Compositio Mathematica **124:** 219–252, 2000.

Fibrés d'intersection

(Intersection bundles)

E. MUÑOZ GARCIA
Department of Mathematics, UCLA, 405 Hilgard Ave. Los Angeles, CA 90095–1555, U.S.A. e-mail: munoz@math.ucla.edu

(Received: 20 November 1996; accepted in final form: 11 January 2000)

Abstract. Let $f: X \to S$ be a projective morphism of Noetherian schemes. We assume f purely of relative dimension d and finite Tor-dimensional. We associate to $d+1$ invertible sheaves $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}$ on X a line bundle $I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, L_{d+1})$ on S depending additively on the $\mathcal{L}_i$, commuting to 'good' base changes and which represents the integral along the fibres of f of the product of the first Chern classes of the $\mathcal{L}_i$. If $d = 0$, $I_{X/S}(\mathcal{L})$ is the norm $\mathcal{N}_{X/S}(\mathcal{L})$.

Mathematics Subject Classifications (2000). 14C17, 14C20, 14C25.

Key words. intersection, intersection bundle, Noetherian schemes, Chern classes.

Introduction

L'objet de ce travail est de construire les fibrés d'intersection dans un cadre sensiblement plus général que celui où se plaçait R. Elkik dan [Elk].

Rappelons que l'une des étapes du programme tracé par P. Deligne dans le 'Déterminant de la Cohomologie' [Del 2] est la suivante:

Si $f: X \to S$ est un morphisme projectif plat de dimension relative d de schémas noethérians et P un polynôme homogène de degré $d+1$ en les classes de Chern de fibrés vectoriels $E_1, \ldots, E_r$ sur X, construire un fibré en droites sur S 'représentant $\int_{X/S} P$'.

Le cas crucial est en fait celui où P est le produit des classes de Chern d'une famille $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}$ de fibrés en droites sur X, le cas général s'en déduisant suivant une méthode exposée [Elk] et reprise brièvement dans la partie VI du présent article. On obtient dans le cas considéré ci-dessus un fibré en droites sur S, noté $I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$ qu'on appelle fibré d'intersection relative des $(\mathcal{L})_{i\in[1,d+1]}$.

Le cas où f est lisse et où $d = 1$ avait été traité par Deligne [Del 1]. Dans [Elk] on construit ces fibrés d'intersection lorsque f est supposé Cohen–Macaulay.

Indiquons de façon très approximative le fil conducteur de cette construction pour $d \leqslant 1$.

(a) Si $d = 0$, le fibré $I_{X/S}(\mathcal{L})$ est la norme $\mathcal{N}_{X/S}(\mathcal{L})$.

(b) Si $d = 1$ et si l_1 est une section de $\mathcal{L}_1$ définissant un diviseur relatif Y fini et plat sur S on veut qu'il existe un isomorphisme canonique $< l_1 >$ de $I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ sur $I_{Y/S}(\mathcal{L}_2) = \mathcal{N}_{Y/S}(\mathcal{L}_2)$.

(c) Supposons alors $\mathcal{L}_1$ relativement ample et engendré par ses sections locales sur S, ou plus précisement, quotient de f^*V avec V fibré sur S. On dispose alors au-dessus de $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\check{V})$ d'une section 'universelle' σ_1 de $\mathcal{L}_1$ définissant le diviseur Y de $X \times_S \mathbf{P}$. Au-dessus de l'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbf{P}$ où Y est un diviseur relatif on dispose de $\mathcal{N}_{Y/\mathcal{U}}(\mathcal{L}_{2|_Y})$ qu'on 'descend' alors à S pour obtenir $I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$.

Lorsque f est seulement plat mais non nécessairement Cohen–Macaulay, il n'y a plus assez de sections relativement régulières, c'est à dire, que 'ouvert $\mathcal{U}$ n'est plus assez gros pour effectuer la descente de manière satisfaisante. On est donc amené à considérer l'ouvert au-dessus duquel Y est fini mais non nécessairement plat, de sorte que si l'on veut considérer des morphismes plats non Cohen–Macaulay on est naturellement amené à considérer des morphismes non nécessairement plats, mais seulement de Tor-dimension finie.

Cet article est, donc, essentiellement consacré à la démonstration du théorème suivant:

THÉORÈME. *Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif de* Tor-*dimension finie purement de dimension d de schémas noethériens. Soit $(\mathcal{P}ic\ is)_X$ la catégorie des fibrés inversibles sur X et des isomorphismes de fibrés inversibles. Il existe un foncteur $I_{X/S}$ de $(\mathcal{P}ic\ is)_X^{d+1}$ dans la catégorie $(\mathcal{P}ic\ is)_S$ saisfaisant aux propriétés suivantes:*

(i) *Si $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}$ sont des objects de $(\mathcal{P}ic\ is)_X$, le fibré $I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$ dépend de façon multiadditive des $\mathcal{L}_i$.*

(ii) *Pour toute permutation τ de $[1, d+1]$, il existe un isomorphisme de symétrie $\varphi_\tau : I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} I_{X/S}(\mathcal{L}_{\tau(1)}, \ldots, \mathcal{L}_{\tau(d+1)})$.*

(iii) *Le fibré $I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$ est compatible aux 'bons' changements de base (I.1.7).*

(iv) *Pour un $i \in [1, d]$ soit l_i une section régulière de $\mathcal{L}_i$ définissant un diviseur Y. Il existe un isomorphisme $I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} I_{Y/S}(\mathcal{L}_{1|_Y}, \ldots, \hat{\mathcal{L}}_i, \ldots, \mathcal{L}_{d+1|_Y})$.*

(v) *Si $d = 0$ alors $I_{X/S}(\mathcal{L}) = \mathcal{N}_{X/S}(cL)$.*

Les isomorphismes (i), (ii), (iii), (iv) sont compatibles entre eux dans un sens évident.

Revenons au cas $d = 0$. Soit donc $f : X \to S$ fini de Tor-dimension finie. Si M est un $\mathcal{O}_S$-module cohérent de tor-dimension finie et ϕ un automorphisme de M la définition de Det $\phi \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S^*)$ ne pose pas de problème. Si $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_X$fibré en droites on sait donc définir le fibré norme $\mathcal{N}_{X/S}(\mathcal{L})$ suivant une approche inspirée de E.G.A. II.6.5 et la norme $\mathcal{N}_{X/S}(l)$ d'une section locale l engendrant le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{L}$. Toutefois, nous démontrons le résultat plus riche suivant (I.2.6), du à R. Elkik, qui permet entre autres de simplifier considérablement la descente et la définition des isomorphismes de symétrie (même dans le cas Cohen–Macaulay):

Si M est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent de tor-dimension finie et ϕ un endomorphisme injectif de M, il existe un unique élément Det $\phi \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ prolongeant le déterminant de ϕ défini sur l'ouvert où M est localement libre.

Avec les notations précédentes, on sait alors définir $\mathcal{N}_{X/S}(l)$ lorsque l est seulement une section régulière de $\mathcal{L}$.

Reprenons alors le cas général ($\mathcal{L}$ quelconque) et soit $(l_1, \ldots, l_{d+1})$ une suite fortement régulière de sections des fibrés $(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$ (IV.3.2), c'est à dire, telle que pour tout i inférieur ou égal à d, le fermé défini par $(L_1, \ldots, L_i)$ est de dimension relative $d - i$ et la restriction de l_{d+1} à ce fermé est régulière. On définit alors de manière naturelle une section régulière $< l_1, \ldots, l_{d+1} >$ de $I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$ qu'il serait légitime de baptiser 'résultant' de la suite de sections $(l_1, \ldots, l_{d+1})$.

Les résultats techniques concernant les morphismes de Tor-dimension finie sont établis en 1.

Le chapitre 2 est essentiellement consacré à la construction du fibré d'intersection dans le cas de faisceaux inversibles f-amples.

Le résultat principal du chapitre II est l'existence de la descente (théorème 2.8) qui permet la définition de $I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$ dans 2.9.

Le chapitre 3 est consacré à démontrer que le fibré ainsi construit satisfait aux propriétés attendues: symétrie, additivité, trivialisations locales liées à des sections à diviseurs disjoints.

La definition du fibré d'intersection de faisceaux inversibles quelconques est donnée dans le chapitre 4 à partir du cas ample grâce aux isomorphismes d'additivité.

Dans le chapitre V nous effectuons quelques calculs sur les fibrés d'intersection. Nous établissons la formule de projection (5.2), démontrons l'invariance du. fibré d'intersection par transformation birationnelle (5.3). Dans le paragraphe 5.4 nous montrons comment la hauteur d'une variété arithmétique par rapport à un fibré ample métrisé s'interprète comme le degré d'un fibré d'intersection.

Dans le dernier paragraphe, nous construisons un fibré en droites associé à des fibrés vectoriels E_i sur X et à des entiers k_i de sonime $d + 1$ 'Incarnant l'intégrale le long des fibres de f du produit des k_i^e classes de Chern des E_i'

Ce travail n'aurait vu le jour sans l'encadrement, les conseils et les encouragements de Renée Elkik pendant la réalisation de ma Thèse à Orsay. Je l'en remarcie très chaleureusement, ainsi que pour me permettre d'inclure ici les propositions 5.3 et 5.4 qu'elle m'a signalée.

1. Preliminaires

1.1 QUELQUES REMARQUES SUR LES MORPHISMES DE Tor-DIMENSION FINIE

THÉORÈME 1.1.1. *Soient A un anneau local noethérien de profondeur* 0 *et* $\rho \colon A \longrightarrow B$ *un homomorphisme local d'anneaux locaux tel que la A-algèbre B soit* *quotient d'une A-algèbre plate noethérienne. Si M est un B-module de type fini de* Tor-*dimension finie sur A, alors M est A-plat.*

Démonstration. On peut supposer que B lui-même est plat au-dessus de A et noethérien.

Soit $q = \text{Tor-dim}_A M$. Considérons une résolution de M par des B-modules:

$$0 \to K \to L_{q-1} \to \dots \to L_1 \to L_0 \to M \to 0$$

avec L_i libre de type fini sur B pour tout $0 \leqslant i \leqslant q-1$. Alors K est un B-module de type fini plat au-dessus de A. En particulier, M admet une résolution par des B-modules de type fini plats au-dessus de A. On en déduit le théorème par récurrence sur q grâce au lemme suivant:

LEMME 1.1.2. *Sous les hypothèses du théorème 1.1.1 on considère deux B-modules P et Q de type fini, plats au-dessus de A, et un homomorphisme injectif de B-modules $\varphi\colon P \longrightarrow Q$. Soient μ l'idéal maximal de l'anneau A et $k = A/\mu$ son corps résiduel. On a:*

(i) *L'homomorphisme induit $\bar{\varphi}\colon P \otimes_A k \longrightarrow Q \otimes_A k$ est injectif.*
(ii) $\mathrm{Tor}_1^A(P/Q, k) = 0$, *donc P/Q est plat au-dessus de A.*

Démonstration. (i) Il existe un élément x dans A dont l'annulateur est l'idéal maximal μ. On a donc une suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mu \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot x} A \longrightarrow A/xA \longrightarrow 0.$$

Puisque P est A-plat, on en déduit la suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mu P \longrightarrow P \xrightarrow{\cdot x} P \longrightarrow P/xP \longrightarrow 0.$$

Soit p un élément de P dont la classe $\bar{p}$ modulo μ appartienne au noyau de $\bar{\varphi}$. Il vient que: $\varphi(p) \in \mu \cdot Q$, donc $0 = x \cdot \varphi(p) = \varphi(x \cdot p)$. On en déduit que $x \cdot p = 0$, d'où $p \in \mu P$, c'est à dire, $\bar{p} = 0$.

(ii) La nullité de $\mathrm{Tor}_A^1(P/Q, k)$ est une conséquence immédiate de la partie i précédente et la platitude de P/Q au-dessus de A résulte alors de (Bourbaki, Algèbre Commutative, Chapitre III, paragraphe 5, no 2, théorème 1).

PROPOSITION 1.1.3. *Soit $f\colon X \longrightarrow S$ un morphisme de type fini de* Tor-*dimension finie de schémas noethériens. L'ouvert de S au-dessus duquel f est plat contient tous les points associés de S.*

Preuve. C'est une conséquence directe du théorème 1.1.1.

DÉFINITION 1.1.4. Soient $f\colon X \longrightarrow S$ un morphisme projectif de Tor-dimension finie de schémas noethériens, $\mathcal{L}$ un fibré sur X et s un point de S.

On définit la caractéristique d'Euler-Poincaré relative de $\mathcal{L}$ au point $s \in S$ de la façon suivante:

Soit $\mathcal{V}$ un voisinage affine de s et soit $L^\bullet$ un complexe parfait de $\mathcal{O}_\mathcal{V}$-modules calculant universellement $R^i f_{\mathcal{V}_*} L$. On pose:

$$\chi_{X/S}\,(\mathcal{L})_s = \chi\,(L^\bullet) = \sum_i (-1)^i\ rang\ (L^i).$$

La caractéristique d'Euler–Poincaré ainsi définie est, de façon évidente, localement constante sur S et concide pour s appartenant à l'ouvert au-dessus duquel f est plat avec la définition usuelle.

DÉFINITION 1.1.5. Soit X un schéma et d un entier supérieur ou égal à 0. On dit qu'un morphisme de schémas $f\colon X \longrightarrow S$ est purement de dimension d, ou équidimensionnel de dimension d, si pour tout point $x \in X$ la dimension en x de la fibre $f^{-1}(\{f(x)\})$ est égale à d.

On notera que si X est vide, alors quelque soit $d \geqslant 0$, f est équidimensionnel de dimension d.

DÉFINITION 1.1.6.1. Soit $f\colon X \longrightarrow S$ un morphisme de schémas équidimensionnel de dimension d, projectif, de Tor-dimension finie avec S connexe. On définit le degré d'intersection relatif, noté $_{X/S}$, comme la d-ième différence pointée de l'application $\chi_{X/S}\colon (X) \longrightarrow \mathbf{Z}$, c'est à dire, si $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_d$ sont des faisceaux inversibles sur X, on pose:

$$_{X/S}\,(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_d) = \sum_{J \subset [1,d]} (-1)^{d+|J|} \chi_{X/S}\left(\bigotimes_{j \in J} \mathcal{L}_j\right).$$

Remarque 1.1.6.2. L'application $_{X/S}$ ainsi définie est d-linéaire (cf. [Elk] IV.1.2).

DÉFINITION 1.1.7. On considère encore un morphisme projectif de Tor-dimension finie de schémas noethériens $f\colon X \longrightarrow S$. Soit $\mathcal{U}$ l'ouvert de S au-dessus duquel f est plat et soit $\varphi\colon S' \longrightarrow S$ un S-schéma.

On dit que $\varphi\colon S' \longrightarrow S$ est un bon changement de base pour f si $X' = X \times_S S'$ est de Tor-dimension finie sur S' et si l'ouvert $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$ contient tous les points associés de S'.

Remarques 1.1.8.

