n)$  et  $m(n)$  sont respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de  $n$  par  $p-1$  (cf. [F94]). On remarque que  $\varphi^{p-1}(\tilde{t}^{\{n\}}) = 0$ , si  $n > p-1$ , et  $\varphi^{p-1}(\tilde{t}^{\{p-1\}}) = \tilde{t}^{\{p-1\}}$ .

A la suite de ces remarques, le système à résoudre s'écrit pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq d$ ,

$$\begin{aligned} & \varphi^{p-1} \left( \sum_{n \geq p-1} x_j^{(n)} \tilde{t}^{\{n\}} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} \left( \sum_{n \geq p-1} x_i^{(n)} \tilde{t}^{\{n\}} \right) - \sum_{n \geq p-1} b_j^{(n)} \tilde{t}^{\{n\}}, \end{aligned}$$

ce qui revient à résoudre dans  $R/\tilde{\pi}_0 R \simeq \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$  le système

$$(2) \quad (x_j^{(p-1)})^p = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} x_i^{(p-1)} - b_j^{(p-1)}$$

$$(3) \quad 0 = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} x_i^{(n)} - b_j^{(n)} \quad \text{pour } n \geq p.$$

On montre comme précédemment que (2) a exactement  $p^d$  solutions, tandis que (3), comme la matrice  $(a_{ij})$  est inversible, a une et une seule solution, d'où le résultat souhaité.

Si  $p = 2$ , un élément  $x \in I^{[1]}W_1^{PD}(R)$  s'écrit sous la forme

$$x = \sum_{n \geq 1} x^{(n)} \tilde{\gamma}_n(t) \quad \text{avec } x^{(n)} \in R/\tilde{\pi} R$$

où  $\tilde{\gamma}_n(t)$  est l'image de  $\gamma_n(t)$  dans  $I^{[1]}W_1^{PD}(R)$ . Le reste de la démonstration est semblable au cas précédent. □

#### 2.4. DÉMONSTRATION DE LA PLEINE FIDÉLITÉ DE $\mathbf{V}_{\text{cris}}^*$ RESTREINT À $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{p-1*}$

2.4.1. Pour démontrer la pleine fidélité, on se ramène par dévissage au cas où  $\Lambda$  est tué par  $p$ .

Soit, en effet,  $0 \rightarrow \Lambda' \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda'' \rightarrow 0$  une suite exacte d'objets de  $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{p-1}$  et  $N$  un objet de  $\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}^{p-1}$ . Si l'on suppose

$$\text{Hom}_{\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}}(N, \Lambda') \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_{K_0}]}(\mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda'), \mathbf{V}_{\text{cris}}^*(N)) \quad \text{et}$$

$$\text{Hom}_{\mathbf{MF}_{\mathbf{W}}}(N, \Lambda'') \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_{K_0}]}(\mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda''), \mathbf{V}_{\text{cris}}^*(N)),$$

il suffit de montrer que l'application naturelle

$$\text{Ext}_{\mathbf{MF}_W}^1(N, \Lambda') \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}_p[G_{K_0}]}^1(\mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda'), \mathbf{V}_{\text{cris}}^*(N))$$

est injective, pour en déduire l'isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathbf{MF}_W}(N, \Lambda) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_{K_0}]}(\mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda), \mathbf{V}_{\text{cris}}^*(N)).$$

On se ramène ainsi à montrer que

$$\text{Ext}_{\mathbf{MF}_W}^1(N, \Lambda) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}_p[G_{K_0}]}^1(\mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda), \mathbf{V}_{\text{cris}}^*(N))$$

est injective lorsque  $\Lambda$  et  $N$  sont tués par  $p$ . En fait, il suffit de vérifier l'injectivité de

$$\text{Ext}_{\mathbf{MF}_k}^1(N, \Lambda) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{F}_p[G_{K_0}]}^1(\mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda), \mathbf{V}_{\text{cris}}^*(N)).$$

En effet, si l'on a une suite exacte d'objets de  $\mathbf{MF}_W^{p-1}$

$$0 \rightarrow \Lambda \rightarrow E \rightarrow N \rightarrow 0,$$

où  $\Lambda$  et  $N$  sont tués par  $p$  et  $E$  n'est pas tué par  $p$ , alors  $\mathbf{V}_{\text{cris}}^*(E)$  n'est pas tué par  $p$  et la suite

$$0 \rightarrow \mathbf{V}_{\text{cris}}^*(N) \rightarrow \mathbf{V}_{\text{cris}}^*(E) \rightarrow \mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda) \rightarrow 0$$

n'est pas scindée.

La démonstration de la pleine fidélité du foncteur

$$\mathbf{V}_{\text{cris}}^* : \mathbf{MF}_k^{p-1*} \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathbb{F}_p, \text{cris}}(\mathbf{G}_{K_0})$$

et de l'injectivité de la flèche

$$\text{Ext}_{\mathbf{MF}_k}^1(N, \Lambda) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{F}_p[G_{K_0}]}^1(\mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda), \mathbf{V}_{\text{cris}}^*(N))$$

va reposer sur la construction d'un quasi-inverse.

2.4.2. Soit  $T$  une représentation modulo  $p$  de  $G_{K_0}$  de dimension finie  $d$ . Pour  $L$ , extension galoisienne de  $K_0$ , on note  $\text{Hom}'_{\mathbb{F}_p[G_{K_0}]}(T, \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L)$  l'ensemble des morphismes de  $T$  dans  $\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L$ , commutant à  $G_{K_0}$  et se relevant en une application  $f: T \rightarrow \mathcal{O}_L$  commutant à  $G_{K_0}$ . Alors si  $\text{Gal}(\bar{K}/L)$  agit trivialement sur  $T$ , on a

$$\text{Hom}'_{\mathbb{F}_p[G_{K_0}]}(T, \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L) = \text{Hom}'_{\mathbb{F}_p[G_{K_0}]}(T, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}).$$

On pose  $\Lambda(T) = \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_{K_0}]}(T, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$ ; il résulte de ce qui est écrit ci-dessus que  $\Lambda(T)$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie et on se propose de montrer la proposition suivante:

**PROPOSITION. 2.4.2.** *Si  $T$  est un espace vectoriel de dimension  $d$  sur  $\mathbb{F}_p$  et muni d'une action de  $G_{K_0}$ , alors  $\dim_k \Lambda(T) \leq d$ .*

**DEMONSTRATION** (a) On commence par se ramener au cas où  $T$  est irréductible; en effet, si

$$0 \rightarrow T' \rightarrow T \rightarrow T'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte de  $\mathbb{F}_p[G_{K_0}]$ -modules, on obtient, en appliquant le foncteur  $\Lambda$ , la suite exacte

$$0 \rightarrow \Lambda(T'') \rightarrow \Lambda(T) \rightarrow \Lambda(T'),$$

et on en déduit que  $\dim_k \Lambda(T) \leq \dim_k \Lambda(T') + \dim_k \Lambda(T'')$ .

(b) On suppose à présent  $T$  irréductible; si  $H$  est le noyau de la représentation  $G_{K_0} \rightarrow \text{Aut } T$ , on note  $L = \bar{K}^H$  le sous-corps de  $\bar{K}$  invariant par  $H$ ,  $k_L$  le corps résiduel de  $L$ ,  $\omega$  une uniformisante de  $L$  et  $\bar{\omega}$  son image dans  $\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L$ . On introduit  $L_0$ , l'extension maximale non ramifiée de  $K_0$  contenue dans  $L$ ,  $e = [L: L_0]$  l'indice de ramification absolue de  $L$  et  $L_1$  l'extension maximale modérément ramifiée de  $K_0$  contenue dans  $L$ . Alors,  $\text{Gal}(L/L_0)$  agit trivialement sur  $k_L$ .

Comme  $\text{Gal}(L/L_1)$  est un  $p$ -groupe et puisque  $T$  est irréductible, on a  $T^{\text{Gal}(L/L_1)} = T$  et on se ramène au cas où l'extension  $L/L_0$  est modérément ramifiée.

(c) Supposons à présent l'extension  $L/L_0$  modérément ramifiée. L'extension  $L/L_0$  est alors une extension cyclique de degré  $e$  premier à  $p$  et on note  $g$  un générateur de  $\text{Gal}(L/L_0)$ . De plus,  $\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_L/\omega^e\mathcal{O}_L$  et tout élément  $x$  de  $\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L$  s'écrit alors de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{0 \leq n \leq e-1} x^{(n)} \bar{\omega}^n$$

avec  $x^{(n)} \in k_L$ .

