Canad. J. Math. Vol. **58** (2), 2006 pp. 312–343

Partie imaginaire des résonances de Rayleigh dans le cas d'une boule

Didier Gamblin

Résumé. Nous étudions les résonances de Rayleigh créées par une boule en dimension deux et trois. Nous savons qu'elles convergent exponentiellement vite vers l'axe réel. Nous calculons exactement les fonctions résonantes associées puis nous les estimons asymptotiquement en fonction de la partie réelle des résonances. L'application de la formule de Green nous donne alors le taux de décroissance exponentielle de la partie imaginaire des résonances.

1 Introduction, notations et résultats

Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) une boule compacte de rayon R, son complémentaire $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ et son bord Γ. Notons Δ_e l'opérateur d'élasticité

$$\Delta_e u = \mu_0 \Delta u + (\lambda_0 + \mu_0)\nabla(\nabla \cdot u), \quad u = {}^t(u_1, \dots, u_n),$$

où les constantes de Lamé λ_0 et μ_0 vérifient

$$\mu_0 > 0, \quad n\lambda_0 + 2\mu_0 > 0, \quad \lambda_0 \neq 0.$$

Considérons Δ_e dans Ω avec des conditions de Neumann sur le bord Γ

$$(Bu)_i := \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(u)\nu_j \,|_\Gamma = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

où $\sigma_{ij}(u) = \lambda_0 \nabla \cdot u \delta_{ij} + \mu_0(\partial_{x_j} u_i + \partial_{x_i} u_j)$ est le tenseur des contraintes et ν la normale extérieure à Ω sur Γ.

Pour l'équation des ondes élastiques à l'extérieur d'un obstacle régulier avec condition de Neumann sur le bord, en dimension quelconque, M. Taylor [Tay] a étudié mathématiquement la propagation des singularités. Trois types de rayons peuvent propager les singularités: d'une part les rayons classiques se réfléchissant au bord de l'obstacle suivant les lois de l'optique géométrique et propageant les singularités aux vitesses $c_1 = \sqrt{\mu_0}$ et $c_2 = \sqrt{\lambda_0 + 2\mu_0}$, d'autre part les rayons de Rayleigh propageant les singularités dans le bord de l'obstacle à la vitesse plus lente c_R. On rappelle que $c_R < c_1 < c_2$ et $c_R = c_1 s_0$ où s_0 est l'unique zéro dans $]0, 1[$ de la fonction de Rayleigh

$$\mathcal{R}(s) = (s^2 - 2)^2 - 4(1 - s^2)^{\frac{1}{2}}(1 - c_1^2 c_2^{-2} s^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Reçu par la rédaction le 4 février 2004.
Classification (AMS) par sujet: 35P25, 74B05.

Ce qui fait que même un obstacle strictement convexe est captif pour le problème de Neumann du point de vue de la propagation des singularités. Ce qui n'est pas le cas pour le problème de Dirichlet.

M. Ikehata et G. Nakamura [IN] dans le cas de la sphère de $\mathbb{R}^3$, puis M. Kawashita [Ka] pour un obstacle à bord $\mathcal{C}^\infty$ quelconque en dimension impaire, ont montré que l'énergie locale de l'équation des ondes élastiques pour le problème de Neumann n'a pas la propriété de décroissance uniforme lorsque $t \to \infty$. Ces phénomènes correspondent à l'existence d'ondes de Rayleigh se propageant au bord de l'obstacle et on s'attendait à ce que cela crée des résonances convergeant rapidement vers l'axe réel.

Il est connu que l'opérateur $-\Delta_e$ agissant sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ et vérifiant la condition de Neumann, admet une réalisation auto-adjointe sur $L^2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ que l'on notera $-\Delta_e^N$. L'opérateur $-\Delta_e^N$ est positif et n'admet pas de spectre ponctuel. Soit χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact valant 1 près de Γ, la résolvante tronquée $R_\chi(\lambda) = \chi(-\Delta_e^N - \lambda^2)^{-1}\chi$, holomorphe pour $\Im\lambda < 0$, se prolonge méromorphiquement à un voisinage conique $\mathcal{V}$ de l'axe réel positif. Les pôles de ce prolongement méromorphe sont appelés résonances de l'opérateur $-\Delta_e^N$ dans $\mathcal{V}$, voir [SjZw].

P. Stefanov et G. Vodev [StVo1] ont commencé par montrer que dans le cas de la boule de $\mathbb{R}^3$, il existe une suite de résonances (z_j) vérifiant $0 < \Im z_j < Ce^{-\gamma\Re z_j}$ où $C > 0$, $\gamma > 0$. Ils ont ensuite montré qu'il existait une suite de résonances (z_j) vérifiant $0 < \Im z_j < C_N(\Re z_j)^{-N}$ pour tout N, d'abord dans le cas d'un obstacle strictement convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^3$ [StVo2], puis pour un obstacle à bord $\mathcal{C}^\infty$ quelconque en dimension impaire d'espace [StVo3]. J. Sjöstrand et G. Vodev [SjVo] ont donné l'asymptotique du nombre de résonances de Rayleigh dans un domaine proche de l'axe réel de la forme $\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\Im\lambda| \le |\lambda|^{-\delta}, \Re\lambda \ge C_0 \right\}$ $(\delta, C_0 > 0)$, pour une classe d'obstacles incluant le cas strictement convexe et en toute dimension d'espace autre que quatre. P. Stefanov [St1] a donné aussi une très bonne minoration du nombre de résonances de Rayleigh pour un obstacle quelconque en dimension trois. G. Vodev [Vo] a étendu le résultat énoncé dans le cas de la boule de $\mathbb{R}^3$ à toute dimension impaire d'espace dès que l'une des composantes connexes de l'obstacle est à bord analytique. Dans le cas d'un obstacle à bord $\mathcal{C}^\infty$ en dimension trois, M. Bellassoued [Be] a montré l'existence d'un domaine de la forme $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Im\lambda \ge e^{-C\Re\lambda}, \Re\lambda \ge C_0\}$ $(C_0, C > 0)$ sans résonance.

Dans le cas d'un obstacle strictement convexe à bord analytique Γ en dimension deux l'auteur [Ga2] a montré que dans un domaine de la forme Λ il existe exactement deux suites de résonances $(z_{k,\pm})$ (comptées avec multiplicités) convergeant exponentiellement vite vers l'axe réel et exponentiellement proches l'une de l'autre. De plus $\Re z_{k,\pm} = \frac{2\pi c_R}{\ell(\Gamma)}\, k + \sum_{m\ge 0} a_m k^{-m}$ est un symbole analytique. Les questions qui se posaient concernaient alors l'étude de l'intéraction entre les résonances $z_{k,+}$ et $z_{k,-}$ et la précision du taux de décroissance exponentielle de la partie imaginaire des résonances. L'intérêt de cette dernière question réside dans le lien avec le problème d'évolution associé. On a des états à durée de vie d'autant plus grande que les résonances sont proches de l'axe réel (pour des énoncés précis, voir les travaux de S.-H. Tang et M. Zworski [TaZw] et de P. Stefanov [St2]). On répond à ces questions dans le cas où l'obstacle est une boule en dimension deux ou trois.

Enonçons notre principal résultat :

Théorème 1.1 *Soit* (z_k) *la suite des résonances de Rayleigh à partie réelle positive créées par une boule de rayon* R *en dimension deux ou trois. Il existe une constante* $C > 0$ *(dépendant* a priori *de la dimension) telle que*

$$\Im z_k = \left(C\Re z_k + O\left(\sqrt{\Re z_k}\right) \right) e^{-2SR\Re z_k}$$

où $S = c_R^{-1} \cosh^{-1}(c_1 c_R^{-1}) - \sqrt{c_R^{-2} - c_1^{-2}}$.

Dans [StVo1] Stefanov et Vodev caractérisent les résonances comme étant les zéros d'une famille de fonctions $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}^*}$ s'exprimant à l'aide des fonctions de Hankel. On montre cela aussi pour la dimension deux. On obtient alors que les résonances z_k sont doubles ($z_{k,+} = z_{k,-}$) dans le cas de la dimension deux.

Pour une certaine suite d'entiers n_k on a $f_{n_k}(z_k) = 0$ et on obtient que $n_k/\Re z_k \to c_R^{-1}R$ quand $k \to +\infty$.

Dans sa thèse l'auteur avait alors montré, en utilisant les idées de Stefanov et Vodev (voir [Ga1]) que dans le cas d'une boule de rayon R en dimension deux ou trois, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des constantes $C_\varepsilon > 0$ et $C'_\varepsilon > 0$ telles que

$$C_\varepsilon e^{-(2S+\varepsilon)R\Re z_k} \leq \Im z_k \leq C'_\varepsilon e^{-(2S-\varepsilon)R\Re z_k}.$$

C'est l'estimation précise du taux de décroissance exponentielle (en fonction de n) du module de la fonction $\omega \mapsto \frac{1}{2i}\left(n\omega) - \overline{f_n(\overline{n\omega})}\right)$ dans un voisinage complexe de c_R et l'application du théorème de Rouché qui donnaient le résultat. Cette estimation s'obtenait à l'aide des résultats de Olver (voir [Ol1, Ol2, Ol3]) sur l'asymptotique des fonctions de Hankel.

Ici nous utilisons cette caractérisation des résonances pour décrire les états résonants associés, puis à l'aide d'estimations de fonctions de Hankel, nous les estimons asymptotiquement en fonction de $\Re z_k$. On obtient que les fonctions résonantes (de norme 1 dans un domaine compact de $\overline{\Omega}$) associées aux résonances de Rayleigh sont exponentiellement petites en fonction de la partie réelle des résonances dès que l'on décolle du bord de l'obstacle. Le taux de décroissance exponentielle croît du bord de l'obstacle jusqu'à la sphère de rayon $c_1 c_R^{-1} R$ puis devient constant et vaut SR. Voir les propositions 3.15 et 4.7 pour des énoncés précis, où l'on donne des asymptotiques des fonctions résonantes à l'aide des fonctions propres de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur la sphère associées aux valeurs propres n_k^2 dans le cas de la dimension deux, et $n_k(n_k + 1)$ dans le cas de la dimension trois.

C'est l'application de la formule de Green après la sphère de rayon $c_1 c_R^{-1} R$ qui nous permet alors d'obtenir le théorème 1.1.

2 Réduction du problème

Soit $\mathcal{V}$ un voisinage conique de l'axe réel positif. On suit pas à pas Stefanov et Vodev [StVo1]. Nous allons montrer que les résonances de $-\Delta_e^N$ dans $\mathcal{V}$, c'est-à-dire les pôles de $R_\chi(z)$, sont exactement les pôles de la résolvante du problème aux limites suivant :

$$(1)\qquad \begin{aligned}(-\Delta_e - z^2)w &= 0 \quad \text{dans } \Omega\\ Bw &= g \quad \text{sur } \Gamma.\end{aligned}$$

Supposons $\Im z < 0$ et $g \in H^{1/2}(\Gamma)$; le problème (1) a une solution unique dans $L^2(\Omega)$. En effet, cherchons une solution de l'équation $Bv = g$; si l'on pose $v = 0$ sur Γ, l'équation $Bv = g$ détermine de façon unique la dérivée normale de v et il est connu que l'on peut choisir une telle fonction v dont le support est arbitrairement proche de Γ. Notons $V\colon H^{1/2}(\Gamma) \ni g \mapsto v \in H^2(\Omega)$ un tel choix d'opérateur d'extenxion où les fonctions $V(g)$ sont à supports compacts uniformément bornés.

Cherchons une solution de (1) sous la forme $w = u + v$. Alors u est solution du problème

$$\begin{aligned}(-\Delta_e - z^2)u &= (\Delta_e + z^2)v \quad \text{dans } \Omega\\ Bu &= 0 \quad \text{sur } \Gamma\end{aligned}$$

et donc $u = R(z)(\Delta_e + z^2)v$ ($\Im z < 0$). Si l'on note $S(z)$ l'opérateur résolvant dans $L^2(\Omega)$ le problème (1) pour $\Im z < 0$, on a

$$S(z) = V + R(z)(\Delta_e + z^2)V.$$

Si χ est bien choisie on a alors

$$(2)\qquad \chi S(z) = V + R_\chi(z)(\Delta_e + z^2)V$$

et donc $\chi S(z)$ admet un prolongement méromorphe dans $\mathcal{V}$, et les pôles de $\chi S(z)$ sont parmi les pôles de $R_\chi(z)$. Pour prouver le résultat inverse on considère le problème suivant

$$(3)\qquad \begin{aligned}(-\Delta_e - z^2)u &= f \quad \text{dans } \Omega\\ Bu &= 0 \quad \text{sur } \Gamma\end{aligned}$$

où $f \in L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega)$. Pour une fonction $f \in L^2(\Omega)$ notons Tf la fonction f prolongée par 0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Cherchons alors une solution de (3) sous la forme $u = v + w$ où $v = R_0(z)Tf$, $R_0(z)$ étant la résolvante libre dans $\mathbb{R}^n$. Alors w est solution du problème

$$\begin{aligned}(-\Delta_e - z^2)w &= 0 \quad \text{dans } \Omega\\ Bu &= -BR_0(z)Tf \quad \text{sur } \Gamma\end{aligned}$$

et donc $w = -S(z)BR_0(z)Tf$, d'où $R(z) = R_0(z)T - S(z)BR_0(z)T$. (Ici $B\colon H^2(\mathbb{R}^n) \mapsto H^{1/2}(\Gamma)$.) On en déduit

$$(4)\qquad R_\chi(z) = \chi R_0(z)\chi T - \chi S(z)B\chi R_0(z)\chi T$$

et donc, puisque $\chi R_0(z)\chi$ est analytique dans $\mathcal{V}$, les pôles de $R_\chi(z)$ sont parmi les pôles de $\chi S(z)$, et d'après (2) et (4) on a la même multiplicité. On a donc la proposition suivante :

https://doi.org/10.4153/CJM-2006-013-9 Published online by Cambridge University Press

Proposition 2.1 ([StVo1]) *Les résonances de $-\Delta_e^N$ dans $\mathcal{V}$ coincident avec les pôles de $\chi S(z)$ avec la même multiplicité.*

3 Dimension deux

Nous noterons (r, θ) les coordonnées polaires habituelles et dans un souci de simplicité nous ferons les démonstrations dans le cas où Γ est de rayon $R = 1$.

