

## $\mathcal{D}^\dagger$ -affinité de l'espace projectif

Avec un appendice de P. Berthelot

C. HUYGHE

Université de Rennes I, Department de Mathématiques, Campus de Beaulieu, 30542 Rennes Cedex, France

Received 2 February 1996; accepted 10 June 1996

**Abstract.** We prove an analogue of the Beilinson–Bernstein Theorem, in the case of the projective space, for the ring of arithmetical differential operators introduced by P. Berthelot.

**Mathematics Subject Classifications (1991):** 14F20, 14F30, 14G10, 11L, 11G, 20C11.

**Key words:** Arithmetical differential operators, Beilinson–Bernstein Theorem, projective space.

### Introduction

Soient  $V$  un anneau de valuation discrète, d'inégales caractéristiques  $(0, p)$ ,  $\mathcal{V}$  le complété  $p$ -adique de  $V$ ,  $S$  le schéma  $\text{Spec } V$  et  $\mathcal{S}$  le schéma formel  $\text{Spf } \mathcal{V}$ . On note  $X$  l'espace projectif de dimension  $N$  sur  $V$ ,  $X_i = X \times \text{Spec}(V/p^{i+1})$ , et  $\mathcal{X}$  l'espace projectif formel de dimension  $N$  sur  $\text{Spf } \mathcal{V}$ . On désignera par  $\mathcal{O}_X(r)$  le twist de Serre sur  $X$ . On peut construire les faisceaux d'opérateurs différentiels introduits par Berthelot dans [4]:  $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$  sur  $X_i$ ,  $\mathcal{D}_X^{(m)}$  sur  $X$ ,  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)} = \lim_{\leftarrow i} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger = \lim_{\rightarrow m} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}$  sur  $\mathcal{X}$  (l'indice  $\mathbf{Q}$  signifiant que ces faisceaux sont tensorisés par  $\widehat{K}$ ). On rappelle que d'après [4], ces faisceaux d'anneaux sont tous cohérents.

L'objet de cet article est de montrer que  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger)$  est une  $\mathcal{V}$ -algèbre cohérente, que les  $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$ -modules cohérents sont acycliques et que le foncteur sections globales établit une équivalence de catégories entre les  $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$ -modules cohérents et les  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger)$ -modules cohérents. On dispose en fait du même résultat pour les  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}$ -modules cohérents. Ce résultat a déjà été présenté dans [10] et est à rapprocher des résultats sur la  $\mathcal{D}$ -affinité des variétés de drapeaux obtenus d'une part par Beilinson–Bernstein sur un corps de caractéristique 0 (cf [1] ou p. 104 de [2]), et d'autre part par Haastert sur un corps de caractéristique  $p > 0$  (cf [7]), la lettre  $\mathcal{D}$  désignant ici le faisceau des opérateurs différentiels usuel.

L'argument essentiel de notre démonstration repose sur le fait que le faisceau tangent  $\mathcal{T}_X$  est ample, ce qui caractérise l'espace projectif quand la base est un corps algébriquement clos, d'après un théorème de Mori exposé dans [11]. Nous

utilisons de plus le résultat de Beilinson–Bernstein dans le sens où il est équivalent au fait que les  $\mathcal{D}$ -modules quasi-cohérents sont acycliques sur  $X$  (via le fait qu'il existe assez d'injectifs quasi-cohérents) et engendrés par leurs sections globales.

La partie centrale de la démonstration consiste à établir l'acyclicité des  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}$ -modules cohérents, ce qui repose sur une analyse de la situation sur  $X$ . En général, si  $X$  est un  $S$ -schéma lisse sur un corps  $K$  de caractéristique 0, l'algèbre graduée de  $\mathcal{D}_X$ , le faisceau des opérateurs différentiels usuels, s'identifie à l'algèbre symétrique de l'espace tangent de  $X$ , noté  $\mathcal{T}_X$ . De plus, il découle de ([5] A.10) que, sans hypothèse de caractéristique, l'algèbre  $\mathrm{gr}_{\bullet} \mathcal{D}_X^{(0)}$  s'identifie aussi à l'algèbre symétrique de l'espace tangent de  $X$ . Nous généralisons ici ce résultat. Si  $A$  est une  $V$ -algèbre et  $M$  un  $A$ -module, nous commençons par donner une généralisation à un niveau  $m$  de l'algèbre à puissances divisées universelle  $\Gamma_A(M)$ . On vérifie que l'on peut faisceautiser la construction et on définit ensuite par dualité ce que nous appellerons *l'algèbre symétrique de niveau  $m$*  d'un  $\mathcal{O}_X$ -module. Nous vérifions enfin que, si  $X$  est un  $S$ -schéma lisse, l'algèbre symétrique de niveau  $m$  de l'espace tangent est canoniquement isomorphe à l'algèbre graduée  $\mathrm{gr}_{\bullet} \mathcal{D}_X^{(m)}$ . Dans la deuxième partie, nous étudions la cohomologie des  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules cohérents à partir de l'étude de la cohomologie des modules gradués  $\mathrm{gr}_{\bullet} \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes \mathcal{O}_X(r)$ . Nous montrons tout d'abord que tout  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module cohérent est quotient d'un module du type  $(\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes \mathcal{O}_X(-r))^k$ , ce qui nous conduit à étudier ces modules. En utilisant l'amplitude de  $\mathcal{T}_X$ , nous montrons alors le point clé, qui est que, si  $r$  est fixé dans  $\mathbf{Z}$ , et si  $k$  est assez grand, le module  $\mathrm{gr}_k(\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes \mathcal{O}_X(r))$  est acyclique. Nous en déduisons finalement que la cohomologie d'un  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module cohérent est de type fini sur  $V$ , et donc de  $p$ -torsion finie, en degrés supérieurs ou égaux à un. La troisième partie concerne les  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}$ -modules et les  $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{\dagger}$ -modules: pour les  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}$ -modules, nous adaptons les résultats de la partie précédente par des arguments de passage à la limite projective. Le passage à la limite inductive sur  $m$  pour le cas des  $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{\dagger}$ -modules cohérents ne pose alors aucune difficulté.

Dans la quatrième partie nous traitons des propriétés de finitude des sections globales des  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules cohérents et des  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -modules cohérents. Nous complétons alors tous ces résultats dans la dernière partie, où nous donnons la cohérence de  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger})$  et l'équivalence de catégories annoncée.

Enfin, un tel théorème de  $\mathcal{D}^{\dagger}$ -affinité est tout à fait crucial si l'on veut définir la transformation de Fourier des modules cohérents sur l'anneau des opérateurs différentiels à singularités surconvergentes à l'infini sur  $\mathcal{X}$ , construit par Berthelot dans ([4] 4.2). Nous renvoyons à [9] pour la construction de cette transformation de Fourier, dont l'idée revient à Berthelot. Rappelons brièvement la construction de ces faisceaux d'opérateurs différentiels: notons  $[x_0, \dots, x_N]$  les coordonnées projectives sur  $X$ ,  $U_i = D_+(x_i)$ ,  $T$  et  $\mathcal{T}$  les diviseurs  $V(x_0)$  sur  $X$  et  $\mathcal{X}$  respectivement, et introduisons les faisceaux  $\mathcal{B}_X^{(m)}$ , définis sur  $U_i$

par  $\mathcal{B}_X^{(m)} = \mathcal{O}_{U_i}[T]/\left((x_0/x_i)^{p^{m+1}}T - p\right)$ . Alors d'après ([4] 2.3.3) le faisceau  $\mathcal{B}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$  est muni d'une structure d'anneau. Soient  $\widehat{\mathcal{B}}_X^{(m)} \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_X^{(m)}$  son complété  $p$ -adique et  $\mathcal{D}^\dagger(\dagger\mathcal{T})_{\mathbf{Q}} = \lim_{\rightarrow m} \widehat{\mathcal{B}}_X^{(m)} \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_X^{(m)}$  le faisceau des opérateurs différentiels à singularités surconvergentes à l'infini. Ces faisceaux sont cohérents d'après ([4] 3.1.2). Ceci nous amène à traiter le problème dans le cadre plus général des modules cohérents sur des faisceaux d'opérateurs différentiels munis de coefficients vérifiant certaines conditions données au début des parties 2, 3 et 4. Les résultats d'acyclicité donnés en appendice par Berthelot et un calcul facile sur les coefficients  $\mathcal{B}_X^{(m)}$  effectué dans [9] montrent que les coefficients  $\mathcal{B}_X^{(m)}$  satisfont ces conditions. C'est dans ce contexte de coefficients plus généraux que l'on montre un théorème de  $\mathcal{D}^\dagger$ -affinité. Notons que, toujours dans [9], on calcule

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^\dagger(\dagger\mathcal{T})_{\mathbf{Q}}) &= A_N(K)^\dagger \\ &= \left\{ \sum_{\underline{l}, \underline{k}} a_{\underline{l}, \underline{k}} \underline{x}^{\underline{l}} \underline{\partial}_{\underline{x}}^{[\underline{k}]} : a_{\underline{l}, \underline{k}} \in K \text{ et } \exists c, \eta < 1 \text{ tels que } |a_{\underline{l}, \underline{k}}| < c\eta^{|\underline{k}|+|\underline{l}|} \right\}. \end{aligned}$$

Le résultat présenté ici fournit donc une interprétation géométrique des  $A_N(K)^\dagger$ -modules cohérents.

C'est au cours de ma thèse, effectuée sous la direction de Pierre Berthelot, que j'ai accompli ce travail. Il a toujours été un interlocuteur disponible et patient, sachant éclaircir mes idées. C'est aussi lui qui m'a indiqué comment construire intrinsèquement *l'algèbre symétrique de niveau  $m$* . Pour toutes ces raisons je le remercie ici.

### 1. Construction et propriétés des algèbres $\Gamma_{(m)}(\mathcal{E})$ et $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})$

Dans cette partie, l'entier  $m$  est fixé. Pour les  $m$ -PD-structures intervenant dans les constructions, nous nous référerons à ([4], chapitre 1), dont nous adopterons l'essentiel des notations. Rappelons en particulier:

- (i) Si  $k \in \mathbf{N}$ ,  $q_k$  désigne le quotient de la division de  $k$  par  $p^m$ .
- (ii) Si  $k, k' \in \mathbf{N}$  et si  $k'' = k - k'$ ,  $\left\langle \begin{smallmatrix} k \\ k' \end{smallmatrix} \right\rangle := q_k! / q_{k'}! q_{k''}!$ .
- (iii) Si  $k, k' \in \mathbf{N}$ ,  $\left\langle \begin{smallmatrix} k \\ k' \end{smallmatrix} \right\rangle := \binom{k}{k'} \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ k' \end{smallmatrix} \right\}^{-1} \in \mathbf{Z}_{(p)}$ .