On choisit une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  de  $T$  et on note  $M_g$  la matrice représentant  $g$  dans la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ . Si  $u$  est un morphisme dans  $\Lambda(T)$  et  $u_i$  l'image de  $e_i$  par  $u$ , les éléments  $u_i$  doivent vérifier

$$(g(u_1), \dots, g(u_d)) = (u_1, \dots, u_d) M_g.$$

On écrit pour chaque  $i$ ,

$$u_i = \sum_{0 \leq n \leq e-1} u_i^{(n)} \bar{\omega}^n$$

avec  $u_i^{(n)} \in k_L$ .

- On commence par résoudre le système

$$(g(u_1), \dots, g(u_d)) \equiv (u_1, \dots, u_d)M_g \pmod{\bar{\omega}}.$$

Comme le groupe  $\text{Gal}(L/L_0)$  agit trivialement sur  $k_L$  et que  $M_g$  est à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$ , on obtient

$$(4) \quad (u_1^{(0)}, \dots, u_d^{(0)}) = (u_1^{(0)}, \dots, u_d^{(0)})M_g.$$

Ce système admet des solutions non nulles uniquement si 1 est valeur propre de la matrice  $M_g$ ; dans ce cas, puisque  $T$  est irréductible, la représentation est de dimension 1 et l'ensemble des solutions du système (4) forme un espace vectoriel sur  $k_L$  de dimension 1.

- On s'intéresse à présent au système modulo  $\omega^n$  pour  $n < e$ . On écrit

$$g(\bar{\omega}) \equiv \alpha\bar{\omega} \pmod{\bar{\omega}^2}$$

avec  $\alpha \in k_L$ . Comme  $e$  est premier à  $p$ , on peut supposer  $e = p^h - 1$ ; on a alors  $\alpha \in \mathbb{F}_{p^h}^*$  et  $\mathbb{F}_{p^h} \subset k_L$ . On pose  $T' = \mathbb{F}_{p^h} \otimes_{\mathbb{F}_p} T$ ; c'est une représentation de  $\text{Gal}(L/L_0)$  et  $\text{Hom}_{\mathbb{F}_p[\text{Gal}(L/L_0)]}(T', \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L)$  est un sous  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel de  $\text{Hom}_{\mathbb{F}_p[\text{Gal}(L/L_0)]}(T', \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L)$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on note  $d_m$  la dimension de l'espace caractéristique de  $M_g$  associé à  $\alpha^m$ . On suppose à présent que l'ensemble des solutions du système

$$(g(u_1), \dots, g(u_d)) \equiv (u_1, \dots, u_d)M_g \pmod{\bar{\omega}^n}$$

forme un espace vectoriel sur  $k_L$  de dimension  $\leq d_0 + \dots + d_{n-1}$  et on veut montrer que l'ensemble des solutions du même système modulo  $\bar{\omega}^{n+1}$  forme un  $k_L$ -espace vectoriel de dimension  $\leq d_0 + \dots + d_{n-1} + d_n$ .

- Si  $(u_i)_{1 \leq i \leq d}$  est une solution dans  $\mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L$  du système modulo  $\bar{\omega}^n$ , on a

$$(g(u_1), \dots, g(u_d)) = (u_1, \dots, u_d)M_g + \bar{\omega}^n(y_1, \dots, y_d)$$

avec  $y_i \in \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L$  et on cherche une solution modulo  $\bar{\omega}^{n+1}$  sous la forme  $(u_i + \bar{\omega}^n u_i^{(n)})_{1 \leq i \leq d}$ . Les  $u_i^{(n)}$  doivent alors vérifier, puisque  $\text{Gal}(L/L_0)$  agit trivialement sur  $k_L$

$$\alpha^n(u_1^{(n)}, \dots, u_d^{(n)}) = (u_1^{(n)}, \dots, u_d^{(n)})M_g + (y_1, \dots, y_d).$$

$\alpha^n \neq 1$  puisque  $L/L_0$  est modérément ramifiée et  $n < e$ .

- Si  $\alpha^n$  n'est pas valeur propre de  $M_g$ , la matrice  $(\alpha^n - M_g)$  est inversible et les  $u_i^{(n)}$  pour  $1 \leq i \leq d$ , s'ils existent, sont uniquement déterminés.

- Sinon, on choisit la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  de  $T'$  de telle sorte que la matrice  $M_g$  s'écrive

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 & \cdots & 0 & B_0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & A_{n-1} & 0 & B_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & A_n & B_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Les matrices  $A_i - \alpha^n$ , pour  $0 \leq i \leq n - 1$ , et  $C - \alpha^n$  sont inversibles. On en déduit que

- pour  $1 \leq i \leq d_0 + \cdots + d_{n-1}$ ,  $u_i^{(n)}$  est uniquement déterminé,
- pour  $\sum_{1 \leq j \leq n+1} d_j \leq i \leq d$ , les  $u_i^{(n)}$  sont uniquement déterminés par les précédents,
- s'il existe des solutions au système, on a nécessairement  $y_i = 0$ , pour  $\sum_{1 \leq j \leq n} d_j + 1 \leq i \leq \sum_{1 \leq j \leq n+1} d_j$ , et  $u_i^{(n)}$  est quelconque dans  $k_L$ .

D'où le fait que l'ensemble des solutions au système ci-dessus forme un espace vectoriel sur  $k_L$  de dimension  $\leq d_n$  et le résultat annoncé.

On a ainsi montré que

$$\dim_{k_L} \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[\text{Gal}(L/L_0)]}(T, \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L) \leq d.$$

Or,  $\text{Gal}(L_0/K_0) = \text{Gal}(k_L/k)$  agit sur  $\text{Hom}'_{\mathbb{F}_p[\text{Gal}(L/L_0)]}(T, \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L)$  et

$$\text{Hom}'_{\mathbb{F}_p[\text{Gal}(L/L_0)]}(T, \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L)^{\text{Gal}(L_0/K_0)} = \text{Hom}'_{\mathbb{F}_p[G_{K_0}]}(T, \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L).$$

Le résultat se déduit alors facilement du fait que, si  $W$  est un  $k_L$ -espace vectoriel de dimension finie  $d$ , muni d'une action de  $\text{Gal}(k_L/k)$ , alors  $W^{\text{Gal}(k_L/k)}$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $\leq d$ . □

2.4.3. On vient de voir que  $\Lambda(T) = \text{Hom}'_{\mathbb{F}_p}(T, \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}})$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $\leq d$ . On peut le munir d'une filtration et d'applications  $\varphi^r$ , qui proviennent de la filtration et des applications  $\varphi^r$  définies sur  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ . On a

$$\text{Fil}^r \Lambda(T) = \{f \in \Lambda(T) \text{ telle que } f(v) \in \text{Fil}^r \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \text{ pour tout } v \in T\}.$$

On rappelle que

$$\text{Fil}^r \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} = \beta_1^r \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$$

où  $\beta_1 \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$  est l'image d'un élément  $\hat{\beta}_1 \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$  vérifiant  $\hat{\beta}_1^p + p = 0$  et que  $\varphi^r: \text{Fil}^r \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$  est l'application qui à  $\beta_1^r x$  associe  $x^p$ .

Le module  $\Lambda(T)$  ainsi construit est donc un module filtré sur  $k$  de dimension finie, dont on ne sait pas s'il vérifie la condition

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} \varphi^r(\text{Fil}^r \Lambda(T)) = \Lambda(T).$$

On construit une suite décroissante de sous-modules filtrés de  $\Lambda(T)$  en posant pour  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \Lambda(T) \\ \Lambda_{n+1} &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} \varphi^r(\text{Fil}^r \Lambda_n). \end{aligned}$$

Alors  $\Lambda_\infty = \bigcap \Lambda_n$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie qui vérifie

$$\begin{aligned} \text{Fil}^0 \Lambda_\infty &= \Lambda_\infty, \\ \text{Fil}^p \Lambda_\infty &= 0, \\ \Lambda_\infty &= \sum_{r \in \mathbb{Z}} \varphi^r(\text{Fil}^r \Lambda_\infty). \end{aligned}$$

C'est donc un objet de  $\mathbf{MF}_k^{p-1}$ .

PROPOSITION 2.4.3.  $\Lambda_\infty$  est un objet de  $\mathbf{MF}_k^{p-1*}$  et le foncteur

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{cris}}^* : \mathbf{Rep}_{\mathbb{F}_p, \text{cris}}^h(\mathbf{G}_{\mathbf{K}_0}) &\rightarrow \mathbf{MF}_k^{p-1*} \\ T &\mapsto \Lambda_\infty \end{aligned}$$

est un quasi-inverse du foncteur  $\mathbf{V}_{\text{cris}}^*$ .