(i) Tout changement de base plat est bon.
(ii) Si $f\colon X \longrightarrow S$ est plat, alors tout changement de base $\varphi\colon S' \longrightarrow S$ est bon.
(iii) Un bon changement de base conserve la caractéristique d'Euler–Poincaré et le degré d'intersection relatif définis ci-dessus.

PROPOSITION 1.1.9. *Sous les hypothèses de 1.1.7, si* $\mathrm{Tor}^i_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{S'}) = 0$ *pour tout* $i \geqslant 1$ *alors le changement de base* $S' \longrightarrow S$ *est bon.*

Démonstration. La question étant locale, on peut supposer que S, S' et X sont affines d'anneaux A, A' et B respectivement. Sous les hypothèses faites, une résolution projective de B reste exacte après tensorisation par A' et donc $B \otimes_A A'$ est de Tor-dimension finie au-dessus de A'.

Il suffit donc de démontrer le lemme suivant:

LEMME 1.1.9.1. *Soit $\rho\colon A \longrightarrow B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux faisant de B une A-algèbre essentiellement de type fini. Soit M un B-module de type fini et de dimension projective finie au-dessus de A. On considère un homomorphisme local d'anneaux locaux $\psi\colon A \longrightarrow A'$. On suppose que A' est de profondeur zéro. Si* $\mathrm{Tor}^i_A(M, A') = 0$ *pour tout $i \geqslant 1$ alors M est A-plat.*

Démonstration du lemme. On peut supposer que B est plat au-dessus de A.

On pose $M' = M \otimes_A A'$. On désigne par k_A (respectivement $k_{A'}$) le corps résiduel de A (respectivement de A').

Soit P une résolution projective de M. Par hypothèse, $P \otimes_A A'$ est une résolution de M' sur A', donc la dimension projective de M' sur A' est finie et par conséquence, M' est plat au-dessus de A' (d'aprés 1.1.1). On a donc:

$$0 = Tor^1_{A'}(M', k_{A'}) = H_1(P \otimes_A A' \otimes_{A'} k_{A'}) = Tor^1_A(M, k_A) \otimes_{k_A} k_{A'}$$

On en déduit $Tor^1_A(M, k_A) = 0$, d'où le résultat.

1.2. PRÉLIMINAIRES SUR LA NORME.

Dans ce qui suit nous généralisons la définition de déterminant d'un automorphisme de $\mathcal{O}_X$-module, puis celle de la norme d'un faisceau inversible suivant une approche similaire à celle de E.G.A.II.6.5.

PROPOSITION 1.2.1. *Soient S un schéma noethérien, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_S$-module cohérent de* Tor-*dimension finie, $\mathcal{U}$ l'ouvert de S au-dessus duquel $\mathcal{M}$ est localement libre,*
$\varphi\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ un endomorphisme injectif. Alors:

(1) *Il existe une unique section $Det(\varphi) \in \Gamma\ (S, \mathcal{O}_S)$ dont la restriction à $\mathcal{U}$ est le déterminant de $\varphi_{|_\mathcal{U}}$.*
(2) *La section $Det(\varphi)$ est régulière.*
(3) *Si ψ est un autre endomorphisme injectif de $\mathcal{M}$, on a* $\mathrm{Det}(\varphi \circ \psi) = \mathrm{Det}(\varphi) \cdot \mathrm{Det}(\psi)$.

On convient que si $\mathcal{M}$, et donc φ, sont nuls, $Det(\varphi) = 1$.

Démonstration. L'ouvert $\mathcal{U}$ contient tous les points associés de S. Pour tout ouvert $V \subset S$ l'application de restriction $\Gamma\ (V, \mathcal{O}_V) \longrightarrow \Gamma\ (\mathcal{U} \cap V, \mathcal{O}_{\mathcal{U}\cap V})$ est donc injective. On en déduit l'unicité dans 1 et le fait qu'il existe un plus grand ouvert de S auquel $Det\ \varphi_{|_\mathcal{U}}$ se prolonge. Pour montrer 1 on peut, donc, se réduire au cas où S est le spectre d'un anneau local noethérien de profondeur 1. De plus φ est un isomorphisme aux points associés de S (cf. 1.1.2) donc $\mathrm{Det}(\varphi)$ est une unité en ces points. On en déduit 2.

https://doi.org/10.1023/A:1026552909918 Published online by Cambridge University Press

L'assertion 3 résulte de l'unicité dans 1.

Supposons, donc, que S est le spectre d'un un anneau local noethérien A de profondeur 1 et soit M le A-module correspondant à $\mathcal{M}$. Désignons par k le corps résiduel de A. Soit $h\colon M \longrightarrow M$ un endomorphisme injectif. Le module M est de dimension projective inférieure ou égale à 1.

Considérons une résolution minimale de M

$$0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\alpha} L_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0.$$

Alors h se prolonge à un endomorphisme de la résolution minimale. Pour $i \in [0, 1]$ soient $h_i\colon L_i \longrightarrow L_i$ l'endomorphisme induit et $p\colon M \longrightarrow Q$ le conoyau de h . Le A-module Q est de dimension projective finie et A est de profondeur un, donc $Tor_2^A(Q, k) = 0$ et $Tor_1^A(h, k)$ est injectif. Comme la résolution est minimale, on a un isomorphisme $Tor_1^A(M, k) \approx L_1 \otimes_A k$ grâce auquel on peut identifier $h_1 \otimes_A k$ et $Tor_1^A(h, k)$. Il en résulte que $h_1 \otimes_A k$, et donc h, sont des isomorphismes. La section cherchée est donc

$$Det\ (h) = Det\ (h_0) \times Det\ (h_1)^{-1}.$$

Notons que si $\mathcal{M}|_{\mathcal{U}} = 0$, de sorte que $\alpha|_{\mathcal{U}}$ est un isomorphisme, on trouve bien $Deth = 1$.

PROPOSITION 1.2.2. *Soient φ (respectivement φ') un endomorphisme injectif du $\mathcal{O}_S$-module cohérent de* Tor*-dimension finie $\mathcal{M}$ (respectivement $\mathcal{M}'$) et supposons que coker φ et coker φ' sont des $\mathcal{O}_S$-modules isomorphes. Alors il existe une section $u \in \Gamma\ (S, \mathcal{O}_S^*)$ telle que det $(\varphi) = u \cdot$ det (φ')*

Démonstration. On peut encore supposer que S est le spectre d'un anneau local noethérien A de profondeur 1. Reprenons alors la démonstration de la proposition précédente. Les sections *det* (h) et *det* (h_0) diffèrent par une unité de A. De plus, comme h_1 est un isomorphisme, la suite

$$0 \longrightarrow L_0 \xrightarrow{h} L_0 \xrightarrow{p \cdot \pi} Q \longrightarrow 0$$

est exacte. Il suffit donc de montrer que si l'on a deux suites exactes

$$0 \longrightarrow L_0 \xrightarrow{h} L_0 \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow L_0' \xrightarrow{h_0'} L_0' \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

avec L_0 et L_0' libres, il existe $u \in A^*$ tel que *det* $(h_0') = u \cdot$ *det* (h_0), ce qui est clair.

PROPOSITION 1.2.3. *Les hypothèses sont celles de la proposition 1.2.1. Soit $f\colon S' \longrightarrow S$ un morphisme de schémas noethériens tel que l'ouvert $\mathcal{U}' = f^{-1}(\mathcal{U})$ contienne tous les points associés de S' et tel que $f^*\mathcal{M}$ soit de dimension projective finie.*

Si $f^*\psi$ est injectif on a: $\operatorname{Det} f^*\psi = f^*\operatorname{Det}\psi$. *En particulier,* Det *commute aux changements de base plats.*

Démonstration. En effet, ces deux éléments de $\Gamma\,(S', \mathcal{O}_{S'}^*)$ concident en tous les points associés de S'.

PROPOSITION 1.2.4. *Soit S un schéma noethérien, $g\colon Z \longrightarrow S$ un schéma fini de* Tor-dimension finie au-dessus de S, $\mathcal{U}$ l'ouvert de S au-dessus duquel Z est plat.

On peut associer à tout $\mathcal{O}_Z$ -module inversible $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_S$-module inversible $\mathcal{N}_{Z/S}\,(\mathcal{L})$ qu'on appelle norme de $\mathcal{L}$, de telle sorte que:

(1) *Le faisceau $\mathcal{N}_{Z/S}\,(\mathcal{L})_{|\mathcal{U}}$ concide avec la norme usuelle (E.G.A. II, 6.5).*
(2) *A tout isomorphisme $h\colon \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\approx} \mathcal{L}_2$ de $\mathcal{O}_Z$-modules inversibles correspond un isomorphisme:*
$\mathcal{N}_{Z/S}\,(h)\colon \mathcal{N}_{Z/S}\,(\mathcal{L}_1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{Z/S}\,(\mathcal{L}_2)$ de $\mathcal{O}_S$-faisceaux inversibles.
(3) *Si $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont deux $\mathcal{O}_Z$-modules inversibles, le fibré $\mathcal{N}_{Z/S}\,(\mathcal{L}_1 \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{L}_2)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{N}_{Z/S}\,(\mathcal{L}_1) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{N}_{Z/S}\,(\mathcal{L}_2)$.*
(4) *$\mathcal{N}_{Z/S}$ est un foncteur covariant de la catégorie des $\mathcal{O}_Z$-modules inversibles avec morphismes les homomorphismes injectifs dans la catégorie analogue sur S. En particulier, à une section régulière t d'un $\mathcal{O}_Z$-module inversible $\mathcal{L}$ est associée une section régulière $\mathcal{N}_{Z/S}\,(t)$ de $\mathcal{N}_{Z/S}\,(\mathcal{L})$ appelée norme de t.*

Construction. On considère le $\mathcal{O}_S$-module cohérent de dimension projective finie $\mathcal{M} = g_*\mathcal{O}_Z$. Le fibré $\mathcal{M}$ est localement libre sur $\mathcal{U}$ et $g_*\mathcal{L}$ est un $\mathcal{M}$-module inversible.

Le fibré $\mathcal{M}$ s'identifie canoniquement à un sous-$\mathcal{O}_X$-module de $Hom_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$, une section t de $\mathcal{M}$ au-dessus d'un ouvert W de S s'identifiant à la multiplication par cette section.

Notons $\mathcal{M}^{reg}$ (respectivement $\mathcal{O}_S^{reg}$) le faisceau des sections régulières de $\mathcal{M}$ (respectivement $\mathcal{O}_S$) et pour tout $t \in \Gamma\,(\,S, \mathcal{M}^{reg})$ notons $\mathcal{N}_{Z/S}\,(t)$ le déterminant de l'endomorphisme correspondant de $\mathcal{M}$. On obtient ainsi un morphisme multiplicatif

$$\mathcal{N}_{Z/S}\colon\ \mathcal{M}^{reg} \longrightarrow \mathcal{O}_S^{reg}$$

se restreignant en

$$\mathcal{N}_{Z/S}\colon\ \mathcal{M}^{*} \longrightarrow \mathcal{O}_S^{*}$$

On établit alors l'énoncé suivant E.G.A.II.6.5.

Remarques 1.2.5.

(1) Dans le cas où Z ne contient aucun point associé de S, $\mathcal{N}_{Z/S}\,(\mathcal{L})$ est canoniquement trivial.

(2) Les modules $g_*\mathcal{L}$ et $g_*\mathcal{O}_Z$ étant de dimension projective finie sur $\mathcal{O}_S$, les fibrés $\mathrm{Det}(g_*\mathcal{L})$ et $\mathrm{Det}\,(g_*\mathcal{O}_Z)$ sont définis (cf. [Knu-Mum]). On a un isomorphisme canonique:

$$\beta\colon\ \mathcal{N}_{Z/S}\,(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Det}\,(g_*\mathcal{L}) \otimes \mathrm{Det}\,(g_*\mathcal{O}_Z)^{-1}$$

tel que avec $t \in \Gamma\,(g^{-1}(V), \mathcal{L})$ génératrice, on ait:

$$\beta\,(\mathcal{N}_{Z/S}\,(t)) = \mathrm{Det}\,(t).$$

PROPOSITION 1.2.6. *Soient $X \longrightarrow S$ un morphisme projectif, de* Tor*-dimension finie, équidimensionnel de dimension* 1*, $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux $\mathcal{O}_X$-modules inversibles, s_1 et s_2 des sections régulières de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ respectivement définissant des sous-schémas fermés Z_1 et Z_2 de X qu'on suppose finis sur S. On suppose en outre que la suite (s_1, s_2) est régulière, c'est à dire, $s_{1|_{Z_2}}$ et $s_{2|_{Z_1}}$ sont des sections régulières. Alors il existe un unique isomorphisme*

$$\alpha\colon\ \mathcal{N}_{Z_1/S}(\mathcal{L}_{2|_{Z_1}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{Z_2/S}(\mathcal{L}_{1|_{Z_2}})$$

tel que

$$\alpha\big(\mathcal{N}_{Z_1/S}(s_2)\big) = \mathcal{N}_{Z_2/S}(s_1).$$

Démonstration. L'unicité d'un tel α est claire puisque $\mathcal{N}_{Z_1/S}(s_2)$ est régulière. Il suffit donc de construire α localement. On peut alors supposer que $\mathcal{L}_{1|_{Z_2}}$ (respectivement $\mathcal{L}_{2|_{Z_1}}$) est un $\mathcal{O}_{Z_2}$ (respectivement un $\mathcal{O}_{Z_1}$) module libre de rang 1. La proposition résulte alors de 1.2.2.

PROPOSITION 1.2.7. *On se place sous les hypothèses de 1.2.4. Soit $\psi\colon S' \longrightarrow S$ un morphisme de schémas noethériens 'bon' pour g au sens de 1.1.7. Posons $Z' = Z \times_S S'$ et considérons le diagramme cartésien:*

$$\begin{array}{ccc} Z' & \longrightarrow & Z \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ S' & \xrightarrow{\psi} & S \end{array}$$

Pour tout fibré en droites $\mathcal{L}$ sur Z il existe un isomorphisme canonique:

$$\mathcal{N}_{Z'/S'}\,(g^*\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} g^*\,\mathcal{N}_{Z/S}\,(\mathcal{L}).$$

Preuve. Cela résulte de la construction 1.2.4 et de la proposition 1.2.3.

PROPOSITION 1.2.8. *Si* $0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$ *est une suite exacte de* $\mathcal{O}_S$*-modules cohérents de* Tor*-dimension finie et*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}' & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle u'}\downarrow & & {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle u''}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}' & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un diagramme commutatif d'endomorphismes injectifs on a

$$Det\ (u) = Det\ (u') \times Det\ (u'')$$

Démonstration. C'est vrai aux points associés.