Enfin, si  $(A, I, J, \gamma)$  est une  $V$ -algèbre munie d'un  $m$ -PD-idéal, les opérations de puissances divisées sur les éléments de  $I$  seront notées  $x \mapsto x^{\{k\}}$  (alors  $x^k = q_k! x^{\{k\}}$ ).

## 1.1. CONSTRUCTION LOCALE

Soient  $A$  une  $\mathbf{Z}_{(p)}$ -algèbre,  $E$  un  $A$ -module projectif de type fini, et  $\mathbf{S}(E)$  l'algèbre symétrique de  $E$  relativement à  $A$ ; c'est une algèbre graduée:  $\mathbf{S}(E) = \bigoplus \mathbf{S}_n(E)$ . Soient  $\mathbf{I}(E) = \bigoplus_{n \geq 1} \mathbf{S}_n(E)$ , l'idéal d'augmentation de  $\mathbf{S}(E)$  et  $P_{\mathbf{S}(E)}(\mathbf{I}(E))$  l'enveloppe à puissances divisées de niveau  $m$  de  $(\mathbf{S}(E), \mathbf{I}(E))$ . On désigne par  $\bar{\mathbf{I}}$  le  $m$ -PD-idéal de cette nouvelle algèbre.

DÉFINITIONS. On pose

$$\begin{aligned}\Gamma_{A,(m)}(E) &:= P_{\mathbf{S}(E)}(\mathbf{I}(E)), \\ \Gamma_{A,(m)}^n(E) &:= \Gamma_{A,(m)}(E) / \bar{\mathbf{I}}^{\{n+1\}}.\end{aligned}$$

Lorsqu'il n'y aura pas lieu de spécifier la base, on omettra le  $A$  en indice. On notera d'autre part  $\lambda$  le morphisme composé  $E \rightarrow \mathbf{I}(E) \rightarrow \Gamma_{A,(m)}(E)$ .

1.1.1. PROPOSITION. Soient  $E$  un  $A$ -module projectif de type fini,  $B$  une  $A$ -algèbre munie d'un  $m$ -PD-idéal  $(I, J, \gamma)$  et  $\varphi$  un morphisme  $A$ -linéaire  $E \rightarrow I$ , alors il existe un unique morphisme de  $A$ -algèbres  $\psi: \Gamma_{A,(m)}(E) \rightarrow B$ , tel que  $\varphi = \psi \circ \lambda$ .

La démonstration est formelle à partir de la propriété universelle des algèbres symétriques et de celle des  $m$ -PD-enveloppes (cf 1.4.1 de [4]).

1.1.2. RAPPELS. Soit  $E$  un  $A$ -module libre de base  $(x_1, \dots, x_t)$ , alors

(i) Un morphisme d'algèbres  $A \rightarrow B$  induit un isomorphisme canonique de  $B$ -algèbres:

$$B \otimes_A \Gamma_{A,(m)}(E) \simeq \Gamma_{B,(m)}(B \otimes_A E).$$

(ii) Le  $A$ -module  $\Gamma_{A,(m)}(E)$  est libre de base  $x_1^{\{k_1\}} \dots x_t^{\{k_t\}}$ .

(iii) Le  $A$ -module  $\Gamma_{A,(m)}^n(E)$  est libre de base  $x_1^{\{k_1\}} \dots x_t^{\{k_t\}}$  avec  $\sum k_i \leq n$ .

En effet, si  $E$  est libre,  $\mathbf{S}(E)$  est un anneau de polynômes à  $t$  variables et on peut appliquer la proposition 1.5.1 de [4] sur les  $m$ -PD-enveloppes. Il résulte aussi de cette proposition que la  $m$ -PD-structure sur  $\bar{\mathbf{I}}$  est compatible à toute  $m$ -PD-structure sur  $A$ .

1.1.3. LEMME. Soient  $\varphi: A \rightarrow B$  un morphisme d'algèbres et  $E$  un  $A$ -module projectif de type fini, alors on a un isomorphisme canonique de  $B$ -algèbres:  $B \otimes_A \Gamma_{A,(m)}(E) \simeq \Gamma_{B,(m)}(B \otimes_A E)$ .

Le même énoncé vaut pour les modules  $\Gamma_{B,(m)}^n(B \otimes_A E)$  et  $B \otimes_A \Gamma_{A,(m)}^n(E)$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $F = B \otimes_A E$ ,  $c$ 'est un  $B$ -module projectif de type fini. On a un isomorphisme canonique:  $B \otimes_A \mathbf{S}(E) \simeq \mathbf{S}(F)$ . Par functorialité des  $m$ -PD-enveloppes, on en déduit un homomorphisme canonique  $\lambda: B \otimes_A \Gamma_{A,(m)}(E) \rightarrow \Gamma_{B,(m)}(F)$ . D'après ([4] prop 1.4.6), la formation des  $m$ -PD-enveloppes commute aux changements de base plats, si bien que  $\lambda$  est un isomorphisme dans le cas où  $B$  est une  $A$ -algèbre plate.

En général, vérifier que  $\lambda$  est un isomorphisme est une question locale: soient  $\mathcal{Q}$  un idéal premier de  $B$  et  $\mathcal{P} = \varphi^{-1}(\mathcal{Q})$ . Le morphisme  $\varphi$  induit un morphisme entre les anneaux localisés  $A_{\mathcal{P}} \rightarrow B_{\mathcal{Q}}$ . Notons  $E_{\mathcal{P}} = A_{\mathcal{P}} \otimes_A E$  et  $F_{\mathcal{Q}} = B_{\mathcal{Q}} \otimes_B F$ . Comme  $E$  et  $F$  sont des modules projectifs de type fini,  $E_{\mathcal{P}}$  et  $F_{\mathcal{Q}}$  sont des modules libres. Soient  $\lambda'$  le morphisme  $B_{\mathcal{Q}} \otimes_A \Gamma_{A_{\mathcal{P}},(m)}(E_{\mathcal{P}}) \rightarrow \Gamma_{B_{\mathcal{Q}}}(F_{\mathcal{Q}})$  et  $\alpha$  et  $\beta$  les flèches de localisation (qui sont des isomorphismes)

$$\begin{aligned} \alpha: A_{\mathcal{P}} \otimes_A \Gamma_{A,(m)}(E) &\rightarrow \Gamma_{A_{\mathcal{P}}}(E_{\mathcal{P}}), \\ \beta: B_{\mathcal{Q}} \otimes_B \Gamma_{B,(m)}(F) &\rightarrow \Gamma_{B_{\mathcal{Q}}}(F_{\mathcal{Q}}). \end{aligned}$$

Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} B_{\mathcal{Q}} \otimes_A \Gamma_{A,(m)}(E) & \xrightarrow{1 \otimes \lambda} & B_{\mathcal{Q}} \otimes_B \Gamma_{B,(m)}(F) \\ \downarrow 1 \otimes \alpha & & \downarrow \beta \\ B_{\mathcal{Q}} \otimes_{A_{\mathcal{P}}} \Gamma_{A_{\mathcal{P}},(m)}(E_{\mathcal{P}}) & \xrightarrow{\lambda'} & \Gamma_{B_{\mathcal{Q}}}(F_{\mathcal{Q}}). \end{array}$$

D'après 1.1.2,  $\lambda'$  est un isomorphisme, ce qui montre que  $1 \otimes \lambda$  est un isomorphisme.

1.1.4. LEMME. Soient  $E$  et  $E'$  deux  $A$ -modules projectifs de type fini, alors on a un isomorphisme canonique de  $A$ -algèbres graduées

$$\Gamma_{(m)}(E) \otimes_A \Gamma_{(m)}(E') \simeq \Gamma_{(m)}(E \oplus E').$$

DÉMONSTRATION. Par functorialité, on a des homomorphisme canoniques  $\Gamma_{(m)}(E) \xrightarrow{\lambda} \Gamma_{(m)}(E \oplus E')$  et  $\Gamma_{(m)}(E') \xrightarrow{\mu} \Gamma_{(m)}(E \oplus E')$ . On en déduit un homomorphisme

$$\begin{aligned} \Gamma_{(m)}(E) \otimes_A \Gamma_{(m)}(E') &\rightarrow \Gamma_{(m)}(E \oplus E'), \\ x \otimes y &\mapsto \lambda(x) \cdot \mu(y). \end{aligned}$$

Voir que  $c$ 'est un isomorphisme est une question locale: on peut donc supposer que  $A$  est local et que  $E$  et  $E'$  sont libres sur  $A$ . L'assertion résulte alors de la description donnée en 1.1.2.

1.1.5. PROPOSITION. Soit  $E$  un  $A$ -module projectif de type fini. Alors

(i) *L'algèbre  $\Gamma_{(m)}(E)$  est une  $A$ -algèbre graduée*

$$\Gamma_{(m)}(E) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \Gamma_{(m),n}(E).$$

(ii) *L'algèbre  $\Gamma_{(m)}^n(E)$  est un quotient gradué de  $\Gamma_{(m)}(E)$ .*

(iii) *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\mu: \bar{\mathbf{I}}^{\{n\}} / \bar{\mathbf{I}}^{\{n+1\}} \rightarrow \Gamma_{(m),n}(E).$$

**DÉMONSTRATION.** Montrons d'abord (i). Pour se donner une  $\mathbf{Z}$ -graduation sur  $\Gamma_{(m)}(E)$ , il suffit de se donner une action du schéma en groupes  $\mathbf{G}_{m,A}$  sur  $\Gamma_{(m)}(E)$ , c'est-à-dire, pour toute  $A$ -algèbre  $B$ , une action du groupe  $B^*$  des éléments inversibles de  $B$  sur  $B \otimes_A \Gamma_{(m)}(E)$  et ce, fonctoriellement en  $B$ . Soient  $B$  une  $A$ -algèbre et  $\lambda \in B^*$ ; la multiplication par  $\lambda$  induit une application  $\alpha_\lambda: B \otimes_A E \rightarrow B \otimes_A E$  et par functorialité, une application  $\varphi_\lambda: \Gamma_{(m)}(B \otimes_A E) \rightarrow \Gamma_{(m)}(B \otimes_A E)$ . Considérons maintenant un morphisme de  $A$ -algèbres  $u: B \rightarrow C$ . L'élément  $u(\lambda)$  induit  $\beta_\lambda$  sur  $C \otimes_A E$  et  $\psi_\lambda$  sur  $\Gamma_{(m)}(C \otimes_A E)$ . Par construction  $\beta_\lambda = 1 \otimes \alpha_\lambda$  si on identifie  $C \otimes_A E$  à  $C \otimes_B B \otimes_A E$ . Donc d'après le Lemme 1.1.3,  $\psi_\lambda$  coïncide avec  $1 \otimes \varphi_\lambda$  si on identifie  $\Gamma_{(m)}(C \otimes_A E)$  à  $C \otimes_B \Gamma_{(m)}(B \otimes_A E)$ , ce qui montre que l'action construite est bien fonctorielle.