3.1 Caractérisation des résonances

Comme dans [StVo1] on va maintenant caractériser les résonances comme l'ensemble des zéros d'une famille de fonctions dépendant des fonctions de Hankel.

Résolution explicite de (1) : soit H_n la fonction de Hankel d'ordre n ($\Re z > 0$)

$$H_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty - i\pi} e^{z \sinh t - nt}\, dt$$

où l'on intègre suivant le chemin $]-\infty, 0] \cup [0, -i\pi] \cup [-i\pi, -i\pi + \infty[$. H_n est solution de l'équation de Bessel

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) w = 0.$$

On obtient facilement les propriétés suivantes :

Lemme 3.1

(i) $e^{in\theta} H_{|n|}(kr)$ *($n \in \mathbb{Z}$) est solution de l'équation* $(\Delta + k^2)u = 0$ *dans* $\mathbb{R}^2$.

(ii) *Si* $k_1 = c_1^{-1} z$ *et* $k_2 = c_2^{-1} z$, *pour* $\Im z < 0$,

$$\nabla \left(e^{in\theta} H_{|n|}(k_2 r)\right) \quad et \quad \begin{pmatrix} -\partial_{x_2} \\ \partial_{x_1} \end{pmatrix} (e^{in\theta} H_{|n|}(k_1 r)) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

sont solutions dans $L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ *de l'équation* $(\Delta_e + z^2)u = 0$.

(iii)

$$\left\{ e^{in\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, e^{in\theta} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

est une base orthogonale de $L^2(S^1; \mathbb{C}^2)$.

Posons

$$X_n = e^{in\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad Y_n = e^{in\theta} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$F_n(z) = \nabla \left(e^{in\theta} H_{|n|}(k_2 r)\right), \quad G_n(z) = \begin{pmatrix} -\partial_{x_2} \\ \partial_{x_1} \end{pmatrix} \left(e^{in\theta} H_{|n|}(k_1 r)\right) \tag{5}$$

Pour résoudre (1) remarquons que tout g de $H^{1/2}(S^1)$ peut s'écrire

$$g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n X_n + \beta_n Y_n.$$

On cherche alors une solution de (1) sous la forme

$$w = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n F_n + \delta_n G_n.$$

Sous la forme précédente w est bien solution de $(\Delta_e + z^2)w = 0$; la condition au bord $Bw = g$ va nous donner (γ_n, δ_n) en fonction de (α_n, β_n).

On a le lemme suivant, dont la version dans $\mathbb{R}^3$ a été prouvée dans [Gre], voir aussi [IN].

Lemme 3.2 *Soit $w = \nabla A_2 + \binom{-\partial_{x_2}}{\partial_{x_1}} A_1$ où A_1 et A_2 sont solutions des équations*

$$(\Delta + k_1^2)A_1 = 0 \quad et \quad (\Delta + k_2^2)A_2 = 0.$$

Alors la condition au bord $Bw = g$ sur S^1 s'écrit

$$(k_1^2 - 2k_2^2)z^2 A_2 \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} - 2z^2\partial_r \nabla A_2 - 2z^2\partial_r \begin{pmatrix}-\partial_{x_2}\\ \partial_{x_1}\end{pmatrix} A_1 - k_1^2 z^2 A_1 \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = -k_1^2 g.$$

Pour $A_2 = e^{in\theta} H_{|n|}(k_2 r)$ et $A_1 = e^{in\theta} H_{|n|}(k_1 r)$, on a en $r = 1$

$$(k_1^2 - 2k_2^2)z^2 A_2 \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} = (k_1^2 - 2k_2^2)z^2 H_{|n|}(k_2)e^{in\theta} \begin{pmatrix}\cos\theta\\ +\sin\theta\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} -2z^2\partial_r \nabla A_2 &= -2z^2 k_2^2 H''_{|n|}(k_2) e^{in\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \\ &\quad + 2z^2 in\left(H_{|n|}(k_2) - k_2 H'_{|n|}(k_2)\right) e^{in\theta}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2z^2\partial_r \begin{pmatrix}-\partial_{x_2}\\ \partial_{x_1}\end{pmatrix} A_1 &= -2z^2 k_1^2 H''_{|n|}(k_1) e^{in\theta}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} \\ &\quad - 2z^2 in(H_{|n|}(k_1) - k_1 H'_{|n|}(k_1)) e^{in\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$-k_1^2 z^2 A_1 \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = -k_1^2 z^2 H_{|n|}(k_2) e^{in\theta}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Pour $g_n = \alpha_n X_n + \beta_n Y_n$ et $w_n = \gamma_n F_n + \delta_n G_n$ la condition au bord $Bw_n = g_n$ est équivalente au système linéaire

$$T_n(z)\begin{pmatrix}\gamma_n\\ \delta_n\end{pmatrix} = -k_1^2 \begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix} \tag{6}$$

où $T_n(z)$ est la matrice 2×2 dont les coefficients sont

$$\begin{aligned}
T^n_{11}(z) &= z^2\big((k_1^2 - 2k_2^2)H_{|n|}(k_2) - 2k_2^2 H''_{|n|}(k_2)\big)\\
&= z^2\big((k_1^2 - 2n^2)H_{|n|}(k_2) + 2k_2 H'_{|n|}(k_2)\big)\\
T^n_{12}(z) &= -2z^2 in\big(H_{|n|}(k_1) - k_1 H'_{|n|}(k_1)\big)\\
T^n_{21}(z) &= 2z^2 in\big(H_{|n|}(k_2) - k_2 H'_{|n|}(k_2)\big)\\
T^n_{22}(z) &= -k_1^2 z^2\big(H_{|n|}(k_1) + 2H''_{|n|}(k_1)\big)\\
&= z^2\big((k_1^2 - 2n^2)H_{|n|}(k_1) + 2k_1 H'_{|n|}(k_1)\big).
\end{aligned}$$

Notons $\Delta_n(z) = \det T_n(z)$ et $\mathcal{Z}$ l'ensemble des zéros de $\Delta_n(z)$ pour $n = 0, 1, \ldots$ dans $\mathcal{V}$. Les coefficients γ_n et δ_n sont des fonctions méromorphes avec des pôles possibles dans $\mathcal{Z}$. Les fonctions correspondantes w_n ont la même propriété et pour $\Im z < 0$ elles sont dans $L^2(\Omega)$ d'après la propriété de décroissance exponentielle de $H_n(k_1 r)$ et $H_n(k_2 r)$. On dira alors que w_n est sortante. Par conséquent $w_n = S(z)g_n$ et donc $S(z)g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n F_n + \delta_n G_n$ où γ_n et δ_n sont solutions de (6), au moins lorsque g a un développement en série de Fourier fini.

Résonances de $-\Delta_e^N$ et zéros de $\Delta_n(z)$: Il suffit en fait de travailler avec des sommes finies puisque l'ensemble des combinaisons linéaires finies de X_n, Y_n $(n \in \mathbb{Z})$ est dense dans $L^2(S^1; \mathbb{C}^2)$. En fait, si z_0 est un pôle de $\chi S(z)$, z_0 est un pôle de $\chi S(z)g$ où g est une fonction dont le développement en série de Fourier est fini. Puisque $\chi S(z)g$ est holomorphe dans $\mathcal{V} \setminus \mathcal{Z}$, on conclut que si z_0 est une résonance de $-\Delta_e^N$ dans $\mathcal{V}$, alors $z_0 \in \mathcal{Z}$.

Inversement, soit $z_0 \in \mathcal{Z}$. Il existe n tel que $\Delta_n(z_0) = 0$; z_0 est un zéro d'ordre fini $p \geq 1$ de $\Delta_n(z)$. z_0 est donc zéro d'ordre inférieur ou égal à $p - 1$ de l'un au moins des coefficients de $T_n(z)$. On peut supposer sans perte de généralité que c'est $T^n_{22}(z)$. En résolvant le système (6) avec $\alpha_n = 1$ et $\beta_n = 0$ on obtient

$$\chi S(z) X_n = \frac{-k_1^2}{\Delta_n(z)}\big(T^n_{22}(z)F_n(z) - T^n_{21}(z)G_n(z)\big) \tag{7}$$

et puisque z_0 est un zéro de $T^n_{22}(z)$ d'ordre strictement inférieur à celui de $\Delta_n(z)$ et que F_n et G_n sont linéairement indépendantes, z_0 est un pôle de $\chi S(z)X_n$. z_0 est donc une résonance de $-\Delta_e^N$.

On a finalement obtenu :

Proposition 3.3 *Les résonances de $-\Delta_e^N$ dans $\mathcal{V}$ sont les zéros de $\Delta_n(z)$ dans $\mathcal{V}$, $n = 0, 1, 2 \ldots$, et leur multiplicité est deux.*

Remarque Les deux suites de résonances $(z_{k,+})$ et $(z_{k,-})$ (exponentiellement proches l'une de l'autre) que l'on trouve dans [Ga2] sont donc confondues dans le cas de la boule.

https://doi.org/10.4153/CJM-2006-013-9 Published online by Cambridge University Press

3.2 Fonctions résonantes

Soit z_k une résonance, on cherche u_k sortante vérifiant

$$(\Delta_e + z_k^2)u_k = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$
$$Bu_k = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \tag{8}$$

Si on la cherche sous la forme $u_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n F_n(z_k) + \delta_n G_n(z_k)$ (voir (5)), la condition au bord s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad T_n(z_k)\begin{pmatrix}\gamma_n\\ \delta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

On sait d'après la proposition 3.3 qu'il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que z_k soit un zéro de $\det T_{\pm n_k}(z)$. Lorsque $\binom{\gamma_{\pm n_k}}{\delta_{\pm n_k}} \in \ker T_{\pm n_k}(z_k)$, puisque $\dim\ker T_{\pm n_k}(z_k) \geq 1$, les fonctions

$$u_k = \sum_{n=\pm n_k} \gamma_n F_n(z_k) + \delta_n G_n(z_k)$$

forment un espace de dimension supérieure ou égale à deux de solutions sortantes de (8). La multiplicité de la résonance z_k étant deux, cet espace est de dimension deux et c'est l'espace des fonctions résonantes associées à z_k ($F_n(z)$ et $G_n(z)$ sont bien sortantes puisque dans $L^2(\Omega)$ pour $\Im z < 0$). On a donc la proposition suivante :

Proposition 3.4 *Soit (z_k) la suite des résonances de Rayleigh, les fonctions résonantes associées sont*

$$u_k = u_k^+ + u_k^- \quad \textit{avec} \quad u_k^{\pm} = \gamma_{\pm n_k} F_{\pm n_k}(z_k) + \delta_{\pm n_k} G_{\pm n_k}(z_k)$$

où $\binom{\gamma_{\pm n_k}}{\delta_{\pm n_k}}$ appartient à l'espace de dimension 1 $\ker T_{\pm n_k}(z_k)$.

Dans le but d'estimer asymptotiquement en fonction de $\Re z_k$ les fonctions résonantes associées aux résonances de Rayleigh (celles qui convergent exponentiellement vite vers l'axe réel), nous établissons un certain nombre de lemmes. La démonstration des deux premiers est essentiellement due à Burq [Bur].

Lemme 3.5 (Estimations hyperboliques) *Soit $0 < a < 1$, dans la zone $|\Im\lambda| \leq 1$, $\mu^2 < (\Re\lambda)^2 r^2 a^2$, $\Re\lambda > 0$, on a*

$$H_\mu(\lambda r) = \Big(\frac{-\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\Re\lambda r}\sqrt{\sin\theta_0}} + 0\Big(\frac{1}{\Re\lambda}\Big)\Big)e^{-i\sin\theta_0\lambda r + i\mu\theta_0 + i\frac{3\pi}{4}}$$

et

$$H'_\mu(\lambda r) = \Big(\frac{-\sqrt{2\pi}\sqrt{\sin\theta_0}}{\sqrt{\Re\lambda r}} + 0\Big(\frac{1}{\Re\lambda}\Big)\Big)e^{-i\sin\theta_0\lambda r + i\mu\theta_0 + i\frac{\pi}{4}}$$

où l'on a posé $\theta_0 = \cos^{-1}\big(\frac{\mu}{\Re\lambda r}\big)$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2006-013-9 Published online by Cambridge University Press

Preuve On a

$$H_\mu(\lambda r) = \int_{-\infty}^{+\infty - i\pi} e^{\lambda r \sinh t - \mu t}\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda r \sinh t - \mu t} dt + e^{\mu i \pi} \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda r \sinh t - \mu t}\, dt - i \int_{0}^{\pi} e^{i(-\lambda r \sin\theta + \mu\theta)}\, d\theta$$

Sous les hypothèses du lemme, les deux premières intégrales n'ont uniformément pas de point critique, on peut donc intégrer par parties et montrer qu'elles sont uniformément majorées par $C(\Re\lambda)^{-1}$.