DEMONSTRATION. On vérifie facilement que si  $\Lambda$  est un module filtré sur  $k$ , objet de  $\mathbf{MF}_k^{p-1*}$  et si  $\Lambda_{\text{cris}}^*(T)$  est le module filtré associé à  $\mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda)$  par la recette précédente, alors  $\Lambda \subset \Lambda_{\text{cris}}^*(T)$ . On en déduit que  $\dim_k \Lambda_{\text{cris}}^*(T) \geq \dim_k \Lambda$ ; comme la proposition précédente permet de dire que  $\dim_k \Lambda_{\text{cris}}^*(T) \leq d$ , on en déduit l'égalité des espaces vectoriels, c'est-à-dire que  $\Lambda \simeq \Lambda_{\text{cris}}^*(T)$ .  $\square$

2.4.4. *Remarque.* Il existe également une version covariante du foncteur  $\mathbf{V}_{\text{cris}}^*$  et de son quasi-inverse; pour  $0 \leq h \leq p - 2$ , le foncteur

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{cris}} : \mathbf{MF}_W^h &\rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{G}_{\mathbf{K}_0} \\ \Lambda &\mapsto \mathbf{V}_{\text{cris}}(\Lambda) = (A_{\text{cris}} \otimes_W \Lambda)^{\varphi=1} \end{aligned}$$

est exact et fidèle et induit une équivalence de catégories entre  $\mathbf{MF}_W^h$  et son image essentielle. Le foncteur

$$T \mapsto \bigcup_{\substack{\Lambda \in \mathbf{MF}_W^h \\ \Lambda \subset (A_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} V)^{G_{K_0}}} \Lambda$$

est un quasi-inverse (cf. [N]). Ceci se voit sur les objets tués par  $p$  en remarquant que

$$\mathbf{V}_{\text{cris}}(\Lambda) = \mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda^*)$$

où  $\Lambda^*$  est le dual de  $\Lambda$ , c'est-à-dire  $\Lambda^* = \text{Hom}_k(\Lambda, k)$ ; dans ce cas le foncteur ci-dessus n'est autre que le foncteur

$$T \mapsto (\mathbf{\Lambda}_{\text{cris}}(T^*))^*.$$

### 3. Représentations de cr-hauteur finie

Nous allons maintenant prouver le théorème 1.

3.1. FILTRATION SUR  $N \in \mathbf{\Gamma}_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^h$ , où  $h \leq p - 1$ , ET STRUCTURE D'OBJET DE  $\mathbf{MF}_W^h$  SUR  $N/\pi_0 N$

3.1.1. *Rappels sur  $S$  et  $S_0$*

3.1.1.1. On suppose ici  $p \neq 2$ . On rappelle que  $\Gamma = \text{Gal}(K_\infty/K_0)$ , que le sous-groupe de torsion de  $\Gamma$  est noté  $\Gamma_f$  et on pose

$$\Gamma_0 = \Gamma/\Gamma_f.$$

D'autre part,  $S = W[[\pi]]$  où  $\pi = [\varepsilon] - 1$  et

$$S_0 = S^{\Gamma_f} = W[[\pi_0]] = W[[q]],$$

où  $\pi_0 = \sum_{a \in \mathbb{F}_p} [\varepsilon]^{[a]}$  et  $q = \pi_0 + p$ . Les anneaux  $S$  et  $S_0$  sont tous deux munis d'un Frobenius  $\varphi$  et d'une action de  $\Gamma$ , qui agit à travers  $\Gamma_0$  sur  $S_0$ . L'application

$$\begin{aligned} \theta: S &\rightarrow W, \\ [\varepsilon] &\mapsto 1 \end{aligned}$$

est surjective, commute à  $\varphi$  et à  $\Gamma$ ; son noyau est

$$\text{Ker } \theta = \pi S.$$



La restriction  $\theta_0$  de  $\theta$  à  $S_0$  est également surjective, elle commute à  $\varphi$  et à  $\Gamma_0$ ; son noyau est

$$\text{Ker } \theta_0 = \pi_0 S_0.$$

En fait,  $\theta$  et  $\theta_0$  sont les restrictions respectivement à  $S$  et à  $S_0$  de l'application définie dans le chapitre précédent et notée également  $\theta: W(R) \rightarrow \mathcal{O}_C$ .

Soit  $K_1 = K(\sqrt[p]{I})$  et  $\mathcal{O}_{K_1}$  l'anneau des entiers de  $K_1$ ; alors l'application

$$\begin{aligned} \theta': S &\rightarrow \mathcal{O}_{K_1}, \\ [\varepsilon] &\mapsto \varepsilon^{(1)} \end{aligned}$$

est surjective, commute à l'action de  $\Gamma$  et son noyau est

$$\text{Ker } \theta' = qS.$$

En effet,  $S \subset W(R)$  et rappelons que  $\text{Fil}^1 W(R) = q'W(R)$ , où  $q' = \varphi^{-1}(q)$  (le Frobenius  $\varphi$  est bijectif sur  $W(R)$ ); d'autre part

$$\text{Fil}^1 W(R) \cap S = \text{Ker } \theta \quad \text{et}$$

$$\text{Ker } \theta' = \varphi(\text{Fil}^1 W(R)) \cap S = qW(R) \cap S = qS.$$

La restriction  $\theta'_0$  de  $\theta'$  à  $S_0$  est surjective sur  $W$ , commute à l'action de  $\Gamma_0$  et son noyau est

$$\text{Ker } \theta'_0 = qS_0.$$

LEMME 3.1.1.2. Soit  $g \in \Gamma_0$ ; alors:

- (1)  $g(q) - q = g(\pi_0) - \pi_0 \in q\pi_0 S_0$ ,
- (2) si  $g$  est un générateur topologique de  $\Gamma_0$ ,

$$\frac{g(q) - q}{q\pi_0}$$

est une unité de  $S_0$ ,

- (3) il existe un et un seul générateur topologique  $g_0$  de  $\Gamma_0$  tel que

$$\frac{g_0(q) - q}{q\pi_0} \equiv 1 \pmod{qS_0}.$$

DEMONSTRATION: on peut supposer  $K = \mathbb{Q}_p$ ; on a alors  $S = \mathbb{Z}_p[[\pi]]$  et  $S_0 = \mathbb{Z}_p[[\pi_0]] = \mathbb{Z}_p[[q]]$ . L'application  $\alpha: S_0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ , définie par  $\alpha(x) = (\theta_0(x), \theta'_0(x))$ , commute à l'action de  $\Gamma_0$ , qui opère trivialement sur  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ ; son noyau est

$$\text{Ker } \alpha = \text{Ker } \theta_0 \cap \text{Ker } \theta'_0 = q\pi_0 S_0.$$

Par conséquent,  $\Gamma_0$  opère trivialement sur  $S_0/q\pi_0S_0$ .

(2) Rappelons que  $K_2 = \mathbb{Q}_p(\sqrt[p^2]{1})$ . L'application

$$\begin{aligned}\theta'' : S &\rightarrow \mathcal{O}_{K_2} \\ [\varepsilon] &\mapsto \varepsilon^{(2)},\end{aligned}$$

commute à l'action de  $\Gamma$ ; sa restriction  $\theta''_0$  à  $S_0$  a pour image l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_L$  de l'unique extension cyclique  $L$  de  $\mathbb{Q}_p$  de degré  $p$  contenue dans  $K_2$  et  $\theta''(q) = \omega$  est une uniformisante de  $L$ . Alors,

$$g(\omega) = \omega + \lambda\omega^2$$

où  $\lambda \in \mathcal{O}_L$ ; comme l'unique nombre de ramification de l'extension  $L/\mathbb{Q}_p$  est 1 (cf. [S68], chap. IV.4),  $\lambda$  est une unité de  $\mathcal{O}_L$  si  $g$  est un générateur topologique de  $\Gamma_0$ . D'après (1),  $g(q) = q + \mu q\pi_0$ , où  $\mu \in S_0$ , alors

$$\begin{aligned}\theta''(g(q)) &= \theta''(q) + \theta''(\mu q\pi_0) \\ &= \omega + \theta''(\mu)\omega(\omega - p) \\ &= \omega + \frac{\omega - p}{\omega}\theta''(\mu)\omega^2 \\ &= g(\omega).\end{aligned}$$

Comme  $(\omega - p)/\omega$  est une unité de  $\mathcal{O}_L$ ,  $\theta''(\mu)$  est aussi une unité et  $\mu$  ne peut être qu'une unité de  $S_0$ .