Montrons maintenant (ii) et (iii): le module  $\Gamma_{(m),n}(E)$  s'identifie à

$$\{x \in \Gamma_{(m)}(E) : \forall B, \forall \lambda \in B^*, \psi_\lambda(1 \otimes x) = \lambda^n \cdot (1 \otimes x)\}.$$

En reprenant la définition de la filtration  $\bar{\mathbf{I}}^{\{n\}}$  donnée en 1.3.7 de [4], on voit que  $\bar{\mathbf{I}}^{\{n\}}$  est engendré par des éléments homogènes de degré  $\geq n$ . Il est donc homogène et l'algèbre  $\Gamma_{(m)}^n(E)$  est graduée. De plus,  $\bar{\mathbf{I}}^{\{n\}}$  est inclus dans  $\bigoplus_{k \geq n} \Gamma_{(m),k}(E)$  et on dispose d'une application naturelle

$$\mu: \bar{\mathbf{I}}^{\{n\}} / \bar{\mathbf{I}}^{\{n+1\}} \rightarrow \Gamma_{(m),n}(E).$$

Pour vérifier que  $\mu$  est un isomorphisme, on peut supposer que  $A$  est local et que  $E$  est libre de base  $(x_1, \dots, x_t)$ ; alors

$$\psi_\lambda(x_1^{\{k_1\}} \dots x_t^{\{k_t\}}) = \lambda^{|\underline{k}|} x_1^{\{k_1\}} \dots x_t^{\{k_t\}}.$$

Cela montre que  $\Gamma_{(m),n}(E)$  s'identifie au  $A$ -module libre de base  $x_1^{\{k_1\}} \dots x_t^{\{k_t\}}$  avec  $\sum k_i = n$  et que  $\mu$  préserve ces éléments. C'est donc bien un isomorphisme

*Remarque.* Les isomorphismes des lemmes précédents sont en fait des isomorphismes d'algèbres graduées.

**1.1.6. PROPOSITION.** *L'algèbre  $\Gamma_{(m)}(E)$  est munie d'une structure de bigèbre augmentée commutative, c'est-à-dire que l'on dispose d'homomorphismes de  $A$ -algèbres vérifiant les propriétés usuelles des algèbres de groupe:*

- (i)  $\Delta : \Gamma_{(m)}(E) \rightarrow \Gamma_{(m)}(E) \otimes_A \Gamma_{(m)}(E)$  où  $\Delta$  est co-commutative et co-associative,
- (ii)  $\varepsilon : \Gamma_{(m)}(E) \rightarrow A$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $\delta$  l'application diagonale:  $E \rightarrow E \oplus E$ . Par functorialité,  $\delta$  induit un homomorphisme de  $A$ -algèbres  $\Delta : \Gamma_{(m)}(E) \rightarrow \Gamma_{(m)}(E \oplus E)$ . D'après le Lemme 1.1.4, cette dernière algèbre est isomorphe à  $\Gamma_{(m)}(E) \otimes_A \Gamma_{(m)}(E)$ , si bien que  $\Delta$  définit une application à valeurs dans  $\Gamma_{(m)}(E) \otimes \Gamma_{(m)}(E)$ .

L'algèbre  $\Gamma_{(m)}(E)$  étant graduée, on dispose de  $\varepsilon : \Gamma(E) \rightarrow A$  qui à un élément fait correspondre sa composante homogène de degré zéro. Le fait que  $\Delta$  et  $\varepsilon$  sont des morphismes définissant une structure de bigèbre, provient par functorialité des propriétés de  $\delta$ . Par exemple, si l'on considère l'involution  $\sigma$  de  $E \oplus E$  qui à  $x \oplus y$  associe  $y \oplus x$ ,  $\sigma \circ \delta = \delta$  et ceci implique que  $\Delta$  est co-commutative.

### 1.2. FAISCEAUTISATION DE LA CONSTRUCTION

Soit  $X$  un  $\mathbf{Z}_{(p)}$ -schéma. Si  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de type fini sur  $X$ , on note  $\Gamma_{(m)}(\mathcal{E})$  le faisceau associé au préfaisceau  $U \mapsto \Gamma_{\mathcal{O}(U),(m)}(\mathcal{E}(U))$ . Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts affines tels que  $V \subset U$ ; d'après la Proposition 1.1.3, on a un isomorphisme canonique

$$\Gamma_{\mathcal{O}(V),(m)}(\mathcal{E}(V)) \simeq \mathcal{O}(V) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \Gamma(\mathcal{E}(U)).$$

Comme  $\mathcal{O}(V)$  est plat sur  $\mathcal{O}(U)$ , on en déduit que, pour tout ouvert affine  $V$  inclus dans  $U$ ,  $\Gamma_{(m)}(\mathcal{E})(V) = \Gamma_{\mathcal{O}(V),(m)}(\mathcal{E}(V))$ . En particulier,  $\Gamma(\mathcal{E})$  est un faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -algèbres graduées, localement libres, dont la structure locale est donnée en 1.1.2.

On construit de même les faisceaux  $\Gamma_{(m)}^n(\mathcal{E})$  qui sont des  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres dont la structure locale est aussi donnée en 1.1.2. Si l'on souhaite spécifier l'espace sur lequel on travaille, on le notera en indice.

On déduit facilement de ce qui précède les propositions qui suivent.

1.2.1. PROPOSITION. Si  $f : Y \rightarrow X$  est un homomorphisme de  $\mathbf{Z}_{(p)}$ -schémas et si  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de type fini, on a un isomorphisme canonique de  $m$ -PD-algèbres graduées:  $\Gamma_{Y,(m)}(f^*\mathcal{E}) \simeq f^* \left( \Gamma_{X,(m)}(\mathcal{E}) \right)$ .

L'énoncé analogue vaut pour  $\Gamma_{Y,(m)}^n(f^*\mathcal{E})$  et  $f^* \left( \Gamma_{X,(m)}^n(\mathcal{E}) \right)$ .

1.2.2. PROPOSITION. Si  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  sont deux  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de type fini, on a un isomorphisme canonique de  $m$ -PD-algèbres graduées

$$\Gamma_{(m)}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Gamma_{(m)}(\mathcal{E}') \simeq \Gamma_{(m)}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}').$$

### 1.3. CONSTRUCTION ET PROPRIÉTÉS DE L'ALGÈBRE $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})$ .

Dans cette partie on reprend les hypothèses de 1.2. On commence par définir l'algèbre  $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})$  par dualité à partir de  $\Gamma_{(m)}(\mathcal{E})$ .

**DÉFINITION.** Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang fini. On pose

$$\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E}) = \bigcup_n \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma_{(m)}^{(n)}(\mathcal{E}^\vee), \mathcal{O}_X).$$

On dira que  $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})$  est l'algèbre symétrique de niveau  $m$  du faisceau  $\mathcal{E}$ . Si cela s'avère nécessaire, on indiquera en indice l'espace sur lequel on travaille.

*Remarque.* Les faisceaux  $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})$  sont des  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres. En outre, il résulte de ([5] A.10) que  $\mathbf{S}^{(0)}(\mathcal{E})$  est l'algèbre symétrique de  $\mathcal{E}$ , ce qui justifie la terminologie.

**1.3.1. PROPOSITION.** *Le faisceau  $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})$  est un faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -algèbres commutatives.*

**DÉMONSTRATION.** Notons  $\mathcal{B} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma_{(m)}(\mathcal{E}^\vee), \mathcal{O}_X)$ .

Par dualité,  $\mathcal{B}$  est munie d'une structure de  $\mathcal{O}_X$ -algèbre graduée commutative qui provient de la structure de bigèbre commutative de  $\Gamma_{(m)}(\mathcal{E}^\vee)$  décrite en 1.1.6. Si  $u$  et  $v$  sont des sections de  $\mathcal{B}$ , rappelons que le produit  $u.v$  est défini comme le composé

$$\Gamma_{(m)}(\mathcal{E}^\vee) \xrightarrow{\Delta} \Gamma_{(m)}(\mathcal{E}^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Gamma_{(m)}(\mathcal{E}^\vee) \xrightarrow{1 \otimes v} \Gamma_{(m)}(\mathcal{E}^\vee) \xrightarrow{u} \mathcal{O}_X.$$

D'autre part, on a une suite exacte de faisceaux localement libres sur  $X$

$$0 \rightarrow \bar{\mathbf{I}}^{\{n+1\}} \rightarrow \Gamma_{(m)}(\mathcal{E}^\vee) \rightarrow \Gamma_{(m)}^n(\mathcal{E}^\vee) \rightarrow 0.$$

On en tire une inclusion:  $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma_{(m)}^n(\mathcal{E}^\vee), \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{B}$ , et, par passage à la limite inductive, on voit que  $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})$  est un sous-faisceau de  $\mathcal{B}$  via une application notée  $i$ .

On vérifie facilement localement que

$$\Delta(\bar{\mathbf{I}}^{\{n+n'\}}) \subset \Gamma_{(m)}(\mathcal{E}^\vee) \otimes \bar{\mathbf{I}}^{\{n'+1\}} + \bar{\mathbf{I}}^{\{n+1\}} \otimes \Gamma_{(m)}(\mathcal{E}^\vee),$$

si bien que  $\Delta$  induit une application

$$\Delta_{n,n'}: \Gamma_{(m)}^{n+n'}(\mathcal{E}^\vee) \rightarrow \Gamma_{(m)}^n(\mathcal{E}^\vee) \otimes \Gamma_{(m)}^{n'}(\mathcal{E}^\vee).$$



Si  $(u, v)$  est dans  $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma_{(m)}^n(\mathcal{E}^\vee), \mathcal{O}_X) \times \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma_{(m)}^{n'}(\mathcal{E}^\vee), \mathcal{O}_X)$ , on peut donc définir le produit  $u.v$  comme le composé

$$\Gamma_{(m)}^{n+n'}(\mathcal{E}^\vee) \xrightarrow{\Delta_{n,n'}} \Gamma_{(m)}^n(\mathcal{E}^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Gamma_{(m)}^{n'}(\mathcal{E}^\vee) \xrightarrow{1 \otimes v} \Gamma_{(m)}^n(\mathcal{E}^\vee) \xrightarrow{u} \mathcal{O}_X.$$

Comme  $\Delta_{n,n'}$  est induit par  $\Delta$ , ceci montre que l'inclusion  $i$  préserve le produit; en particulier, le produit défini sur  $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})$  est associatif et commutatif et munit  $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})$  d'une structure d'algèbre commutative.