L'estimation de la troisième intégrale s'obtient par l'application de la phase stationnaire par rapport à $\Re\lambda$. Si l'on pose $\theta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{\mu}{\Re\lambda r}\right)$ (point critique de la phase lorsque l'on néglige $\Im\lambda$), on a $\theta_0 \in [\alpha, \pi - \alpha]$ avec $\alpha > 0$ indépendant de λ et μ. Il suffit alors d'écrire $\sin\theta = \sin\theta_0 + (\theta - \theta_0)\cos\theta_0 + (\theta - \theta_0)^2 g_{\theta_0}(\theta)$ et l'on a des bornes $\mathcal{C}^\infty$ sur g_{θ_0} uniformes par rapport à $\theta_0 \in [\alpha, \pi - \alpha]$.

L'estimation de $H'_\mu(\lambda r)$ s'obtient de la même façon. ■

Lemme 3.6 (Estimations elliptiques) *Soit $0 < a < 1$, dans la zone $|\Im\lambda| \leq 1$, $\mu^2 > (\Re\lambda)^2 r^2 a^{-2}$, $\Re\lambda > 0$, $\mu \geq 1$, on a*

$$H_\mu(\lambda r) = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\tanh t_0}} \frac{1}{\sqrt{\mu}} + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right) e^{-\lambda r \sinh t_0 + \mu t_0}$$

et

$$H'_\mu(\lambda r) = \left(\sqrt{2\pi}\sqrt{\sinh t_0 \cosh t_0} \frac{1}{\sqrt{\mu}} + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right) e^{-\lambda r \sinh t_0 + \mu t_0}$$

où l'on a posé $t_0 = \cosh^{-1}\left(\frac{\mu}{\Re\lambda r}\right)$.

Preuve Comme dans la preuve du lemme précédent on utilise la décomposition de $H_\mu(\lambda r)$ comme somme de trois intégrales. Sous les hypothèses du lemme les deux dernières intégrales n'ont uniformément pas de point critique et sont uniformément majorées.

Pour la première intégrale le point critique de la phase est $-t_0$ où l'on a posé $t_0 = \cosh^{-1}\left(\frac{\mu}{\Re\lambda r}\right)$. La méthode de la phase stationnaire par rapport à μ donne l'estimation de la première intégrale, et puisqu'elle est exponentiellement grande cela donne l'estimation de la somme des trois, les deux autres étant bornées.

La deuxième estimation s'obtient de façon identique. ■

Lemme 3.7 *Soit (z_k) la suite des résonances de Rayleigh et (n_k) la suite vérifiant $\Delta_{n_k}(z_k) = 0$. n_k admet un développement asymptotique à n'importe quel ordre en puissances de $\Re z_k$ et $n_k = c_R^{-1}\Re z_k + O(1)$.*

Preuve On a $\Delta_{n_k}(z_k) = 0$. Puisque Δ_n a un nombre fini de zéros dans $\mathcal{V}$, $n_k \to +\infty$. D'après Tokita [To], il existe un domaine de la forme

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0,\ 0 < \Im z < C_1|z|^{1/3} + C_2\}, \quad C_1 > 0, C_2 > 0$$

tel que $H_n(k_1)$ et $H_n(k_2)$ n'admettent pas de zéros dans $\mathcal{D}$. Donc, dans $\mathcal{D}$, $\Delta_n(z) = 0$ si et seulement si

$$(9)\quad \Big(\frac{k_1^2}{n^2} - 2 + 2\frac{k_2}{n^2}\frac{H_n'(k_2)}{H_n(k_2)}\Big)\Big(\frac{k_1^2}{n^2} - 2 + 2\frac{k_1}{n^2}\frac{H_n'(k_1)}{H_n(k_1)}\Big) - 4\frac{k_1k_2}{n^2}\Big(\frac{1}{k_1} - \frac{H_n'(k_1)}{H_n(k_1)}\Big)\Big(\frac{1}{k_2} - \frac{H_n'(k_2)}{H_n(k_2)}\Big) = 0$$

On pose $b_k = c_1^{-1}\frac{z_k}{n_k}$; en utilisant les asymptotiques de $\frac{H_n'(n\,\omega)}{H_n(n\omega)}$ suivant le domaine du plan complexe auquel appartient ω (voir [Ol1, Ol2, Ol3]), de la même façon que Stefanov et Vodev (dès que l'on passe aux estimations dans (9) ce sont les mêmes calculs que dans [StVo1, pp. 311–317]) on obtient par l'absurde (contradiction avec les hypothèses sur les constantes de Lamé), qu'avec $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ bien choisies, si la suite z_k appartient à $\mathcal{D}$ (ici c'est le cas car la suite z_k converge vers l'axe réel), b_k est bornée et ses valeurs d'adhérence appartiennent forcément à $]0,1[$. Soit b_{k_l} une sous-suite de b_k convergeant vers $\tilde{b}$; lorsque ω appartient à un voisinage complexe d'un nombre de $]0,1[$ on a

$$\frac{H_n'(n\omega)}{H_n(n\omega)} = -\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} + O\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

donc d'après (9) on obtient

$$\mathcal{R}(b_{k_l}) + O\Big(\frac{1}{n_{k_l}}\Big) = 0$$

où $\mathcal{R}$ est la fonction de Rayleigh. Il est connu que $\mathcal{R}$ a pour unique racine dans $]0,1[$ le nombre $c_Rc_1^{-1}$ et que cette racine est simple. On a donc $\tilde{b} = c_Rc_1^{-1}$ et la suite b_k n'ayant qu'une valeur d'adhérence est convergente. On a alors

$$\mathcal{R}(b_k) + O\Big(\frac{1}{n_k}\Big) = 0$$

et par le théorème des fonctions implicites on a $c_1^{-1}\frac{z_k}{n_k} = b_k = c_Rc_1^{-1} + O\big(\frac{1}{n_k}\big)$. On obtient donc $n_k = c_R^{-1}\Re z_k + O(1)$.

Puisque $\frac{H_n'(n\omega)}{H_n(n\omega)}$ admet un développement asymptotique à n'importe quel ordre en puissances de n (voir [Ol1, Ol2, Ol3]), de la même façon que précédemment on obtient que n_k admet un développement asymptotique à n'importe quel ordre en puissances de $\Re z_k$. ■

Lemme 3.8 (Estimations hyperboliques) *Soit $\delta > 1$. Il existe des constantes réelles $A_j < 0$, $B_j < 0$ et γ_j telles que dans la zone $r > c_jc_R^{-1}\delta$ ($j = 1,2$) on ait*

$$H_{n_k}(c_j^{-1}z_kr) = \left(\frac{A_je^{i\frac{3\pi}{4}+i\gamma_j}}{(r^2 - c_j^2c_R^{-2})^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{\Re z_k}} + O\Big(\frac{1}{\Re z_k}\Big)\right)e^{i\tau_j(r)\Re z_k}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2006-013-9 Published online by Cambridge University Press

et

$$H'_{n_k}(c_j^{-1}z_kr) = \Big(B_je^{i\frac{\pi}{4}+i\gamma_j}\frac{1}{r}(r^2 - c_j^2c_R^{-2})^{1/4}\frac{1}{\sqrt{\Re z_k}} + O\Big(\frac{1}{\Re z_k}\Big)\Big)\, e^{i\tau_j(r)\Re z_k}\ ,$$

où $\tau_j(r) = c_R^{-1}\cos^{-1}(c_jc_R^{-1}r^{-1}) - \sqrt{c_j^{-2}r^2 - c_R^{-2}}$.

Preuve D'après le lemme 3.7 $z_k = c_Rn_k + O(1)$ donc, si $r > c_jc_R^{-1}$, on a

$$c_j^{-1}\Re z_kr \sim c_j^{-1}c_Rrn_k \sim an_k$$

avec $a > 1$. Nous sommes donc en mesure d'appliquer le lemme 3.5 avec $\mu = n_k$ et $\lambda = c_j^{-1}z_k$. Cela donne

$$\begin{aligned} H_{n_k}(c_j^{-1}z_kr) = \Bigg(&\frac{-\sqrt{2\pi}}{\sqrt{c_j^{-1}r\Re z_k}\big(1 - \frac{n_k^2}{c_j^{-2}r^2(\Re z_k)^2}\big)^{1/4}} + O\Big(\frac{1}{\Re z_k}\Big)\Bigg) \\ &\times \exp\Bigg[-i\sqrt{1 - \frac{n_k^2}{c_j^{-2}r^2(\Re z_k)^2}}\,c_j^{-1}r\Re z_k + in_k\cos^{-1}\Big(\frac{n_k}{c_j^{-1}r\Re z_k}\Big) \\ &\qquad + i\frac{3\pi}{4} + \sqrt{1 - \frac{n_k^2}{c_j^{-2}r^2(\Re z_k)^2}}\,c_j^{-1}r\Im z_k\Bigg] \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.7, on a

$$n_k = c_R^{-1}\Re z_k + \alpha + O\Big(\frac{1}{\Re z_k}\Big) \tag{10}$$

où α est un nombre réel. On obtient alors la première estimation en utilisant également le fait que $\Im z_k = O\big(\frac{1}{\Re z_k}\big)$ (z_k converge exponentiellement vite vers l'axe réel). La deuxième estimation s'obtient de la même façon. ∎

Lemme 3.9 (Estimations elliptiques) *Soit* $\delta < 1$. *Il existe des constantes* $D_j > 0$ *et* $E_j > 0$ *telles que dans la zone* $1 \le r < c_jc_R^{-1}\delta$ *(*$j = 1, 2$*) on ait*

$$H_{n_k}(c_j^{-1}z_kr) = \Big(\frac{D_j}{(c_j^2c_R^{-2} - r^2)^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{\Re z_k}} + O\Big(\frac{1}{\Re z_k}\Big)\Big)\, e^{S_j(r)\Re z_k}$$

et

$$H'_{n_k}(c_j^{-1}z_kr) = \Big(\frac{E_j}{r}\big(c_j^2c_R^{-2} - r^2\big)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{\Re z_k}} + O\Big(\frac{1}{\Re z_k}\Big)\Big)\, e^{S_j(r)\Re z_k}$$

où $S_j(r) = c_R^{-1}\cosh^{-1}\big(c_jc_R^{-1}r^{-1}\big) - \sqrt{c_R^{-2} - c_j^{-2}r^2}$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2006-013-9 Published online by Cambridge University Press

Preuve Si $r < c_j c_R^{-1}$, on a

$$c_j^{-1} \Re z_k r \sim c_j^{-1} c_R r n_k \sim a n_k$$

avec $a < 1$. Nous sommes donc en mesure d'appliquer le lemme 3.6 avec $\mu = n_k$ et $\lambda = c_j^{-1} z_k$. Cela donne

$$\begin{aligned} H_{n_k}(c_j^{-1} z_k r) = &\left(\frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{n_k}{c_j^{-1} r \Re z_k}}}{\sqrt{n_k}\left(\frac{n_k^2}{c_j^{-2} r^2 (\Re z_k)^2} - 1\right)^{1/4}} + O\Big(\frac{1}{n_k}\Big)\right) \\ &\times \exp\left[-c_j^{-1} r \Re z_k \sqrt{\frac{n_k^2}{c_j^{-2} r^2 (\Re z_k)^2} - 1} + n_k \cosh^{-1}\Big(\frac{n_k}{c_j^{-1} r \Re z_k}\Big) \right. \\ &\left. \qquad - i c_j^{-1} r \Im z_k \sqrt{\frac{n_k^2}{c_j^{-2} r^2 (\Re z_k)^2} - 1} \right]. \end{aligned}$$

De la même façon que pour le lemme 3.8 on obtient alors la première estimation en appliquant les lemmes 3.6 et 3.7. La deuxième estimation s'obtient de la même façon. ∎

Remarques

- Le calcul de $\tau_j(r)$ n'est pas vraiment utile pour la suite.
- On peut expliciter A_j et B_j. Par contre, pour expliciter γ_j, D_j et E_j, il faudrait calculer α (voir (10)), ce qui est possible à l'aide des asymptotiques de Olver (voir le lemme 3.7).
- Dans les lemmes 3.8 et 3.9 on peut remplacer n_k par $n_k + 1/2$, et c'est cela qui nous servira pour la dimension trois.

Lemme 3.10 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\frac{\gamma_{\pm n_k}}{\delta_{\pm n_k}} = \left(\pm iC + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\Re z_k}}\Big)\right) e^{(S_1(1) - S_2(1))\Re z_k}.$$

Preuve D'après la proposition 3.4 on a $T_{\pm n_k}(z_k)\binom{\gamma_{\pm n_k}}{\delta_{\pm n_k}} = \binom{0}{0}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (11) \quad &\big((c_1^{-2} z_k^2 - 2n_k^2) H_{n_k}(c_2^{-1} z_k) + 2c_2^{-1} z_k H'_{n_k}(c_2^{-1} z_k)\big)\, \gamma_{\pm n_k} \\ &\qquad \mp 2 i n_k \big(H_{n_k}(c_1^{-1} z_k) - c_1^{-1} z_k H'_{n_k}(c_1^{-1} z_k)\big)\, \delta_{\pm n_k} = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (12) \quad &\pm 2 i n_k \big(H_{n_k}(c_2^{-1} z_k) - c_2^{-1} z_k H'_{n_k}(c_2^{-1} z_k)\big)\, \gamma_{\pm n_k} \\ &\qquad + \big((c_1^{-2} z_k^2 - 2n_k^2) H_{n_k}(c_1^{-1} z_k) + 2c_1^{-1} z_k H'_{n_k}(c_1^{-1} z_k)\big)\, \delta_{\pm n_k} = 0. \end{aligned}$$

On a $z_k = \Re z_k + O(1)$ et d'après le lemme 3.7

$$n_k = c_R^{-1}\Re z_k + O(1) \quad \text{et} \quad c_1^{-2}z_k^2 - 2n_k^2 = (c_1^{-2} - 2c_R^{-2})(\Re z_k)^2 + O(\Re z_k).$$

Puisque $c_R < c_1$ on a $c_1^{-2} - 2c_R^{-2} < 0$. Une simple application du lemme 3.9 dans le cas $r = 1$ permet alors de déduire de (11) et (12) le résultat. ■

Lemme 3.11

(i) *Lorsque* $r < c_j c_R^{-1}$, $S_j(r) > 0$ *et* $S_j'(r) < 0$, *et* $S_j(c_j c_R^{-1}) = 0$.

