Can. J. Math., Vol. XXVII, No. 6, 1975, pp. 1323–1328

EQUIDISTRIBUTION DES VALEURS D'UNE APPLICATION HOLOMORPHE GENERIQUE A VALEURS DANS L'ESPACE PROJECTIF

P. M. GAUTHIER

1. Introduction. Un exemple de Fatou-Bieberbach [**1**, p. 45] montre qu'il existe des applications holomorphes

$$h : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$$

à Jacobien $J(h)$ partout non nul, mais dont le complémentaire de l'image $\mathbf{C}^n \backslash h(\mathbf{C}^n)$ est un fermé à intérieur non vide. Néanmoins on a montré récemment [**3**; **5**] qu'une application holomorphe *générique* de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^n$ est surjective. Nous voulons montrer qu'il en est de même pour les applications prenant leurs valeurs dans l'espace projectif $\mathbf{P}^n$. Donc une application générique de $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{P}^n$ a un comportement genre Picard en dépit de l'exemple de Fatou-Bieberbach qui nous dit que le théorème lui-même de Picard est dans un certain sens faux pour les applications holomorphes.

Rappelons d'autre part que de certains points de vue le théorème de Picard reste quand même vrai pour les applications holomorphes (voir par exemple [**4**] et [**8**]).

Voici quelques notations que nous utilisont. X dénote un espace de Stein réduit et connexe. Si A est une partie de X, on dénote par ∂A la frontière de A, par $\hat{A}$ l'enveloppe de convexité holomorphe de A, par $\mathcal{O}(A, \mathbf{P}^m)$ les applications holomorphes de A dans l'espace projectif complexe de dimension m, par $\mathcal{O}(A)$ les fonctions holomorphes sur A, et si f est une fonction à valeurs complexes définie sur A, on écrit $\|f\|_A = \sup_{z\in A}|f(z)|$. Soit X doué d'une métrique, $a \in X$ et ϵ une fonction positive continue sur X. Alors $V(a, \epsilon) = V(a, \epsilon(a))$ dénote une boule et si $\{z_j\}$ est une suite dans X, on écrit

$$V(\{z_j\}, \epsilon) = \bigcup_{j=1}^{\infty} V(z_j, \epsilon).$$

2. Lemmes. Soient x un point et $\{V_n\}$ une suite de sous-ensembles d'un espace X. Alors, on écrit $V_n \to x$ si V_n est éventuellement dans tout voisinage de x.

LEMME 1. *Soit X Stein, $x \in X$, et $\{V_n\}$ une suite de voisinages de x. Alors*

$$(V_n \to x) \Rightarrow (\hat{V}_n \to x).$$

Reçu le 29 juillet, 1974 et sous forme revisée, le 2 janvier, 1975.

Subventionné par le CNR du Canada, le Ministère d'Education du Québec, et l'Institut d'Eté à l'Université Laval.

Preuve. X étant Stein, les $\hat{V}_n$ sont (éventuellement) compacts. Il suffit donc de vérifier que pour tout $y \neq x$, on a éventuellement, $y \notin \hat{V}_n$. Puisque $\mathcal{O}(X)$ sépare les points, il y a une $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que $|f(y)| > |f(x)|$. Puisque $V_n \to x$ on a éventuellement

$$|f(y)| > \|f\|_{V_n},$$

ce qui démontre le lemme.

Le prochain lemme est dû à E. Kallin [**9**] dans un cadre moins général, et la démonstration qu'on donne est essentiellement celle de Kallin.

Lemme de séparation (Kallin). *Soient K_1 et K_2 des parties compactes d'un espace de Stein X. S'il existe $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que*

$$f(K_1)^\wedge \cap f(K_2)^\wedge = \phi,$$

alors

$$(K_1 \cup K_2)^\wedge = \hat{K}_1 \cup \hat{K}_2.$$

Preuve. Soit $x \notin \hat{K}_1 \cup \hat{K}_2$. Si

$$f(x) \notin f(K_1)^\wedge \cup f(K_2)^\wedge,$$

alors par le théorème de Runge il y a un polynôme p en une variable tel que $p(f(x))$ soit près de 1 et $p \circ f$ soit près de zéro sur $K_1 \cup K_2$. Donc $x \notin (K_1 \cup K_2)^\wedge$.