Par dualité, on déduit immédiatement de la Proposition 1.2.1 l'énoncé qui suit.

**1.3.2. PROPOSITION.** *Si  $f$  est un homomorphisme de  $\mathbf{Z}_{(p)}$ -schémas:  $Y \rightarrow X$ , on a un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_X$ -algèbres:  $f^*(\mathbf{S}_X^{(m)}(\mathcal{E})) \simeq \mathbf{S}_Y^{(m)}(f^*\mathcal{E})$ .*

**1.3.3. PROPOSITION.** *L'algèbre  $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})$  est une algèbre graduée*

$$\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{S}_n^{(m)}(\mathcal{E}).$$

(ii) *On dispose d'un isomorphisme canonique  $\mathbf{S}_n^{(m)}(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\bar{\mathbf{I}}^{\{n\}} / \bar{\mathbf{I}}^{\{n+1\}}, \mathcal{O}_X)$ .*

**DEMONSTRATION.** D'après 1.1.5, l'algèbre  $\Gamma_{(m)}^n(\mathcal{E})$  est graduée par  $\bigoplus_{k=0}^n \Gamma_{(m),k}(\mathcal{E})$  et on a un isomorphisme canonique:  $\bar{\mathbf{I}}^{\{k\}} / \bar{\mathbf{I}}^{\{k+1\}} \simeq \Gamma_{(m),k}(\mathcal{E})$ . En dualisant, cette graduation définit une graduation sur  $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma_{(m)}^n(\mathcal{E}), \mathcal{O}_X)$ .

De plus, il existe une suite exacte:

$$0 \rightarrow \bar{\mathbf{I}}^{\{n\}} / \bar{\mathbf{I}}^{\{n+1\}} \rightarrow \Gamma_{(m)}^n(\mathcal{E}) \rightarrow \Gamma_{(m)}^{n-1}(\mathcal{E}) \rightarrow 0.$$

D'où en dualisant, une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma_{(m)}^{n-1}(\mathcal{E}), \mathcal{O}_X) &\rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma_{(m)}^n(\mathcal{E}), \mathcal{O}_X) \\ &\rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\bar{\mathbf{I}}^{\{n\}} / \bar{\mathbf{I}}^{\{n+1\}}, \mathcal{O}_X) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Les graduations duales définies sur les faisceaux  $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma_{(m)}^n(\mathcal{E}), \mathcal{O}_X)$  sont donc compatibles pour  $n$  variable et induisent une graduation sur  $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})$ , dont le gradué est isomorphe à  $\bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\bar{\mathbf{I}}^{\{n\}} / \bar{\mathbf{I}}^{\{n+1\}}, \mathcal{O}_X)$ , et tel que  $\text{gr}_k \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E}) \simeq \text{gr}_k(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma_{(m)}^k(\mathcal{E}), \mathcal{O}_X))$ . De ce fait, la graduation ainsi définie est une graduation d'algèbre

**1.3.1. Structure locale**

Supposons maintenant que  $X$  soit affine et que  $X = \text{Spec } A$  où  $A$  est une  $\mathbf{Z}_{(p)}$ -algèbre Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module libre de rang fini;  $\mathcal{E}$  provient d'un  $A$ -module

libre  $E$ , de base  $(x_1, \dots, x_t)$ . Notons  $E^\vee$  le dual de  $E$  et  $(y_1, \dots, y_t)$  la base duale de  $(x_1, \dots, x_t)$ . D'après 1.1.2, les modules  $\Gamma_{(m)}^n(E^\vee)$  sont libres de base  $y_1^{\{k_1\}} \dots y_t^{\{k_t\}}$  avec  $\sum k_i \leq n$ . Soit  $\underline{x}^{\langle \underline{k} \rangle} = \underline{x}^{\langle k_1, \dots, k_t \rangle}$  la base duale des  $\underline{y}^{\{ \underline{k} \}}$  de  $\Gamma_{(m)}^n(E^\vee)$ . Pour  $n$  variable, ces éléments forment une base de  $\mathbf{S}^{(m)}(E)$  comme  $A$ -module.

1.3.4.1. LEMME. *Pour tous  $\underline{k}', \underline{k}''$  dans  $\mathbf{N}$ , on a*

$$\underline{x}^{\langle \underline{k}' \rangle} \cdot \underline{x}^{\langle \underline{k}'' \rangle} = \left\langle \begin{array}{c} \underline{k}' + \underline{k}'' \\ \underline{k}' \end{array} \right\rangle \cdot \underline{x}^{\langle \underline{k}' + \underline{k}'' \rangle}.$$

En particulier, on a l'identité:  $\underline{x}^{\langle \underline{k} \rangle} = x_1^{\langle k_1 \rangle} \dots x_t^{\langle k_t \rangle}$  et par la suite, on confondra les deux notations.

DÉMONSTRATION. Dans  $E^\vee \oplus E^\vee$ , on considérera les éléments  $r_i = (y_i, 0)$  et  $s_i = (0, y_i)$  qui forment une base. Alors

$$\Delta_{n, n'}(y_1^{\{k_1\}} \dots y_t^{\{k_t\}}) = (r_1 + s_1)^{\{k_1\}} \dots (r_t + s_t)^{\{k_t\}}$$

et

$$\begin{aligned} & \left( \underline{x}^{\langle \underline{k}' \rangle} \cdot \underline{x}^{\langle \underline{k}'' \rangle} \right) \cdot (y_1^{\{k_1\}} \dots y_t^{\{k_t\}}) \\ &= \underline{x}^{\langle \underline{k}' \rangle} \circ (1 \otimes \underline{x}^{\langle \underline{k}'' \rangle}) ((r_1 + s_1)^{\{k_1\}} \dots (r_t + s_t)^{\{k_t\}}). \end{aligned}$$

Compte tenu de [4], 1.3.6, les seuls termes non nuls de  $(1 \otimes \underline{x}^{\langle \underline{k}'' \rangle}) (\Delta_{n, n'}(\underline{y}^{\{ \underline{k} \}}))$  sont de la forme

$$\left\langle \begin{array}{c} \underline{k} \\ \underline{k}'' \end{array} \right\rangle \cdot \prod_{i=1}^t r_i^{\{k_i - k_i''\}}.$$

D'où finalement la formule du lemme.

Par dualité, à partir de 1.1.5, on montre facilement la proposition qui suit.

1.3.4.2. PROPOSITION. *Le module  $\mathbf{S}_n^{(m)}(\mathcal{E})$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module libre de base les  $\underline{x}^{\langle \underline{k} \rangle}$  avec  $|\underline{k}| = n$ .*

Soient  $y \in E$  et  $F = A.Y$  le  $A$ -module libre de rang un de base  $Y$ . Il existe un homomorphisme canonique,  $A$ -linéaire, de  $F$  vers  $E$ , qui envoie  $Y$  sur  $y$ . On en déduit une application  $\mu : \mathbf{S}^{(m)}(F) \rightarrow \mathbf{S}^{(m)}(E)$ . Le module  $\mathbf{S}^{(m)}(F)$  est libre de base les  $Y^{\langle k \rangle}$ .

DÉFINITION. Nous poserons  $y^{\langle k \rangle} = \mu(Y^{\langle k \rangle})$ .

Il est évident que cette notation est cohérente avec les notations précédentes pour les éléments d'une base de  $E$ .

En utilisant la description locale, on montre comme en 1.2.2 la proposition qui suit.

**1.3.5. PROPOSITION.** *Soient  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  deux  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de rang fini. Alors il existe un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_X$ -algèbres graduées*

$$\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E}') \simeq \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}').$$

**1.3.6. PROPOSITION.** *Soient  $X$  un schéma localement noethérien,  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang fini. Alors l'algèbre  $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})$  est une  $\mathcal{O}_X$ -algèbre localement noethérienne.*

**DÉMONSTRATION.** Comme  $X$  est localement noethérien, il suffit de montrer que si  $U$  est un ouvert de  $X$  sur lequel  $\mathcal{E}$  est libre de base  $(x_1, \dots, x_t)$ ,  $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})(U)$  est une  $\mathcal{O}(U)$ -algèbre de type fini. Or,  $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})(U)$  est engendrée par les  $x_i^{\langle k_i \rangle}$ . Soit  $k \in \mathbf{N}$ , écrivons

$$k = a_0 + a_1p + \dots + a_{m-1}p^{m-1} + a_m p^m,$$

avec  $0 \leq a_j \leq p - 1$  pour tout  $j \leq m - 1$ . Alors, on voit comme en [4], 2.2.5, que

$$x_i^{\langle k \rangle} = u x_i^{a_0} \dots (x_i \langle pm \rangle)^{a_{m-1}} (x_i \langle pm \rangle)^{a_m},$$

où  $u$  est une unité  $p$ -adique. Cela montre que  $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})(U)$  est engendrée par les  $x_i^{\langle p^j \rangle}$  pour  $1 \leq i \leq t$  et  $0 \leq j \leq m$ . D'où la proposition.

**1.3.7. Comparaison entre l'algèbre graduée de  $\mathcal{D}_X^{(m)}$  et l'algèbre symétrique de niveau  $m$  de l'espace tangent.**

Dans cette partie,  $X$  est un  $S$ -schéma lisse,  $\mathcal{T}_X$  est le faisceau tangent de  $X$  relativement à  $S$ .