(ii) *Lorsque* $r < c_1 c_R^{-1}$, $0 < S_1(r) < S_2(r)$ *et* $S_2'(r) < S_1'(r) < 0$.

Preuve Posons $\varphi(t) = c_R^{-1}\cosh^{-1}(c_R^{-1}t) - (c_R^{-2} - t^{-2})^{\frac{1}{2}}$ pour $t \geq c_R$. Pour tout $t > c_R$ on a $\varphi'(t) = \frac{1}{t}(c_R^{-2} - t^{-2})^{\frac{1}{2}} > 0$. On en déduit que lorsque $r < c_j c_R^{-1}$, puisque $c_R < c_j r^{-1}$, on a $\varphi(c_R) < \varphi(c_j r^{-1})$, c'est-à-dire $S_j(r) > 0$. Pour $r < c_j c_R^{-1}$ on a $S_j(r) = \varphi(c_j r^{-1})$ donc $S_j'(r) = -\frac{1}{r}(c_R^{-2} - c_j^{-2}r^2)^{\frac{1}{2}} < 0$. Il est alors clair que pour $r < c_1 c_R^{-1}$ on a $S_2'(r) < S_1'(r) < 0$. Lorsque $r < c_1 c_R^{-1}$, $c_2 r^{-1} > c_1 r^{-1} > c_R$ donc $\varphi(c_2 r^{-1}) > \varphi(c_1 r^{-1}) > \varphi(c_R)$, c'est-à-dire $S_2(r) > S_1(r) > 0$. ■

Les fonctions $S_1(r)$ et $S_2(r)$ sont donc décroissantes et $S_2(r)$ décroît plus vite que $S_1(r)$.

Définition 3.12 Nous noterons que pour x dans $\mathcal{U}$ on a $g(x; z_k) = \widetilde{O}(1)$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que $g(x; z_k) = O\left(e^{-C\Re z_k}\right)$ uniformément par rapport à x dans $\mathcal{U}$ ainsi que ses dérivées par rapport à x.

3.2.1 Conclusion

D'après la proposition 3.4 et (5) on a

$$\begin{aligned}
(13) \qquad u_k^{\pm} &= \delta_{\pm n_k}\Big(\frac{\gamma_{\pm n_k}}{\delta_{\pm n_k}} F_{\pm n_k}(z_k) + G_{\pm n_k}(z_k)\Big) \\
&= \delta_{\pm n_k}\Big(\frac{\gamma_{\pm n_k}}{\delta_{\pm n_k}}\nabla\big(e^{\pm i n_k\theta}H_{n_k}(c_2^{-1}z_k r)\big) + \begin{pmatrix}-\partial_{x_2}\\ \partial_{x_1}\end{pmatrix}\big(e^{\pm i n_k\theta}H_{n_k}(c_1^{-1}z_k r)\big)\Big) \\
&= u_k^{\pm,2} + u_k^{\pm,1}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
(14) \qquad u_k^{\pm,1} = \delta_{\pm n_k} e^{\pm i n_k\theta}\Bigg(&\mp i n_k r^{-1} H_{n_k}(c_1^{-1}z_k r)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \\
&+ c_1^{-1} z_k H_{n_k}'(c_1^{-1}z_k r)\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\Bigg)
\end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2006-013-9 Published online by Cambridge University Press

et

$$(15)\quad u_k^{\pm,2} = \gamma_{\pm n_k} e^{\pm i n_k \theta} \left(c_2^{-1} z_k H'_{n_k}(c_2^{-1} z_k r) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \pm i n_k r^{-1} H_{n_k}(c_2^{-1} z_k r) \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right).$$

Des lemmes 3.8, 3.9, 3.10 et 3.11 on peut alors déduire le comportement asymptotique des fonctions résonantes $u_k^{\pm}$. Soit $\delta > 1$.

D'après les lemmes 3.8 et 3.9, si $1 \le r < \frac{1}{\delta} c_1 c_R^{-1}$,

$$(16)\quad u_k^{\pm,1} = \frac{1}{r} (\Re z_k)^{1/2} \big(1 + O\big((\Re z_k)^{-1/2} \big) \big) e^{S_1(r) \Re z_k} \times \delta_{\pm n_k} e^{\pm i n_k \theta} \left(\frac{\mp i A}{(c_1^2 c_R^{-2} - r^2)^{1/4}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + B (c_1^2 c_R^{-2} - r^2)^{1/4} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right)$$

et si $r > \delta c_1 c_R^{-1}$,

$$(17)\quad u_k^{\pm,1} = \frac{1}{r} (\Re z_k)^{1/2} \big(1 + O\big((\Re z_k)^{-1/2} \big) \big) e^{i\tau_1(r) \Re z_k} \times \delta_{\pm n_k} e^{\pm i n_k \theta} \left(\frac{\mp C}{(r^2 - c_1^2 c_R^{-2})^{1/4}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + D (r^2 - c_1^2 c_R^{-2})^{1/4} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right)$$

où A, B sont des constantes réelles et C, D des constantes complexes.

D'après les lemmes 3.8, 3.9, 3.10 et (15), si $1 \le r < c_2 c_R^{-1}$, on a

$$(18)\qquad u_k^{\pm,2} = \delta_{n_k} O\big(\sqrt{\Re z_k} e^{(S_1(1) - S_2(1) + S_2(r)) \Re z_k} \big)$$

et puisque S_2 décroît plus vite que S_1 d'après le lemme 3.11, pour $r > 1$ on obtient

$$(19)\qquad u_k^{\pm} = u_k^{\pm,1} (1 + \widetilde{O}(1)).$$

C'est-à-dire que dès que l'on décolle du bord de l'obstacle ($r > 1$), la composante de $u_k^{\pm}$ associée à la plus grande des deux vitesses d'onde ($u_k^{\pm,2}$) est exponentiellement petite par rapport à celle associée à la plus petite des deux vitesses ($u_k^{\pm,1}$).

On donnera un énoncé précis sur l'asymptotique des fonctions résonantes, de norme 1 dans un domaine compact, à la fin de la section 3, voir la proposition 3.15.

3.3 Partie imaginaire des résonances

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 1.1 dans le cas de la dimension deux.

https://doi.org/10.4153/CJM-2006-013-9 Published online by Cambridge University Press

Soit r_0 vérifiant $c_1 c_R^{-1} < r_0 < c_2 c_R^{-1}$; on considère la couronne $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq r \leq r_0\}$ et Γ_0 le cercle de centre O et de rayon r_0. Puisque $-\Delta_e u_k^{\pm} = z_k^2 u_k^{\pm}$ dans Ω et $Bu_k^{\pm} = 0$ sur Γ, la formule de Green dans Ω_0 donne

$$\int_{\Omega_0} -\Delta_e u_k^{\pm} \cdot \overline{u_k^{\pm}} - \int_{\Omega_0} u_k^{\pm} \cdot \overline{-\Delta_e u_k^{\pm}} = -\int_{\Gamma_0} Bu_k^{\pm} \cdot \overline{u_k^{\pm}}$$

d'où

$$\Im(z_k^2) \cdot \|u_k^{\pm}\|^2_{L^2(\Omega_0)} = -\Im\Big(\int_{\Gamma_0} Bu_k^{\pm} \cdot \overline{u_k^{\pm}}\Big). \tag{20}$$

Lemme 3.13 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$-\Im\Big(\int_{\Gamma_0} Bu_k^{\pm} \cdot \overline{u_k^{\pm}}\, ds\Big) = |\delta_{\pm n_k}|^2 \Big(C(\Re z_k)^2 + O\big((\Re z_k)^{3/2}\big)\Big).$$

Preuve D'après le lemme 3.11, au voisinage de $r = r_0$ on a

$$S_2(r) + S_1(1) - S_2(1) < S_2(c_1 c_R^{-1}) - S_2(1) - \big(S_1(c_1 c_R^{-1}) - S_1(1)\big) < 0, \tag{21}$$

donc avec (18) on obtient

$$u_k^{\pm,2} = \delta_{\pm n_k} \widetilde{O}(1).$$

On en déduit

$$u_k^{\pm} = u_k^{\pm,1} + \delta_{\pm n_k} \widetilde{O}(1),$$

d'où en $r = r_0$ on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta_{\pm n_k}} Bu_k^{\pm} &= \big(z_k^2 H''_{n_k}(c_1^{-1} z_k r_0) - c_1 z_k r_0^{-1} H'_{n_k}(c_1^{-1} z_k r_0) + c_1^2 n_k^2 r_0^{-2} H_{n_k}(c_1^{-1} z_k r_0)\big)\\ &\quad\times e^{\pm i n_k \theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix} \pm 2c_1^2 i n_k r_0^{-2}\left(H_{n_k}(c_1^{-1} z_k r_0) - c_1^{-1} z_k r_0 H'_{n_k}(c_1^{-1} z_k r_0)\right)\\ &\quad\times e^{\pm i n_k \theta}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} + \widetilde{O}(1).\end{aligned}$$

Puisque H_{n_k} vérifie l'équation de Bessel on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta_{\pm n_k}} Bu_k^{\pm} &= \big((2c_1^2 n_k^2 r_0^{-2} - z_k^2) H_{n_k}(c_1^{-1} z_k r_0) - 2c_1 z_k r_0^{-1} H'_{n_k}(c_1^{-1} z_k r_0)\big)\\ &\quad\times e^{\pm i n_k \theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix} \pm 2c_1^2 i n_k r_0^{-2}\big(H_{n_k}(c_1^{-1} z_k r_0) - c_1^{-1} z_k r_0 H'_{n_k}(c_1^{-1} z_k r_0)\big)\\ &\quad\times e^{\pm i n_k \theta}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} + \widetilde{O}(1)\end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2006-013-9 Published online by Cambridge University Press

et donc, avec le lemme 3.8 on obtient (en $r = r_0$)

$$\frac{1}{|\delta_{\pm n_k}|^2} Bu_k^\pm \cdot \overline{u_k^\pm} = -2r_0^{-1}|z_k|^2 \left|H'_{n_k}(c_1^{-1}z_k r_0)\right|^2 - 2c_1^2 r_0^{-3} n_k^2 \left|H_{n_k}(c_1^{-1}z_k r_0)\right|^2$$
$$+ \left(2c_1^2 r_0^{-2} n_k^2 - z_k^2\right) c_1^{-1} \overline{z_k} H_{n_k}(c_1^{-1}z_k r_0)\overline{H'_{n_k}(c_1^{-1}z_k r_0)}$$
$$+ 2c_1 r_0^{-2} n_k^2 z_k H'_{n_k}(c_1^{-1}z_k r_0)\overline{H_{n_k}(c_1^{-1}z_k r_0)} + \widetilde{O}(1).$$

Après calculs on obtient

$$\frac{1}{|\delta_{\pm n_k}|^2} \Im\left(Bu_k^\pm \cdot \overline{u_k^\pm}\right) = -c_1^{-1}|z_k|^2 \Im\left(z_k H_{n_k}(c_1^{-1}z_k r_0)\overline{H'_{n_k}(c_1^{-1}z_k r_0)}\right) + \widetilde{O}(1),$$

et en utilisant le fait que $\Im z_k = \widetilde{O}(1)$ puis le lemme 3.8 cela donne

$$\frac{1}{|\delta_{\pm n_k}|^2} \Im\left(Bu_k^\pm \cdot \overline{u_k^\pm}\right) = -c_1^{-1}|z_k|^2 \Re z_k \Im\left(H_{n_k}(c_1^{-1}z_k r_0)\overline{H'_{n_k}(c_1^{-1}z_k r_0)}\right) + \widetilde{O}(1)$$
$$= -c_1^{-1}\frac{A_1 B_1}{r_0}(\Re z_k)^2 + O\left((\Re z_k)^{3/2}\right),$$

où A_1 et B_1 sont les constantes strictement négatives du lemme 3.8. On obtient le résultat par intégration de la dernière égalité avec $C = 2\pi c_1^{-1} A_1 B_1$. ■

Lemme 3.14 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u_k^\pm\|^2_{L^2(\Omega_0)} = |\delta_{\pm n_k}|^2 \left(C + O\left(\frac{1}{\sqrt{\Re z_k}}\right)\right) e^{2S_1(1)\Re z_k}.$$

Preuve Soit r_1 vérifiant $1 < r_1 < c_1 c_R^{-1}$. Remarquons d'abord que d'après la conclusion de la section 3.2.1, pour $r \geq r_1$ on a

$$N := \frac{1}{|\delta_{\pm n_k}|^2} e^{-2S_1(1)\Re z_k}|u_k^\pm|^2 = O\left(\Re z_k e^{2(S_1(r_1)-S_1(1))}\right) = \widetilde{O}(1).$$