Si d'autre part

$$f(x) \in f(K_1)^\wedge \cup f(K_2)^\wedge,$$

mettons $f(x) \in f(K_1)^\wedge$, alors comme $x \notin K_1$, il y a un $q \in \mathcal{O}(X)$ tel que $q(x) = 1$ et $|q| < 1/2$ sur K_1. Soit $M = \sup\{|q(x)| : x \in K_2\}$. Encore par le théorème de Runge il y a un polynôme p tel que $|p - 1| < 1/3$ sur $f(K_1)$ et $|p| < 1/(2M)$ sur $f(K_2)$. Alors la fonction holomorphe $h = (p \circ f) \cdot q$ a les propriétés:

$$|h(x) - 1| < 1/3 \text{ et}$$
$$|h| < 2/3 \text{ sur } K_1 \cup K_2.$$

Donc, encore une fois, $x \notin (K_1 \cup K_2)^\wedge$. On a montré

$$(K_1 \cup K_2)^\wedge \subset \hat{K}_1 \cup \hat{K}_2,$$

et l'inclusion contraire est toujours vraie. Le lemme est démontré.

En utilisant un principe d'Oka, Grauert [**6**] et Grauert-Kerner [**7**] ont démontré le théorème suivant, genre Runge [**2**, p. 146].

Theoreme de oka-runge (Grauert-Kerner). *Soit K une partie compacte holomorphiquement convexe dans un espace de Stein X. Alors $\mathcal{O}(X, P^m)$ est dense dans $\mathcal{O}(K, P^m)$ si l'espace $\mathcal{C}(X, P^m)$ d'applications continues est dense dans $\mathcal{O}(K, P^m)$.*

3. Le theoreme et ses corollaires. Si X est un espace de Stein de dimension finie, alors X admet un recouvrement par compacts K_j, $j = 1, 2, \ldots,$ tels que chaque K_j soit holomorphiquement convexe et

(1) $K_j \subset (K_{j+1})^0, j = 1, 2, \ldots.$

THEOREME. *Soit X un espace de Stein de pure dimension au moins m. Soit K_j, $j = 1, 2, \ldots,$ un recouvrement de X par compacts holomorphiquement convexes et satisfaisants à* (1). *Soit d'une métrique sur X et ϵ une fonction continue et positive qui s'annule à l'infini. Alors, toute $f \in \mathcal{O}(X, \mathbf{P}^m)$, sauf un ensemble rare, a la propriété suivante: pour toute suite frontière $\{z_j\}$ telle que chaque z_j est situé sur ∂K_j, on a que*

$$f(V(\{z_j\}, \epsilon)) = \mathbf{P}^m.$$

Avant de passer à la démonstration, notons que notre théorème a les mêmes corollaires que son homologue pour les applications dans $\mathbf{C}^m$ (voir [**3**]).

Soit $\sigma : [0, +\infty) \to X$ un chemin continu sur X. Le chemin σ est dit un chemin frontière si $\sigma(t)$ tend vers l'infini, lorsque $t \to +\infty$. Soit ϵ une fonction positive et continue sur X. On définie le ϵ-voisinage du chemin σ par

$$V(\sigma, \epsilon) = \bigcup_t V(\sigma(t), \epsilon).$$

COROLLAIRE 1. *Soient X, d, et ϵ tells que dans le théorème. Alors pour toute application holomorphe f de X dans $\mathbf{P}^m$, à l'exception d'une famille rare dans $\mathcal{O}(X, \mathbf{P}^m)$, on a que*

$$f(V(\sigma, \epsilon)) = \mathbf{P}^m.$$

pour tout chemin frontière σ.

Soit X^* une compactification (séparée) de X. Si f est un application holomorphe de X dans $\mathbf{P}^m$ et $p \in X^* \backslash X$, on dénote par $R(f, p)$ l'ensemble des valeurs $w \in \mathbf{P}^m$ telle qu'il existe une suite $\{z_j\}$ dans X, $z_j \to p$, et $f(z_j) = w$, $j = 1, 2, \ldots.$

COROLLAIRE 2. *Soit X un espace de Stein de pure dimension au moins m et X^* une compactification métrisable de X. Alors toute application holomorphe f de X dans $\mathbf{P}^m$, sauf une famille maigre dans $\mathcal{O}(X. \mathbf{P}^m)$, a la propriété*

$$R(f, p) = \mathbf{P}^m, \text{ pour tout } p \in X^* \backslash X.$$

Ces corollaires nous disent que pour une application générique d'un espace de Stein de pure dimension $n \geqq m$ prennant ses valuers dans $\mathbf{P}^m$, on a que tout chemin frontière est chemin de Picard et tout point frontière est point de Picard.