PROPOSITION 1.2.9. *Soient* $S' \longrightarrow S$ *et* $Z \longrightarrow S'$ *des morphismes finis de* Tor*-dimension finie et* $\mathcal{L}$ *un* $\mathcal{O}_Z$*-module inversible. Alors il existe un isomorphisme de* $\mathcal{O}_S$*-modules:*

$$\varphi : \mathcal{N}_{S'/S}(\mathcal{N}_{Z/S'}(\mathcal{L})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{Z/S}\ (\mathcal{L})$$

tel que pour toute section régulière l *de* $\mathcal{L}$ *on ait:*

$$\varphi : \mathcal{N}_{S'/S}(\mathcal{N}_{Z/S'}(l)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{Z/S}\ (l).$$

Démonstration. Au-dessus des points associés de S, S' est plat et de profondeur zéro, et Z est S'-plat. Si s est une section régulière de $\mathcal{O}_Z$, les sections régulières $Det_{Z/S}\ (s)$ et $Det_{S'/S}(Det_{Z/S'}\ (s))$ sont donc égales, puisqu'elles coïncident aux points associés. L'énoncé résulte alors de la Construction 1.2.4.

1.3. PRÉLIMINAIRES SUR LES SUITES RÉGULIÈRES

1.3.1. *Sections régulières*

Soient $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel sur un schéma noethérien X et $s : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{F}$ une section de $\mathcal{F}$.

Dans la suite on désignera par $Z(s)$ le sous-schéma des zéros de la section s, c'est à dire, le sous-schéma fermé défini par l'idéal $Im(\check{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{O}_X)$.

On notera $K.(s)$ le complexe de Koszul augmenté:

$$K.(s) : \ldots \bigwedge^{p+1} \check{\mathcal{F}} \to \bigwedge^{p} \check{\mathcal{F}} \to \ldots \to \check{\mathcal{F}} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{Z(s)} \to 0.$$

DÉFINITION. On dit que la section s est régulière si le complexe de Koszul de s est exact, c'est à dire, si en tout point x de $Z(s)$, l'image d'une base locale de $\check{\mathcal{F}}$ est une suite régulière de l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$.

https://doi.org/10.1023/A:1026552909918 Published online by Cambridge University Press

NOTATIONS 1.3.2. Soit $n \in N$ et soient $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ des fibrés vectoriels sur X munis de sections $s_i \colon \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{F}_i$. Dans la suite on désignera par $Z(s_1, \ldots, s_n)$ le fermé $\bigcap_{i=1}^n Z(s_i)$.

1.3.3. Soient X un schéma noethérien et d un entier. Pour tout $i \in [1, n]$ soit $\mathcal{L}_i$ un fibré inversible sur X muni d'une section l_i.

DÉFINITION. On dit que la suite de sections $(l_1, \ldots, l_n)$ est régulière si la section $\oplus_{i=1}^n l_i$ du fibré $\oplus_{i=1}^n \mathcal{L}_i$ est régulière.

En particulier, la régularité de la suite $(l_1, \ldots, l_n)$ est indépendante de l'ordre des termes.

Remarque 1.3.4. Notons Z_i le fermé $Z(l_1, \ldots, l_i)$ et supposons que la suite de sections $(l_1, \ldots, l_n)$ vérifie la condition suivante:

L'homomorphisme $l_1 \colon \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L}_1$ est injectif et pour tout $i \in [2, n]$ l'homomorphisme $l_i \colon \mathcal{O}_{Z_{i-1}} \longrightarrow \mathcal{L}_{i|_{Z_{i-1}}}$ est injectif.

Alors la suite $(l_1, \ldots, l_n)$ est régulière dans le sens de 1.3.3, mais la réciproque est fausse en général.

Les suites de sections universelles considérées dans 2.2 et 2.3 seront régulières dans ce sens 'fort'.

2. Construction du fibré d'intersection

Dans ce chapitre on construit le fibré d'intersection de faisceaux inversibles 'suffisamment' amples. Ensuite on démontre les propriétés d'additivité et symétrie satisfaites par le fibré d'intersection.

2.1. Soient d un entier supérieur ou égal à zéro et $f \colon X \longrightarrow S$ un morphisme projectif purement de dimension d de schémas noethériens.

DÉFINITION. On appelle présentation d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$, un couple (V, φ) où V est un S-fibré et $\varphi \colon f^*V \longrightarrow \mathcal{L}$ est un homomorphisme surjectif. On dit encore que V engendre $\mathcal{L}$.

DÉFINITION. On dit que $\mathcal{L}$ sur X est f-suffisamment ample (suivant [Elk]), abrégé par f.s.a., s'il est f-ample et admet une présentation.

2.2. Dans ce paragraphe nous considérons seulement des fibrés sur X engendrés par un fibré vectoriel sur S, sans hypothèse d'amplitude relative.

Soient $f \colon X \longrightarrow S$ un morphisme projectif de schémas noethériens, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X muni d'une présentation (V, φ). Soient $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\check{V})$ et $\xi = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ le

https://doi.org/10.1023/A:1026552909918 Published online by Cambridge University Press

fibré canonique sur $\mathbf{P}$ et considérons le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathbf{P}} & \xrightarrow{\pi_X} & X \\ {\scriptstyle f_{\mathbf{P}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbf{P} & \xrightarrow{\pi} & S \end{array}$$

Sur $X_{\mathbf{P}}$ on considère l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{X_{\mathbf{P}}}$-faisceaux $f_{\mathbf{P}}^*(\check{\xi}) \longrightarrow f_{\mathbf{P}}^*(V)$ déduit de l'injecton canonique $\check{\xi} \longrightarrow V$ et l'homomorphisme $f_{\mathbf{P}}^*(V) \longrightarrow \pi_X^*(\mathcal{L})$ déduit de la surjection $\varphi\colon f^*V \longrightarrow \mathcal{L}$. On déduit par composition une section σ de $\pi_X^*\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\mathbf{P}}}} f_{\mathbf{P}}^*\xi$.

Désormais, on notera simplement par $\mathcal{L} \otimes \xi$ le $\mathcal{O}_{X_{\mathbf{P}}}$-fibré $\pi_X^*\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\mathbf{P}}}} f_{\mathbf{P}}^*\xi$.

PROPOSITION. *La section σ est une section régulière de $\mathcal{L} \otimes \xi$, c'est à dire, l'homomorphisme $\sigma\colon \mathcal{O}_{X_{\mathbf{P}}} \longrightarrow \mathcal{L} \otimes \xi$ est injectif.*

Démonstration. Supposons d'abord que X est un schéma intègre. Comme $X_{\mathbf{P}}$ est intègre, l'homomorphisme σ est injectif ou nul.

On note par $\kappa(s)$ le corps résiduel d'un point $s \in S$.

En tout point $s \in S$, il existe $v \in V \otimes_{\mathcal{O}_S} \kappa(s)$ tel que $0 \neq \varphi(v) \in H^0(X \times_S \kappa(s), \mathcal{L})$. Soit p le point de $\mathbf{P} \times_S \kappa(s)$ correspondant à la droite engendrée par v. La restriction à la fibre en p de l'image de σ s'identifie au sous-faisceau de $\mathcal{L}_{|X_S}$ engendré par $\varphi(v)$, donc σ n'est pas nulle.

Cas général: Soient $\eta_1, \ldots, \eta_r$ les points associés de X et $Y_1, \ldots, Y_r$ leur adhérences schématiques. Les points associés de $X_{\mathbf{P}}$ sont alors $(\eta_1)_{\mathbf{P}}, \ldots, (\eta_r)_{\mathbf{P}}$, points génériques de $Y_1 \times_S \mathbf{P}, \cdots, Y_r \times_S \mathbf{P}$. Il suffit de montrer que pour tout $j \in [1, r]$ l'application

$$\sigma\colon \mathcal{O}_{X_{\mathbf{P}},(\eta_j)_{\mathbf{P}}} \longrightarrow (\mathcal{L} \otimes \xi)_{(\eta_j)_{\mathbf{P}}}$$

est injective, ce qui résulte du fait que l'application induite sur les fibres:

$$\kappa\Big((\eta_j)_{\mathbf{P}}\Big) \longrightarrow \mathcal{L} \otimes \xi \otimes \kappa\Big((\eta_j)_{\mathbf{P}}\Big)$$

est injective, c'est à dire, un isomorphisme de $\kappa\Big((\eta_j)_{\mathbf{P}}\Big)$-espaces vectoriels de rang 1.

Cela revient à remplacer X par Y_i, c'est à dire, on se ramène au cas intègre.

2.3. Soit $f\colon X \longrightarrow S$ un morphisme projectif purement de dimension d de schémas noethériens. Soit n un entier, avec $1 \leqslant n \leqslant d$, et soient $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ des faisceaux inversibles sur X engendrés par des fibrés $V_1, \ldots, V_n$ sur S (pour chaque $i \in [1, n]$ on se donne une surjection $\varphi_i\colon f^*V_i \to \mathcal{L}_i \to 0$).

On pose $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(\check{V}_i)$ et on note par $\pi_i\colon \mathbf{P}_i \to S$ le morphisme structurel pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Soient $\xi_i = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_i}(1)$ le fibré canonique sur $\mathbf{P}_i$, σ_i la section marquée de $\mathcal{L}_i \otimes \xi_i$.

Pour tout $i \in [1, n]$, soient $Q_i = \prod_{j=1}^{i} \mathbf{P}_j$, $\mathbf{P} = Q_n$ et $Z_i = Z(\sigma_1, \ldots, \sigma_i) \hookrightarrow X \times_s Q_i$ le fermé des zéros de $(\sigma_1, \ldots, \sigma_i)$.

https://doi.org/10.1023/A:1026552909918 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 2.3.1. *La suite de sections* $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *est régulière sur* $X_{\mathbf{P}}$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. Supposons que $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$ est une suite régulière de sections sur $X_{\mathcal{Q}_{n-1}}$. Elle l'est aussi après le changement de base plat $\mathbf{P} \longrightarrow \mathcal{Q}_{n-1}$, c'est à dire, sur $X_{\mathbf{P}}$. De plus, il en résulte de la proposition 2.2 que σ_n est régulière sur $Z_{n-1} \times_S \mathbf{P}_n = Z_{n-1} \times_{\mathcal{Q}_{n-1}} \mathbf{P}$.

Remarque. 2.3.2. Pour tout changement de base $S' \longrightarrow S$ la suite $(\sigma'_1, \ldots, \sigma'_n)$ au-dessus de $X_{\mathbf{P}} \times_S S'$ est régulière.

Remarque. 2.3.3. Soit $g\colon X' \longrightarrow X$ un S-morphisme. La suite induite par $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ sur $X'_{\mathbf{P}}$ est encore régulière (car V_i engendre $g^*\mathcal{L}_i$). En particulier, comme $X_{\mathbf{P}} \longrightarrow X$ est plat, cette remarque se traduit aussi par:

La suite $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ est régulière au-dessus de $X_{\mathbf{P}}$ relativement à X, et le schéma Z_n est donc plat sur X.

2.4. Supposons maintenant que les fibrés $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ sont f-suffisamment amples. Soient S^0 l'ouvert de S au-dessus duquel X est plat et $\pi\colon \mathbf{P} \longrightarrow S$ le morphisme canonique.

On considère l'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbf{P}$ au-dessus duquel Z_n est $f_{\mathbf{P}}$-plat. On note $\mathcal{V}$ l'ouvert de $\mathbf{P}$ au-dessus duquel Z_n est de dimension relative $d-n$.

PROPOSITION 2.4.1.

(i) *Pour tout* $s \in S^0$, *l'intersection de* $\mathcal{U}$ *avec la fibre* $\pi^{-1}(s)$ *est un ouvert dense de* $\mathbf{P} \times_S \kappa(s)$.

(ii) *Pour tout* $s \in S$, *l'intersection du complémentaire de* $\mathcal{V}$ *avec la fibre* $\pi^{-1}(s)$ *est un fermé de* $\mathbf{P} \times_S \kappa(s)$ *de codimension supérieure ou égale à* $d-n+2$.

Preuve.

(i) En effet, soit η_s le point générique de $\pi^{-1}(s)$. D'après la proposition précédente et la remarque 2.3.2, la suite $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ est régulière sur $X_{\mathbf{P}} \times_S \kappa(s)$, donc régulière sur $X_{\mathbf{P}} \times_{\mathbf{P}} \kappa(\eta_s)$.
Or $X_{\mathbf{P}} \times_S S^0$ est plat sur $\mathbf{P} \times_S S^0$, donc $\mathcal{U}$ contient η_s.

(ii) On peut supposer que S est un corps.
On raisonne par récurrence sur n. On montre le cas $n=1$ grâce au lemme suivant (cf. [Elk] 1.2.5.a):

LEMME 2.4.2. *Soient* $g\colon Y \longrightarrow k$ *un schéma projectif sur un corps* k, *purement de dimension* d, $\mathcal{L}$ *un* $\mathcal{O}_Y$*-fibré inversible ample et* V *un espace vectoriel muni d'une surjection* $\varphi\colon g^*V \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$.

Alors $\dim_k V \geqslant d+1$.

Démonstration du lemme. Si $d > 0$, comme $\mathcal{L}$ est ample, une section de $\mathcal{L}$ ne peut être partout non nulle et définit donc un fermé de dimension au moins $d-1$. L'énoncé en résulte par récurrence sur d.

2.4.3. Soient $X_1, \ldots, X_r$ les composantes irréductibles réduites de X. Pour $i \in [1, r]$ soit η_i le point générique de X_i et soit $W_i = Ker(\varphi_i)$, où $\varphi_i \colon V \longrightarrow H^0\,(\,X_i,\ \mathcal{L}_{|_{X_i}})$ est induite par la restriction de la surjection φ à X_i.

D'après le lemme 2.4.2, la codimension de W_i est supérieure ou égale à $d+1$, car le quotient V/W_i engendre encore $\mathcal{L}_{|_{X_i}}$. De chaque surjection $\check{V} \longrightarrow \check{W}_i$ on déduit une immersion fermée $\mathbf{P}(\check{W}_i) \hookrightarrow \mathbf{P}(\check{V})$.

Or un élément de V définit une section s_i de $\mathcal{L}_{|_{X_i}}$ telle que dim $(Z(s_i)) = d-1$ si et seulement si $0 \neq s_i(\eta_i) \in \kappa(\eta_i)$, c'est à dire, $\mathcal{V} = \mathbf{P}(\check{V}) - \bigcup_{i-1}^{r} \mathbf{P}(\check{W}_i)$.

CAS GÉNÉRAL 2.4.4. Soit $\mathcal{V}_{n-1}$ l'ouvert au-dessus duquel la dimension de Z_{n-1} sur $\mathcal{Q}_{n-1}$ est $d-n+1$. Par hypothèse de récurrence, le complémentaire de $\mathcal{V}_{n-1}$ dans $\mathcal{Q}_{n-1}$ est un fermé de codimension au moins $d-(n-1)+2 = d-n+3$.

On a un diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V} \arrow[r] & \mathbf{P}_n \times \mathcal{V}_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & \mathbf{P}_n \times \mathcal{Q}_{n-1} \arrow[d, "\delta"'] \\
& \mathcal{V}_{n-1} \arrow[r] & \mathcal{Q}_{n-1}
\end{tikzcd}$$

où le morphisme δ est la projection.