Il suffit donc de démontrer le lemme avec Ω_0 remplacé par $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^2/1 \leq r \leq r_1\}$. D'après (13), (14) et (15) on a

$$\frac{1}{|\delta_{\pm n_k}|^2}|u_k^\pm|^2 = \left|\frac{\gamma_{\pm n_k}}{\delta_{\pm n_k}} c_2^{-1} z_k H'_{n_k}(c_2^{-1}z_k r) \mp i n_k r^{-1} H_{n_k}(c_1^{-1}z_k r)\right|^2$$
$$+ \left|\pm\frac{\gamma_{\pm n_k}}{\delta_{n_k}} i n_k r^{-1} H_{n_k}(c_2^{-1}z_k r) + c_1^{-1} z_k H'_{n_k}(c_1^{-1}z_k r)\right|^2.$$

Avec les lemmes 3.9 et 3.10 on en déduit que pour $1 \leq r \leq r_1$ on a

$$N = \sum_{p=1}^{2}\left(C_{1,p}(r)^2 \Re z_k + O\left(\sqrt{\Re z_k}\right)\right) e^{2(S_1(r)-S_1(1))\Re z_k}$$
$$+ \left(C_{2,p}(r)^2 \Re z_k + O\left(\sqrt{\Re z_k}\right)\right) e^{2(S_2(r)-S_2(1))\Re z_k}$$
$$- \left(2C_{1,p}(r)C_{2,p}(r)\Re z_k + O\left(\sqrt{\Re z_k}\right)\right) e^{(S_2(r)-S_2(1)+S_1(r)-S_1(1))\Re z_k}$$

où les quantités $C_{i,p}(r) > 0$ ($i = 1,2$ $p = 1,2$) dépendent régulièrement de la variable r. D'après le lemme 3.11 $S_1'(1) < 0$ et $S_2'(1) < 0$, on a donc

$$\int_1^{r_1} N\,dr = \underbrace{\sum_{p=1}^{2} \frac{C_{1,p}(1)^2}{-2S_1'(1)} + \frac{C_{2,p}(1)^2}{-2S_2'(1)} - 2\frac{C_{1,p}(1)C_{2,p}(1)}{-S_1'(1) - S_2'(1)}}_{:=C} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\Re z_k}}\Big).$$

D'après le lemme 3.11 $S_2'(1) < S_1'(1) < 0$ donc

$$\begin{aligned} C &= \sum_{p=1}^{2} \frac{1}{-2S_1'(1)}\Big(C_{1,p}(1) - 2\frac{S_1'(1)}{S_1'(1)+S_2'(1)}C_{2,p}(1)\Big)^2 \\ &\quad + \frac{1}{-2S_2'(1)}\frac{(S_1'(1)-S_2'(1))^2}{(S_1'(1)+S_2'(1))^2}C_{2,p}(1)^2 \\ &> 0 \end{aligned} \tag{22}$$

On obtient alors l'estimation demandée avec Ω_0 remplacé par Ω_1. Cela termine la preuve du lemme. ■

Preuve du théorème Il suffit de combiner (20) avec les estimations des lemmes 3.13 et 3.14 pour obtenir le théorème 1.1 dans le cas où la dimension est deux et le rayon de l'obstacle $R = 1$. On a $S = S_1(1)$. Pour obtenir le théorème lorsque R est quelconque il suffit d'appliquer la remarque faite à fin de la démonstration de la proposition 3.15. ■

3.4 Comportement asymptotique des fonctions résonantes

Nous sommes en mesure de donner l'asymptotique des fonctions résonantes associées aux résonances de Rayleigh.

Proposition 3.15 *Soit (z_k) la suite des résonances de Rayleigh créées par le disque de centre O et de rayon R. On considère $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le r \le r_0\}$ où $r_0 > c_1 c_R^{-1} R$. Soit u_k les fonctions résonantes associées aux résonances z_k, de norme 1 dans $L^2(\Omega_0)$.*

Soit $\delta > 1$. Si $\delta R < r < \frac{1}{\delta} c_1 c_R^{-1} R$,

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{r}(\Re z_k)^{1/2}\big(1 + O\big((\Re z_k)^{-1/2}\big)\big)\, e^{(S_1(\frac{r}{R}) - S_1(1))R\Re z_k} \\ &\quad \times \sum_{\sigma=+,-} \delta_{\sigma n_k} e^{\sigma i n_k \theta}\Bigg(\frac{-\sigma i A}{(c_1^2 c_R^{-2} R^2 - r^2)^{1/4}}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} \\ &\quad + B(c_1^2 c_R^{-2} R^2 - r^2)^{1/4}\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}\Bigg), \end{aligned}$$

où $S_1(x) = c_R^{-1}\cosh^{-1}(c_1 c_R^{-1} x^{-1}) - \sqrt{c_R^{-2} - c_1^{-2} x^2}$, $|\delta_{n_k}|^2 + |\delta_{-n_k}|^2 = 1$ et A, B sont des constantes réelles > 0.

https://doi.org/10.4153/CJM-2006-013-9 Published online by Cambridge University Press

Si $r > \delta c_1 c_R^{-1} R$,

$$u_k = \frac{1}{r}(\Re z_k)^{1/2}\big(1 + O\big((\Re z_k)^{-1/2}\big)\big)\, e^{i\tau_1(\frac{r}{R})R\Re z_k} e^{-S_1(1)R\Re z_k} \times \sum_{\sigma=+,-} \delta_{\sigma n_k} e^{\sigma i n_k \theta}\Bigg(\frac{-\sigma C}{(r^2 - c_1^2 c_R^{-2} R^2)^{1/4}}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + D(r^2 - c_1^2 c_R^{-2} R^2)^{1/4}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\Bigg),$$

où $\tau_1(x) = c_R^{-1}\cos^{-1}(c_1 c_R^{-1} x^{-1}) - (c_1^{-2}x^2 - c_R^{-2})^{\frac{1}{2}}$, $|\delta_{n_k}|^2 + |\delta_{-n_k}|^2 = 1$ *et* C, D *sont des constantes complexes non nulles.* (n_k) *est une suite d'entiers vérifiant* $n_k = c_R^{-1} R \Re z_k + O(1)$.

Preuve D'abord, si u_k désigne une fonction résonante, puisque la famille $\big(e^{in\theta}\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthogonale dans $L^2(S^1)$, on a $\|u_k\|^2_{L^2(\Omega_0)} = \|u_k^+\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \|u_k^-\|^2_{L^2(\Omega_0)}$, et avec le lemme 3.14 on obtient

$$\|u_k\|^2_{L^2(\Omega_0)} = \Big(C + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\Re z_k}}\Big)\Big)\, e^{2S_1(1)\Re z_k} \sum_{\sigma=+,-} |\delta_{\sigma n_k}|^2.$$

On déduit alors la proposition dans le cas $R = 1$ de (16), (17) et (19).

Pour obtenir la proposition lorsque R est quelconque, il suffit d'utiliser

$$H_{n_k}(c_j^{-1} z_k r) = H_{n_k}\Big(c_j^{-1} R z_k \frac{r}{R}\Big) \quad \text{et} \quad R z_k = c_R n_k + O(1). \qquad \blacksquare$$

4 Dimension trois

Par souci de simplicité nous ferons les démonstrations dans le cas où Γ est de rayon $R = 1$.

4.1 Notations et caractérisation des résonances

Dans cette section nous allons introduire les notations de Stefanov et Vodev et rappeler les résultats qui nous seront utiles, voir [StVo1] pour plus de détails. Nous noterons (r, φ, θ) les coordonnées sphériques définies par $x = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$, $-\pi \le \varphi \le \pi$, $0 \le \theta \le \pi$. Notons $P_n^m(z)$, n, $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \le n$ les fonctions de Ferrer définies par

$$P_n^m(z) = (2^n n!)^{-1}(1 - z^2)^{m/2}\,(\partial_z)^{m+n}\,(z^2 - 1)^n.$$

Les fonctions propres de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur la sphère sont

$$Y_{emn}(\omega) = \cos m\varphi P_n^m(\cos\theta) \quad \text{et} \quad Y_{omn}(\omega) = \sin m\varphi P_n^m(\cos\theta),$$

où $\omega = \frac{x}{r}$. On définit les harmoniques sphériques vectorielles $P_{\sigma mn}$, $B_{\sigma mn}$ et $C_{\sigma mn}$ $(n, m \in \mathbb{Z}_+, m \leq n, \sigma = e, o)$ par

$$P_{\sigma mn}(\omega) = \omega Y_{\sigma mn}(\omega), \quad C_{\sigma mn}(\omega) = (n(n+1))^{-1/2} \operatorname{rot}[x Y_{\sigma mn}(\omega)]_{|_{r=1}},$$
$$B_{\sigma mn} = \omega \times C_{\sigma mn},$$

qui forment une base orthogonale dans $L^2(S^2)$. Notons $h_n(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} H_{n+1/2}(z)$ où $H_\mu(z) = \int_{-\infty}^{+\infty - i\pi} e^{z \sinh t - \mu t}\, dt$ est une fonction de Hankel et $L_{\sigma mn}$, $M_{\sigma mn}$ et $N_{\sigma mn}$ les fonctions

$$L_{\sigma mn}(x, k) = k^{-1} \operatorname{grad}(Y_{\sigma mn}(\omega) h_n(kr)),$$
$$M_{\sigma mn}(x, k) = \operatorname{rot}(x Y_{\sigma mn}(\omega) h_n(kr)),$$
$$N_{\sigma mn}(x, k) = k^{-1} \operatorname{rot} M_{\sigma mn}(x, k).$$

On a le lemme suivant, voir [MoFe] :

Lemme 4.1

(i) *$L_{\sigma mn}(x, k)$, $M_{\sigma mn}(x, k)$, $N_{\sigma mn}(x, k)$ sont solutions vectorielles dans $\mathbb{R}^3$ de l'équation $(\Delta + k^2)u = 0$.*
(ii) *Posons $k_1 = c_1^{-1} z$, $k_2 = c_2^{-1} z$, alors $L_{\sigma mn}(x, k_2)$, $M_{\sigma mn}(x, k_1)$, $N_{\sigma mn}(x, k_1)$ sont solutions dans $\mathbb{R}^3$ de l'équation $(\Delta_e + z^2)u = 0$.*

Les résonances de $-\Delta_e^N$, qui sont les pôles de $R_\chi(z)$, sont aussi les pôles du problème aux limites suivant :

$$(23) \qquad \begin{aligned} (-\Delta_e - z^2)v &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ Bv &= g \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

(voir la proposition 2.1 pour plus de détails). Le problème (23) se résout explicitement. Tout $g \in H^{1/2}(S^2)$ peut s'écrire sous la forme

$$g = \sum g_{\sigma mn} \text{ où } g_{\sigma mn} = \alpha_{\sigma mn} P_{\sigma mn} + \beta_{\sigma mn} B_{\sigma mn} + \gamma_{\sigma mn} C_{\sigma mn}.$$

Pour $\Im z < 0$ nous cherchons une solution du problème (23) sous la forme

$$v = \sum v_{\sigma mn} \text{ où } v_{\sigma mn} = a_{\sigma mn} L_{\sigma mn}(x, k_2) + b_{\sigma mn} M_{\sigma mn}(x, k_1) + c_{\sigma mn} N_{\sigma mn}(x, k_1)\ .$$

La condition au bord s'écrit alors

$$T_n(z)\, {}^t(a_{\sigma mn}, c_{\sigma mn}, b_{\sigma mn}) = -k_1^2\, {}^t(\alpha_{\sigma mn}, \beta_{\sigma mn}, \gamma_{\sigma mn})\ ,$$

où $T_n(z) = (T_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}}$ est une matrice d'ordre 3 ayant pour coefficients

$$
\begin{aligned}
T_{11} &= z^2[k_2^{-1}(k_1^2 - 2k_2^2)h_n(k_2) - 2k_2 h_n''(k_2)] \\
T_{12} &= 2z^2 n(n+1)k_1^{-1}(h_n(k_1) - k_1 h_n'(k_1)) \\
T_{13} &= T_{23} = T_{31} = T_{32} = 0 \\
T_{21} &= 2z^2(n(n+1))^{1/2}k_2^{-1}(h_n(k_2) - k_2 h_n'(k_2)) \\
T_{22} &= -z^2(n(n+1))^{1/2}k_1^{-1}[k_1^2 h_n(k_1) + 2(-h_n(k_1) \\
&\qquad + k_1 h_n'(k_1) + k_1^2 h_n''(k_1))] \\
T_{33} &= z^2(n(n+1))^{1/2}(h_n(k_1) - k_1 h_n'(k_1)).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Du fait de la densité des combinaisons linéaires finies de $P_{\sigma mn}$, $B_{\sigma mn}$, $C_{\sigma mn}$ dans $H^{1/2}(S^2)$ Stefanov et Vodev montrent que les résonances de $-\Delta_e^N$ sont les pôles du problème (23) pour des fonctions g ayant un développement en série de Fourier fini. Les résonances sont finalement les zéros de $\det T_n(z)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

De plus, il existe un domaine $\mathcal{D}$ de la forme $\Im z < C_1|z|^{1/3} + C_2$ $(C_1, C_2 > 0)$ tel que $h_n(k_1)$, $h_n(k_2)$ et $h_n(k_1) - k_1 h_n'(k_1)$ n'aient pas de zéro dans $\mathcal{D}$, voir Tokita [To]. Dans $\mathcal{D}$, les résonances sont donc les zéros de $\Delta_n = \det \mathcal{T}_n(z)$ où l'on a posé

$$\mathcal{T}_n(z) = (T_{ij})_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 2}}.$$

Résumons leurs principaux résultats dans la proposition suivante :

Proposition 4.2 ([StVo1]) *Il existe une suite de résonances (z_k) et une suite d'entiers (n_k) telles que $\Delta_{n_k}(z_k) = 0$. z_k admet un développement asymptotique à n'importe quel ordre en puissances de n_k, les résonances z_k sont de multiplicité $2n_k + 1$ et l'on a*

$$z_k = \frac{c_R}{R} n_k + O(1).$$

Il existe des constantes $C > 0$ et $\gamma > 0$ telles que

$$0 \le \Im z_k \le C e^{-\gamma \Re z_k}.$$

Dans un certain domaine $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0, \Im z < C_1|z|^{1/3} + C_2\}$ $(C_1, C_2 > 0)$, il n'y a pas d'autre résonance que les résonances z_k.