En particulier, pour la compactification d'Alexandrov, un coup d'œil sur la démonstration du théorème révèlera qu'on a pas besoin de supposer que la dimension de X soit pure.

COROLLAIRE 3. *Soit X un espace de Stein de dimension au moins m. Alors toute application holomorphe f de X dans $\mathbf{P}^m$, sauf une famille maigre dans $\mathcal{O}(X, \mathbf{P}^m)$, a la propriété*

$$f(X\backslash K) = \mathbf{P}^m, \text{ pour tout compact } K \subset X.$$

En particulier, l'application générique est surjective. Mais si c'est seulement la surjectivité que nous cherchons, alors la preuve du théorème se simplifie, et les fonctions exceptionnelles forment non seulement une famille maigre mais, à cause de la compacité de $\mathbf{P}^m$, même une famille rare, c'est-à-dire "nowhere dense".

COROLLAIRE 4. *Soit X un espace de Stein de dimension au mois m. Alors toute application holomorphe de X dans $\mathbf{P}^m$, sauf une famille rare dans $\mathcal{O}(X, \mathbf{P}^m)$, est surjective.*

Passons enfin à la démonstration. Nous allons supposer que $m = n$, car moralement c'est le seul cas qui mérite une démonstration. D'ailleurs il sera facile de modifier la démonstration qui suit si l'on sent le besoin de vérifier le cas ou $m < n$.

Pour $f \in \mathcal{O}(X, \mathbf{P}^n)$, $w \in \mathbf{P}^n$, et $x \in X$, dénotons par $\dim_X f^{-1}(w)$ la dimension en x de l'ensemble analytique $f^{-1}(w)$. Soit B une boule paramétrique de $\mathbf{P}^n$ et considérons l'ensemble $A(B) \subset \mathcal{O}(X, \mathbf{P}^n)$, d'applications holomorphes f ayant la propriété qu'il existe une suite $\{z_j\}$, $z_j \in \partial K_j$, et un point $w \in B$ tel que si $f(x) = w$ pour $x \in V(\{z_j\}, \epsilon)$ alors $\dim_x f^{-1}(w) \neq 0$. Remarquons que $A(B)$ contient les applications $f \in \mathcal{O}(X, \mathbf{P}^n)$ telles que

$$f(V(\{z_j\}, \epsilon)) \not\supset B.$$

Conséquemment, par la compacité et l'homogénéité de $\mathbf{P}^n$, il suffit de montrer que $A(B)$ est un ensemble rare.

(1) $A(B)$ est fermé. Pour ceci nous renvoyons le lecteur à un raisonnement semblable dans [**3**].

(2) Le complémentaire de $A(B)$ est dense. Soit dont $f \in \mathcal{O}(X, \mathbf{P}^n)$ et K une partie compacte de X. Supposons qu'il existe une application holomorphe g de X dans $\mathbf{P}^n$ ayant les deux propriétés suivantes: L'application g est près de f sur K; g envoie une partie d'un certain $V(z_j, \epsilon)$, $z_j \in \partial K_j$, sur B de façon non-singulière. Alors g n'est pas dans $A(B)$ et g est une approximation de f. Le théorème sera démontré. Il suffit donc de montrer l'existence d'un tel g.

Nous pouvons supposer K holomorphiquement convexe. Choisissons un indice j tel que $z_j \notin K$. D'après le Lemme 1 nous pouvons trouver une boule paramétrique fermée E telle que

(2) $\quad E \subset V(z_j, \epsilon)$,

(3) $\quad \hat{E} \cap K = \phi$,

et d'apres le Lemme 1 et le lemme de séparation, nous pouvons supposer

(4) $(K \cup E)^\wedge = K \cup \hat{E}$.