Soit $v \in \mathcal{V}_{n-1}$ et soit w dans $^{-1}(v) = \mathbf{P}_n \times_S \kappa(v)$. Alors, $w \in \mathcal{V}$ si et seulement si la section σ_n de $\mathcal{L}_{|_{Z_{n-1}}} \times_S \kappa(v)$ est telle que dim $(Z\,(\sigma_n)) = d-(n-1)-1 = d-n$, c'est à dire, si w appartient au complémentaire d'un fermé dans $\mathbf{P}_n$ de codimension au moins dim $(Z_{n-1})_v + 1 = d-(n-1)+1 = d-n+2$.

2.5. Reprenons les notations de 2.3 avec $n = d \geqslant 1$ et supposons en outre que les fibrés $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_d$ sont f-suffisamment amples et que $f \colon X \longrightarrow S$ est de Tor-dimension finie. D'après la proposition 2.3.1 on a un diagramme:

$$\begin{tikzcd}
Z_{\mathcal{U}} \arrow[r] \arrow[d] & Z_{\mathcal{V}} \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] & \\
X_{\mathcal{U}} \arrow[r] \arrow[d, "f_{\mathcal{U}}"'] & X_{\mathcal{V}} \arrow[r] \arrow[d, "f_{\mathcal{V}}"'] & X_{\mathbf{P}} \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "f_{\mathbf{P}}"'] & X \arrow[d, "f"'] \\
\mathcal{U} \arrow[r] & \mathcal{V} \arrow[r] & \mathbf{P} \arrow[r, "\pi"] & S
\end{tikzcd}$$

dans lequel tous les carrés sont cartésiens.

Par définition de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, $Z_{\mathcal{U}}$ est fini et plat sur $\mathcal{U}$ (cf. 1.1.1) et $Z_{\mathcal{V}}$ est fini sur $\mathcal{V}$ et d'après 2.4, le complémentaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathbf{P}$ est de codimension 2 dans chaque fibre de π. De plus, $Z_{\mathcal{V}}$ est de Tor-dimension finie sur $\mathcal{V}$, car défini par la suite régulière $(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$. Soit alors $\mathcal{L}_{d+1}$ un $\mathcal{O}_X$-faisceau inversible quelconque. Grâce à la proposition 1.2.4, on peut définir la norme de $Z_{\mathcal{V}}$ sur S du fibré $\mathcal{L}_{d+1|_{Z_{\mathcal{V}}}}$.

2.5.1. On pose:

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{Z_{\mathcal{V}}/\mathcal{V}}\Big(\mathcal{L}_{d+1|_{Z_{\mathcal{V}}}}\Big)$$

Avant de 'descendre' $\mathcal{N}$ à S, notons le lemme suivant qui sera utilisé de nombreuses fois (quelques fois tacitement) dans la suite.

LEMME 2.5.2. *Soit $\mathcal{W}$ un S-schéma plat et $\psi\colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{V}$ un S-morphisme. Supposons que la suite $\big(\psi^{-1}(\sigma_1), \ldots, \psi^{-1}(\sigma_d)\big)$ de sections des fibrés $\psi^*(\mathcal{L}_1 \otimes \xi_1), \ldots, \psi^*(\mathcal{L}_d \otimes \xi_d)$ soit régulière sur $X_{\mathcal{W}}$. Alors le changement de base ψ est bon pour Z.*

Démonstration. En effet, comme $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont plats au-dessus de S, on a:

$$\mathsf{Tor}\,{}^i_{\mathcal{V}}\big(\mathcal{O}_{X_{\mathcal{V}}}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}}\big) = \mathsf{Tor}\,{}^i_S(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{\mathcal{W}}) = 0$$

pour tout $i \geqslant 1$, et la résolution $K.(\sigma)$ du $\mathcal{O}_{X_{\mathcal{V}}}$-module $\mathcal{O}_{Z_{\mathcal{V}}}$ restant exacte après tensorisation par $\mathcal{W}$, on a aussi:

$$\mathsf{Tor}\,{}^i_{\mathcal{V}}\big(\mathcal{O}_{Z_{\mathcal{V}}}, \mathcal{O}_{\mathcal{W}}\big) = 0$$

pour tout $i \geqslant 1$.

Le résultat est alors conséquence de .1.9.1.

2.6. Soit $\mathbf{P} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i \xrightarrow{\pi} S$ un produit de fibrés projectifs sur un schéma S, F un fermé de $\mathbf{P}$ tel que pour tout $s \in S$, on ait dim $(\mathbf{P}_s)$ – dim $(F_s) \geqslant 2$.

Soient $\mathcal{V}$ l'ouvert complémentaire de F dans $\mathbf{P}$ et ξ_i le fibré canonique sur $\mathbf{P}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

DÉFINITION. *On dit qu'un fibré en droites $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{V}$ se descend à S à ξ-torsion près, s'il existe des fonctions r_i localement constantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, un fibré A sur S et un isomrphisme de fibrés sur $\mathcal{V}$:*

$$\lambda\colon\ \mathcal{N} \xrightarrow{\sim} \pi^* A \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \xi_i^{r_i}\right).$$

(cf. [Elk] 1.2.5).

LEMME 2.7.

(a) *Quels que soient les fibrés inversibles A et A' sur S, on a:*

$$Hom_S(A, A') \approx Hom_{\mathbf{P}}(\pi^* A, \pi^* A') \approx Hom_{\mathcal{V}}(\pi^* A, \pi^* A').$$

(b) *Si $\mathcal{N}$ se descend à S à ξ-torsion près, les entiers r_i sont uniquement déterminés et A est déterminé à isomorphisme unique près par λ.*

(c) *Supposons qu'on ait pour tout $s \in S$,* $\dim(\mathbf{P}_s) - \dim(F_s) \geqslant 3$. *Alors tout fibré inversible sur $\mathcal{V}$ se descend à S à ξ-torsion près (cf. S.G.A. 1962, chap. 11.4.9).*

THÉORÈME 2.8. *Le fibré $\mathcal{N}$ défini en 2.5.1 se descend à S à ξ-torsion près.*

Démonstration. Soit Ω l'ouvert de $\mathbf{P}_1 \times_S \ldots \times_S \mathbf{P}_{d-1}$ au-dessus duquel le fermé des zéros des sections $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{d-1})$ est de dimension relative 1.

D'après le lemme 2.7.a et 2.7.c et 2.4.ii, il suffit de montrer que le fibré $\mathcal{N}$ se descend à Ω à ξ_d-torsion près. Il suffit, donc, de démontrer la proposition suivante:

PROPOSITION 2.8.1. *Le théorème est vérifié si $d = 1$.*

Preuve. On peut supposer que $\mathcal{L}_2$ est f-suffisamment ample, muni d'une présentation (ψ_2, V_2) grâce à la multiplicativité des normes.

2.8.2. Pour $i \in [1, 2]$ soit $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(\check{V}_i)$ le fibré projectif associé à V_i. On désigne par Ω_i l'ouvert de $\mathbf{P}_i$ au-dessus duquel Z_i est fini.

On dispose d'un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Omega_1 \times \Omega_2 \arrow[r] \arrow[d] & p_1^{-1}(\Omega_1) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_1 \arrow[d] \\
p_2^{-1}(\Omega_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & \mathbf{P}_1 \\
\Omega_2 \arrow[r] & \mathbf{P}_2 &
\end{tikzcd}$$

Au-dessus de $\Omega_1 \times \Omega_2$ on a:

$$\begin{tikzcd}
Z_1 \cap Z_2 \arrow[r] \arrow[d] & Z_1 \arrow[d] \\
Z_2 \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

On considère les fibrés $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_{Z_1/\Omega_1}(\mathcal{L}_2 \otimes \xi_2)$ sur $p_1^{-1}(\Omega_1)$ et $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_{Z_2/\Omega_2}(\mathcal{L}_1 \otimes \xi_1)$ sur $p_1^{-1}(\Omega_2)$ munis des sections régulières respectives $\mathcal{N}_1(\sigma_2)$ et $\mathcal{N}_2(\sigma_1)$.

Grâce à 1.2.6 on dispose d'un isomorphisme de $\mathcal{N}_{1|_{\Omega_1 \times \Omega_2}}$ sur $\mathcal{N}_{2|_{\Omega_1 \times \Omega_2}}$ envoyant $\mathcal{N}_1(\sigma_2)$ sur $\mathcal{N}_2(\sigma_1)$. On peut ainsi recoller les fibrés $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ pour obtenir un faisceau $\mathcal{N}$ au-dessus de $p_1^{-1}(\Omega_1) \cup p_2^{-1}(\Omega_2)$ qui se descend à S à ξ-torsion près car le complémentaire de $p_1^{-1}(\Omega_1) \cup p_2^{-1}(\Omega_2)$ dans chaque fibre de $\mathbf{P}_1 \times_S \mathbf{P}_2$ sur S est de codimension supérieure ou égale à 4 (cf. 2.7.c). On en déduit que $\mathcal{N}_{Z_1/\Omega_1}\left(\mathcal{L}_{2|_{Z_1}}\right)$

se descend à S à ξ_1-torsion près, puisque

$$\mathcal{N}_1 = p_1^*\Big(\mathcal{N}_{Z_1/\Omega_1}\Big(\mathcal{L}_{2|_{Z_1}}\Big)\Big) \otimes \xi_2^{r_2}$$

pour un certain $r_2 \in \mathbb{Z}$.

2.9. On note provisoirement par J le faisceau inversible sur S d ont le théorème 2.8 affirme l'existence.

PROPOSITION 2.9.1. *Le fibré J est uniquement déterminé par les fibrés $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{d+1}$ sur S, c'est à dire, ne dépend pas du choix des S-fibrés V_i.*

Plus précisement, appelons présentation de $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d$ une famille $\mathbf{V} = (V_i, \varphi_i)_{i \in [1,d]}$ où (V_i, φ_i) est une présentation de $\mathcal{L}_i$. Pour toute présentation $\mathbf{V}$, on construit un fibré inversible $J_{\mathbf{V}}$ sur S comme ci-dessus, muni d'un isomorphisme

$$\gamma_{\mathbf{V}} : \pi^* J_{\mathbf{V}} \otimes \bigotimes_{i=1}^{d} \xi_i^{r_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{\mathbf{V}}$$

(on écrira simplement $\gamma_{\mathbf{V}} : \pi^* J_{\mathbf{V}} \otimes \xi \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{\mathbf{V}}$.)
Alors:

(i) Quelles que soient les présentations $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$, il existe un isomorphisme canonique $\theta_{\mathbf{V},\mathbf{V}'} : J_{\mathbf{V}} \xrightarrow{\sim} J_{\mathbf{V}'}$.
(ii) Pour toute présentation $\mathbf{V}$ on a: $\theta_{\mathbf{V},\mathbf{V}} = id$.
(iii) Quelles que soient les présentations $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}'$ et $\mathbf{V}''$ on a: $\theta_{\mathbf{V}',\mathbf{V}''} \circ \theta_{\mathbf{V},\mathbf{V}'} = \theta_{\mathbf{V},\mathbf{V}''}$.

Démonstration. (i) Considérons la présentation $\mathbf{W} = (W_i = V_i \oplus V_i', \varphi_i \oplus \varphi_i')$. La construction précédente avec la présentation $\mathbf{W}$ conduit à un diagramme:

$$\begin{array}{ccccccc}
Z_{\mathbf{W}} & \longrightarrow & X_{\mathcal{V}_{\mathbf{W}}} & \longrightarrow & X_{\mathbf{P}_{\mathbf{W}}} & \longrightarrow & X \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\
 & & \mathcal{V}_{\mathbf{W}} & \longrightarrow & \mathbf{P}_{\mathbf{W}} & \longrightarrow & S
\end{array}$$

où $\mathbf{P}_{\mathbf{W}} = \prod_{i=1}^{d} \mathbf{P}(V_i \oplus V_i')^{\vee} = \prod_{i=1}^{d} \mathbf{P}_{\mathbf{W}_i}$.

Comme V_i est un facteur direct de W_i, il existe une immersion $j : \mathbf{P}_{\mathbf{V}} \hookrightarrow \mathbf{P}_{\mathbf{W}}$ et des isomorphismes $j^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_{\mathbf{W}_i}}(1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}_i}(1)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$.

On en déduit que $\mathcal{V} = j^{-1}(\mathcal{V}_{\mathbf{W}})$, $Z = j^{-1}(Z_{\mathbf{W}})$ et d'après I.2.7 un isomorphisme:

$$\beta : \mathcal{N} \xrightarrow{\sim} j^* \mathcal{N}_{\mathbf{W}}$$

donc un isomorphisme α de $J_{\mathbf{V}}$ sur $J_{\mathbf{W}}$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \pi^* J_{\mathbf{V}} \otimes \xi & \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{V}}} & \mathcal{N} \\ {\scriptstyle \pi^*\alpha\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ \pi^* J_{\mathbf{W}} \otimes \xi & \xrightarrow{\gamma_{\mathbf{V}}} & j^*\mathcal{N}_{\mathbf{W}} \end{array}$$

On obtient de façon symétrique $\alpha' : J_{\mathbf{V}'} \xrightarrow{\sim} J_{\mathbf{W}}$ et on prend $\theta_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} = \alpha'^{-1} \circ \alpha$.

(ii) Supposons $\mathbf{V} = \mathbf{V}'$ et soit $A^1_S = \ Spec\ \mathcal{O}_S[T] \xrightarrow{h} S$ la droite affine sur S. A la surjection

$$\check{W} = \check{V} \oplus \check{V} \longrightarrow \check{V}$$
$$(x, y) \longrightarrow T \cdot x + (1 - T) \cdot y$$

correspond une immersion

$$j_T : \mathbf{P}_V \times A^1_S \longrightarrow \mathbf{P}_W \times A^1_S$$

telle que $j_1 = j$, $j_0 = j'$ (on conserve les notations de (i)) On en déduit un isomorphisme $\alpha_T : h^* J_{\mathbf{V}'} \xrightarrow{\sim} h^* J_{\mathbf{W}}$ tel que $\alpha_1 = \alpha$ et $\alpha' = \alpha_0$. Comme α_T est nécessairement indépendant de T, ie, provient de S, on a $\theta_{V,V} = Id$.

(iii) Aux inclusions canoniques de $\mathbf{V}$, (respectivement $\mathbf{V}'$, respectivement $\mathbf{V}''$) dans $\Omega = \mathbf{V} \oplus \mathbf{V}' \oplus \mathbf{V}''$ correspondent des isomorphismes

$$\beta : J_{\mathbf{V}} \xrightarrow{\sim} J_\Omega$$
$$\beta' : J_{\mathbf{V}'} \xrightarrow{\sim} J_\Omega$$
$$\beta'' : J_{\mathbf{V}''} \xrightarrow{\sim} J_\Omega$$

et on vérifie aisément que l'on a $\theta_{\mathbf{V},\mathbf{V}'} = \beta'^{-1} \circ \beta$, $\theta_{\mathbf{V}',\mathbf{V}''} = \beta''^{-1} \circ \beta'$ et $\theta_{\mathbf{V},\mathbf{V}''} = \beta''^{-1} \circ \beta$, d'où le résultat.