(3) Soit  $g_1$  un générateur topologique de  $\Gamma_0$ ; alors, d'après ce qui vient d'être vu, on peut écrire

$$g_1(q) = q + \mu q\pi_0$$

avec  $\mu$  une unité de  $S_0$ , ou bien, de manière équivalente il existe  $c \in \mathbb{Z}_p^*$  tel que

$$g_1(q) \equiv q + cq\pi_0 \pmod{q^2\pi_0}.$$

Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , on voit que

$$g_1^n(q) \equiv q(1 + \pi_0 c_n) \pmod{q^2\pi_0},$$

avec

$$c_n = \frac{(1 + pc)^n - 1}{p} \equiv nc \pmod{p\mathbb{Z}_p}.$$

Cette formule est vraie par continuité pour tout  $n \in \mathbb{Z}_p$ . Puisque  $c$  est inversible dans  $\mathbb{Z}_p$ , on voit qu'on peut trouver  $m \in \mathbb{Z}_p$  tel que  $c_m \equiv 1 \pmod{qS_0}$ ; on prend

alors  $g_0 = g_1^m$ . □

3.1.1.4. Supposons  $p = 2$ . L'équivalent de  $S_0$  est  $S'_0 = S^{\Gamma_f} = W[[\pi'_0]]$ , où  $\pi'_0 = -2 + [\varepsilon] + [\varepsilon]^{-1}$ . Cependant, il n'est pas intéressant de considérer  $S'_0$  et, dans tout ce qui suit, on convient que  $\Gamma_0 = \Gamma_K$  et  $S = S_0$  lorsque  $p = 2$ . De même,  $\pi_0 = \pi$  et on pose  $q = [\varepsilon] + 1$ . Les applications  $\theta$  et  $\theta'$  sont définies de la même manière:

$$\begin{aligned} \theta: S &\rightarrow W \\ [\varepsilon] &\mapsto 1 \quad \text{et} \\ \theta': S &\rightarrow W \\ [\varepsilon] &\mapsto \varepsilon^{(1)} = -1. \end{aligned}$$

On a toujours  $\text{Ker } \theta = \pi S$  et  $\text{Ker } \theta' = qS$ . On vérifie facilement que, pour  $g \in \Gamma$ ,

$$g(\pi) - \pi = g(q) - q \in q\pi S.$$

3.1.2. Filtration sur  $N$  objet de  $\mathbf{\Gamma}_0\Phi\mathbf{M}_{S_0}^h$

Rappelons que, pour tout  $h \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{\Gamma}_0\Phi\mathbf{M}_{S_0}^h$  désigne la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_0)$ -modules  $N$  de type fini sur  $S_0$ , qui sont sans  $p'$ -torsion, tels que  $\Gamma_0$  opère trivialement sur  $N/\pi_0 N$  et que  $q^h N \subset S_0\varphi(N)$ . Pour tout  $N$  objet de  $\mathbf{\Gamma}_0\Phi\mathbf{M}_{S_0}^h$ , on pose  $\text{Fil}_q^r N = \{x \in N \text{ tel que } \varphi(x) \in q^r N\}$ .

Alors  $\text{Fil}_q^r N$  est un sous- $S$ -module de  $N$ ;  $\text{Fil}_q^r N = N$  si  $r \leq 0$ ,  $(\text{Fil}_q^r N)_{r \in \mathbb{Z}}$  est une filtration décroissante de  $N$ , exhaustive ( $\cup_{r \in \mathbb{Z}} \text{Fil}_q^r N = N$ ) et séparée ( $\cap_{r \in \mathbb{Z}} \text{Fil}_q^r N = 0$ ).

On peut alors définir les applications  $\varphi^r: \text{Fil}_q^r N \rightarrow N$  par

$$\varphi^r(x) = \frac{\varphi(x)}{q^r} \quad \text{pour } x \in \text{Fil}_q^r N.$$

On remarque que ces applications sont  $\sigma$ -linéaires et que  $\varphi^r_{|\text{Fil}_q^{r+1} N} = q\varphi^{r+1}$ .

PROPOSITION 3.1.2.: Soit  $h$  un entier vérifiant  $1 \leq h \leq p - 1$  et soit  $N$  un objet de  $\mathbf{\Gamma}_0\Phi\mathbf{M}_{S_0}^h$ , alors

- (1)  $N = \sum_{0 \leq r \leq h} \varphi^r(\text{Fil}_q^r N) + \pi_0 N;$
- (2)  $N = S_0 \cdot \sum_{0 \leq r \leq h} \varphi^r(\text{Fil}_q^r N).$

Remarquons d'abord que  $1 \Rightarrow 2$ .

Commençons par établir le lemme suivant.

LEMME 3.1.2. Soit  $N$  un  $(\varphi, \Gamma_0)$ -module, qui soit un  $S_0$ -module de type fini, sans  $p'$ -torsion tel que l'action de  $\Gamma_0$  soit triviale sur  $N/\pi_0 N$ ; soit  $r$  un entier vérifiant  $1 \leq r \leq p - 1$  et  $x_0, x_1, \dots, x_{r-1}$  des éléments de  $N$  tels que

$$\sum_{0 \leq i \leq r-1} q^i \varphi(x_i) \equiv 0 \pmod{q^r N},$$

alors  $\varphi(x_i) \equiv 0 \pmod{q^{r-i}N}$  pour  $i$ ,  $0 \leq i \leq r-1$ .

DEMONSTRATION: La démonstration se fait par récurrence sur  $r$ , le cas  $r = 1$  étant trivial.

On suppose  $r \geq 2$ ; par conséquent  $p \neq 2$ . Soit  $g_0$  un générateur topologique de  $\Gamma_0$  comme dans le lemme 3.1.1.2., alors

$$g_0(q) = q(1 + \pi_0\lambda_1),$$

où  $\lambda_1 \in S_0$  et  $\lambda_1 \equiv 1 \pmod{qS_0}$  et, plus généralement

$$g_0(q^i) = q^i(1 + \pi_0\lambda_i),$$

où  $\lambda_i \in S_0$  et, si l'on écrit

$$\lambda_i = \sum_{j \in \mathbf{N}} c_{ij}q^j,$$

on voit que  $c_{i0} \equiv i \pmod{p}$  et que  $c_{ij} \in \mathbb{Z}_p$ .

D'autre part, pour tout  $x \in N$ , il existe  $y \in N$  tel que  $g_0(x) = x + \pi_0y$ . On a donc

$$g_0(\varphi(x)) = \varphi(g_0(x)) = \varphi(x) + \varphi(\pi_0)\varphi(y) \equiv \varphi(x) \pmod{\pi_0q^{p-1}N}$$

puisque  $\varphi(\pi_0)S_0 = \pi_0q^{p-1}S_0$  (cf. [F91] p. 268–273). Alors, si

$$\sum_{0 \leq i \leq r-1} q^i \varphi(x_i) = q^r z$$

avec  $z \in N$ ,

$$\sum_{0 \leq i \leq r-1} g_0(q^i)g_0(\varphi(x_i)) = g_0(q^r)g_0(z).$$

Or

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq i \leq r-1} g_0(q^i)g_0(\varphi(x_i)) \equiv \\ & \varphi(x_0) + \sum_{1 \leq i \leq r-1} q^i(1 + \pi_0\lambda_i)\varphi(x_i) \pmod{\pi_0q^{p-1}N} \end{aligned}$$

et

$$g_0(q^r)g_0(z) \equiv q^r z \pmod{\pi_0q^r N};$$

en faisant la différence, puis en divisant par  $\pi_0$ , on obtient la congruence

$$\sum_{1 \leq i \leq r-1} q^i \lambda_i \varphi(x_i) \equiv 0 \pmod{q^r N},$$

ou encore,

$$\sum_{0 \leq i \leq r-2} q^i \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} c_{i+1,j} q^j \right) \varphi(x_{i+1}) \equiv 0 \pmod{q^{r-1} N},$$

c'est-à-dire, si l'on pose  $c'_{ij} = \varphi^{-1}(c_{ij})$  (rappelons que  $\varphi$  est bijectif sur  $W$ ),

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq i \leq r-2} q^i \left( \sum_{0 \leq j \leq i} c_{j+1,i-j} \varphi(x_{j+1}) \right) = \\ & = \sum_{0 \leq i \leq r-2} q^i \varphi \left( \sum_{0 \leq j \leq i} c'_{j+1,i-j} x_{j+1} \right) \equiv 0 \pmod{q^{r-1}}. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence,  $\varphi(\sum_{0 \leq j \leq i} c'_{j+1,i-j} x_{j+1})$  est divisible par  $q^{r-1-i}$  et  $\varphi(x_i)$  également, puisque  $c_{i0} \equiv i \pmod{p}$ , on voit que  $c_{i0}$  est inversible dans  $\mathbb{Z}_p$  pour  $1 \leq i \leq p-1$ .  $\square$