**1.3.7.1. LEMME.** *Soit  $A$  une  $\mathbf{Z}_{(p)}$ -algèbre munie d'un  $m$ -PD-idéal  $(I, J, \gamma)$  et d'une filtration décroissante d'anneau  $K_n$  telle que  $\gamma_k(K_n \cap J) \subset K_{nk} \cap J$  pour tous  $k, n \in \mathbf{N}$ . On considère la filtration induite sur  $I$  et  $J$ . Alors il existe une unique  $m$ -PD-structure sur  $\text{gr}_\bullet I : (\text{gr}_\bullet I, \text{gr}_\bullet J, \bar{\gamma})$  telle que, si  $\bar{x} \in \text{gr}_n J$  est la classe de  $x \in K_n \cap J$ ,  $\bar{\gamma}_k(\bar{x})$  soit la classe mod  $K_{nk+1} \cap J$  de  $\gamma_k(x)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Remarquons d'abord que la condition du lemme implique que  $K_n \cap J$  est un sous-PD-idéal de  $J$ . Notons  $I' = \text{gr}_\bullet I$ ,  $J' = \text{gr}_\bullet J$  et  $J'_n$  ses composantes homogènes. Il est évident que  $I'^{(p^m)} + p \cdot I' \subset J'$ . Le seul point à

montrer est que la structure définie dans l'énoncé munit  $J'$  d'une PD-structure. Soient  $x \in K_n \cap J$  et  $y \in K_{n+1} \cap J$ , alors

$$\gamma_k(x + y) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(x)\gamma_j(y) = \gamma_k(x) \bmod K_{n+1} \cap J,$$

d'après la condition du lemme. Finalement, ceci définit une application

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_k : J'_n &\rightarrow J'_{nk}, \\ \bar{x} &\mapsto \gamma_k(x) \bmod K_{n+1}. \end{aligned}$$

Soit  $x \in J'$ ,  $x = \sum_{i=r}^s x_i$  où  $x_i \in J'_i$  et  $x_i \neq 0$ ; on prolonge  $\bar{\gamma}$  en posant

$$\bar{\gamma}_k(x) = \sum_{k_r+\dots+k_s=k} \bar{\gamma}_{k_r}(x_r) \cdots \bar{\gamma}_{k_s}(x_s).$$

Il reste à montrer que les  $\bar{\gamma}_k$  vérifient les axiomes des puissances divisées. Par définition,  $\bar{\gamma}_0(x) = 1, \bar{\gamma}_1(x) = x$  et si  $k \geq 1, \bar{\gamma}_k(x) \in J'$ . D'autre part, du fait que les  $\gamma_k$  sont des puissances divisées sur  $J$ , les éléments homogènes de  $J'$  satisfont les égalités suivantes

- (i)  $\forall x \in J'_i, x = \sum_{j=1}^n x'_j$  où  $x'_j \in J'_j, \bar{\gamma}_k(x) = \sum_{k_1+\dots+k_n=k} \bar{\gamma}_{k_1}(x'_1) \cdots \bar{\gamma}_{k_n}(x'_n).$
- (ii)  $\forall \lambda \in \text{gr}_\bullet A, \bar{\gamma}_k(\lambda.x) = \lambda^k . \bar{\gamma}_k(x).$
- (iii)  $\bar{\gamma}_k(x) . \bar{\gamma}_{k'}(x) = \binom{k+k'}{k} \bar{\gamma}_{k+k'}(x).$
- (iv)  $\bar{\gamma}_k(\bar{\gamma}_{k'}(x)) = \frac{(kk')!}{k!(k')^k \bar{\gamma}_{kk'}(x)}.$

Rappelons encore une formule: si les  $\gamma_k$  sont des puissances divisées sur un idéal  $J$ ,

$$\gamma_l(\gamma_{k_1}(x_1) \cdots \gamma_{k_n}(x_n)) = C_{l,\underline{k}} \gamma_{k_{1l}}(x_1) \cdots \gamma_{k_{nl}}(x_n) \quad \text{où}$$

$$C_{l,\underline{k}} = \frac{(k_1 l)! \cdots (k_n l)!}{l!(k_1!)^l \cdots (k_n!)^l} \in \mathbf{N}.$$

Naturellement, cette formule est encore satisfaite par les  $\bar{\gamma}_k$  si les  $x_i$  sont homogènes.

Soient  $x, y \in J', x = \sum_{i=r}^s x_i$  et  $y = \sum_{i=r'}^{s'} y_i$ , où  $x_i$  et  $y_i$  sont dans  $J'_i$ . On considère l'anneau  $B = \mathbf{Z}[X_r, \dots, X_s, Y_{r'}, \dots, Y_{s'}]$  qu'on gradue en imposant que  $X_i$  et  $Y_i$  soient homogènes de degré  $i$ . Il existe un morphisme canonique d'algèbres graduées de  $B$  vers  $\text{gr}_\bullet A$  qui envoie  $X_i$  sur  $x_i$  et  $Y_i$  sur  $y_i$ . Introduisons  $I_B$  l'idéal d'augmentation de  $B$  et  $C$  l'enveloppe à puissances divisées de cet idéal. D'après la proposition 1.5.1 de [4],  $C$  est un  $\mathbf{Z}$ -module libre de base les  $\underline{X}^{[k]}, \underline{Y}^{[k']}$ . De plus  $C$  est encore graduée et les éléments  $X_i^{[k_i]}$  et  $Y_i^{[k_i]}$  sont homogènes de degré

$i k_i$ . Soient  $\underline{k} \in \mathbf{N}^{s-r+1}$  et  $\underline{k}' \in \mathbf{N}^{s'-r'+1}$ , notons  $\bar{\gamma}_{\underline{k}}(\underline{x}) = \bar{\gamma}_{k_r}(x_r) \dots \bar{\gamma}_{k_s}(x_s)$  et définissons une application  $\mathbf{Z}$ -linéaire

$$\begin{aligned} \psi: C &\rightarrow \text{gr}_\bullet A, \\ \underline{X}^{[\underline{k}]} \underline{Y}^{[\underline{k}']} &\mapsto \bar{\gamma}_{\underline{k}}(\underline{x}) \bar{\gamma}_{\underline{k}'}(\underline{y}). \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} &\psi(\underline{X}^{[\underline{k}]} \underline{Y}^{[\underline{k}']}) \cdot \underline{X}^{[\underline{l}]} \underline{Y}^{[\underline{l}']}) \\ &= \psi\left(\binom{\underline{k} + \underline{l}}{\underline{k}} \binom{\underline{k}' + \underline{l}'}{\underline{k}'} \underline{X}^{[\underline{k} + \underline{l}]} \underline{Y}^{[\underline{k}' + \underline{l}']}\right) \\ &= \binom{\underline{k} + \underline{l}}{\underline{k}} \binom{\underline{k}' + \underline{l}'}{\underline{k}'} \bar{\gamma}_{\underline{k} + \underline{l}}(\underline{x}) \bar{\gamma}_{\underline{k}' + \underline{l}'}(\underline{y}) \\ &= \psi(\underline{X}^{[\underline{k}]} \underline{Y}^{[\underline{k}']}) \cdot \psi(\underline{X}^{[\underline{l}]} \underline{Y}^{[\underline{l}']}). \end{aligned}$$

Ceci montre que  $\psi$  est un morphisme d'algèbres.

Soit  $T \in C$ . Si  $T$  est de la forme  $\underline{X}^{[\underline{k}]} \underline{Y}^{[\underline{k}']}$ , la formule rappelée plus haut entraîne que  $T^{[l]} = \frac{\prod (k_i l)! (k'_i l)!}{l! \prod (k_i)! (k'_i)!} \underline{X}^{[\underline{k}l]} \underline{Y}^{[\underline{k}'l]}$  et

$$\begin{aligned} \psi(T^{[l]}) &= \frac{\prod (k_i l)! (k'_i l)!}{l! \prod (k_i)! (k'_i)!} \bar{\gamma}_{\underline{k}l}(\underline{x}) \bar{\gamma}_{\underline{k}'l}(\underline{y}) \\ &= \bar{\gamma}_l(\psi(T)). \end{aligned}$$

D'après (i), il en résulte aussi que si  $T$  est homogène,  $\psi(T^{[l]}) = \bar{\gamma}_l(\psi(T))$ . Si  $T$  est égal à  $\sum_{i=r}^s T_i$  où  $T_i$  est homogène,  $\psi(T_i)$  est homogène, et

$$T^{[l]} = \sum_{l_r + \dots + l_s = l} \prod (T_i)^{[l_i]}.$$

Donc, par définition de  $\bar{\gamma}_l$ ,

$$\psi(T^{[l]}) = \sum_{l_r + \dots + l_s = l} \prod \bar{\gamma}_{l_i}(\psi(T_i)) = \bar{\gamma}_l(\psi(T)).$$

Cela montre que les applications  $\bar{\gamma}_l$  vérifient les propriétés des puissances divisées et achève la démonstration du lemme.

1.3.7.2. NOTATIONS. Considérons  $\mathcal{I}$ , l'idéal de l'immersion diagonale:  $X \rightarrow X \times_S X$ , et  $\mathcal{P}_{(m)}$  l'enveloppe à puissances divisées de niveau  $m$  de  $(\mathcal{O}_{X \times X}, \mathcal{I})$ .

La PD-structure sur  $\mathcal{P}_{(m)}$  sera notée  $(\mathcal{K}, \mathcal{L}, \delta)$ . L'algèbre  $\mathcal{P}_{(m)}$  est munie de la filtration  $m$ -PD-adique par les  $\mathcal{K}^{\{n+1\}}$ . On désignera par  $\mathcal{P}_{(m)}^n$  la PD-algèbre  $\mathcal{P}_{(m)}/\mathcal{K}^{\{n+1\}}$ , qu'on peut voir comme un faisceau sur  $X$  et qui est munie de la filtration induite par la filtration  $m$ -PD-adique. On notera  $\text{gr}_\bullet \mathcal{P}$  (respectivement  $\text{gr}_\bullet \mathcal{P}^n$ ), les algèbres graduées de  $\mathcal{P}^{(m)}$  et  $\mathcal{P}_{(m)}^n$  pour cette filtration. On introduit en outre l'homomorphisme canonique  $\alpha: \mathcal{O}_{X \times X} \rightarrow \mathcal{P}_{(m)}$  ainsi que les idéaux  $\mathcal{K}' = \text{gr}_\bullet \mathcal{K}$  et  $\mathcal{L}' = \text{gr}_\bullet \mathcal{L}$ , de  $\text{gr}_\bullet \mathcal{P}_{(m)}$ . De plus, on rappelle que

$$\mathcal{D}_{X,n}^{(m)} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{(m)}^n, \mathcal{O}_X)$$

si l'on considère la structure de  $\mathcal{O}_X$ -module sur  $\mathcal{P}_{(m)}^n$  qui provient de la multiplication à gauche par  $\mathcal{O}_X$  sur  $\mathcal{O}_{X \times X}$ , et que

$$\mathcal{D}_X^{(m)} = \lim_{\rightarrow n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_{X,n}^{(m)}.$$

D'après le lemme, on peut définir une  $m$ -PD-structure sur  $\text{gr}_\bullet \mathcal{P} : (\mathcal{K}', \mathcal{L}', \bar{\delta})$ . D'autre part, la Proposition 1.4.5 de [4] montre que l'homomorphisme canonique  $\mathcal{O}_X \rightarrow \text{gr}_0 \mathcal{P}$  est un isomorphisme. L'idéal  $\mathcal{K}'$  est engendré par les classes des éléments de  $\mathcal{K}$  dans le gradué, c'est donc l'idéal d'augmentation de l'algèbre  $\text{gr}_\bullet \mathcal{P}$ ; de même, l'idéal  $\mathcal{K}'^{\{n\}}$  est engendré par les classes des éléments de  $\mathcal{K}^{\{n\}}$  dans le gradué (par définition de  $\bar{\delta}$ ), et donc,  $\mathcal{K}'^{\{n\}}$  est l'idéal  $\bigoplus_{l \geq n} \mathcal{K}^{\{l\}}/\mathcal{K}^{\{l+1\}}$ . En particulier, on a un isomorphisme canonique

$$\text{gr}_\bullet \mathcal{P}/\mathcal{K}'^{\{n\}} \simeq \text{gr}_\bullet \mathcal{P}^n.$$

Cet isomorphisme est un isomorphisme de  $m$ -PD-algèbres, si on munit  $\text{gr}_\bullet \mathcal{P}^n$  de la structure de  $m$ -PD-algèbre qui provient de celle de  $\mathcal{P}_{(m)}^n$ .