DÉFINITION 2.9.2. Avec les hypothèses et les notations de 2.8, on appelle faisceau d'intersection des faisceaux $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}$ relativement à S le faisceau J défini dans 2.8. On le notera $I_{X/S}\ (\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$.

Lorsque $d = 0$ on posera simplement $I_{X/S}\ (\mathcal{L}_1) = \mathcal{N}_{X/S}\ (\mathcal{L}_1)$.

3. Propriétés du faisceau d'intersection

Dans cette partie nous étudions les propriétés des fibrés d'intersection et définissons de nombreux isomorphismes 'canoniques' mettant en jeu ces fibrés. Nous les construisons le plus souvent en revenant à la définition du faisceau d'intersection, donc après avoir choisi des présentations. On devrait ensuite vérifier que les isomorphismes construits sont indépendants de ce choix, c'est à dire, qu'ils commutent aux $\theta_{\mathbf{V},\mathbf{V}'}$ de 2.9.1. Étant donnée la définition de $\theta_{\mathbf{V},\mathbf{V}'}$, il suffit de vérifier qu'ils commutent aux $\alpha_{\mathbf{V}}$ introduits dans la démonstration de *loc.cit*. En général cette vérification (purement formelle) est omise.

3.1. CHANGEMENTS DE BASE

La formation du faisceau d'intersection $I_{X/S}\,(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$ commute aux changements de base $\varphi\colon S' \longrightarrow S$ bons pour f dans le sens de 1.1.7.

Cela résulte de 2.4.1.i.

3.2. RESTRICTION À DES DIVISEURS. TRIVIALISATIONS LOCALES

On reprend les notations de 2 et la construction de $I_{X/S}$.

DÉFINITION 3.2.1. Soient $n \leqslant d$ un entier, $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ des faisceaux inversibles sur X, et pour tout $i \in [1, n]$ soit f_i une section de $\mathcal{F}_i$. On dit que la suite de sections $(f_1, \ldots, f_n)$ est très régulière si elle est régulière et si le fermé qu'elle définit est purement de dimension relative $d - n$ sur S

Soit alors $H = \{i_1, \ldots, i_n\}$ un sous-ensemble de $[1, d]$ et pour tout $h \in H$ soit l_h une section de $\mathcal{L}_h$, de telle sorte que la suite de sections $(l_{i_1}, \ldots, l_{i_n})$ soit très régulière. On note Y le fermé qu'elle définit et $J = \{j_1, \ldots, j_k$ le complémentaire de H dans $[1, d]$. On se propose de construire un isomorphisme de $I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$ sur $I_{Y/S}\big(\mathcal{L}_{j_1}, \ldots, \mathcal{L}_{j_k}, \mathcal{L}_{d+1}\big)$.

Quitte à remplacer V_h par $V_h \oplus \mathcal{O}_s$, on peut supposer que pour tout $h \in H$ la section l_h se relève en une section v_h de V_h engendrant un sousfibré en droites de V_h. On dispose alors d'un S-morphisme $\bar{v}_h\colon S \longrightarrow \mathbf{P}_h$ et d'un isomorphisme $\bar{v}_h^*(\xi_h) \approx \mathcal{O}_S$ (cf. II.1.2).

Si on note $\mathbf{Q}$ le produit $\mathbf{P}_{j_1} \times_S \ldots \times_S \mathbf{P}_{j_k}$ on en déduit une inmersion $j\colon \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{P}$.

Le fermé Z' de $Y_{\mathbf{Q}}$ défini par les sections $\big(\sigma_{j_1}, \ldots, \sigma_{j_k}\big)$ est égal à $Z \times_{\mathbf{P}} \mathbf{Q}$ et l'ouvert $\mathcal{V}' = j^{-1}(\mathcal{V})$ de $\mathbf{Q}$ est celui au-dessus duquel Z' est fini. De plus, le morphisme $j\colon \mathcal{V}' \longrightarrow \mathcal{V}$ est un bon changement de base pour $Z \longrightarrow S$ d'aprés 2.5.2. On en déduit un isomorphisme

$$j^*\big(\mathcal{N}_{Z/\mathcal{V}}\big(\mathcal{L}_{d+1|_Z}\big)\big) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{Z'/\mathcal{V}'}\big(\mathcal{L}_{d+1|_{Z'}}\big)$$

tel que si s est une section locale régulière de $\mathcal{L}_{d+1|_Z}$, l'image de $j^*\,\big(\mathcal{N}_{Z/\mathcal{V}}(s)\big)$ soit $\mathcal{N}_{Z'/\mathcal{V}'}(s')$ et donc un isomorphisme:

3.2.2. $r\colon I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} I_{Y/S}\big(\mathcal{L}_{j_1}, \ldots, \mathcal{L}_{j_k}, \mathcal{L}_{d+1}\big)$.

https://doi.org/10.1023/A:1026552909918 Published online by Cambridge University Press

3.2.3. Si $n = d$ on obtient

$$r\colon\ I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{Y/S}(\mathcal{L}_{d+1}).$$

DÉFINITION 3.2.4. Si $(l_1, \ldots, l_d)$ est une suite très régulière de sections de $(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_d)$ définissant le fermé Y de X et si l_{d+1} est une section régulière (respectivement partout non nulle) de $\mathcal{L}_{d+1|_Y}$ on dira que la suite $(l_1, \ldots, l_d, l_{d+1})$ est très régulière (respectivement trivialisante).

Remarque 3.2.5. Si l_{d+1} est une section de $\mathcal{L}_{d+1}$ sur X on dira que $(l_1, \ldots, l_d, l_{d+1})$ est très régulière si $(l_1, \ldots, l_d, l_{d+1|_Y})$ l'est.

On notera toutefois que, à la différence de celle introduite en 3.2.2, cette notion dépend de l'ordre des termes même lorsque $\mathcal{L}_{d+1}$ est f-suffisamment ample.

PROPOSITION–DÉFINITION 3.2.6. *Soit* $(l_1, \ldots, l_d, l_{d+1})$ *une suite très régulière (respectivement trivialisante); alors la section* $r^{-1}\big(\mathcal{N}_{Y/S}\,(l_{d+1})\big)$ *de* $I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$ *est une section régulière (respectivement une trivialisation), indépendante des présentations et commutant aux changements de base plats. On la notera* $< l_1, \ldots, l_{d+1} >$.

Preuve. On procède comme en 2.5.

Remarque 3.2.7. Si $(Y_i)_{i\in[1,N]}$ est une famille finie de sous-schémas fermés non vides de X, de Tor-dimension finie, purement equidimensionels de dimensions relatives respectives d_i et si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites f-suffisamment ample sur X, alors, localement pour la topologie étale sur S (et même Zariski si les corps résiduels de S sont infinis) il existe une section l de $\mathcal{L}$ dont la restriction à chaque Y_i est très régulière (régulière et si l'on veut partout non nulle lorsque $d_i = 0$). En particulier, il existe des suites de sections locales trivialisantes de $(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$. Si $\mathcal{L}_{d+1}$ est f-suffisamment ample, on peut trouver (localement sur S) des suites de sections globales $(l_1, \ldots, l_{d+1})$, trivialisantes (et même telles que toute suite extraite soit très régulière.

3.2.8. On peut déduire de 3.2.2 l'énoncé suivant:

THÉORÈME. *Soient* $H = \{i_1, \ldots, i_n\} \subset [1, d]$, $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ *son complémentaire dans* $[1, d+1]$, $(l_{i_1}, \ldots, l_{i_n})$ *une suite très régulière de sections de* $\big(\mathcal{L}_{i_1}, \ldots, \mathcal{L}_{i_n}\big)$ *définissant le fermé* Y. *Alors il existe un isomorphisme*

$$[\ldots l_{i_1}, \ldots, l_{i_n}]\colon I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} I_{Y/S}\big(\mathcal{L}_{j_1}, \ldots, \mathcal{L}_{j_k}\big)$$

commutant aux changements de base plats et vérifiant la condition suivante:

https://doi.org/10.1023/A:1026552909918 Published online by Cambridge University Press

Si $(l_{j_1}, \ldots, l_{j_{k-1}})$ *est une suite de sections de* $(\mathcal{L}_{j_1}, \ldots, \mathcal{L}_{j_{k-1}})$ *dont la restriction à* Y *est très régulière, définissant le fermé* Z *de* Y*, et* l_{d+1} *une section régulière de* $\mathcal{L}_{d+1|_Z}$ *on a*

$$[\ldots, l_{i_1}, \ldots, l_{i_n} \ldots] < \ldots, l_1, \ldots, l_{d+1} > \, = \, < l_{j_1}, \ldots, l_{j_{k-1}}, \ldots, l_{d+1} >$$

3.3. ADDITIVITÉ

THÉORÈME. *Soient* $i \in [1, d+1]$ *et* $\mathcal{L}_i^1$ *et* $\mathcal{L}_i^2$ *des faisceaux inversibles f.s.a. sur* X*,* $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_i^1 \otimes \mathcal{L}_i^2$*. Il existe un isomorphisme*

$$\Sigma_i : I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_i^1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}) \otimes I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_i^2, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim}$$
$$\xrightarrow{\sim} I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_i, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$$

commutant aux bons changements de base et tel que pour toute suite très régulière $(l_1, \ldots, l_i, \ldots, l_{d+1})$ avec $l_i = l_i^1 \otimes l_i^2$ on ait:

$$\Sigma_i\big(< l_1, \ldots, l_i^1, \ldots, l_{d+1} > \otimes < l_1, \ldots, l_i^2, \ldots, l_{d+1} >\big) = < l_1, \ldots, l_i, \ldots, l_{d+1} >$$

Il résulte notamment de cette formule l'associativité de Σ_i et la commutativité de Σ_i avec Σ_j, $(i \neq j,\ \mathcal{L}_i = \mathcal{L}_i^1 \otimes \mathcal{L}_i^2,\ \mathcal{L}_j = \mathcal{L}_j^1 \otimes \mathcal{L}_j^2)$.

Démonstration. Si $i = d+1$, l'isomorphisme Σ_{d+1} résulte de l'additivité des normes.

Supposons $i \in [1, d]$ et soit (V_i^j, φ_i^j) une présentation de $\mathcal{L}_i^j$, $j = 1, 2$. On définit comme avant $\mathbf{P}_i^1 = \mathbf{P}(\check{V}_i^1)$, $\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{P}(\check{V}_i^2)$, ξ_i, ξ_i^1, ξ_i^2, σ_i, σ_i^1, σ_i^2, et on pose: $\mathbf{P}^h = \mathbf{P}_1 \times_S \ldots \times_S \mathbf{P}_i^h \times_S \ldots \times_S \mathbf{P}_d$ pour $1 \leqslant h \leqslant 2$.

On choisit $V_i = V_i^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} V_i^2$ de telle façon qu'on ait une immersion $j : \mathbf{P}_i^1 \times_S \mathbf{P}_i^2 \hookrightarrow \mathbf{P}_i$, où $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(\check{V}_i)$, avec $j^*\xi_i = \xi_i^1 \otimes \xi_i^2$.

On note aussi par j l'immersion de $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_1 \times_S \ldots \mathbf{P}_i^1 \times_S \mathbf{P}_i^2 \times_S \ldots \times_S \mathbf{P}_d$ dans $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \times_S \ldots \mathbf{P}_i \times_S \ldots \times_S \mathbf{P}_d$, et par $\pi_h : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{P}^h$ la projection.

Soit $\mathcal{V}$ (respectivement $\mathcal{V}^1$, resp. $\mathcal{V}^2$) l'ouvert de $\mathbf{P}$ (respectivement $\mathbf{P}^1$, resp. $\mathbf{P}^2$) au-dessus duquel $Z\,(\sigma_1, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_d)$, (resp. $Z\,(\sigma_1, \ldots, \sigma_i^1, \ldots, \sigma_d)$, resp. $Z\,(\sigma_1, \ldots, \sigma_i^2, \ldots, \sigma_d)$) est fini.

On a dans $\mathbf{Q}$: $j^{-1}(\mathcal{V}) = \pi_1^{-1}(\mathcal{V}^1) \cap \pi_2^{-1}(\mathcal{V}^2)$. Notons par $\mathcal{W}$ l'ouvert $j^{-1}(\mathcal{V})$, $Z^1 = Z\,(\sigma_1, \ldots, \sigma_i^1, \ldots, \sigma_d)$ et $Z^2 = Z(\sigma_1, \ldots, \sigma_i^2, \ldots, \sigma_d)$.

Au-dessus de $X_{\mathcal{W}}$ on a:

$$\mathcal{L}_i \otimes \xi_i = \mathcal{L}_i^1 \otimes \xi_i^1 \otimes \mathcal{L}_i^2 \otimes \xi_i^2$$

et

$$\sigma_i = \sigma_i^1 \otimes \sigma_i^2.$$

On considère le fermé Y de $X_{\mathcal{W}}$ défini par les zéros des sections $(\sigma_1, \ldots, \hat{\sigma}_i, \ldots, \sigma_d)$ et on désigne encore par Z, Z^1 et Z^2 les fermés de $X_{\mathcal{W}}$ images réciproques des fermés

https://doi.org/10.1023/A:1026552909918 Published online by Cambridge University Press

$Z \subset X_{\mathcal{Y}}$, $Z^1 \subset X_{\mathcal{Y}^1}$ et $Z^2 \subset X_{\mathcal{Y}^2}$. Alors, les fermés Z, Z^1 et Z^2 sont des diviseurs de Y et on a: $Z = Z^1 + Z^2$.

L'idéal définissant Z^1 dans Z est un $\mathcal{O}_{Z_2}$-module inversible. On en déduit alors aisement qu'il existe un isomorphisme

$$\beta\colon \mathcal{N}_{Z/\mathcal{W}}(\mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{Z^1/\mathcal{W}}(\mathcal{L}_{d+1}|_{Z^1}) \otimes \mathcal{N}_{Z^2/\mathcal{W}}(\mathcal{L}_{d+1}|_{Z^2})$$

tel que si l est une section locale non nulle de $\mathcal{L}_{d+1}$ on ait

$$\beta\big(\mathcal{N}_{Z/\mathcal{W}}(l)\big) = \mathcal{N}_{Z^1/\mathcal{W}}(l) \otimes \mathcal{N}_{Z^2/\mathcal{W}}(l).$$

Le théorème en résulte.

3.4. ISOMORPHISMES DE SYMÉTRIE

3.4.1. *Symétrie de $I_{X/S}$ $(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$ par rapport aux d premiers termes*
Les notations sont celles de la proposition 3.2.6. Soit ρ une permutation de $[1, d]$.