**DEMONSTRATION** de la proposition 3.1.2.

Il s'agit de montrer que

$$N = \sum_{0 \leq r \leq h} \varphi^r(\text{Fil}_q^r N) + \pi_0 N$$

autrement dit

$$q^h N = \sum_{0 \leq r \leq h} q^{h-r} \varphi(\text{Fil}_q^r N) + q^h \pi_0 N.$$

Puisque  $N$  est de cr-hauteur  $\leq h$ , on a l'inclusion suivante

$$q^h N \subset S_0 \cdot \varphi(N)$$

donc, si  $x \in N$ , il existe des éléments  $b_j$  de  $S_0$  et  $y_j$  de  $N$  en nombre fini, soit  $s$ , tels que

$$q^h x = \sum_{1 \leq j \leq s} b_j \varphi(y_j).$$

On écrit  $b_j$  sous la forme

$$b_j = \sum_{0 \leq i \leq h-1} b_{ij} q^i + q^h c_j,$$

avec les  $b_{ij} \in W$  et  $c_j \in S_0$ . Si l'on pose  $c_j = b_{hj} + \pi_0 b'_j$  avec  $b_{hj} \in W$  et  $b'_j \in S_0$ , on a

$$b_j = \sum_{0 \leq i \leq h} b_{ij} q^i + q^h \pi_0 b'_j.$$

L'égalité ci-dessus devient

$$q^h x = \sum_{0 \leq i \leq h} q^i \sum_{1 \leq j \leq s} b_{ij} \varphi(y_j) + q^h \pi_0 y,$$

où  $y$  est un élément de  $N$ . En posant  $x_i = \sum_{1 \leq j \leq s} \sigma^{-1}(b_{ij}) y_j$  (rappelons que  $\sigma^{-1}$  est l'inverse de  $\sigma = \varphi|_W$  qui est bijectif, puisque  $k$  est parfait), on a donc

$$\begin{aligned} q^h x &= \sum_{0 \leq i \leq h} q^i \varphi(x_i) + q^h \pi_0 y \\ &= \sum_{0 \leq r \leq h} q^{h-r} \varphi(x_{h-r}) + q^h \pi_0 y \\ &= \sum_{0 \leq i \leq h} q^i \varphi(x_i) + q^h \pi_0 y. \end{aligned}$$

Si  $p = 2$ , la démonstration est terminée; si  $p \neq 2$ , en appliquant le lemme, on voit que  $\varphi(x_{h-r}) \in q^r N$ , autrement dit  $x_{h-r} \in \text{Fil}_q^r N$ .  $\square$

### 3.1.3. Bases adaptées à la filtration: cas où $N$ est tué par $p$

Soit  $N$  un objet de  $\mathbf{\Gamma}_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^h$  tué par  $p$ ; le  $\mathcal{O}_{E_0}$ -module  $N$  est libre, car c'est un module sans torsion et de type fini sur l'anneau  $\mathcal{O}_{E_0} = S_0/pS_0$  qui est principal; on peut donc considérer une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  de  $N$ . Pour chaque  $i$ , on note  $r_i$  le plus grand entier tel que  $e_i \in \text{Fil}_q^{r_i} N$  (c'est-à-dire  $e_i \in \text{Fil}_q^{r_i} N$  mais  $e_i \notin \text{Fil}_q^{r_i+1} N$ ). L'action de  $\varphi$  sur  $N$  est donnée par une matrice  $(a_{ij})$  à coefficients dans  $\mathcal{O}_{E_0}$  telle que

$$\varphi(e_j) = \pi_0^{r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i$$

(on rappelle que  $q = \pi_0 + p$ , donc  $q \equiv \pi_0$  modulo  $p$ ).

Une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  est dite *adaptée à la filtration* si la matrice  $(a_{ij})$  est inversible. On remarque que l'existence d'une telle base est équivalente au fait que  $\sum_r \varphi^r(\text{Fil}_q^r N)$  engendre  $N$ . En particulier, la proposition précédente montre que si  $h \leq p - 1$ , il existe une base de  $N$  adaptée à la filtration et les  $r_i$  sont des

entiers compris entre 0 et  $h$ . Ceci entraîne, en particulier que  $\text{Fil}_q^{h+1} N \subset \pi_0 N$ .

3.1.4. *Structure d'objet de  $\mathbf{MF}_W^h$  sur  $\Lambda = N/\pi_0 N$*

Supposons  $h \leq p - 1$  et soit  $N$  un objet de  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^h$ . La réduction  $\Lambda$  modulo  $\pi_0$  de  $N$  est un  $W$ -module de longueur finie, muni de la filtration image de celle de  $N$ :

$$\begin{aligned} \text{Fil}^r \Lambda &= \{x \in N/\pi_0 N \text{ tels qu'il existe un relèvement } \hat{x} \text{ de} \\ &\quad x \text{ dans } N \text{ avec } \hat{x} \in \text{Fil}_q^r N\} \\ &= \{x \in \Lambda \text{ tels qu'il existe un relèvement } \hat{x} \text{ de } x \text{ dans} \\ &\quad N \text{ avec } \varphi(\hat{x}) \in q^r N\}. \end{aligned}$$

On voit donc que  $\text{Fil}^0 \Lambda = \Lambda$  et  $\text{Fil}^{h+1} \Lambda = 0$ .

Comme, dans  $S_0$ ,  $\varphi(\pi_0)$  est divisible par  $\pi_0 q^{p-1}$ , si  $r \leq h$  et si  $x \in \text{Fil}_q^r \Lambda$ , n'importe quel relèvement  $\hat{x}$  de  $x$  dans  $N$  appartient à  $\text{Fil}_q^r N$  et l'image  $\varphi^r(x)$  de  $\varphi^r(\hat{x})$  dans  $\Lambda$  ne dépend pas du choix du relèvement. On a ainsi défini une application  $\sigma$ -semi-linéaire

$$\varphi^r: \text{Fil}^r \Lambda \rightarrow \Lambda.$$

Ces applications satisfont à

$$\varphi^r_{|\text{Fil}^{r+1} \Lambda} = p\varphi^{r+1}$$

puisque  $q \equiv p$  modulo  $\pi_0$ . On a donc muni  $\Lambda$  d'une structure de  $\varphi$ -module filtré sur  $W$ .

**THEOREME 3.** (1) *Soit  $h$  un entier  $\leq p - 1$ . Pour tout objet  $N$  de  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^h$ , le  $\varphi$ -module filtré  $\Lambda = N/\pi_0 N$  est un objet de  $\mathbf{MF}_W^h$ .*

(2) *Le foncteur additif*

$$\mathbf{i}^*: \Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^h \rightarrow \mathbf{MF}_W^h$$

*ainsi défini est exact. Il est fidèle pour  $h \leq p - 2$ ; si  $h = p - 1$ , il faut se restreindre à la catégorie  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^{p-1*}$ , sous-catégorie pleine de  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^{p-1}$ , dont les objets vérifient la condition suivante*

$$\text{si } \bar{N} \text{ est un quotient de } N \text{ tel que } \varphi(\bar{N}) \subset q^{p-1} \bar{N} \text{ alors } \bar{N} = 0.$$

(3)  $\mathbf{i}^*$  *admet un quasi-inverse et induit donc une équivalence de catégories entre  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^h$  et  $\mathbf{MF}_W^h$ .*

**DEMONSTRATION.** (1) Le fait que

$$N = \sum_{0 \leq r \leq h} \varphi^r(\text{Fil}_q^r N) + \pi_0 N$$

implique que

$$\Lambda = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \varphi^r (\text{Fil}^r \Lambda).$$

Si  $\Lambda$  est de  $p$ -torsion, ceci implique (cf. [F-L]) que  $\Lambda$  est bien un objet de  $\mathbf{MF}_W^h$ . Dans le cas général  $N = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} N/p^n N$ ,  $\Lambda = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \Lambda/p^n \Lambda$  et  $\Lambda$  est dans  $\mathbf{MF}_W^h$ , puisque c'est un  $W$ -module de type fini, limite projective d'objets de  $\mathbf{MF}_W^h$ .

(2) Une suite

$$0 \rightarrow \Lambda' \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda'' \rightarrow 0$$

de morphismes dans  $\mathbf{MF}_W^h$  est exacte si et seulement si la suite de morphismes de  $W$ -modules sous-jacente l'est et l'exactitude de  $i^*$  provient de ce que tout objet de  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^h$  est sans  $\pi_0$ -torsion.