**1.3.7.3. PROPOSITION.** *Il existe un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_X$ -algèbres graduées*

$$\text{gr}_\bullet \mathcal{D}_X^{(m)} \simeq \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X).$$

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\mathcal{I}$  l'idéal définissant l'immersion diagonale  $X \rightarrow X \times X$ . Le faisceau  $\Omega_X^1$  s'identifie à  $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ . L'homomorphisme  $\alpha$  envoie  $\mathcal{I}^n$  dans  $\mathcal{K}^{\{n\}}$ , si bien que l'on a un homomorphisme canonique:  $\Omega_X^1 \rightarrow \text{gr}_1(\mathcal{P})$ , d'où finalement un homomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -algèbres

$$\mathbf{S}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^1) \rightarrow \text{gr}_\bullet(\mathcal{P}).$$

Comme l'idéal d'augmentation de l'algèbre  $\mathbf{S}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^1)$  est envoyé dans  $\mathcal{K}'$ , qui est muni d'une  $m$ -PD-structure, la propriété universelle des puissances divisées

entraîne qu'il existe un homomorphisme  $\Gamma_{(m)}(\Omega_X^1) \rightarrow \text{gr}_\bullet \mathcal{P}$ , soit encore un homomorphisme  $\nu : \Gamma_{(m)}^n(\Omega_X^1) \rightarrow \text{gr}_\bullet \mathcal{P}_{(m)}^n$ .

Vérifier que  $c$ 'est un isomorphisme est une question locale. Plaçons-nous sur un ouvert affine  $U$  muni de coordonnées locales  $t_1, \dots, t_N$ . Soient  $\tau_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1 \in \mathcal{I}$ . Le faisceau  $\Omega_X^1$  est libre sur  $U$  de base les  $\tau_i$ , de sorte que d'après ([4] 1.3.5) le module  $\text{gr}_\bullet \mathcal{P}$  est libre sur  $U$  de base les  $\tau_1^{\{k_1\}} \dots \tau_N^{\{k_N\}}$  et les modules  $\text{gr}_\bullet \mathcal{P}_{(m)}^n$  sont libres de base les  $\tau_1^{\{k_1\}} \dots \tau_N^{\{k_N\}}$  avec  $\sum k_i \leq n$ . Si l'on note  $\{\}'$  la  $m$ -PD-structure sur le  $m$ -PD-idéal de  $\Gamma_{(m)}(\Omega_X^1)$ , alors les modules  $\Gamma_{(m)}^n(\Omega_X^1)$  sont libres de base  $\tau_1^{\{k_1\}'} \dots \tau_N^{\{k_N\}'}$  avec  $\sum k_i \leq n$ ; via ces identifications,  $\nu(\underline{\tau}^{\{k\}'}) = \underline{\tau}^{\{k\}}$ . Cela montre que  $\nu$  est un isomorphisme. Par conséquent, le transposé  $\nu'$  de  $\nu$  induit un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\text{gr}_\bullet \mathcal{P}_{(m)}^n, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\nu'} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Gamma_{(m)}^n(\Omega_X^1), \mathcal{O}_X).$$

Or, le module  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\text{gr}_\bullet \mathcal{P}^n, \mathcal{O}_X)$  s'identifie à  $\bigoplus_{i=1}^n \text{gr}_n \mathcal{D}_X^{(m)}$  et en passant à la limite inductive sur  $n$  pour les isomorphismes  $\nu'$ , on voit que l'on a construit un isomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules entre  $\text{gr}_\bullet \mathcal{D}_X^{(m)}$  et  $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X)$ . Sur  $U$ , ces deux espaces sont des  $\mathcal{O}_X$ -modules libres de base duale respectivement les  $\underline{\delta}^{\langle k \rangle}$  et les  $\underline{\tau}^{\langle k \rangle}$  où par abus de notation on écrit  $\delta^{\langle k_i \rangle}$  pour l'image de  $\delta^{\langle k_i \rangle}$  dans le gradué. Alors, on a l'égalité  $\nu'(\underline{\tau}^{\langle k \rangle}) = \underline{\delta}^{\langle k \rangle}$ . Remarquons maintenant que la formule donnée dans [4] qui décrit le produit des éléments  $\underline{\tau}^{\langle k \rangle}$  entre eux est identique à la formule 2.2.4 de [4] qui est aussi valable dans le gradué et qui donne le produit des éléments  $\underline{\delta}^{\langle k \rangle}$ . Cela montre finalement que  $\nu'$  est un homomorphisme d'algèbres.

### 1.3.8. Dévissage des algèbres $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})$ .

Soit  $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres. Posons pour  $0 \leq l \leq k$ ,

$$\Lambda_k^l = \sum_{i \geq l} \text{Im}(\mathbf{S}_i^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbf{S}_{k-i}^{(m)}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{F})).$$

Les  $\Lambda_k^l$  forment une filtration décroissante de  $\mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{F})$ , les modules  $\Lambda_k^0$  et  $\Lambda_k^k$  étant respectivement isomorphes à  $\mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{F})$  et  $\mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{E})$ .

### 1.3.9. PROPOSITION. Pour tout $l \leq k$ , il existe une suite exacte de $\mathcal{O}_X$ -modules sur $X$

$$0 \rightarrow \Lambda_k^{l+1} \rightarrow \Lambda_k^l \rightarrow \mathbf{S}_l^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbf{S}_{k-l}^{(m)}(\mathcal{G}) \rightarrow 0$$

DÉMONSTRATION. Vérifions l'énoncé pour  $l = 0$ . Notons  $s$  la surjection  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ,  $i$  l'injection  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $\sigma_k$  et  $j_k$  les applications induites par functorialité

de  $\mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{F})$  vers  $\mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{G})$  et de  $\mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{E})$  vers  $\mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{F})$ . Considérons  $U$ , un ouvert sur lequel les faisceaux considérés sont libres et  $(g_1, \dots, g_t)$  une base de  $\mathcal{G}(U)$ ; alors il existe  $y_i \in \mathcal{F}(U)$  tel que  $s(y_i) = g_i$ . Avec les notations de 1.3.4 on voit que  $\sigma(y_i^{(k_i)}) = g_i^{(k_i)}$ . Comme les éléments  $g_i^{(k_i)}$  engendrent  $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{G})(U)$  comme  $\mathcal{O}_X$ -algèbre, ceci montre que les  $\sigma_k$  sont surjectifs. Sur  $U$ , la suite exacte du départ est scindée, et d'après 1.3.5, un tel scindage induit un isomorphisme

$$\mathbf{S}_l^{(m)}(\mathcal{F}) \simeq \sum_{k'+k''=l} \mathbf{S}_{k'}^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes \mathbf{S}_{k''}^{(m)}(\mathcal{G}).$$

Soit  $e \otimes g \in \mathbf{S}_{k'}^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes \mathbf{S}_{k''}^{(m)}(\mathcal{G})$ . Via une telle identification, si  $k' \neq 0$ ,

$$\sigma_l(e \otimes g) = \sigma_{k'} \circ j_{k'}(e) \otimes g = 0.$$

Si  $k' = 0$ , on trouve

$$\sigma_l(e_0 \otimes g_l) = e_0 g_l.$$

Ce calcul montre donc que  $\Lambda_k^1$ , qui s'identifie sur  $U$  à  $\sum_{l=1}^k \mathbf{S}_l^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes \mathbf{S}_{k-l}^{(m)}(\mathcal{G})$ , est égal à  $\text{Ker } \sigma_k$ . Si  $l$  est quelconque, considérons le composé  $\varphi_l$

$$\mathbf{S}_l^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes \mathbf{S}_{k-l}^{(m)}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{S}_l^{(m)}(\mathcal{F}) \otimes \mathbf{S}_{k-l}^{(m)}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{F}).$$

Le noyau de l'application  $1 \otimes \sigma_{k-l}$  est  $\mathbf{S}_l^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes \Lambda_{k-l}^1$  qui est inclus dans  $\text{Ker } \varphi_l$  comme on le voit localement, donc  $\varphi_l$  passe au quotient en une application

$$\mathbf{S}_l^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes \mathbf{S}_{k-l}^{(m)}(\mathcal{G}) \rightarrow \Lambda_k^l / \Lambda_k^{l+1},$$

dont on vérifie à nouveau localement que c'est un isomorphisme.

**1.3.10 PROPOSITION.** Soient  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre et  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible, alors il existe des isomorphismes canoniques de  $\mathcal{O}_X$ -modules

- (i)  $\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \Gamma_{(m),n}(\mathcal{E}) \simeq \Gamma_{(m),n}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{E})$ .
- (ii)  $\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathbf{S}_n^{(m)}(\mathcal{E}) \simeq \mathbf{S}_n^{(m)}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{E})$ .