PROPOSITION. *Il existe un isomorphisme*:

$$\varphi_\rho\colon I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_d, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} I_{X/S}\big(\mathcal{L}_{\rho(1)}, \ldots, \mathcal{L}_{\rho(d)}, \mathcal{L}_{d+1}\big)$$

commutant aux bons changements de base et tel que pour toute suite très régulière $(l_1, \ldots, l_{d+1})$ *on ait* $\varphi_\rho < l_1, \ldots, l_{d+1} > = < l_{\rho(1)}, \ldots, l_{\rho(d)}, l_{d+1} >$.

Preuve. L'existence de l'isomorphisme de symétrie φ_ρ résulte de façon évidente de la construction faite ([Elk], 2.1).

3.4.2. *Extension des isomorphismes de symétrie*
On suppose que les $d+1$ fibrés $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}$ sont f-suffisamment amples.

THÉORÈME. *Soit τ une permutation de* $[1, d+1]$. *Il existe un isomorphisme:*

$$\varphi_\tau\colon I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} I_{X/S}\big(\mathcal{L}_{\tau(1)}, \ldots, \mathcal{L}_{\tau(d+1)}\big)$$

tel que pour tout S-schéma $T \longrightarrow S$ qui soit un bon changement de base pour f dans le sens de 1.1.7, et pour toute suite $(l_1, \ldots, l_{d+1})$ *de sections de* $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}$ *sur* $X \times_S T$, *telle que* $(l_1, \ldots, l_{d+1})$ *et* $\langle\, l_{\tau(1)}, \ldots, l_{\tau(d+1)} \,\rangle$ *soient très régulières (cf. 3.2.5. Remarque) on ait:*

$$\varphi_\tau(\ \langle l_1, \ldots, l_{d+1}\rangle\ ) = \langle\ l_{\tau(1)}, \ldots, l_{\tau(d+1)}\ \rangle.$$

Démonstration. 3.4.3 Dans le cas où $\tau\,(d+1) = d+1$, l'isomorphisme τ a été défini dans 3.4.1. Il sufffit donc de montrer son existence lorsque τ est la transposition $(d, d+1)$.

3.4.4. Il suffit de traiter le cas $d = 1$. En effet, soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme projectif de Tor-dimension finie purement de dimension d de schémas noethériens. On considère sur X $d+1$ faisceaux inversibles f-suffisamment amples $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_d, \mathcal{L}_{d+1}$.

Pour chaque $i \in [1, d]$ soit V_i un S-fibré engendrant $\mathcal{L}_i$, $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(\check{V}_i)$, $\pi_i : \mathbf{P}_i \longrightarrow S$ la projection, ξ_i le fibré canonique sur $\mathbf{P}_i$, σ_i la section marquée de $\mathcal{L}_i \otimes \xi_i$ sur $X_{\mathbf{P}_i}$.

Soient $\mathcal{Q}$ le fibré produit $\mathcal{Q} = \mathbf{P}_1 \times_S \ldots \times_S \mathbf{P}_{d-1} \longrightarrow S$, Y le fermé de $X_{\mathcal{Q}}$ défini par les zéros des sections $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ et Ω l'ouvert de $\mathcal{Q}$ au-dessus duquel Y est de dimension relative 1.

Si on a traité le cas $d = 1$, on dispose alors d'un isomorphisme canonique:

$$I_{Y/\Omega}(\mathcal{L}_d, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} I_{Y/\Omega}(\mathcal{L}_{d+1}, \mathcal{L}_d)$$

Comme le fermé complémentaire de Ω dans $\mathcal{Q}$ est de codimension supérieure ou égale à 2 dans chaque fibre du morphisme structural $\mathcal{Q} \longrightarrow S$, (d'après 2.4.1.ii) on en déduit, compte tenu de 2.7.a, un isomorphisme canonique de $I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_d, \mathcal{L}_{d+1})$ sur $I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d-1}, \mathcal{L}_{d+1}, \mathcal{L}_d)$. On se ramène donc au cas où $f : X \longrightarrow S$ est un morphisme purement de dimension 1.

3.4.5. Considérons alors comme en 2.8.2 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ deux $\mathcal{O}_X$-faisceaux inversibles f.s.a. et reprenons les notations de *loc. cit.* Soit $p : \mathbf{Q} = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2 \longrightarrow S$ la projection. On a construit un fibré $\mathcal{N}$ sur $\Omega_1 \cup \Omega_2$ en recollant $\mathcal{N}_1 = p^* I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \otimes \xi_1^{r_1} \otimes \xi_2^{r_2}$, donné sur Ω_1, et $\mathcal{N}_2 = p^* I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \otimes \xi_1^{r_1} \otimes \xi_2^{r_2}$, donné sur Ω_2, via un isomorphime de ces deux fibrés sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$ envoyant $\mathcal{N}(\sigma_2)$ sur $\mathcal{N}(\sigma_1)$.

On déduit de 2.7

$$\mathcal{N} \approx p^* I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \otimes \xi_1^{r_1} \otimes \xi_2^{r_2} \approx p^* I_{X/S}(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1) \otimes \xi_1^{r_1} \otimes \xi_2^{r_2}$$

et un isomorphisme de symétrie sur S,

$$\varphi_\tau : I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \xrightarrow{\sim} I_{X/S}(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1).$$

Si l_1 et l_2 sont des sections de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ telles que (l_1, l_2) et (l_2, l_1) sont très régulières, on dispose d'une immersion $j : S \longrightarrow \mathbf{Q}$ dont l'image est contenue dans $\Omega_1 \times \Omega_2$ et les sections régulières $\langle l_1, l_2 \rangle$ et $\langle l_2, l_1 \rangle$ de $I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ et $I_{X/S}(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1)$ sont respectivement égales à $j^*\mathcal{N}(\sigma_2)$ et $j^*\mathcal{N}(\sigma_1)$, d'où le résultat.

4. Le fibré d'intersection de faisceaux inversibles quelconques

Dans ce paragraphe nous étendons la définition du faisceau d'intersection donnée dans le chapitre 2 au cas des fibrés inversibles quelconques sur X. On utilisera notamment les isomorphismes d'additivité définis dans 3.2 et les trivialisations locales construites dans 3.5.

https://doi.org/10.1023/A:1026552909918 Published online by Cambridge University Press

4.1. Soit encore $f: X \longrightarrow S$ un morphisme projectif de Tor-dimension finie purement de dimension d de schémas noethériens. Soit $(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$ une suite de faisceaux inversibles quelconques sur X.

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant d+1$ on considère des faisceaux inversibles f-suffisamment amples sur X, $\mathcal{L}_{i,0}$ et $\mathcal{L}_{i,1}$, et des isomorphismes $\mathcal{L}_i \approx \mathcal{L}_{i,0} \otimes \mathcal{L}_{i,1}^{-1}$.

Soit E l'ensemble des applications de $\{1, 2, \ldots, d+1\}$ dans $\{0, 1\}$. Pour $h \in E$ on pose $\epsilon_h = \prod_{i=1}^{d+1} (-1)^{h(i)}$.

PROPOSITION 4.1.1. *Le fibré* $\bigotimes_{h \in E} I_{X/S} (\mathcal{L}_{1,h(1)}, \ldots, \mathcal{L}_{d+1,h(d+1)})^{\epsilon_h}$ *est défini à isomorphisme unique près par la suite de faisceaux inversibles* $(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'existence des isomorphismes d'additivité Σ_i définis dans 3.4 et de la commutativité des Σ_i et Σ_j.

DÉFINITION 4.1.2. On appelle faisceau d'intersection des $\mathcal{O}_X$-fibrés inversibles $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}$ le faisceau:

$$I_{X/S} (\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}) = \bigotimes_{h \in E} \big(I_{X/S} (\mathcal{L}_{1,h_1}, \ldots, \mathcal{L}_{d+1,h_{d+1}}) \big)^{\epsilon_h}.$$

4.2. TRIVIALISATIONS LOCALES. SYMÉTRIE. ADDITIVITÉ

4.2.1. Les notations sont celles de 4.1. Supposons que pour tout $i \in [1, d+1]$ et pour tout $j \in [0, 1]$ il existe une section $l_{i,j}$ de $\mathcal{L}_{i,j}$ de telle sorte que pour tout $h \in E$, la suite $(l_{1,h_{(1)}}, \ldots, l_{d+1,h_{(d+1)}})$ soit très régulière (respectivement trivialisante). Alors la section $\bigotimes_{h \in E} \langle l_{1,h_{(d+1)}}, \ldots, l_{d+1,h_{(d+1)}} \rangle^{\epsilon_h}$ est une section régulière méromorphe (respectivement une trivialisation) de $I_{X/S} (\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$

4.2.2. Il résulte des formules d'additivité que la section méromorphe

$\bigotimes_{h \in E} \langle l_{1,h_1}, \ldots, l_{d+1,h_{d+1}} \rangle^{\epsilon_h}$ ne dépend que des sections méromorphes $l_i = l_{i,0} \otimes l_{i,1}^{-1}$ de $\mathcal{L}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant d+1$.

Dans la suite on notera par $\langle l_1, \ldots, l_{d+1} \rangle$ cette section.

DÉFINITION 4.2.3. *On dira qu'une telle suite de sections* $(l_1, \ldots, l_{d+1})$ *est une suite amplement régulière de sections méromorphes.*

Remarque 4.2.4. Localement pour la topologie étale sur S (et même pour la topologie de Zariski si les corps résiduels de S sont infinis) il existe des suites de sections amplement régulières définissant des trivialisations du fibré d'intersection.

Remarque 4.2.5. Si les faisceaux $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}$ sont f-s.a. et si $(l_1, \ldots, l_{d+1})$ est une suite très régulière de sections, il est clair que c'est une suite amplement régulière. (On peut prendre simplement $\mathcal{L}_{i,0} = \mathcal{L}_i^{\otimes 2}$, $l_{i,0} = l_i^{\otimes 2}$ et la définition de $\langle l_1, \ldots, l_{d+1} \rangle$ coincide alors avec celle introduite en 3.2.

THÉORÈME 4.2.6. *Soient* $i \in [1, d+1]$ *et* $\mathcal{L}_i^1$, $\mathcal{L}_i^2$ *des faisceaux inversibles quelconques sur* X. *Soit* $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_i^1 \otimes \mathcal{L}_i^2$. *Il existe un isomorphisme d'additivité (qu'on appellera encore* Σ_i*) commutant aux bons changements de base:*

$$\Sigma_i\colon\ I_{X/S}\,(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_i^1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}) \otimes I_{X/S}\,(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_i^2, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} \\ \xrightarrow{\sim} I_{X/S}\,(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_i, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$$

tel qu'on ait:

Si $(l_1, \ldots, l_i^1, \ldots, l_{d+1})$ *et* $(l_1, \ldots, l_i^2, \ldots, l_{d+1})$ *sont amplement régulières,*

$$\Sigma_i\big(\ \langle l_1, \ldots, l_i^1, \ldots, l_{d+1}\rangle \otimes\ \langle l_1, \ldots, l_i^2, \ldots, l_{d+1}\rangle\big)\ =\ \langle l_1, \ldots, l_i^1 \otimes l_i^2, \ldots, l_{d+1}\rangle$$

Preuve. On les déduit immédiatement du cas f-s.a. et ils coïncident avec les isomorphismes d'additivité définis dans ce cas. Et on obtient de même:

THÉORÈME 4.2.7. *Soit* τ *une permutation de* $\{1, 2, \ldots, d+1\}$. *Il existe un isomorphisme commutant aux bons changements de base:*

$$\varphi_\tau\colon\ I_{X/S}\,(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} I_{X/S}\,(\mathcal{L}_{\tau(1)}, \ldots, \mathcal{L}_{\tau(d+1)})$$

ayant la propriété suivante: Si les sections $l_{i,j}$ (les notations sont celles de 4.2.1) vérifient que pour tout $h \in H$, $(l_{1,h(1)}, \ldots, l_{d+1,h(d+1)})$ et $(l_{\tau(1),h(\tau(1))}, \ldots, l_{\tau(d+1),h(\tau(d+1))})$ sont amplement régulières, alors

$$\varphi_\tau(\langle l_1, \ldots, l_{d+1}\rangle) = \langle l_{\tau(1)} \ldots l_{\tau(d+1)}\ \rangle$$

4.3. RESTRICTION À UN DIVISEUR

PROPOSITION 4.3.1. *Soit* $i \in [1, d]$ *et soit* l_i *une section très régulière de* $\mathcal{L}_i$ *(au sens de 3.2.1.) définissant le diviseur* Y.

Il existe un isomorphisme commutant aux changements de base plats:

$$[\ldots l_i \ldots]\colon\ I_{X/S}\,(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} I_{Y/S}\,(\mathcal{L}_{1_{|Y}}, \ldots, \hat{\mathcal{L}}_i, \ldots, \mathcal{L}_{d+1_{|Y}})$$

tel qu'on ait:

Si l_i *s'insère dans une suite amplement régulière* $(l_1, \ldots, l_i, \ldots, l_{d+1})$ *, on a:*

$$[\ldots l_i \ldots]\ \langle l_1, \ldots, l_{d+1}\rangle = \langle l_{1_{|Y}}, \ldots, \hat{l}_{i_{|Y}}, \ldots, l_{d+1_{|Y}}\rangle.$$

Démonstration. Par symétrie on peut supposer $i = d$ et par additivité, $\mathcal{L}_j$ f-suffisamment ample pour tout $j \neq d$.

On considère deux faisceaux inversibles f.s.a. sur X $\mathcal{L}_{d,1}$ et $\mathcal{L}_{d,2}$ tels que $\mathcal{L}_d \approx \mathcal{L}_{d,1} \otimes \mathcal{L}_{d,2}^{-1}$. Soit $V_{d,1}$ (respectivement $V_{d,2}$) un fibré sur S engendrant $\mathcal{L}_{d,1}$ (respectivement $\mathcal{L}_{d,2}$). On désigne par $\sigma_{d,1}$ (respectivement $\sigma_{d,2}$) la section marquée de $\mathcal{L}_{d,1} \otimes \xi_{d,1}$ (resp. $\mathcal{L}_{d,2} \otimes \xi_{d,2}$).

https://doi.org/10.1023/A:1026552909918 Published online by Cambridge University Press

Remplaçons $V_{d,1}$ par $V_{d,1} \oplus V_{d,2}$ et $\varphi_{d,1}$ par $\varphi'_{d,1} = \varphi_{d,1} \oplus l_d \otimes \varphi_{d,2}$. L'application $l \to l \otimes l_d$ de $\mathcal{L}_{d,2}$ dans $\mathcal{L}_{d,1}$ se relève dans un homomorphisme injectif scindé $V_{d,2} \to V_{d,1}$. On a alors une immersion $j\colon\ \mathbf{P}_{d,2} \longrightarrow \mathbf{P}_{d,1}$.

On pose $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_1 \times_S \ldots \times_S \mathbf{P}_{d-1}$, $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q} \times_S \mathbf{P}_{d,1}$ et $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q} \times_S \mathbf{P}_{d,2}$.