Encore par le Lemme 1, il y a une boule fermée paramétrique F telle que

(5) $\hat{F} \subset E^0$.

Nous définissons une application

(6) $\phi \in \mathcal{O}(K \cup \hat{F}, \mathbf{P}^n)$.

Sur K posons $\phi = f$. Soit ψ une application biholomorphe de E^0 sur une boule paramétrique contenant B et telle que

$$\psi(F^0) \supset B.$$

Sur F, posons ϕ égale à $\psi | \hat{F}$.

On vérifie aisément que si $g \in \mathcal{O}(X, \mathbf{P}^n)$ est une bonne approximation de ϕ, alors g a les propriétés souhaitées. D'après le théorème de Oka-Runge cette approximation est réalisable si elle l'est par une application continue de X dans $\mathbf{P}^n$.

L'approximation de ϕ par une application continue est facile à faire. Au fait, ϕ admet un prolongement continu de X dans $\mathbf{P}^n$ malgré que $\mathbf{P}^n$ ne soit pas un retract absolu. Nous construisons maintenant ce prolongement que nous dénotons Φ. Premièrement nous pouvons supposer que $f(E)$ est contenu dans une carte de $\mathbf{P}^n$. Cette carte elle est un retract absolu. Soient E_1 et E_2 des sous boules de E:

$$\hat{F} \subset E_1{}^0 \subset E_1 \subset E_2{}^0 \subset E.$$

Soit B_2 une boule dans la même carte que $f(E)$. Posons

$$\Phi = \begin{cases} f, \text{ sur } X \backslash E^0, \\ \phi, \text{ sur } \hat{F}. \end{cases}$$

Alors Φ prolonge déjà ϕ un peu. Posons, sur ∂E_2, Φ égale à la restriction d'une application biholomorphe de E_2 sur B_2. Alors Φ admet un prolongement continu à $X \backslash E_2{}^0$. Sur ∂E_1 posons Φ égale à la restriction d'une application biholomorphe de E_1 sur une boule contenant $\phi(\hat{F})$ à son intérieur. Alors Φ est prolongeable de façon continue à E^1. Φ est maintenant définie sur

$$(X \backslash E_2{}^0) \cup E_1.$$

et les images de ∂E_2 et ∂E_1 sont des frontières de boules dans $\mathbf{P}^n$. Puisque $\mathbf{P}^n$ est connexe par arcs, le prolongement à $E_2 \backslash E_1$ s'accomplit facilement. Le prolongement de ϕ ainsi que la démonstration du théorème sont donc terminés.

Remarquons que notre théorème serait faux pour $m < n$, car le théorème de Sard (parmi d'autres) affirme qu'il n'y a pas de courbes de Peano holomorphes. D'autre part on pourrait démontrer (voir [**5**]) que l'image d'une application holomorphe générique à valuers dans $\mathbf{P}^n$ est dense.

Bibliographie

1. S. Bochner et W. T. Martin, *Several complex variables* (Princeton University Press, Princeton, 1948).
2. H. Behnke et P. Thullen, *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer* Veränderlichen, 2^e ed. (éd. R. Remmert, Springer-Verlag, New York, 1970).
3. Leon Brown et P. M. Gauthier, *Equidistribution des valeurs d'une fonction analytique générique sur un espace de Stein*, Enseignement Math. *20* (1974), 205–214.
4. H. Fujimoto, *Families of holomorphic maps into the projective space omitting some hyperplanes*, J. Math. Soc. Japan *25* (1973), 235–249.
5. P. M. Gauthier et Ngo Van Que, *Problème de surjectivité des applications holomorphes*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa *27* (1973), 555–559.
6. H. Grauert, *Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen*, Math. Ann. *133* (1957), 450–472.
7. H. Grauert et H. Kerner, *Approximation von holomorphen Schnittflachen in Fäserbündeln mit homogener Faser*, Arch. Math. *14* (1963), 328–333.
8. M. Green, *Holomorphic maps into complex projective space omitting hyperplanes*, Trans. Amer. Math. Soc. *169* (1972), 89–103.
9. E. Kallin, *Polynomial convexity: the three spheres problem*, Proc. Conference on Complex Analysis, Minneapolis 1964, ed. A. Appli et al. (Springer-Verlag, New York, 1965).

Université de Montréal,
Montréal, Québec