**DÉMONSTRATION.** Les deux énoncés sont équivalents par dualité. Montrons par exemple (i). Nous noterons  $\Gamma_n(\mathcal{E})$  le module  $\Gamma_{(m),n}(\mathcal{E})$ . Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $X$  par des ouverts affines tels que  $\mathcal{L}|_{U_i}$  et  $\mathcal{E}|_{U_i}$  sont libres. Choisissons  $s_i$  une base de  $\mathcal{L}$  sur chaque  $U_i$  et donnons-nous  $a_{i,j} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)^*$  tels que  $s_i = a_{i,j} s_j$ . L'élément  $s_i$  induit une application

$$\begin{aligned} \mathcal{E}|_{U_i} &\rightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{E}|_{U_i} \\ e &\rightarrow s_i \otimes e. \end{aligned}$$



D'où par functorialité une application  $\lambda_i: \Gamma_n(\mathcal{E})|_{U_i} \rightarrow \Gamma_n(\mathcal{L} \otimes \mathcal{E})|_{U_i}$ . Notons

$$\begin{aligned} \psi_i: \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \Gamma_n(\mathcal{E}) &\rightarrow \Gamma_n(\mathcal{L} \otimes \mathcal{E}), \\ s_i^n \otimes \mathcal{E} &\rightarrow \lambda_i(e). \end{aligned}$$

Montrons que les  $\psi_i$  se recollent. Si  $(x_1, \dots, x_t)$  est une base de  $\mathcal{E}$  sur  $U_i \cap U_j$ ,  $(s_i \otimes x_1, \dots, s_i \otimes x_t)$  forment une base de  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{E}$  sur  $U_i$  et il suffit de montrer que, pour  $|\underline{k}| = n$ , on a  $\psi_i(s_i^n \otimes \underline{x}^{\{\underline{k}\}}) = \psi_j(s_j^n \otimes \underline{x}^{\{\underline{k}\}})$ . Or,

$$\begin{aligned} \psi_i(s_i^n \otimes \underline{x}^{\{\underline{k}\}}) &= (s_i \otimes x_i)^{\{k_1\}} \dots (s_t \otimes x_t)^{\{k_t\}} \quad \text{et} \\ \psi_j(s_j^n \otimes \underline{x}^{\{\underline{k}\}}) &= \psi_j(s_j^n \otimes a_{i,j}^n \cdot \underline{x}^{\{\underline{k}\}}) \\ &= (s_j \otimes a_{i,j} x_1)^{\{k_1\}} \dots (s_j \otimes a_{i,j} x_t)^{\{k_t\}} \\ &= \psi_i(s_i^n \otimes \underline{x}^{\{\underline{k}\}}). \end{aligned}$$

Les  $\psi_i$  se recollent donc en une application  $\psi$  et il est clair que localement,  $\psi$  est un isomorphisme.

**2. Calcul de la cohomologie des  $\mathcal{D}$ -modules cohérents sur l'espace projectif.**

Dans cette partie, on fixe un entier  $m \geq 0$ . Si  $m \geq 1$ ,  $A$  désignera une  $\mathbf{Z}_{(p)}$ -algèbre noethérienne; si  $m = 0$ ,  $A$  sera plus généralement un anneau noethérien quelconque. On se place ici dans un contexte algébrique:  $S$  est le schéma  $\text{Spec } A$  et  $X$  désigne l'espace projectif de dimension  $N$  sur  $S$ . Si  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module,  $\mathcal{E}(r)$  sera le module  $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X}(r)$ .

**2.1. ALGÈBRES DE COEFFICIENTS.**

Soit  $\mathcal{B}^{(m)}$  une  $\mathcal{O}_X$ -algèbre commutative quasi-cohérente munie d'une structure compatible de  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module à gauche (cf la définition 2.3.4 de [4]). On dit que  $\mathcal{B}^{(m)}$  vérifie la condition (C) si  $\mathcal{B}^{(m)}$  vérifie

- (a) Pour tout ouvert affine  $U$  de  $X$ ,  $\Gamma(U, \mathcal{B}^{(m)})$  est noethérien.
- (b) (b1)  $\forall (r, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ ,  $H^n(X, \mathcal{B}^{(m)}(r))$  est un  $A$ -module de type fini;
- (b2)  $\exists \rho \in \mathbf{Z}: \forall r \geq \rho, \forall n \in \mathbf{N}^*, H^n(X, \mathcal{B}^{(m)}(r)) = 0$ .

D'après la proposition 3.1.2 de [4], ces conditions assurent que  $\mathcal{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$  est un faisceau d'anneaux cohérent. Ce faisceau sera noté  $\mathcal{D}^{(m)}$ ; il est muni de la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels qui sera notée  $F_k \mathcal{D}^{(m)}$ .

L'algèbre  $\mathcal{B}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$  est acyclique: comme c'est un  $\mathcal{D}_{X, \mathbf{Q}}$ -module quasi-cohérent, cela résulte de la proposition 9.1 de [6], et de ce qu'il existe assez d'injectifs quasi-cohérents. Donc, si  $n \geq 1$ ,  $H^n(X, \mathcal{B}^{(m)})$  est un module de  $p$ -torsion (finie).

Comme exemples de coefficients qui vérifient ces conditions, nous aurons en tête, d'une part, le cas de  $\mathcal{O}_X$ , et d'autre part, le cas des coefficients  $\mathcal{B}_X^{(m)}$  dont

la définition est rappelée dans l'introduction; dans ce cas, les propriétés cohomologiques annoncées résultent de l'appendice de Berthelot.

**2.1.1. PROPOSITION.** *Soient  $\mathcal{B}^{(m)}$  une algèbre de coefficients vérifiant la condition (C), et  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{B}^{(m)}$ -module cohérent, alors  $H^n(X, \mathcal{E})$  est un  $A$ -module de type fini pour tout  $n \geq 1$ .*

**DÉMONSTRATION.** Comme  $X$  est noethérien, le module  $\mathcal{E}$  est limite inductive de ses sous-faisceaux  $\mathcal{O}_X$ -cohérents. L'algèbre  $\mathcal{B}^{(m)}$  étant noethérienne, on en déduit qu'il existe une surjection  $\mathcal{B}^{(m)}$ -linéaire

$$(\mathcal{B}^{(m)}(-r))^a \rightarrow \mathcal{E}.$$

En itérant ce procédé, on voit que  $\mathcal{E}$  admet une résolution par des modules du type  $(\mathcal{B}^{(m)}(-r))^a$ . Comme l'énoncé est vrai pour les modules  $\mathcal{B}^{(m)}(-r)$  par hypothèse, cela montre la proposition.

On applique les résultats précédents, d'abord pour calculer la cohomologie de  $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)}(r)$ , avec  $r$  assez grand, puis pour calculer la cohomologie du faisceau des opérateurs différentiels lui-même, twisté par un  $\mathcal{O}_X(r)$ , avec  $r$  assez grand. Finalement, on termine par une estimation de la cohomologie des  $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)}(r)$  pour tout  $r \in \mathbf{Z}$ , à partir de laquelle on montre que la cohomologie des  $\mathcal{D}^{(m)}$ -modules cohérents est de  $p$ -torsion finie. Dans l'hypothèse où  $m = 0$ , il faudra remplacer dans les résultats,  $p$ -torsion finie, par torsion finie.

## 2.2. UN THÉORÈME D'ANNULATION

On établit ici la nullité des  $H^n(X, \mathcal{E}(r))$  pour  $r$  assez grand, pour tout  $\mathcal{D}^{(m)}$ -module cohérent  $\mathcal{E}$ .

**2.2.1. PROPOSITION.** *Pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , tout  $r \geq \rho$ , et tout  $n \geq 1$ ,  $H^n(X, \mathrm{gr}_k \mathcal{D}^{(m)}(r)) = 0$ .*

**DÉMONSTRATION.** Comme les faisceaux  $\mathrm{gr}_k \mathcal{D}_X^{(m)}$  sont localement libres sur  $X$ , le gradué  $\mathrm{gr}_k \mathcal{D}^{(m)}(r)$  s'identifie à  $\mathcal{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{gr}_k \mathcal{D}_X^{(m)}(r)$  et donc, d'après 1.3.7.3, à  $\mathcal{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{T}_X)$ . De plus, sur  $X$ , on dispose d'une résolution de  $\mathcal{T}_X$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow (\mathcal{O}_X(1))^{N+1} \rightarrow \mathcal{T}_X \rightarrow 0.$$

En vertu de la Proposition 1.3.9, il existe une filtration décroissante de  $\mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1})$  par des  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres  $\Lambda_k^l$  tels que l'on ait des suites exactes

$$0 \rightarrow \Lambda_k^{l+1} \rightarrow \Lambda_k^l \rightarrow \mathbf{S}_l^{(m)}(\mathcal{O}_X) \otimes \mathbf{S}_{k-l}^{(m)}(\mathcal{T}_X) \rightarrow 0.$$

Notons  $\Lambda_k^l$  les faisceaux  $\mathcal{B}^{(m)}(r) \otimes \Lambda_k^l$ . Comme tous les faisceaux intervenant dans les suites exactes précédentes sont localement libres, ces suites restent exactes après tensorisation par  $\mathcal{B}^{(m)}(r)$  et, en identifiant  $\mathbf{S}_l^{(m)}(\mathcal{O}_X)$  à  $\mathcal{O}_X$ , on obtient des suites exactes  $F_k^l$

$$0 \rightarrow \Lambda_k^{l+1} \rightarrow \Lambda_k^l \rightarrow \text{gr}_{k-l} \mathcal{D}^{(m)}(r) \rightarrow 0.$$

De plus  $\Lambda_k^0 \simeq \mathcal{B}^{(m)}(r) \otimes \mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1})$ , qui est encore isomorphe à  $\mathcal{B}^{(m)}(k+r) \otimes \mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{O}_X^{N+1})$ , et  $\Lambda_k^k \simeq \mathcal{B}^{(m)}(r) \otimes \mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{O}_X)$ .

Les entiers  $r$  et  $m$  étant fixés, on procède par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 0$ , la proposition est vraie car  $\text{gr}_0 \mathcal{D}^{(m)}(r) \simeq \mathcal{B}^{(m)}(r)$ . Pour passer de  $k - 1$  à  $k$ , on montre par récurrence descendante sur  $l$  que  $\Lambda_k^l$  est acyclique pour  $\Gamma$ . Pour  $l = k$ , ceci est vrai puisque  $r \geq \rho$ . Supposons que ce soit vrai pour  $\Lambda_k^l$ ; par hypothèse de récurrence,  $\text{gr}_{k-l} \mathcal{D}^{(m)}(r)$  vérifie la même hypothèse d'acyclicité pour  $l \geq 1$ . En considérant la longue suite exacte de cohomologie de  $F_k^l$ , on en déduit que  $\forall l \geq 1, \forall n \geq 1, H^n(X, \Lambda_k^l) = 0$ . Comme  $\forall n \geq 1, H^n(X, \Lambda_k^0) = 0$ , cela montre le résultat pour  $\text{gr}_k \mathcal{D}^{(m)}(r)$  en passant à la longue suite exacte de cohomologie associée à la suite  $F_k^0$ .