On déduit de j une immersion (qu'on désigne encore par j):

$$j\colon\ \mathbf{Q}_2 \longrightarrow \mathbf{Q}_1.$$

Soient T le fermé de $X_{\mathbf{Q}}$ défini par les sections $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{d-1})$ dans $X_{\mathbf{Q}}$. Pour $i = 1, 2$, on note $T_i = T \times_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_i$, Z_i le diviseur de T_i défini par la section $\sigma_{d,i}$, $Z = Z_1 \times_{\mathbf{Q}_1} \mathbf{Q}_2$. Par définition de j, Z est défini dans T_2 par la section $l_d \otimes \sigma_{d,2}$ de $\mathcal{L}_d \otimes \mathcal{L}_{d,2}$.

D'après la remarque 2.3.3, T et T_2 sont plats au-dessus de X et l_d est une section régulière de $\mathcal{L}_d$ sur T_2 définissant le diviseur Z_Y, qui est aussi le fermé de $Y_{\mathbf{Q}}$ défini par les sections $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{d-1})$.

On désigne par $\mathcal{V}_2$ l'ouvert de $\mathbf{Q}_2$ au-dessus duquel Z_2 et Z_Y sont finis. Il résulte de ce qui précède que $\mathbf{Q}_2 - \mathcal{V}_2$ est de codimension supérieure ou égale à 2 dans chaque fibre de $\mathbf{Q} \longrightarrow S$ et que d'après le lemme 2.5.2 le changement de base $j\colon \mathcal{V}_2 \longrightarrow \mathcal{V}_1$ est bon pour Z_1 ($\mathcal{V}_1$ est l'ouvert au-dessus duquel Z_1 est fini) et on a dans T_2 l'égalité des diviseurs $Z = Z_2 + Z_Y$.

La situation est analogue à celle de 3.2 et on obtient comme dans *loc. cit.* un isomorphisme

$$\begin{aligned}\epsilon\colon\ & I_{X/S}\,(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d-1}, \mathcal{L}_{d,1}, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} \\ & \xrightarrow{\sim} I_{X/S}\,(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d-1}, \mathcal{L}_{d,2}, \mathcal{L}_{d+1}) \otimes I_{Y/S}\,(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d-1}, \mathcal{L}_{d+1}).\end{aligned}$$

Pour vérifier que cet isomorphisme ne dépend pas du choix d'une présentation $\mathbf{V} = \big((V_i)_{i \leqslant d}, V_{d,1}, V_{d,2}\big)$ on procède comme en 3.2, i.e., on suppose qu'on a une autre présentation $\mathbf{W} = \big((W_i)_{i \leqslant d}, W_{d,1}, W_{d,2}\big)$ telle que chaque V_i soit localement facteur direct de W_j et on utilise la commutativité du diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Q}_{2,V} & \longrightarrow & \mathbf{Q}_{1,V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Q}_{2,W} & \longrightarrow & \mathbf{Q}_{1,W} \end{array}$$

Supposons en outre que pour tout $i \leqslant d$ le fibré $\mathcal{L}_i$ est muni d'une section l_i, que $\mathcal{L}_{d,2}$ est muni d'une section $l_{d,2}$ provenant de $V_{d,2}$ et $\mathcal{L}_{d,1}$ est muni d'une section $l_{d,1}$ de telle sorte que les suites $\big(l_1, \ldots, l_{d,1}, l_{d+1}\big)$ et $\big(l_1, \ldots, l_{d,2}, l_{d+1}\big)$ sont très régulières. Il résulte alors de l'additivité des normes que l'isomorphisme ϵ envoie $\big(l_1, \ldots, l_{d,1}, l_{d+1}\big)$ sur $\big(l_1, \ldots, l_{d,2}, l_{d+1}\big)$. L'assertion en est conséquence.

DÉFINITION 4.3.2. Soient $1 \leqslant k \leqslant d+1$ un entier et $(l_1, \ldots, l_k)$ une suite de sections des faisceaux $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k$. Si $k \leqslant d$, on dit que la suite est fortement régulière

https://doi.org/10.1023/A:1026552909918 Published online by Cambridge University Press

si pour tout $i \leqslant k$ la restriction de l_i au fermé défini par $(l_1, \ldots, l_{i-1})$ est très régulière. Si $k = d+1$, on dit que la suite est fortement régulière si $(l_1, \ldots, l_d)$ l'est et si la restriction de l_{d+1} au fermé défini par $(l_1, \ldots, l_d)$ est régulière.

Remarque. Soient $k \leqslant d$ et $(l_1, \ldots, l_k)$ fortement régulière définissant un fermé Y. On obtient en iterant l'isomorphisme de 4.3.1 un isomorphisme

$$[l_1, \ldots, l_k, \ldots]\colon\ I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} I_{Y/S}(\mathcal{L}_{k+1}, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$$

Si $k = d+1$ et si $(l_1, \ldots, l_{d+1})$ est fortement régulière, la section $\langle l_1, \ldots, l_{d+1}\rangle$ est une section régulière de $I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$ égale à $[l_1, \ldots, l_d]^{-1}\mathcal{N}_{Y/S}(l_{d+1|_Y})$ où Y est le fermé défini par $(l_1, \ldots, l_d)$.

5. Formules de projection. invariance birationnelle

Dans ce paragraphe nous effectuons quelques calculs sur les fibrés d'intersection. Nous utilisons la notion de degré d'intersection de d fibrés en droites sur un schéma purement de dimension d introduite dans 1.1.6.1 et nous rappelons quelques propriétés du degré d'intersection.

La proposition 5.2.1 détermine la valeur des entiers r_i introduits avec la définition du fibré d'intersection en 2.8. Dans 5.2 nous établissons une 'formule de projection'. Le théorème 5.3 démontre l'invariance du fibré d'intersection par transformation birationnelle et dans le paragraphe 5.4 est donnée la définition de la hauteur d'une variété arithmétique par rapport à un fibré ample métrisé.

5.1. SUR LE DEGRÉ D'INTERSECTION

Soit $f\colon X \longrightarrow S$ un morphisme projectif de Tor-dimension finie purement de dimension d de schémas noethériens avec S connexe.

PROPOSITION 5.1.1.

(a) *L'application $\delta_{X/S}\colon Pic(X)^d \longrightarrow \mathbb{Z}$ est d-linéaire.*

(b) *Si $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_d$ sont des faisceaux inversibles sur X et l_i est une section très régulière de $\mathcal{L}_i$ définissant le diviseur Y on a :*

$$\delta_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_d) = \delta_{Y/S}(\mathcal{L}_{1|_Y}, \ldots, \hat{\mathcal{L}}_i, \ldots, \mathcal{L}_{d|_Y}).$$

Si $d = 1$, le second membre représente le rang de $\mathcal{O}_Y$ sur $\mathcal{O}_S$ (ici on considère le rang au sens de 1.1.5.)

Preuve. La démonstration de cette proposition est exactement la même que pour le cas où $f\colon X \longrightarrow S$ est Cohen-Macaulay, traité dans [Elk], IV.1.2.

Remarque 5.1.2. Le degré $\delta_{X/S}$ commute aux bons changements de base.

5.1.3. Considérons deux morphismes $h\colon X \longrightarrow X'$ et $g\colon X' \longrightarrow S$ projectifs de Tor-dimension finie purement de dimension d et d' respectivement de schémas connexes. Soient encore $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_d$ (respectivement $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{d'}$) des faisceaux inversibles sur X (respectivement sur X'). On a:

$$\delta_{X/S}(h^*\mathcal{L}_1, \ldots, h^*\mathcal{L}_{d'}, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_d) = \delta_{X'/S}(\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{d'}) \cdot \delta_{X/X'}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_d).$$

5.2. FORMULES DE PROJECTION

Dans ce paragraphe on considère, comme dans le chapitre 4, un morphisme $f: X \longrightarrow S$ projectif de Tor-dimension finie purement de dimension d de schémas noethériens. Soit $(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$ une suite de fibrés en droites quelconques sur X.

Les isomorphismes construits ci-dessous commutent aux bons changements de base.

PROPOSITION 5.2.1.a. *Supposons que pour un certain $i \in [1, d+1]$ le faisceau $\mathcal{L}_i$ soit l'image inverse d'un faisceau $\mathcal{L}$ sur S. Alors il existe un isomorphisme commutant aux bons changements de base:*

$$\theta: \; I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^{\delta_i}$$

où $\delta_i = \delta_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \hat{\mathcal{L}}_i, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$ et tel que l'on ait:

Si $(l_1, \ldots, l_{d+1})$ est une suite de sections amplement régulière avec l section non nulle de $\mathcal{L}$ sur S et $l_i = f^*l$,

$$\theta\,(\,\langle l_1, \ldots, l_{d+1}\rangle\,) = l^{\delta_i}.$$

Démonstration. On peut supposer que $i = d+1$ par symétrie et que $\mathcal{L}_j$ est f.s.a. et l_j holomorphe pour $j \leqslant d$ par additivité. La proposition résulte alors de la construction de base (cf. 2.8), car le degré (au sens de 1.1.6.1) de $Z(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ sur l'ouvert $\mathcal{V}$ au-dessus duquel $Z(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ est fini est égal à $\delta_{X_{\mathbf{P}/\mathbf{P}}}(\mathcal{L}_1 \otimes \xi_1, \ldots, \mathcal{L}_d \otimes \xi_d)$, donc égal à δ_i, puisque ξ_i provient de $\mathbf{P}$.

Remarque 5.2.1.b. Sous les hypothèses précédentes, le fibré $I_{X/S}\,(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$ est donc canoniquement trivialisé si $\delta = 0$, par exemple s'il existe un second indice j tel que $\mathcal{L}_j$ provienne de S.

Remarque 5.2.1.c. Reprenons la construction de base (2.8) et ses notations. On a un isomorphisme:

$$\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_d, \cdot \rangle: \; I_{X_\mathcal{V}/\mathcal{V}}\,(\mathcal{L}_1 \otimes \xi_1, \ldots, \mathcal{L}_d \otimes \xi_d, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}.$$

D'après ce qui précède il existe un isomorphisme:

$$I_{X_\mathcal{V}/\mathcal{V}}\,(\mathcal{L}_1 \otimes \xi_1, \ldots, \mathcal{L}_d \otimes \xi_d, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} p^*\, I_{X/S}\,(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_d) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{d} \xi_i^{\delta_i} \right).$$

https://doi.org/10.1023/A:1026552909918 Published online by Cambridge University Press

Donc les entiers r_i introduits dans 2.6 sont égaux aux δ_i.

PROPOSITION 5.2.2. *Soit $S' \xrightarrow{\pi} S$ un S-schéma fini et de* Tor*-dimension finie et supposons que f se factorise en : $X \xrightarrow{f'} S' \xrightarrow{\pi} S$ avec f' projectif de* Tor*-dimension finie. Alors il existe un isomorphisme canonique :*

$$\theta\colon\ I_{X/S}\ (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{S'/S}\big(I_{X/S'}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{d+1})\big)$$

tel que pour toute suite amplement régulière $(l_1, \dots, l_{d+1})$ on ait:

$$\theta(\langle l_1, \dots, l_{d+1}\rangle) = \mathcal{N}_{S'/S}\ \langle l_1, \dots, l_{d+1}\rangle.$$

Démonstration. On peut supposer que $\mathcal{L}_i$ est f-suffisamment ample pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$. On considère alors un S-fibré V_i engendrant $\mathcal{L}_i$ et on pose $V_i' = V_i \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$.

Alors $\mathbf{P}' = \prod_{i=1}^d \mathbf{P}(\check{V}_i')$ est égal à $\prod_{i=1}^d \mathbf{P}(\check{V}_i) \times_S S'$, et l'ouvert de $\mathbf{P}'$ au-dessus duquel $Z(\sigma_1, \dots, \sigma_d)$ est fini contient $\mathcal{V} \times_{\mathbf{P}} \mathbf{P}'$. Posons alors $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \times_{\mathbf{P}} \mathbf{P}'$. L'énoncé résulte alors de I.2.9, avec S et S' de loc.cit. remplacés par $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$.

5.2.3. Soit $g\colon X' \longrightarrow X$ un morphisme projectif de Tor-dimension finie, purement de dimension d' de schémas noethériens. On utilisera le lemme élementaire suivant:

LEMME 5.2.3.a. *Si $(l_1, \dots, l_d)$ est une suite régulière de sections de $\mathcal{O}_X$-faisceaux inversibles définissant le fermé Y de X, telle que la suite $(g^*l_1, \dots, g^*l_d)$ soit régulière, alors le changement de base $Y \longrightarrow X$ est bon pour g.*

Démonstration. Le complexe de Koszul $K^\bullet(l_1, \dots, l_d)$ est une résolution du $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{O}_Y$ et $g^*\boldsymbol{K}^\bullet(l_1, \dots, l_d)$ est une résolution du $\mathcal{O}_{X'}$-module $\mathcal{O}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y$ donc $Tor^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_Y) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$.

PROPOSITION 5.2.3.b. *Pour toute suite $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d)$ de faisceaux inversibles sur X, et toute suite $(\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{d+d'+1})$ de faisceaux inversibles sur X' avec $\mathcal{M}_i = g^*\mathcal{L}_i$ pour tout $i \leqslant d$, il existe un isomorphisme commutant aux changements de base plats et aux isomorphismes d'additivité:*

$$\Psi\colon I_{X'/S}(\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{d+d'+1}) \xrightarrow{\sim} I_{X/S}\ (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d, I_{X'/X}\ (\mathcal{M}_{d+1}, \dots, \mathcal{M}_{d+d'+1}))$$

vérifiant la propriété suivante:

Si $(l_1, \dots, l_d)$ est une suite fortement régulière de sections de $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d)$ définissant le fermé Y de X, et si la suite $(g^*l_1, \dots, g^*l_d)$ est fortement régulière

https://doi.org/10.1023/A:1026552909918 Published online by Cambridge University Press

définissant Y' dans X', le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd} I_{X'/S}(\mathcal{M}_{d+1}, \dots, \mathcal{M}_{d+d'+1}) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "{[g^*l_1,\dots,g^*l_d]}"'] & I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d, I_{X'/X}(\mathcal{M}_{d+1}, \dots, \mathcal{M}_{d+d'+1})) \arrow[d, "{[l_1,\dots,l_d]}"'] \\ I_{Y'/S}(\mathcal{M}_{d+1}, \dots, \mathcal{M}_{d+d'+1}) \arrow[r, "\Theta"] & \mathcal{N}_{Y/S}(I_{Y'/Y}(\mathcal{M}_{d+1}, \dots, \mathcal{M}_{d+d'+1})) \end{tikzcd}$$

où Θ est l'isomorphisme défini en 5.2.2.

Démonstration. On peut supposer que les faisceaux $\mathcal{L}_i$ sont f-suffisamment amples.

Soient pour $i \in [1, d]$, un fibré V_i sur S engendrant $\mathcal{L}_i$, σ_i la section marquée de $\mathcal{L}_i \otimes \xi_i$ sur $X \times_S \mathbf{P}(\check{V}_i)$, $\mathbf{P} = \prod_{i=1}^d \mathbf{P}(\check{V}_i)$, et $\mathcal{V}$ l'ouvert de $\mathbf{P}$ au-dessus duquel le fermé Z des zéros des sections $(\sigma_1, \dots, \sigma_d)$ est fini.