Nous voulons préciser le γ optimal.

4.2 Fonctions résonantes

Nous allons étudier les fonctions résonantes associées aux résonances de Rayleigh, c'est-à-dire les résonances de la proposition 4.2.

Définissons les fonctions

$$u_k = \sum_{\substack{0\le m\le n_k\\ \sigma=e,o}} a_{\sigma m n_k} L_{\sigma m n_k}(x,k_2) + b_{\sigma m n_k} M_{\sigma m n_k}(x,k_1) + c_{\sigma m n_k} N_{\sigma m n_k}(x,k_1)$$

telles que

$$T_{n_k}(z_k)\begin{pmatrix} a_{\sigma m n_k}\\ c_{\sigma m n_k}\\ b_{\sigma m n_k}\end{pmatrix} = 0.$$

D'après la section précédente, ce sont des solutions sortantes du problème

$$(25)\qquad \begin{gathered}(-\Delta_e - z_k^2)u = 0 \quad \text{dans } \Omega\\ Bu = 0 \quad \text{sur } \Gamma\end{gathered}$$

Puisque $h_n(k_1) - k_1 h_n'(k_1)$ ne s'annule pas dans $\mathcal{D}$, d'après (24) on a $b_{\sigma m n_k} = 0$ et le rang de $\mathcal{T}_{n_k}(z_k)$ est supérieur ou égal à 1. Son déterminant $\Delta_{n_k}(z_k)$ étant nul, $\mathcal{T}_{n_k}(z_k)$ est de rang 1. Les fonctions de la forme u_k et solutions de (25) forment donc un espace de dimension $2n_k + 1$. Les résonances z_k étant de multiplicité $2n_k + 1$, on obtient la proposition suivante :

Proposition 4.3 *Les fonctions résonantes associées aux résonances z_k sont les fonctions*

$$u_k = \sum_{\substack{0\le m\le n_k\\ \sigma=e,o}} u_{\sigma m n_k} \quad \text{où} \quad u_{\sigma m n_k} = a_{\sigma m n_k} L_{\sigma m n_k}(x,k_2) + c_{\sigma m n_k} N_{\sigma m n_k}(x,k_1)$$

avec $k_1 = c_1^{-1} z_k$, $k_2 = c_2^{-1} z_k$ et $\mathcal{T}_{n_k}(z_k)\binom{a_{\sigma m n_k}}{c_{\sigma m n_k}} = 0$.

Lemme 4.4 *Si $\mathcal{T}_{n_k}(z_k)\binom{a_{\sigma m n_k}}{c_{\sigma m n_k}} = 0$, il existe une constante $C < 0$ telle que*

$$\frac{a_{\sigma m n_k}}{c_{\sigma m n_k}} = \big(C\Re z_k + O\big(\sqrt{\Re z_k}\big)\big)\, e^{(S_1(1)-S_2(1))\Re z_k}.$$

Preuve On a $T_{11} a_{\sigma m n_k} + T_{12} c_{\sigma m n_k} = 0$. On a $h_n(z) = \big(\frac{\pi}{2z}\big)^{1/2} H_{n+1/2}(z)$ et $h_n''(z) + \frac{2}{z}h_n'(z) + \big(1 - \frac{n(n+1)}{z^2}\big)h_n(z) = 0$. On a également $z_k = \Re z_k + O(1)$ et $n_k = c_R^{-1}\Re z_k + O(1)$. En appliquant le lemme 3.9 en $r = 1$, on a alors successivement

$$\begin{aligned}(26)\qquad T_{11} &= z_k^2[k_2^{-1}(k_1^2 - 2k_2^2)h_{n_k}(k_2) - 2k_2 h_{n_k}''(k_2)]\\ &= z_k^2[(k_1^2k_2^{-1} - 2k_2^{-1}n_k(n_k+1))h_{n_k}(k_2) + 4h_{n_k}'(k_2)]\\ &= \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{1/2} z_k^2[(k_1^2k_2^{-1} - 2k_2^{-1}n_k(n_k+1) - 2k_2^{-1})k_2^{-1/2}H_{n_k+1/2}(k_2)\\ &\qquad + 4k_2^{-1/2}H_{n_k+1/2}'(k_2)]\\ &= \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{1/2}(c_1^{-2}c_2 - 2c_2c_R^{-2})c_2^{1/2}\frac{D_2}{(c_2^2c_R^{-2}-1)^{1/4}}\\ &\qquad \times (\Re z_k)^2\big(1 + O\big((\Re z_k)^{-1/2}\big)\big)\, e^{S_2(1)\Re z_k}.\end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2006-013-9 Published online by Cambridge University Press

et

$$T_{12} = 2z_k^2 n_k(n_k+1)k_1^{-1}(h_{n_k}(k_1) - k_1 h'_{n_k}(k_1)) \tag{27}$$
$$= 2\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{1/2} z_k^2 n_k(n_k+1)k_1^{-1}\Big(\frac{3}{2}k_1^{-1/2}H_{n_k+1/2}(k_1) - k_1^{1/2}H'_{n_k+1/2}(k_1)\Big)$$
$$= -(2\pi)^{1/2} c_R^{-2} c_1^{1/2} E_1(c_1^2 c_R^{-2} - 1)^{1/4}$$
$$\times (\Re z_k)^3\Big(1 + O\big((\Re z_k)^{-1/2}\big)\Big)e^{S_1(1)\Re z_k}.$$

Puisque $c_R < c_1$ on a $c_1^{-2}c_2 - 2c_2c_R^{-2} = c_2(c_1^{-2} - 2c_R^{-2}) < 0$, et on déduit l'estimation demandée avec (26) et (27). ■

4.2.1 Calcul vectoriel dans les coordonnées sphériques

Nous donnons quelques formules pour les coordonnées sphériques définies au début de la section 4.1.

$$\nabla = \omega\partial_r + \frac{1}{r}\omega'\partial_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\omega''\partial_\varphi$$

où

$$\omega = \frac{x}{r} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}, \quad \omega' = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi\\ -\sin\theta\end{pmatrix}, \quad \omega'' = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}.$$

$(\omega,\omega',\omega'')$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. Soit f une fonction à valeurs scalaires, on a

$$\mathrm{rot}(f\omega) = \frac{1}{r}\Big(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi f\omega' - \partial_\theta f\omega''\Big)$$

et

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(f\omega)) = -\frac{1}{r^2}\Big(\partial_{\theta^2} f + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_{\varphi^2} f + \frac{1}{\tan\theta}\partial_\theta f\Big)\omega + \frac{1}{r}\partial_{r\theta} f\omega' + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_{r\varphi} f\omega''.$$

Si $v = \mathrm{rot}\, A$, on a

$$(Bv)_i = \lambda_0\Big(\sum_{j=1}^3 \nabla.v\delta_{ij}\nu_j\Big) + \mu_0\sum_{j=1}^3(\partial_{x_j}v_i + \partial_{x_i}v_j)\nu_j$$
$$= c_1^2\Big(\partial_r v_i + \sum_{j=1}^3 \nu_j\partial_{x_i}v_j\Big) := (B'v)_i,$$

avec

$$c_1^{-2}B' = \partial_r + \big(\nu_j\partial_{x_i}\big)_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}} = (1+\omega^t\omega)\partial_r + \frac{1}{r}\omega'^t\omega\partial_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\omega''^t\omega\partial_\varphi.$$

Si $v = \nabla\psi$, on a

$$(Bv)_i = \lambda_0\Big(\sum_{j=1}^{3} \nabla.v\delta_{ij}\nu_j\Big) + (B'v)_i$$

d'où

$$Bv = \lambda_0\Delta\psi\omega + B'v.$$

4.2.2 Conclusion

On a

$$u_{\sigma mn_k} = c_{\sigma mn_k}\Big(\frac{a_{\sigma mn_k}}{c_{\sigma mn_k}}L_{\sigma mn_k}(x,k_2) + N_{\sigma mn_k}(x,k_1)\Big) := u^2_{\sigma mn_k} + u^1_{\sigma mn_k}, \tag{28}$$

$$\begin{aligned} k_1N_{\sigma mn_k}(x,k_1) &= \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(r\omega Y_{\sigma mn_k}h_{n_k}(k_1r))) \\ &= -\frac{1}{r^2}\Big(\partial_{\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_{\varphi^2} + \frac{1}{\tan\theta}\partial_\theta\Big)\, rh_{n_k}(k_1r)Y_{\sigma mn_k}\omega \\ &\quad + \frac{1}{r}(h_{n_k}(k_1r) + k_1rh'_{n_k}(k_1r))\partial_\theta Y_{\sigma mn_k}\omega' \\ &\quad + \frac{1}{r\sin\theta}(h_{n_k}(k_1r) + k_1rh'_{n_k}(k_1r))\partial_\varphi Y_{\sigma mn_k}\omega''. \end{aligned}$$

Puisque $Y_{\sigma mn_k}$ est une fonction propre de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur la sphère associée à la valeur propre $n_k(n_k+1)$ on a

$$-\big(\partial_{\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_{\varphi^2} + \frac{1}{\tan\theta}\partial_\theta\big)\,Y_{\sigma mn_k} = n_k(n_k+1)Y_{\sigma mn_k} \tag{29}$$

et on obtient donc

$$\begin{aligned} k_1rN_{\sigma mn_k}(x,k_1) = n_k(n_k+1)h_{n_k}(k_1r)Y_{\sigma mn_k}\omega &+ \big(h_{n_k}(k_1r) + k_1rh'_{n_k}(k_1r)\big) \\ &\times\big(\partial_\theta Y_{\sigma mn_k}\omega' + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi Y_{\sigma mn_k}\omega''\big). \end{aligned} \tag{30}$$

De plus

$$\begin{aligned} k_2L_{\sigma mn_k}(x,k_2) &= \nabla\left(Y_{\sigma mn_k}h_{n_k}(k_2r)\right) \\ &= k_2h'_{n_k}(k_2r)Y_{\sigma mn_k}\omega \\ &\quad + \frac{1}{r}h_{n_k}(k_2r)\big(\partial_\theta Y_{\sigma mn_k}\omega' + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi Y_{\sigma mn_k}\omega''\big). \end{aligned} \tag{31}$$

Finalement

$$(32)\qquad u_{\sigma m n_k} = c_{\sigma m n_k}\bigg(\Big(\frac{a_{\sigma m n_k}}{c_{\sigma m n_k}} h'_{n_k}(k_2 r) + k_1^{-1} r^{-1} n_k(n_k+1) h_{n_k}(k_1 r)\Big) Y_{\sigma m n_k}\omega + \Big(\frac{a_{\sigma m n_k}}{c_{\sigma m n_k}} k_2^{-1} r^{-1} h_{n_k}(k_2 r) + k_1^{-1} r^{-1} h_{n_k}(k_1 r) + h'_{n_k}(k_1 r)\Big) \times \big(\partial_\theta Y_{\sigma m n_k}\omega' + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi Y_{\sigma m n_k}\omega''\big)\bigg).$$

Puisque

$$h_{n_k}(k_j r) = \Big(\frac{\pi}{2 c_j^{-1} z_k r}\Big)^{1/2} H_{n_k+1/2}(c_j^{-1} z_k r),$$

des lemmes 3.8, 3.9, 3.11, 4.4 et de la proposition 4.3, on déduit, de la même façon que pour la dimension deux, le comportement asymptotique des fonctions résonantes $u_{\sigma m n_k}$.

D'après les lemmes 3.8 et 3.9, si $1 \le r < \frac{1}{\delta} c_1 c_R^{-1}$,

$$(33)\qquad u^1_{\sigma m n_k} = \frac{1}{r}\big(1 + O\big((\Re z_k)^{-1/2}\big)\big) e^{S_1(r)\Re z_k} \times c_{\sigma m n_k}\bigg(\frac{A}{(c_1^2 c_R^{-2} - r^2)^{1/4}} Y_{\sigma m n_k}\omega + \frac{B}{\Re z_k}(c_1^2 c_R^{-2} - r^2)^{1/4} \big(\partial_\theta Y_{\sigma m n_k}\omega' + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi Y_{\sigma m n_k}\omega''\big)\bigg)$$

et si $r > \delta c_1 c_R^{-1}$,

$$(34)\qquad u^1_{\sigma m n_k} = \frac{1}{r}\big(1 + O\big((\Re z_k)^{-1/2}\big)\big) e^{i\tau_1(r)\Re z_k} \times c_{\sigma m n_k}\bigg(\frac{C}{(r^2 - c_1^2 c_R^{-2})^{1/4}} Y_{\sigma m n_k}\omega + \frac{D}{\Re z_k}(r^2 - c_1^2 c_R^{-2})^{1/4} \big(\partial_\theta Y_{\sigma m n_k}\omega' + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi Y_{\sigma m n_k}\omega''\big)\bigg)$$

où A, B, C et D sont des constantes non nulles.