Quant à la fidélité, il suffit de la vérifier sur les objets tués par  $p$ ; soit  $u: N \rightarrow N'$  un morphisme dans la catégorie  $\Gamma \Phi \mathbf{M}_{\mathcal{O}_{E_0}}^h$  tel que le morphisme

$$\bar{u}: N/\pi_0 N = \Lambda \rightarrow N'/\pi_0 N' = \Lambda'$$

soit l'application nulle. Ceci signifie

$$u(N) \subset \pi_0 N' \tag{5}$$

alors, puisque  $N = S_0 \cdot \sum_{r \in \mathbb{N}} \varphi^r (\text{Fil}_q^r N)$ , on a l'inclusion suivante, pour  $h \leq p-2$ ,

$$u(N) = S_0 \cdot \sum_{r \in \mathbb{N}} \varphi^r (u(\text{Fil}_q^r N)) \subset \pi_0^2 N'$$

Sinon (si  $h = p - 1$ ), l'inclusion (5) ci-dessus implique la suivante:

$$\varphi(u(N)) \subset \pi_0^p N' = \pi_0^{p-1} \cdot \pi_0 N'.$$

On se place dans une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  de  $N$  adaptée à la filtration et on note  $(a_{ij})$  la matrice inversible représentant les  $\varphi^{r_j}(e_j)$  dans la base  $(e_i)$ ; chercher l'image de  $u$  revient à chercher des solutions  $(y_i)_{1 \leq i \leq d}$  dans  $N'$ , où  $u(e_i) = \pi_0 y_i$ , au système

$$\pi_0^{p-1-r_j} \varphi(y_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} y_i$$

ou bien au système équivalent, en notant  $(a'_{ij})$  la matrice inverse de  $(a_{ij})$

$$y_j = \sum_{1 \leq i \leq d} a'_{ij} \pi_0^{p-1-r_i} \varphi(y_i).$$



Si  $h = p - 1$ , par l'argument habituel (Lemme 2.3.1.2.2.), en utilisant le fait qu'il n'existe pas de quotient  $\bar{N}$  de  $N$  tel que  $\text{Fil}^{p-1} \bar{N} = \bar{N}$ , on conclut que  $y_i \in \pi_0 N'$ .

Par récurrence, on peut montrer que  $u(N) \subset \pi_0^n N'$  pour tout  $n$  et, par conséquent  $u = 0$ , puisque  $N'$  est libre sur  $\mathcal{O}_{E_0}$  et  $\mathcal{O}_{E_0}$  est séparé pour la topologie  $\pi_0$ -adique.

3.1.5. DEMONSTRATION de (3). Il suffit de considérer le cas où  $\Lambda$  est libre sur  $W$  et il s'agit alors de montrer que si  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  est une base de  $\Lambda$  adaptée à la filtration et si  $(a_{ij})$  est la matrice des applications  $\varphi^r$  dans cette base, alors le  $S_0$ -module  $N = S_0 \otimes_W \Lambda$ , muni de l'action de  $\varphi$  suivante

$$\varphi(e_j) = q^{rj} \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i$$

peut être muni d'une action et d'une seule de  $\Gamma_0$  commutant à  $\varphi$  et triviale modulo  $\pi_0$ . Remarquons que si  $\rho$  désigne l'unique endomorphisme de  $N$ , semi-linéaire par rapport à l'action de  $g_0$  sur  $S_0 = W[[\pi_0]]$  tel que  $\rho(e_j) = e_j$ , on a

$$\begin{aligned} \rho(\varphi(e_j)) - \varphi(\rho(e_j)) &= \rho\left(q^{rj} \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i\right) - q^{rj} \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i \\ &= (g_0(q)^{rj} - q^{rj}) \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i \\ &= q^{rj} \pi_0 \alpha_j \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i, \end{aligned}$$

si  $\alpha_j$  est l'unique élément de  $S_0$  telle que

$$g_0(q^{rj}) = q^{rj} (1 + \pi_0 \alpha_j).$$

Comme  $S_0$  est complet pour la topologie  $\pi_0$ -adique, il suffit de vérifier le lemme suivant.

LEMME 3.1.6. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $\rho$  un endomorphisme de  $N$ , semi-linéaire par rapport à l'action de  $g_0$  sur  $S_0$  tel que  $\rho(e_j) \equiv e_j \pmod{\pi_0}$  et

$$\rho(\varphi(e_j)) \equiv \varphi(\rho(e_j)) \pmod{\pi_0^n q^{rj} N}$$

pour tout  $j$ ; alors, il existe un endomorphisme  $\rho'$  de  $N$ , uniquement déterminé modulo  $\pi^{n+1}$ , semi-linéaire par rapport à l'action de  $g_0$  sur  $S_0$  tel que, pour tout  $j$

$$\begin{aligned} \rho'(e_j) &\equiv \rho(e_j) \pmod{\pi_0^n N} \quad \text{et} \\ \rho'(\varphi(e_j)) &\equiv \varphi(\rho'(e_j)) \pmod{\pi_0^{n+1} q^{rj} N}. \end{aligned}$$

DEMONSTRATION. On pose, pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq d$

$$\rho(\varphi(e_j)) - \varphi(\rho(e_j)) = \pi_0^n q^{r_j} b_j \quad (6)$$

où  $b_j$  est un élément de  $N$  et on cherche  $\rho'$  à l'aide des équations

$$\rho'(e_j) = \rho(e_j) + \pi_0^n \sum_{1 \leq i \leq d} g'_{ij} e_i,$$

avec  $g'_{ij} \in W$ . Rappelons que  $\varphi(\pi_0) = u\pi_0 q^{p-1}$  avec  $u$  une unité de  $S_0$ ; alors,

$$\begin{aligned} \rho'(\varphi(e_j)) &= \rho' \left( q^{r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} e_i \right) \\ &= g_0(q^{r_j}) \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} \rho'(e_i) \\ &= \rho(\varphi(e_j)) + g_0(q^{r_j}) \pi_0^n \sum_{1 \leq i, k \leq d} a_{kj} g'_{ik} e_i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(\rho'(e_j)) &= \varphi \left( \rho(e_j) + \pi_0^n \sum_{1 \leq i \leq d} g'_{ij} e_i \right) \\ &= \varphi(\rho(e_j)) + \varphi(\pi_0^n) \sum_{1 \leq i \leq d} \varphi(g'_{ij}) \varphi(e_i) \\ &= \varphi(\rho(e_j)) + \pi_0^n q^{n(p-1)} u^n \sum_{1 \leq i, k \leq d} \varphi(g'_{kj}) q^{r_k} a_{ik} e_i. \end{aligned}$$

En comparant avec l'équation (6), on obtient les équations à résoudre pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq d$

$$\begin{aligned} \pi_0^n q^{r_j} b_j - \pi_0^n g_0(q^{r_j}) \sum_{1 \leq i, k \leq d} a_{kj} g'_{ik} e_i + \\ + \pi_0^n q^{n(p-1)} u^n \sum_{1 \leq i, k \leq d} \varphi(g'_{kj}) q^{r_k} a_{ik} e_i \equiv 0 \pmod{\pi_0^{n+1} q^{r_j}}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} b_j - (1 + \pi_0 \alpha_j) \sum_{1 \leq i, k \leq d} a_{kj} g'_{ik} e_i + \\ + q^{n(p-1)-r_j} u^n \sum_{1 \leq i, k \leq d} \varphi(g'_{kj}) q^{r_k} a_{ik} e_i \equiv 0 \pmod{\pi_0}. \end{aligned}$$

Comme  $W$  est complet pour la topologie  $p$ -adique, on commence par résoudre ce système modulo  $p$ .

On voit que pour  $n \geq 2$  ou bien pour  $n = 1$  et  $r_j < p - 1$  (c'est-à-dire  $\Lambda$  de hauteur  $h \leq p - 2$ ), les équations deviennent

$$b_j \equiv (1 + \pi_0 \alpha_j) \sum_{1 \leq i, k \leq d} a_{kj} g'_{ik} e_i \pmod{p}$$

et on conclut en utilisant le fait que la matrice  $(a_{ij})$  est inversible.

Pour  $n = 1$  et si l'un au moins des  $r_j = p - 1$ , on conclut en utilisant le lemme 2.3.1.2.2.