On pose $Z' = X' \times_X Z$ et on considère le diagramme:

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r] \arrow[d] & X'_{\mathcal{V}} \arrow[r] \arrow[d] & X'_{\mathbf{P}} \arrow[r] \arrow[d, "g_{\mathbf{P}}"] & X' \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r] & X_{\mathcal{V}} \arrow[r] \arrow[d] & X_{\mathbf{P}} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ & \mathcal{V} \arrow[r] & \mathbf{P} \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Il existe des entiers r_i pour lesquels on a sur $\mathcal{V}$:

$$I_{X'/S}\ (\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{d+d'+1}) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^d \xi_i^{r_i}\right)$$
$$\simeq I_{X'_{\mathcal{V}}/\mathcal{V}}\ (g^*\mathcal{L}_1 \otimes \xi_1, \dots, g^*\mathcal{L}_d \otimes \xi_d, \mathcal{M}_{d+1}, \dots, \mathcal{M}_{d+d'+1})$$

Puisqu'on considère des sections universelles, en vertu de 4.3.1 on déduit un isomorphisme du fibré précédent avec:

$$\simeq I_{Z'/\mathcal{V}}\ (\mathcal{M}_{d+1}, \dots, \mathcal{M}_{d+d'+1})$$

D'après le lemme ci-dessus et 2.3.3, le morphisme $Z \longrightarrow X_{\mathbf{P}}$ est un bon changement de base pour $g_{\mathbf{P}} : X'_{\mathbf{P}} \longrightarrow X_{\mathbf{P}}$ et il existe un isomorphisme:

$$\Theta\colon\ I_{Z'/\mathcal{V}}\ (\mathcal{M}_{d+1}, \dots, \mathcal{M}_{d+d'+1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{Z/\mathcal{V}}\big(I_{Z'/Z}(\mathcal{M}_{d+1}, \dots, \mathcal{M}_{d+d'+1})\big)$$
$$\simeq \mathcal{N}_{Z/\mathcal{V}}\big(I_{X'/X}(\mathcal{M}_{d+1}, \dots, \mathcal{M}_{d+d'+1})\big)[-3pt$$
$$\simeq I_{X/S}\big(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d, I_{X'/X}(\mathcal{M}_{d+1}, \dots, \mathcal{M}_{d+d'+1})\big) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{d} \xi_i^{r_i}\right)$$

le dernier isomorphisme étant la définition du faisceau d'intersection $I_{X/S}$.

https://doi.org/10.1023/A:1026552909918 Published online by Cambridge University Press

5.3. INVARIANCE BIRATIONNELLE

On désigne comme toujours par $f\colon X \longrightarrow S$ un morphisme projectif de Tor-dimension finie purement de dimension d de schémas noethériens et on considère un morphisme projectif $g\colon X' \longrightarrow X$ tel que le morphisme composé $f' = f \circ g\colon X' \longrightarrow S$ soit encore projectif de Tor-dimension finie purement de dimension d.

On suppose en outre qu'il existe un ouvert $\mathcal{U}$ de X dense dans chaque fibre de f tel que $g_{|_{g^{-1}(\mathcal{U})}}\colon g^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{U}$ est un isomorphisme.

THÉORÈME 5.3.1. *Pour toute suite $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}$ de fibrés en droites sur X, il existe un isomorphisme commutant aux changements de base plats et aux isomorphismes d'additivité:*

$$\Pi\colon\ I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} I_{X'/S}(g^*\mathcal{L}_1, \ldots, g^*\mathcal{L}_{d+1})$$

vérifiant la propriété suivante:

Supposons $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_d$ f.s.a. et soit $(l_1, \ldots, l_d)$ une suite fortement régulière de sections de $(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_d)$ définissant un fermé Y de X contenu dans $\mathcal{U}$. Supposons de plus $(g^*l_1, \ldots, g^*l_d)$ fortement régulière et posons $Y' = Y \times_X X'$. Alors l'application composée

$$[g^*l_1, \ldots, g^*l_d] \ \cdot \Pi \ \cdot [l_1, , l_d]^{-1}\colon\ \mathcal{N}_{Y/S}\ (\mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{Y'/S}\ (\mathcal{L}_{d+1})\mathcal{N}_{Y/S}\ (\mathcal{L}_{d+1})$$

est induite par l'isomorphisme structurel $Y' \xrightarrow{\sim} Y$.

Démonstration. Par additivité on peut supposer que pour tout $1 \leqslant i \leqslant d+1$ le fibré $\mathcal{L}_i$ est f-suffisamment ample engendré par un fibré vectoriel V_i sur S.

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant d+1$ on considère le fibré projectif $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(\check{V}_i) \xrightarrow{p_i} S$. On désigne par H le fermé complémentaire de $\mathcal{U}$ dans X.

On pose

$$\mathbf{P} = \prod_{i=1}^{d} \mathbf{P}_i,\ \ R = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq d}}^{d+1} \mathbf{P}_j,\ \ \mathbf{T} = \prod_{i=1}^{d+1} \mathbf{P}_i \xrightarrow{t} S.$$

On désigne par q_1 (resp. q_2) la projection de $\mathbf{T}$ sur $\mathbf{P}$ (resp. sur R). Soit Z_1 le fermé de $X_{\mathbf{P}}$ défini par les sections universelles $(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ et $W_{\mathbf{P}}$ l'ouvert de $\mathbf{P}$ au-dessus duquel Z_1 est fini et vérifie $Z_1 \cap H_{\mathbf{P}} = \emptyset$, de sorte que, au-dessus de $W_{\mathbf{P}}$ on a:

$$Z_1' = Z_1 \times_X X' \xrightarrow{\sim} Z_1.$$

Comme chaque composante irréductible des fibres de $H \longrightarrow S$ est de dimension inférieure ou égale à $d-1$, l'ouvert $W_{\mathbf{P}}$ est dense dans chaque fibre de $\mathbf{P} \longrightarrow S$ (d'après un argument analogue à 2.4.1).

Soit $\Omega_1 = q_1^{-1}(W_{\mathbf{P}})$. Notons $\delta_i = \delta_{X/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \hat{\mathcal{L}}_i, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$ et désignons par ξ^{δ} le $\mathcal{O}_T$-fibré $\otimes_{i=1}^{d+1} \xi_i^{\delta_i}$.

On dispose au-dessus de Ω_1 des isomorphismes canoniques suivants:

$$t^*I_{X/S}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_{d+1})\otimes\xi^\delta \xrightarrow{\sim\alpha} I_{X_{\Omega_1}/\Omega_1}(\mathcal{L}_1\otimes\xi_1,\ldots,\mathcal{L}_{d+1}\otimes\xi_{d+1})$$
$$\xrightarrow{\sim\beta}\mathcal{N}_{Z_1/\Omega_1}(\mathcal{L}_{d+1}\otimes\xi_{d+1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{Z_1'/\Omega_1}(\mathcal{L}_{d+1}\otimes\xi_{d+1})$$
$$\xrightarrow{\sim\beta'} I_{X'_{\Omega_1}/\Omega_1}(\mathcal{L}_1\otimes\xi_1,\ldots,\mathcal{L}_{d+1}\otimes\xi_{d+1}) \xrightarrow{\sim\alpha'} t^*I_{X'/S}(g^*\mathcal{L}_1,\ldots,g^*\mathcal{L}_{d+1})\otimes\xi^\delta$$

où α et α' ont été explicités en 5.2.1.c et β et β' résultent de 4.3.

On en déduit au-dessus de Ω_1 un isomorphisme

$$\phi_1\colon t^*I_{X/S}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} t^*I_{X'/S}(g^*\mathcal{L}_1,\ldots,g^*\mathcal{L}_{d+1}).$$

Reprenons la même construction en remplaçant **P** par **R**. Soient Z_2 le fermé de X_R défini par $(\sigma_1,\ldots,\sigma_{d-1},\sigma_{d+1})$, $W_{\mathbf{R}}\hookrightarrow R$ l'ouvert au-dessus duquel Z_2 est fini et ne rencontre pas $H_{\mathbf{R}}$, et $\Omega_2=p_2^{-1}(W_{\mathbf{R}})$.

On obtient au-dessus de Ω_2 en suivant la démarche précédente un isomorphisme

$$\phi_2\colon t^*I_{X/S}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_{d-1},\mathcal{L}_{d+1},\mathcal{L}_d) \xrightarrow{\sim} t^*I_{X'/S}(g^*\mathcal{L}_1,\ldots,g^*\mathcal{L}_{d-1},g^*\mathcal{L}_{d+1},g^*\mathcal{L}_d)$$

et en composant à droite et à gauche avec les isomorphismes de symétrie on a:

$$\phi_2'\colon t^*\ I_{X/S}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} t^*I_{X'/S}(g^*\mathcal{L}_1,\ldots,g^*\mathcal{L}_{d+1}).$$

Il résulte des constuctions faites que ϕ_2 et ϕ_2' coïncident sur $\Omega=\Omega_1\cap\Omega_2$, car ils s'étendent, l'un et l'autre, en un isomorphisme de

$$t^*I_{X/S}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_{d+1})\otimes\xi^\delta\approx I_{X_{\Omega_1}/\Omega_1}(\mathcal{L}_1\otimes\xi_1,\ldots,\mathcal{L}_{d+1}\otimes\xi_{d+1})$$

sur

$$t^*\ I_{X'/S}(g^*\mathcal{L}_1,\ldots,g^*\mathcal{L}_{d+1})\otimes\xi^\delta\approx I_{X'_{\Omega_1}/\Omega_1}(g^*\mathcal{L}_1\otimes\xi_1,\ldots,g^*\mathcal{L}_{d+1}\otimes\xi_{d+1})$$

envoyant la section régulière $\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_{d+1}\rangle$ du premier sur la section $\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_{d+1}\rangle$ du second (cf. 4.3.2).

On en déduit un isomorphisme de $t^*I_{X/S}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_{d+1})$ sur $t^*I_{X'/S}(g^*\mathcal{L}_1,\ldots,g^*\mathcal{L}_{d+1})$ au-dessus de $\Omega_1\cup\Omega_2$. Celui-ci provient d'un isomorphisme sur S, puisque le complémentaire de $\Omega_1\cup\Omega_2$ est de codimension supérieure ou égale à 2 dans chaque fibre de $\mathbf{T}\longrightarrow\mathbf{S}$.

5.4. APPLICATIONS AUX HAUTEURS

Soient K un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers, $S=Spec\ \mathcal{O}_K, f\colon X\longrightarrow S$ un morphisme projectif plat avec fibre générique X_K lisse, $\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_{d+1}$ des fibrés inversibles hermitiens sur X, c'est à dire, dont les images inverses sur $X\times_S Spec\ \mathbf{C}$ sont munies de métriques hermitiennes (invariantes par conjugaison).

Soit $Y\hookrightarrow X$ un sous-schéma fermé équidimensionnel de dimension relative d sur S. On suppose la fibre générique Y_K intègre (il suffit en fait pour ce qui suit que l'ouvert

https://doi.org/10.1023/A:1026552909918 Published online by Cambridge University Press

de lissité U de Y_K soit dense dans Y_K). On peut alors définir la hauteur de Y relativement aux fibrés $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1}$ de la manière suivante:

Soit $Y'_K \longrightarrow Y_K$ une desingularisation et soit I le $\mathcal{O}_K$-module inversible $I_{Y/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$. D'après 5.4 on a:

$$I \otimes_{\mathcal{O}_K} K \approx I_{Y'_K/S}(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{d+1})$$

de sorte que grâce à [Elk II] le fibré I hérite de métriques hermitiennes aux places à l'infini de K, dont on vérifie aisément qu'elles sont indépendantes du choix de Y'_K. Le degré de I est alors la hauteur cherchée (coïncidant avec celle définie par exemple dans [Sou]).

6. Intégrales de classes de Chern

Soit $f: X \longrightarrow S$ un morphisme projectif de Tor-dimension finie de schémas noethériens. On considère une suite de fibrés vectoriels $E_1, \ldots, E_n$ sur X de rangs respectifs $r_i + 1$ et des entiers k_i de somme $k_1 + \cdots + k_n = d + 1$.

De la même façon que dans le cas où $f: X \longrightarrow S$ est plat Cohen–Macaulay, traité dans ([Elk], V), on peut construire un fibré en droites sur S 'qui représente l'intégrale le long des fibres de f du produit des k_i^e classes de Chern des E_i'. Dans ce qui suit nous rappelons brièvement les définitions de (loc. cit.).

Si $\mathcal{L}$ est un fibré inversible sur X, on note par $\mathcal{L}\{i\}$ la suite de fibrés en droites formée du faisceau $\mathcal{L}$ répété i fois.

Soient $\mathbf{P}_i$ le fibré projectif $\mathbf{P}(E_i)$, ξ_i le faisceau canonique sur $\mathbf{P}_i$ et $\mathbf{P}$ le fibré produit $\mathbf{P}_1 \times_X \ldots \times_X \mathbf{P}_n$.

On définit un fibré inversible sur S (cf. [Elk], 5.1.1) $I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1) \cdots s_{k_n}(E_n)\rangle$ par la formule suivante:

$$I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1) \cdots s_{k_n}(E_n)\rangle = I_{\mathbf{P}/S}(\xi_1\{r_1 + k_1\}, \cdots, \xi_n\{r_n + k_n\}).$$

Ce fibré représente 'l'intégrale le long des fibres' du produit des classes de Segre du fibré dual $\check{E}$ (suivant [Ful], chapitre 3).

Le passage à l'intégrale d'un polynôme quelconque en les classes de Chern est alors formel (cf. [Elk] *loc. cit.*).

Les résultats généraux d'additivité, symétrie, restriction à un diviseur et multiplicativité restent valables.

Bibliographie

[Del 1] Deligne, P.: *La formule de dualité globale*, S.G.A. 4 exposé XVIII, Lecture Notes in Math. 305, Springer, New York.

[Del 2] Deligne, P.: Le déterminant de la cohomologie, dans: *Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry*, Contemp. Math. 67, Amer. Math. Soc., Providence, 1987, pp. 93–178.

[Elk] Elkik, R.: Fibrés d'intersection et intégrales de classes de Chern, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **22** (1989), 195–226.

[Elk 2] Elkik, R.: Métriques sur les fibrés d'intersection, *Duke Math. J.* **61**(1) (1989), 303–328.

[Fra] Franke, J.: Chow categories, *Compositio Math.* **76** (1990), 101–162.

[Ful] Fulton, W.: *Intersection Theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Knu-Mum] Knudsen, F. et Mumford, D.: The projectivity of the Moduli space ofstable curves I: Preliminaries on 'det' and 'div', *Math. Scand.* **39** (1976), 19–55.

[Sou] Soulé, C.: Géométrie d'Arakelov et théorie des nombres transcendants, *Astérisque* **198-200**, 355–371.