D'après les lemmes 3.8, 3.9 et 4.4, si $1 \le r < c_2 c_R^{-1}$

$$\frac{a_{\sigma m n_k}}{c_{\sigma m n_k}} h'_{n_k}(k_2 r) = O\big(e^{(S_1(1) - S_2(1) + S_2(r))\Re z_k}\big)$$

et

$$\frac{a_{\sigma m n_k}}{c_{\sigma m n_k}} k_2^{-1} r^{-1} h_{n_k}(k_2 r) = O\big((\Re z_k)^{-1} e^{(S_1(1) - S_2(1) + S_2(r))\Re z_k}\big),$$

et puisque d'après le lemme 3.11 S_2 décroît plus vite que S_1, pour $r > 1$ on obtient

$$u_{\sigma m n_k} = u^1_{\sigma m n_k}(1 + \widetilde{O}(1)). \tag{35}$$

C'est-à-dire que dès que l'on décolle du bord de l'obstacle ($r > 1$) la composante de $u_{\sigma m n_k}$ associée à la plus grande des deux vitesses d'onde ($u^2_{\sigma m n_k}$) est exponentiellement petite par rapport à celle associée à la plus petite des deux vitesses ($u^1_{\sigma m n_k}$).

On donnera un énoncé précis sur l'asymptotique des fonctions résonantes u_k, de norme 1 dans un domaine compact à la fin de la section 4 (voir la proposition 4.7).

4.3 Partie imaginaire des résonances

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 1.1 dans le cas de la dimension trois.

Soit r_0 vérifiant $c_1 c_R^{-1} < r_0 < c_2 c_R^{-1}$; on considère la couronne $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le r \le r_0\}$ et Γ_0 la sphère de centre O et de rayon r_0. Puisque $-\Delta_e u_{\sigma m n_k} = z_k^2 u_{\sigma m n_k}$ dans Ω et $B u_{\sigma m n_k} = 0$ sur Γ, la formule de Green dans Ω_0 donne (comme pour la dimension deux)

$$\Im(z_k^2) \cdot \|u_{\sigma m n_k}\|^2_{L^2(\Omega_0)} = -\Im\Big(\int_{\Gamma_0} B u_{\sigma m n_k} \cdot \overline{u_{\sigma m n_k}}\Big). \tag{36}$$

Lemme 4.5 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$-\Im\Big(\int_{\Gamma_0} B u_{\sigma m n_k} \cdot \overline{u_{\sigma m n_k}}\, ds\Big) = |c_{\sigma m n_k}|^2 \|Y_{\sigma m n_k}\|^2_{L^2(S^2)} \big(C \Re z_k + O\big(\sqrt{\Re z_k}\big)\big).$$

Preuve D'après (28) on a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{|c_{\sigma m n_k}|^2} \Im\Big(\int_{\Gamma_0} B u_{\sigma m n_k} \cdot \overline{u_{\sigma m n_k}}\, ds\Big) \\ = -\Im\Big(\int_{\Gamma_0} B N_{\sigma m n_k}(x, k_1) \cdot \overline{N_{\sigma m n_k}(x, k_1)}\, ds\Big) + \mathcal{R}_{\sigma m n_k} \end{aligned} \tag{37}$$

où $\mathcal{R}_{\sigma m n_k}$ est défini par (37).

Nous allons d'abord estimer le premier terme dans (37). Calculons $B N_{\sigma m n_k}(x, k_1) \cdot \overline{N_{\sigma m n_k}(x, k_1)}$:

$$\partial_\theta \omega = \omega', \quad \partial_\theta \omega' = -\omega, \quad \partial_\theta \omega'' = 0,$$
$$\partial_\varphi \omega = \sin\theta \omega'', \quad \partial_\varphi \omega' = \cos\theta \omega'', \quad {}^t\omega \partial_\varphi \omega'' = -\sin\theta$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2006-013-9 Published online by Cambridge University Press

et $(\omega, \omega', \omega'')$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$; on a donc d'après (30)

(38) $$c_1^{-2} k_1 B N_{\sigma m n_k}(x, k_1)$$
$$= (1 + \omega^t \omega)\Big(-\frac{1}{r^2} n_k(n_k+1)(h_{n_k}(k_1 r) - k_1 r h'_{n_k}(k_1 r)) Y_{\sigma m n_k}\omega$$
$$+ \Big(-\frac{1}{r^2}(h_{n_k}(k_1 r) + k_1 r h'_{n_k}(k_1 r)) + \frac{1}{r}(2k_1 h'_{n_k}(k_1 r) + k_1^2 r h''_{n_k}(k_1 r))\Big)$$
$$\times \big(\partial_\theta Y_{\sigma m n_k}\omega' + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi Y_{\sigma m n_k}\omega''\big)\Big)$$
$$+ \frac{1}{r^2}\omega'^t \omega\Big(n_k(n_k+1)\partial_\theta Y_{\sigma m n_k} h_{n_k}(k_1 r)\omega$$
$$- (h_{n_k}(k_1 r) + k_1 r h'_{n_k}(k_1 r))\partial_\theta Y_{\sigma m n_k}\omega\Big)$$
$$+ \frac{1}{r^2 \sin\theta}\omega''^t \omega\Big(n_k(n_k+1)\partial_\varphi Y_{\sigma m n_k} h_{n_k}(k_1 r)\omega$$
$$+ \frac{1}{\sin\theta}(h_{n_k}(k_1 r) + k_1 r h'_{n_k}(k_1 r))\partial_\varphi Y_{\sigma m n_k}\partial_\varphi \omega''\Big)$$
$$= -\frac{2}{r^2} n_k(n_k+1)(h_{n_k}(k_1 r) - k_1 r h'_{n_k}(k_1 r)) Y_{\sigma m n_k}\omega$$
$$+ \frac{1}{r^2}\big((2n_k(n_k+1) - k_1^2 r^2 - 2)h_{n_k}(k_1 r) - 2k_1 r h'_{n_k}(k_1 r)\big)$$
$$\times \big(\partial_\theta Y_{\sigma m n_k}\omega' + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi Y_{\sigma m n_k}\omega''\big).$$

Avec (30) on obtient

$$c_1^{-2}|k_1|^2 r^3 B N_{\sigma m n_k}(x, k_1)\cdot \overline{N_{\sigma m n_k}(x, k_1)}$$
$$= -2n_k^2(n_k+1)^2 |Y_{\sigma m n_k}|^2 (h_{n_k}(k_1 r) - k_1 r h'_{n_k}(k_1 r))\overline{h_{n_k}(k_1 r)}$$
$$+ \Big(|\partial_\theta Y_{\sigma m n_k}|^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}|\partial_\varphi Y_{\sigma m n_k}|^2\Big)$$
$$\times \big((2n_k(n_k+1) - k_1^2 r^2 - 2)h_{n_k}(k_1 r) - 2k_1 r h'_{n_k}(k_1 r)\big)$$
$$\times \overline{(h_{n_k}(k_1 r) + k_1 r h'_{n_k}(k_1 r))}.$$

On a donc

$$c_1^{-2}|k_1|^2 r_0 \int_{\Gamma_0} B N_{\sigma m n_k}(x, k_1)\cdot \overline{N_{\sigma m n_k}(x, k_1)}\, ds = -2n_k^2(n_k+1)^2 (h_{n_k}(k_1 r_0)$$
$$- k_1 r_0 h'_{n_k}(k_1 r_0))\overline{h_{n_k}(k_1 r_0)} \int_{\substack{0\le\theta\le\pi \\ -\pi\le\varphi\le\pi}} \sin\theta |Y_{\sigma m n_k}|^2\, d\theta d\varphi$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2006-013-9 Published online by Cambridge University Press

$$+\left((2n_k(n_k+1)-k_1^2r_0^2-2)h_{n_k}(k_1r_0)-2k_1r_0h'_{n_k}(k_1r_0)\right)$$
$$\times\overline{(h_{n_k}(k_1r_0)+k_1r_0h'_{n_k}(k_1r_0))}$$
$$\times\int_{\substack{0\le\theta\le\pi\\-\pi\le\varphi\le\pi}}\left(\sin\theta|\partial_\theta Y_{\sigma mn_k}|^2+\frac{1}{\sin\theta}|\partial_\varphi Y_{\sigma mn_k}|^2\right)\,d\theta d\varphi.$$

On a

$$\int_{\substack{0\le\theta\le\pi\\-\pi\le\varphi\le\pi}}\sin\theta|Y_{\sigma mn_k}|^2\,d\theta d\varphi=\|Y_{\sigma mn_k}\|^2_{L^2(S^2)}$$

et d'après (29), en intégrant par parties on obtient

$$\int_{\substack{0\le\theta\le\pi\\-\pi\le\varphi\le\pi}}\left(\sin\theta|\partial_\theta Y_{\sigma mn_k}|^2+\frac{1}{\sin\theta}|\partial_\varphi Y_{\sigma mn_k}|^2\right)\,d\theta d\varphi=n_k(n_k+1)\|Y_{\sigma mn_k}\|^2_{L^2(S^2)}. \tag{39}$$

Donc

$$c_1^{-2}|k_1|^2\Im\left(\int_{\Gamma_0}BN_{\sigma mn_k}(x,k_1)\cdot\overline{N_{\sigma mn_k}(x,k_1)}\,ds\right)$$
$$=-n_k(n_k+1)r_0\|Y_{\sigma mn_k}\|^2_{L^2(S^2)}\Im\left(k_1^2|h_{n_k}(k_1r_0)|^2+r_0k_1|k_1|^2h_{n_k}(k_1r_0)\overline{h'_{n_k}(k_1r_0)}\right).$$

En appliquant le lemme 3.8 et le fait que $\Im z_k=\widetilde{O}(1)$ et $n_k=c_R^{-1}\Re z_k+O(1)$, on obtient

(40)

$$-\frac{1}{\|Y_{\sigma mn_k}\|^2_{L^2(S^2)}}\Im\left(\int_{\Gamma_0}BN_{\sigma mn_k}(x,k_1)\cdot\overline{N_{\sigma mn_k}(x,k_1)}\,ds\right)$$
$$=c_1r_0^2n_k(n_k+1)\Re z_k\Im\left(h_{n_k}(c_1^{-1}z_kr_0)\overline{h'_{n_k}(c_1^{-1}z_kr_0)}\right)+\widetilde{O}(1)$$
$$=c_1^2r_0n_k(n_k+1)\frac{\pi}{2}\Im\left(H_{n_k+1/2}(c_1^{-1}z_kr_0)\overline{H'_{n_k+1/2}(c_1^{-1}z_kr_0)}\right)+\widetilde{O}(1)$$
$$=c_1^2c_R^{-2}\frac{\pi}{2}A_1B_1\left(\Re z_k+O\left((\Re z_k)^{1/2}\right)\right)$$

où $A_1<0$ et $B_1<0$.

Nous allons maintenant montrer que

$$\mathcal{R}_{\sigma mn_k}=\|Y_{\sigma mn_k}\|^2_{L^2(S^2)}\widetilde{O}(1) \tag{41}$$

On déduira alors le lemme de (37), (40) et (41).

On déduit de (31)

$$c_1^{-2}k_2BL_{\sigma mn_k}(x,k_2)=\left((2-c_2^2c_1^{-2})k_2^3h_{n_k}(k_2r)+2k_2^2h''_{n_k}(k_2r)\right)Y_{\sigma mn_k}\omega \tag{42}$$
$$-\frac{2}{r^2}(h_{n_k}(k_2r)-k_2rh'_{n_k}(k_2r))$$
$$\times\left(\partial_\theta Y_{\sigma mn_k}\omega'+\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi Y_{\sigma mn_k}\omega''\right).$$

D'après (39), (31), (42) et le lemme 3.9 on a

$$\text{(43)} \qquad \int_{\Gamma_0} BL_{\sigma m n_k}(x,k_2)\cdot\overline{L_{\sigma m n_k}(x,k_2)}\,ds = \|Y_{\sigma m n_k}\|^2_{L^2(S^2)} O\big(e^{2S_2(r_0)\Re z_k}\big)\,.$$

D'après (30), (39), (42) et les lemmes 3.8 et 3.9 on a

$$\text{(44)} \qquad \int_{\Gamma_0} BL_{\sigma m n_k}(x,k_2)\cdot\overline{N_{\sigma m n_k}(x,k_1)}\,ds = \|Y_{\sigma m n_k}\|^2_{L^2(S^2)} O\big(\Re z_k e^{S_2(r_0)\Re z_k}\big)\,.$$

D'après (31), (38), (39) et les lemmes 3.8 et 3.9 on a

$$\text{(45)} \qquad \int_{\Gamma_0} BN_{\sigma m n_k}(x,k_1)\cdot\overline{L_{\sigma m n_k}(x,k_2)}\,ds = \|Y_{\sigma m n_k}\|^2_{L^2(S^2)} O\big(e^{S_2(r_0)\Re z_k}\big)\,.$$

Avec le lemme 4.4 on déduit alors de (43), (44) et (45), que $\mathcal{R}_{\sigma m n_k}$ (défini par (37)) vérifie

$$\mathcal{R}_{\sigma m n_k} = \|Y_{\sigma m n_k}\|^2_{L^2(S^2)}\Big(O\left((\Re z_k)^2 e^{(2S_2(r_0)+2S_1(1)-2S_2(1))\Re z_k}\right) \\ + O\left((\Re z_k)^2 e^{(S_2(r_0)+S_1(1)-S_2(1))\Re z_k}\right)\Big)$$

et on obtient alors (41) avec (21). Le lemme est donc démontré. ■

Lemme 4.6 *Il existe une constante $C>0$ telle que*

$$\|u_{\sigma m n_k}\|^2_{L^2(\Omega_0)} = |c_{\sigma m n_k}|^2 \|Y_{\sigma m n_k}\|^2_{L^2(S^2)}\big(C(\Re z_k)^{-1} + O\big((\Re z_k)^{-3/2}\big)\big)\, e^{2S_1(1)\Re z_k}.$$