De la même manière, on montre qu'on peut relever une solution de ce système modulo  $p^n$  en une solution modulo  $p^{n+1}$ .  $\square$

### 3.2. LIEN AVEC LES REPRÉSENTATIONS CRISTALLINES

3.2.1. Soit  $h$  un entier  $\leq p - 1$ ; à un objet  $N$  de  $p$ -torsion de  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^h$  (de  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0, \text{tors}}^{p-1*}$ , il est maintenant possible d'associer deux représentations de  $G_{K_0}$ , à savoir

- celle qui est associée à  $N$  par le foncteur  $\mathbf{V}_{\text{cr}}^*$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{V}_{\text{cr}}^*(N) = \text{Hom}_{\Phi \mathbf{M}_{S_0}}(N, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr, \infty}}) = \text{Hom}_{\Phi \mathbf{M}_{S_0}}(N, A_{S, \infty}^+),$$

- celle qui est associée à  $\mathbf{i}^*(N) = \Lambda$  par le foncteur  $\mathbf{V}_{\text{cris}}^*$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{V}_{\text{cris}}^*(\Lambda) = \mathbf{V}_{\text{cris}}^* \circ \mathbf{i}^*(N) = \text{Hom}_{\mathbf{MF}_W}(N, A_{\text{cris}, \infty}).$$

On se propose de comparer ces deux représentations; plus précisément, lorsque  $N$  est de  $p$ -torsion, on va construire un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\Phi \mathbf{M}_{S_0}}(N, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr, \infty}}) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{MF}_W}(N, A_{\text{cris}, \infty}).$$

**THEOREME 1'.** *Toute représentation de  $p$ -torsion de  $G_{K_0}$  de  $cr$ -hauteur finie inférieure ou égale à  $h$ , pour  $h \leq p - 1$  est un sous-quotient de représentation cristalline à poids de Hodge-Tate compris entre 0 et  $h$ . Plus précisément, si  $N \in \Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0, \text{tors}}^h$  (respectivement  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0, \text{tors}}^{p-1*}$  si  $h = p - 1$ ), alors  $\mathbf{i}^*(N) = N/\pi N$  est objet de  $\mathbf{MF}_{W, \text{tors}}^h$  (respectivement  $\mathbf{MF}_{W, \text{tors}}^{p-1*}$ ) et les représentations associées à chacun des deux modules sont naturellement isomorphes, c'est-à-dire*

$$\text{Hom}_{\Phi \mathbf{M}_{S_0}}(N, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr, \infty}}) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{MF}_W}(\mathbf{i}^*(N), A_{\text{cris}, \infty}).$$

**DEMONSTRATION.** Soit  $N$  un objet de  $\Gamma_0 \Phi \mathbf{M}_{S_0}^h$  tué par  $p^n$ ; alors

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\Phi \mathbf{M}_{S_0}}(N, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{nr, \infty}}) &= \text{Hom}_{\Phi \mathbf{M}_{S_0}}(N, A_{S, \infty}^+) \\ &= \text{Hom}_{\Phi \mathbf{M}_{S_0}}(N, A_S^+ / p^n A_S^+). \end{aligned}$$

L'inclusion  $A_S^+ \subset W(R)$  fournit une flèche encore injective

$$A_S^+ / p^n A_S^+ \rightarrow W(R) / p^n W(R) = W_n(R),$$

que nous utilisons pour identifier  $A_S^+ / p^n A_S^+$  à un sous-anneau de  $W_n(R)$ .

Considérons la catégorie  $\Phi\mathbf{M}_{S_0, \text{Fil}}$ , dont les objets sont les objets de  $\Phi\mathbf{M}_{S_0}$  munis d'une filtration décroissante  $(\text{Fil}_q^r N)_{r \in \mathbb{N}}$  par des sous- $S_0$ -modules, et dont les morphismes sont les morphismes de  $\Phi\mathbf{M}_{S_0}$  respectant la filtration. Tout objet de  $\Phi\mathbf{M}_{S_0}$  sans  $q$ -torsion est muni d'une structure naturelle d'objet de  $\Phi\mathbf{M}_{S_0, \text{Fil}}$ , si l'on définit

$$\text{Fil}_q^r N = \{x \in N \text{ tel que } \varphi(x) \in q^r N\}.$$

Ceci s'applique en particulier à  $A_S^+ / p^n A_S^+$  et à  $W_n(R)$ . On munit le quotient  $W_n(R) / \pi_0 W_n(R)$  de la filtration induite.

Comme  $A_S^+ / p^n A_S^+$  et  $W_n(R)$  sont sans  $q$ -torsion, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{S_0}}(N, A_S^+ / p^n A_S^+) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{S_0}}(N, W_n(R)) \\ \parallel & & \parallel \\ \text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{S_0, \text{Fil}}}(N, A_S^+ / p^n A_S^+) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{S_0, \text{Fil}}}(N, W_n(R)). \end{array}$$

On dispose ainsi d'une flèche naturelle

$$\text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{S_0, \text{Fil}}}(N, W_n(R)) \rightarrow \text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{S_0, \text{Fil}}}(N, W_n(R) / \pi_0 W_n(R)),$$

et on constate que ce dernier groupe s'identifie à  $\text{Hom}_{\mathbf{MF}_W}(\mathbf{i}^*(N), W_n(R) / \pi_0 W_n(R))$ .

D'autre part, on a vu que si  $\Lambda$  est un objet de  $\mathbf{MF}_W^{p-1*}$  tué par  $p^n$ , alors

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{MF}_W}(\Lambda, A_{\text{cris}, \infty}) &= \text{Hom}_{\mathbf{MF}_W}(\Lambda, W_n^{PD}(R)) \\ &= \text{Hom}_{\mathbf{MF}_W}(\Lambda, W_n^{PD}(R) / I^{[p-1]} W_n^{PD}(R)) \\ &= \text{Hom}_{\mathbf{MF}_W}(\Lambda, W_n(R) / I^{[p-1]} W_n(R)) \\ &= \text{Hom}_{\mathbf{MF}_W}(\Lambda, W_n(R) / \pi_0 W_n(R)) \end{aligned}$$

Pour démontrer le théorème, on est donc ramené à montrer que la flèche

$$\text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{S_0, \text{Fil}}}(N, A_S^+ / p^n A_S^+) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{MF}_W}(\mathbf{i}^*(N), W_n(R) / \pi_0 W_n(R)),$$

est un isomorphisme.

Par dévissage, on se ramène au cas où  $N$  est tué par  $p$ ; dans ce cas  $A_S^+/pA_S^+ = \mathcal{O}_{E^{\text{sép}}}$  et  $S_0/pS_0 = \mathcal{O}_{E_0} = k[[\pi_0]]$ ; on a

$$\text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{S_0}, \text{Fil}}(N, \mathcal{O}_{E^{\text{sép}}}) = \text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{E_0}, \text{Fil}}(N, \mathcal{O}_{E^{\text{sép}}})$$

et il s'agit de montrer que

$$\text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{E_0}, \text{Fil}}(N, \mathcal{O}_{E^{\text{sép}}}) = \text{Hom}_{\mathbf{MF}_W}(\mathbf{i}^*(N), R/\pi_0R).$$

L'inclusion  $\mathcal{O}_{E^{\text{sép}}} \subset R$  induit une inclusion

$$\text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{E_0}, \text{Fil}}(N, \mathcal{O}_{E^{\text{sép}}}) \subset \text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{E_0}, \text{Fil}}(N, R),$$

qui est une égalité puisque  $\text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{E_0}, \text{Fil}}(N, \mathcal{O}_{E^{\text{sép}}})$  est de dimension  $d$  sur  $\mathbb{F}_p$ .

Il ne reste plus qu'à montrer la proposition suivante.

**PROPOSITION 3.2.2.** *L'application naturelle*

$$\text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{E_0}}} (N, R) = \text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{E_0}, \text{Fil}}} (N, R) \rightarrow \text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{E_0}, \text{Fil}}} (N, R/\pi_0R)$$

*est un isomorphisme.*

**DEMONSTRATION.** La catégorie additive  $\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{E_0}, \text{Fil}}$  n'est pas abélienne, mais dispose de propriétés analogues à celles considérées dans le paragraphe 2.2.3 au sujet de la catégorie  $\mathbf{MF}_W$  (on peut définir des  $\text{Ext}^i$  pour  $i = 0, 1$  et on a des suites exactes longues).

La suite exacte

$$0 \rightarrow \pi_0R \rightarrow R \rightarrow R/\pi_0R \rightarrow 0$$

induit la suite exacte longue

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{E_0}, \text{Fil}}}(N, \pi_0R) \rightarrow \text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{E_0}, \text{Fil}}}(N, R) \rightarrow \text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{E_0}, \text{Fil}}}(N, R/\pi_0R) \rightarrow \text{Ext}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{E_0}, \text{Fil}}}^1(N, \pi_0R) \rightarrow \dots$$

On est ramené à montrer que

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{E_0}, \text{Fil}}}(N, \pi_0R) &= 0 \quad \text{et} \\ \text{Ext}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{E_0}, \text{Fil}}}^1(N, \pi_0R) &= 0. \end{aligned}$$

• Soit  $u \in \text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{E_0}, \text{Fil}}}(N, \pi_0R)$ , où  $N$  est un objet de  $\Gamma\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{E_0}}^h$ . On se place dans une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  de  $N$  adaptée à la filtration, on note  $(a_{ij})$  la matrice de  $\Phi$

dans cette base et on écrit  $u$  sous la forme  $u(e_i) = \pi_0 \alpha_i$  où  $\alpha_i \in R$ . Alors les  $\alpha_i$  doivent vérifier le système suivant

$$\varphi^{r_j}(\pi_0 \alpha_j) = \pi_0^{p-r_j} \alpha_j^p = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} \pi_0 \alpha_i$$

pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq d$ , c'est-à-dire

$$\pi_0^{p-1-r_j} \alpha_j^p - \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} \alpha_i = 0$$

pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq d$  et  $\text{Hom}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{\mathbf{E}_0}, \text{Fil}}}(N, \pi_0 R) = 0$  si et seulement si la seule solution à ce système est la solution nulle.