Preuve D'après (28), (30) et (31) on a

$$\frac{1}{|c_{\sigma m n_k}|^2}|u_{\sigma m n_k}|^2 = \Big|\frac{a_{\sigma m n_k}}{c_{\sigma m n_k}} h'_{n_k}(k_2 r) + k_1^{-1} r^{-1} n_k(n_k+1) h_{n_k}(k_1 r)\Big|^2 |Y_{\sigma m n_k}|^2 \\ + \Big|\frac{a_{\sigma m n_k}}{c_{\sigma m n_k}} k_2^{-1} r^{-1} h_{n_k}(k_2 r) + k_1^{-1} r^{-1}\big(h_{n_k}(k_1 r) + k_1 r h'_{n_k}(k_1 r)\big)\Big|^2 \\ \times \Big(|\partial_\theta Y_{\sigma m n_k}|^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}|\partial_\varphi Y_{\sigma m n_k}|^2\Big)$$

d'où, en utilisant (39) on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|c_{\sigma mn_k}|^2 \|Y_{\sigma mn_k}\|^2_{L^2(S^2)}} \|u_{\sigma mn_k}\|^2_{L^2(\Omega_0)} \\
&= \frac{1}{|c_{\sigma mn_k}|^2 \|Y_{\sigma mn_k}\|^2_{L^2(S^2)}} \int_{\substack{1 \le r \le r_0 \\ 0 \le \theta \le \pi, -\pi \le \varphi \le \pi}} |u_{\sigma mn_k}|^2 r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi \\
&= \int_{1 \le r \le r_0} \Bigg(\left| \frac{a_{\sigma mn_k}}{c_{\sigma mn_k}} r h'_{n_k}(k_2 r) + k_1^{-1} n_k(n_k+1) h_{n_k}(k_1 r) \right|^2 \\
&\quad + n_k(n_k+1) \left| \frac{a_{\sigma mn_k}}{c_{\sigma mn_k}} k_2^{-1} h_{n_k}(k_2 r) + k_1^{-1}(h_{n_k}(k_1 r) + k_1 r h'_{n_k}(k_1 r)) \right|^2 \Bigg) \, dr \\
&:= \int_{1 \le r \le r_0} A_{\sigma mn_k} \, dr.
\end{aligned}$$

Soit $r_1 > 0$ vérifiant $1 < r_1 < c_1 c_R^{-1}$. Remarquons que d'après la conclusion de la section 4.2.2, pour $r \ge r_1$ on a

$$e^{-2S_1(1)\Re z_k} A_{\sigma mn_k} = O\left(e^{2(S_1(r_1)-S_1(1))\Re z_k}\right) = \widetilde{O}(1).$$

Il suffit donc de démontrer le lemme avec Ω_0 remplacé par

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le r \le r_1\}.$$

Avec les lemmes 3.9 et 4.4 on en déduit que pour $1 \le r \le r_1$

$$\begin{aligned}
e^{-2S_1(1)\Re z_k} A_{\sigma mn_k} = \sum_{p=1}^{2} &\Big(C_{1,p}(r)^2 + O\big((\Re z_k)^{-1/2} \big) \Big) e^{2(S_1(r)-S_1(1))\Re z_k} \\
&+ \Big(C_{2,p}(r)^2 + O\big((\Re z_k)^{-1/2} \big) \Big) e^{2(S_2(r)-S_2(1))\Re z_k} \\
&- \Big(2C_{1,p}(r) C_{2,p}(r) + O\big((\Re z_k)^{-1/2} \big) \Big) e^{(S_2(r)-S_2(1)+S_1(r)-S_1(1))\Re z_k}
\end{aligned}$$

où les quantités $C_{i,p}(r) > 0$ $(i = 1, 2 \ \ p = 1, 2)$ dépendent régulièrement de la variable r. D'après le lemme 3.11 $S_1'(1) < 0$ et $S_2'(1) < 0$, on a donc

$$\int_1^{r_1} e^{-2S_1(1)\Re z_k} A_{\sigma mn_k} \, dr = C(\Re z_k)^{-1} + O\big((\Re z_k)^{-3/2} \big),$$

Avec $C = \sum_{p=1}^{2} \frac{C_{1,p}(1)^2}{-2S_1'(1)} + \frac{C_{2,p}(1)^2}{-2S_2'(1)} - 2\frac{C_{1,p}(1)C_{2,p}(1)}{-S_1'(1)-S_2'(1)}$. $C > 0$ d'après (22), ce qui termine la démonstration du lemme. ■

Preuve du théorème Les lemmes 4.5 et 4.6 donnent avec (36) le théorème 1.1 dans le cas où la dimension est trois et le rayon de l'obstacle $R = 1$. On a $S = S_1(1)$. Pour obtenir le théorème lorsque R est quelconque il suffit d'appliquer la remarque faite à fin de la démonstration de la proposition 4.7. ■

4.4 Comportement asymptotique des fonctions résonantes

Nous sommes en mesure de donner l'asymptotique des fonctions résonantes associées aux résonances de Rayleigh.

Proposition 4.7 *Soit (z_k) la suite des résonances de Rayleigh créées par la boule de centre O et de rayon R. On considère $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq r \leq r_0\}$ où $r_0 > c_1 c_R^{-1} R$. Soit u_k les fonctions résonantes associées aux résonances z_k, de norme 1 dans $L^2(\Omega_0)$. Soit $\delta > 1$. Si $\delta R < r < \frac{1}{\delta} c_1 c_R^{-1} R$,*

$$u_k = \frac{1}{r}(\Re z_k)^{1/2}\big(1 + O\big((\Re z_k)^{-1/2}\big)\big)\, e^{(S_1(\frac{r}{R}) - S_1(1))R\Re z_k} \times \sum_{\substack{0\leq m\leq n_k\\ \sigma=e,o}} c_{\sigma m n_k}\Bigg(\frac{A}{\big(c_1^2 c_R^{-2}R^2 - r^2\big)^{1/4}} Y_{\sigma m n_k}\omega + \frac{B}{\Re z_k}\big(c_1^2 c_R^{-2} R^2 - r^2\big)^{1/4}\Big(\partial_\theta Y_{\sigma m n_k}\omega' + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi Y_{\sigma m n_k}\omega''\Big)\Bigg),$$

et si $r > \delta c_1 c_R^{-1} R$,

$$u_k = \frac{1}{r}(\Re z_k)^{1/2}\big(1 + O\big((\Re z_k)^{-1/2}\big)\big)\, e^{i\tau_1(\frac{r}{R})R\Re z_k} e^{-S_1(1)R\Re z_k} \times \sum_{\substack{0\leq m\leq n_k\\ \sigma=e,o}} c_{\sigma m n_k}\Bigg(\frac{C}{(r^2 - c_1^2 c_R^{-2}R^2)^{1/4}} Y_{\sigma m n_k}\omega + \frac{D}{\Re z_k}(r^2 - c_1^2 c_R^{-2} R^2)^{1/4}\Big(\partial_\theta Y_{\sigma m n_k}\omega' + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi Y_{\sigma m n_k}\omega''\Big)\Bigg),$$

où

$$S_1(x) = c_R^{-1}\cosh^{-1}\big(c_1 c_R^{-1} x^{-1}\big) - \sqrt{c_R^{-2} - c_1^{-2}x^2},$$

$$\tau_1(x) = c_R^{-1}\cos^{-1}\big(c_1 c_R^{-1} x^{-1}\big) - \sqrt{c_1^{-2}x^2 - c_R^{-2}},$$

A, B sont des constantes réelles > 0, C et D sont des constantes complexes non nulles, et

$$\sum_{\substack{0\leq m\leq n_k\\ \sigma=e,o}} |c_{\sigma m n_k}|^2 \|Y_{\sigma m n_k}\|^2_{L^2(S^2)} = 1.$$

(n_k) est une suite d'entiers vérifiant $n_k = c_R^{-1} R\Re z_k + O(1)$ et les fonctions $Y_{\sigma m n_k}$ ($0 \leq m \leq n_k$, $\sigma = o, e$) sont des fonctions propres de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur S^2 associées aux valeurs propres $n_k(n_k + 1)$.

Preuve La famille

$$(Y_{\sigma m n_k})_{\substack{0\le m\le n_k\\ \sigma=e,o}}$$

est orthogonale dans $L^2(S^2)$ et la famille $(\omega,\omega',\omega'')$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, donc les familles

$$(Y_{\sigma m n_k}\omega)_{\substack{0\le m\le n_k\\ \sigma=e,o}} \quad \text{et} \quad \Big(\partial_\theta Y_{\sigma m n_k}\omega' + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi Y_{\sigma m n_k}\omega''\Big)_{\substack{0\le m\le n_k\\ \sigma=e,o}}$$

sont orthogonales dans $L^2(S^2;\mathbb{C}^3)$. Soit u_k une fonction résonante associée à la résonance z_k, on a

$$\|u_k\|^2_{L^2(\Omega_0)} = \sum_{\substack{0\le m\le n_k\\ \sigma=e,o}} \|u_{\sigma m n_k}\|^2_{L^2(\Omega_0)}$$

et avec le lemme 4.6 on obtient

$$\|u_k\|^2_{L^2(\Omega_0)} = \Big(C(\Re z_k)^{-1} + O\big((\Re z_k)^{-3/2}\big)\Big)e^{2S_1(1)\Re z_k}\sum_{\substack{0\le m\le n_k\\ \sigma=e,o}} |c_{\sigma m n_k}|^2\|Y_{\sigma m n_k}\|^2_{L^2(S^2)}.$$

On déduit alors la proposition dans le cas $R=1$ de (33), (34) et (35). Pour obtenir la proposition lorsque R est quelconque, il suffit d'utiliser

$$h_{n_k}(c_j^{-1}z_k r) = h_{n_k}\Big(c_j^{-1}Rz_k\frac{r}{R}\Big) \quad \text{et} \quad Rz_k = c_R n_k + O(1). \qquad \blacksquare$$

Références

[Be] M. Bellassoued, *Distribution of resonances and decay rate of the local energy for the elastic wave equation.* Comm. Math. Phys. **215**(2000), no. 2, 375–408.

[Bur] N. Burq, *Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel*. Acta Math. **180**(1998), no. 1, 1–29.

[Ga1] D. Gamblin, *Résonances de Rayleigh en dimension deux.* Thèse de doctorat de l'Univ. Paris 13, 2002.

[Ga2] ———, *Résonances de Rayleigh en dimension deux.* Bull. Soc. Math. France **132**(2004), no. 2, 263–304.

[Gre] R. Gregory, *The propagation of Rayleigh waves over curved surfaces at high frequency.* Proc. Cambridge Philos. Soc. **70**(1971), 103–121.

[IN] M. Ikehata et G. Nakamura, *Decaying and nondecaying properties of the local energy of an elastic wave outside an obstacle.* Japan J. Appl. Math. **6**(1989), no. 1, 83–95.

[Ka] M. Kawashita, *On the local-energy decay property for the elastic wave equation with the Neumann boundary conditions.* Duke Math. J. **67**(1992), no. 2, 333–351.

[MoFe] P. Morse et H. Feshbach, *Methods of theoretical physics.* McGraw-Hill, New York, 1953.

[Ol1] F. Olver, *The asymptotic solution of linear differential equations of second order for large values of parameter.* Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. **247**(1954), 307–327.

[Ol2] ———, *The asymptotic expansion of Bessel functions of large order.* Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. **247**(1954),, 328–368.

[Ol3] F. Olver, *Asymptotics and special functions.* Academic Press, New York, 1974.

[SjVo] J. Sjöstrand et G.Vodev, *Asymptotics of the number of Rayleigh resonances.* Math. Ann. **309**(1997), no. 2, 287–306.

[SjZw] J. Sjöstrand et M. Zworski, *Complex scaling method and the distribution of scattering poles.* J. Amer. Math. Soc. **4**(1991), no. 4, 729–769.

[St1] P. Stefanov, *Lower bounds of the number of the Rayleigh resonances for arbitrary body.* Indiana Univ. Math. J. **49**(2000), no. 1, 405–426.

[St2] P. Stefanov, *Resonance expansions and Rayleigh waves.* Math. Res. Lett. **8**(2001), no. 1-2, 105–124.

[StVo1] P. Stefanov et G. Vodev, *Distribution of resonances for the Neumann problem in linear elasticity outside a ball.* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **60**(1994), no. 3, 303–321.

[StVo2] ———, *Distribution of resonances for the Neumann problem in linear elasticity outside a strictly convex body.* Duke Math. J. **78**(1995), no. 3, 677–714.

[StVo3] ———, *Neumann resonances in linear elasticity for an arbitrary body.* Comm. Math. Phys. **176**(1996), no. 3, 645–659.

[TaZw] S.-H.Tang et M. Zworski, *Resonance expansions of scattered waves.* Comm. Pure Appl. Math. **53**(2000), no. 10, 1305–1334.

[Tay] M. Taylor, *Rayleigh waves in linear elasticity as a propagation of singularities phenomenon.* Dans: Partial Differential Equations and Geometry, Marcel Dekker, New York, 1979, pp. 273–291.

[To] T. Tokita, *Exponential decay of solutions for the wave equation in the exterior domain with spherical boundary.* J. Math. Kyoto Univ. **12**(1972), 413–430.

[Vo] G. Vodev, *Existence of Rayleigh resonances exponentially close to the real axis.* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **67**(1997), no. 1, 41–57.

LAGA
Institut Galilée
Université Paris 13
99 av. J-B Clément
93430 Villetaneuse
France
e-mail: gamblin@math.univ-paris13.fr