• De même soit une extension  $\mathcal{E}$  de  $N$  par  $\pi_0 R$  dans la catégorie  $\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{\mathbf{E}}, \text{Fil}}$  définie par une suite exacte

$$0 \rightarrow \pi_0 R \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow N \rightarrow 0$$

alors  $\text{Ext}_{\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{\mathbf{E}_0}, \text{Fil}}}^1(N, \pi_0 R)$  est trivial si et seulement si cette suite est scindée. En d'autres termes, si on note  $\hat{e}_i$  un relèvement de  $e_i$  dans  $\text{Fil}^{r_i} \mathcal{E}$ , on a

$$\varphi^{r_j}(\hat{e}_j) - \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} \hat{e}_i \in \pi_0 R$$

et on pose

$$\varphi^{r_j}(\hat{e}_j) - \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} \hat{e}_i = \pi_0 b_j,$$

où  $b_j \in R$ .

Il s'agit de montrer qu'il existe un morphisme  $N \rightarrow \mathcal{E}$  dans  $\Phi\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{\mathbf{E}_0}, \text{Fil}}$  induisant l'identité sur  $N$  par composition avec la projection  $\mathcal{E} \rightarrow N$ ; on cherche des éléments  $\alpha_i$  de  $R$  tels que

$$\varphi^{r_j}(\hat{e}_j + \pi_0 \alpha_j) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} (\hat{e}_i + \pi_0 \alpha_i)$$

pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq d$ .

Il faut donc montrer l'existence de solutions dans  $R$  au système suivant

$$\pi_0^{p-1-r_j} \alpha_j^p - \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij} \alpha_i = -b_j$$

pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq d$ .

• Finalement, il suffit de montrer que le système ci-dessus, où  $b_i \in R$  et la matrice  $(a_{ij})$  est inversible à coefficients dans  $\mathcal{O}_{E_0}$  admet un unique  $d$ -uplet  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}$  solution dans  $R$ .

Puisque la matrice  $A = (a_{ij})$  est inversible, il est équivalent de montrer l'existence et l'unicité des solutions dans  $R^d$  au système

$$\beta_j - \pi_0^{p-1-r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij}^p \beta_i^p = b_j$$

pour tout  $j, \quad 1 \leq j \leq d$ , où  $(a_{ij}^p) = A^{-1}$ . (7)

**LEMME 3.2.3.** *Si  $(\beta_{i,n})_{1 \leq i \leq d}$  est une solution du système (7) modulo  $\pi_0^n$ , alors  $\beta_{i,n}$  se relève de manière unique modulo  $\pi_0^{n+1}$  en  $\beta_{i,n+1}$ , de telle sorte que  $(\beta_{i,n+1})_{1 \leq i \leq d}$  soit solution du système modulo  $\pi_0^{n+1}$ .*

**DEMONSTRATION.** On cherche  $(\beta_{i,n+1})_{1 \leq i \leq d}$  sous la forme  $\beta_{i,n+1} = \beta_{i,n} + \pi_0^n \beta'_{i,n}$ . Alors,  $(\beta'_{i,n})_{1 \leq i \leq d}$  doit être solution du système

$$\pi_0^n \beta'_{j,n} \equiv \pi_0^{p-1-r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij}^p \beta_{i,n}^p - \beta_{j,n} + b_j \pmod{\pi_0^{n+1}}$$

pour tout  $j, \quad 1 \leq j \leq d$ .

Puisque  $(\beta_{i,n})_{1 \leq i \leq d}$  est solution du système modulo  $\pi_0^n$ , on peut écrire

$$\pi_0^{p-1-r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij}^p \beta_{i,n}^p - \beta_{j,n} + b_j = \pi_0^n A_{j,n},$$

où  $A_{i,n} \in R$ , d'où  $\beta'_{i,n} \equiv A_{i,n}$  modulo  $\pi_0$  et le lemme est démontré. □

Il reste à voir l'existence et l'unicité de solutions  $(\beta_i)_{1 \leq i \leq d}$  modulo  $\pi_0$  au système

$$\beta_j - \pi_0^{p-1-r_j} \sum_{1 \leq i \leq d} a_{ij}^p \beta_i^p = b_j$$

pour tout  $j, \quad 1 \leq j \leq d$ .

Si  $h \leq p - 2$ , pour tout  $i$ , on a  $r_i \leq p - 2$  et par conséquent le système se simplifie en

$$\beta_j \equiv b_j \pmod{\pi_0} \quad \text{pour tout } j, \quad 1 \leq j \leq d,$$

d'où le théorème pour  $h \leq p - 2$ . □

3.2.1. Cas où  $h = p - 1$ 

Dans ce cas, le système à résoudre s'écrit

$$\begin{cases} \beta_j \equiv b_j \pmod{\pi_0} \text{ pour } j \text{ tel que } r_j < p - 1, \\ \beta_j - \sum_{r_i=p-1} a_{ij}^p \beta_i^p \equiv b'_j \pmod{\pi_0} \text{ pour } j \text{ tel que } r_j = p - 1. \end{cases}$$

On suppose que  $N$  n'admet pas de quotient  $\bar{N} \in \mathbf{GF}\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{E_0}}^h$  tel que  $\varphi(\bar{N}) \subset \pi^{p-1}\bar{N}$ ; alors  $\mathbf{i}^*(N)$  n'admet pas de quotient  $\bar{\Lambda}$  tel que  $\mathrm{Fil}^{p-1}\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}$ , c'est-à-dire  $i^*(N) \in \mathbf{MF}_{\mathbf{k}}^{p-1*}$ . On note  $\mathbf{GF}\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{E_0}}^{p-1*}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{GF}\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{E_0}}^{p-1}$  formée des objets qui vérifient cette condition. Par le même argument que dans le chapitre précédent (Lemme 2.3.1.2.2), on montre l'existence et l'unicité des  $(\beta_i)_{1 \leq i \leq d}$  modulo  $\pi_0$ .

## Bibliographie

- [B-O] Berthelot, P. and Ogus, A.: *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton, 1978.
- [F79] Fontaine, J.-M.: Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, in *Journées arithmétiques de Rennes III, Astérisque* 65, (1979) 3–80.
- [F82] Fontaine, J.-M.: Sur certains types de représentations  $p$ -adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, *Ann. of maths* 115, (1982) 529–577.
- [F91] Fontaine, J.-M.: Représentations  $p$ -adiques des corps locaux, in *The Grothendieck Festschrift, vol II*, Birkhäuser, Boston, (1991) 249–309.
- [F94] Fontaine, J.-M.: Le corps des périodes  $p$ -adiques, exposé II, séminaire I.H.E.S. 1988, *Astérisque* 223, (1994) 59–111.
- [F-I] Fontaine, J.-M. et Illusie, L.:  $p$ -adic periods: a survey, exposé Bombay 1989 in *Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry*, NBHM, Hindustan Book Agency, Delhi, (1993) 57–93.
- [F-L] Fontaine, J.-M. et Laffaille, G.: Construction de représentations  $p$ -adiques *Ann. Scient. E.N.S. 4<sup>e</sup> série* 15 (1982) 547–608.
- [L] Laffaille, G.: Groupes  $p$ -divisibles et modules filtrés: le cas peu ramifié *Bull. Soc. Math. France* 108 (1980).
- [N] Niziol, W.: Cohomology of crystalline representations, *Duke Math. Journal* 71, (1993).
- [S68] Serre, J.-P.: *Corps locaux*, 2<sup>o</sup> éd., Hermann, Paris, 1968.
- [Wa] Wach, N.: Représentations potentiellement cristallines, *Bulletin de la S.M.F.*, 124, (1996) 375–400.
- [W] Wintenberger, J.-P.: Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications, 16, (1983) 59–89 *Ann. Scient. E.N.S. 4<sup>e</sup> série*.