**2.2.2. COROLLAIRE.** *Pour tout  $r \geq \rho$  et tout  $k \in \mathbf{N}$ ,  $H^n(X, \mathcal{D}^{(m)}(r)) = 0$ .*

**DÉMONSTRATION.** Partons des suites exactes courtes sur  $X$

$$0 \rightarrow F_{k-1}(\mathcal{D}^{(m)})(r) \rightarrow F_k(\mathcal{D}^{(m)})(r) \rightarrow \text{gr}_k \mathcal{D}^{(m)}(r) \rightarrow 0.$$

Comme  $\mathcal{D}_0^{(m)}(r)$  est isomorphe à  $\mathcal{B}^{(m)}(r)$ , qui est acyclique d'après la condition (b), on voit que  $\forall n \geq 1, H^n(X, \mathcal{D}_0^{(m)}(r)) = 0$ . D'après la Proposition 2.2.1,  $H^n(X, \text{gr}_k \mathcal{D}^{(m)}(r))$  est nul pour tout  $n \geq 1$ . En passant à la longue suite exacte de cohomologie associées aux suites exactes courtes ci-dessus, on en déduit par récurrence sur  $k$  que  $H^n(X, \mathcal{D}_k^{(m)}(r))$  est nul pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  et tout  $k \in \mathbf{N}$ . Comme  $X$  est un schéma noethérien, la cohomologie commute à la limite inductive et par passage à la limite inductive sur  $k$ , on en déduit le même résultat pour  $\mathcal{D}^{(m)}(r)$ .

**2.2.3. PROPOSITION.** *Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}^{(m)}$ -module cohérent. Alors*

(i) *Il existe  $r_0 \in \mathbf{Z}$  tel que,  $\forall r \geq r_0$ , il existe  $s \in \mathbf{N}$  et une surjection  $\mathcal{D}^{(m)}$  linéaire*

$$(\mathcal{D}^{(m)}(-r))^s \rightarrow \mathcal{E}.$$

(ii) *Il existe  $r_0 \in \mathbf{Z}$  tel que,  $\forall r \geq r_0, \forall n \geq 1, H^n(X, \mathcal{E}(r)) = 0$ .*

**DÉMONSTRATION.** Comme  $X$  est un schéma noethérien,  $\mathcal{E}$  est limite inductive de ses sous-faisceaux cohérents. Il existe donc un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent  $\mathcal{F}$  et une

surjection  $\mathcal{D}^{(m)} \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ . Or, il existe  $r_0 \in \mathbf{Z}$  tel que  $\forall r \geq r_0$  il existe une surjection  $\mathcal{O}_X$  linéaire  $\mathcal{O}_X(-r)^s \rightarrow \mathcal{F}$ , d'où le (i). Le (ii) se démontre par récurrence descendante sur  $n$ . Pour  $n = N + 1$ , c'est vrai car les faisceaux considérés sont quasi-cohérents. Passons de  $n$  à  $n - 1$  : soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}^{(m)}$ -module cohérent et une surjection  $\mathcal{D}^{(m)}(-r)^s \rightarrow \mathcal{E}$ , dont le noyau est  $\mathcal{R}$ . Par hypothèse de récurrence, il existe  $r_0 \in \mathbf{N}$  tel que  $\forall r \geq r_0, \forall n' \geq n, H^{n'}(X, \mathcal{R}(r)) = 0$ . Soit  $r_1 = \max(r_0, \rho + r)$ , alors, en vertu de 2.2.2, pour  $n' \geq n - 1$  et  $r \geq r_1, H^{n'}(X, \mathcal{E}(r_1)) = H^{n'+1}(X, \mathcal{R}(r_1)) = 0$ , d'où (ii).

2.3. COHOMOLOGIE DE  $\text{gr}_k \mathcal{D}^{(m)}(r)$  si  $r \in \mathbf{Z}$ .

2.3.1. LEMME. Soient  $X$  un schéma de dimension relative  $N$  sur  $S$  et  $\mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_{N-1}, \mathcal{F}$  des  $\mathcal{O}_X$ -modules quasi-cohérents tels que, pour tout  $n \geq 1, H^n(X, \mathcal{E}_i) = 0$  pour tout  $i \in \{0, \dots, N - 1\}$ , et tels que  $\mathcal{F}$  admette une résolution

$$\mathcal{E}_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

Alors, pour tout  $n \geq 1, H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ .

DÉMONSTRATION. On peut par exemple montrer par récurrence sur  $s \in \mathbf{N}$  que si  $\mathcal{F}$  admet une résolution:  $\mathcal{E}_s \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ , où les  $\mathcal{E}_i$  sont cohomologiquement triviaux sur  $X$ , alors pour tout  $n \geq N - s, H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ .

2.3.2. NOTATIONS. Soient  $\mathcal{A}$  un faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -algèbres graduées, noethériennes, quasi-cohérentes, et  $(\mathcal{A}_k)_{k \in \mathbf{Z}}$  ses composantes homogènes. Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{A}$ -module gradué,  $\mathcal{M}(r) = \bigoplus \mathcal{M}_k(r)$  est gradué pour tout  $r \in \mathbf{Z}$ , et  $\mathcal{M}[i]$  pour  $i \in \mathbf{Z}$  désigne le  $\mathcal{A}$ -module gradué défini par  $\mathcal{M}_k[i] = \mathcal{M}_{k+i}$ .

Remarque. Si  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de type fini, la  $\mathcal{B}^{(m)}$ -algèbre  $\mathcal{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{F})$  est noethérienne car  $\mathcal{B}^{(m)}$  est noethérienne et l'algèbre  $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{F})$  est une  $\mathcal{O}_X$ -algèbre de type fini comme on l'a vu en 1.3.6.

2.3.3. LEMME. Soit  $\mathcal{M}$  un faisceau de  $\mathcal{A}$ -modules gradués, cohérent comme  $\mathcal{A}$ -module. Alors, il existe  $(r, s) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$  et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbf{Z}^s$  tels que l'on ait une surjection graduée

$$\bigoplus_{i=1}^s \mathcal{A}(r)[\alpha_i] \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0.$$

DÉMONSTRATION. Comme  $X$  est noethérien,  $\mathcal{M}$  est limite inductive de ses sous-faisceaux  $\mathcal{O}_X$ -cohérents. Le  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{M}$  étant de plus  $\mathcal{A}$ -cohérent, il existe  $(r, s) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$  et une surjection  $\mathcal{A}$ -linéaire:  $\mathcal{A}^s(-r) \rightarrow \mathcal{M}$ , soit encore une surjection  $\sigma: \mathcal{A}^s \rightarrow \mathcal{M}(r)$ . Le faisceau  $\mathcal{M}$  est somme directe de ses composantes homogènes, donc  $\mathcal{M}(r) = \bigoplus \mathcal{M}_k(r)$  et  $\Gamma(X, \mathcal{M}(r)) = \bigoplus \Gamma(X, \mathcal{M}_k(r))$ .

Soient  $e_i$  un élément de la base canonique de  $\mathcal{A}^n$  et  $f_i = \sigma(e_i)$ . Soient  $f_{i,k}$  la section globale de  $\mathcal{M}_k(r)$  qui est la composante homogène de degré  $k$  de  $e_i$ , et  $t_i = \max\{|k| : f_{i,k} \neq 0\}$ . On peut alors définir

$$\begin{aligned} \sigma' : \bigoplus_{i=1}^s \bigoplus_{j=-t_i}^{t_i} \mathcal{A}[-j] &\rightarrow \mathcal{M}(r), \\ \bigoplus a_{i,j} &\mapsto \sum a_{i,j} f_{i,j}. \end{aligned}$$

Par définition,  $\sigma'$  est gradué; d'autre part, sur un ouvert affine  $U$ ,  $\mathcal{M}(r)$  est engendré comme  $\mathcal{A}$ -module par  $e_1, \dots, e_s$ ; or  $e_i$  est égal à  $\sum_j f_{i,j}$ , donc  $\sigma'$  est surjectif.

**2.3.4. COROLLAIRE.** *Soient  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module gradué ( $\mathcal{M} = \bigoplus \mathcal{M}_k$ ), cohérent comme  $\mathcal{A}$ -module et  $l \in \mathbf{N}$ . Alors, il existe  $(r_1, \dots, r_l) \in \mathbf{Z}^l$ ,  $(s_1, \dots, s_l) \in \mathbf{N}^l$  et, pour tout  $1 \leq i \leq l$ ,  $(\alpha_1^i, \dots, \alpha_{s_i}^i) \in \mathbf{Z}^{s_i}$  tels que l'on ait une résolution graduée*

$$\bigoplus_{j=i}^{s_l} \mathcal{A}(r_l)[\alpha_j^l] \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{s_1} \mathcal{A}(r_1)[\alpha_j^1] \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0.$$

**DÉMONSTRATION.** Il suffit d'itérer le Lemme 2.3.3, puisque le noyau d'un morphisme gradué entre  $\mathcal{A}$ -modules gradués et cohérents est lui aussi gradué et cohérent. On peut ainsi construire des résolutions de longueur arbitrairement grande.

*Remarque.* En passant aux composantes homogènes, on obtient une résolution des  $\mathcal{M}_k$  par des  $\mathcal{A}_{k-\alpha_j^i}(r_i)$ .

**2.3.5. PROPOSITION.** *Soit  $r \in \mathbf{Z}$ , alors il existe  $k_0 \in \mathbf{N}$ , tel que,  $\forall k \geq k_0$  et  $\forall n \geq 1$ ,*

$$H^n(X, \mathcal{B}^{(m)} \otimes \mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{T}_X)(r)) = 0.$$

**DÉMONSTRATION** Soient  $\mathcal{M} = \bigoplus_{k \in \mathbf{N}} \mathcal{B}^{(m)} \otimes \mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{T}_X)$  et  $\mathcal{A} = \bigoplus_{k \in \mathbf{N}} \mathcal{B}^{(m)} \otimes \mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{O}(1))^{N+1}$ . On considérera  $\mathcal{A}$  comme gradué par  $\mathbf{Z}$  en posant  $\mathcal{A}_{-k} = 0$  si  $k \in \mathbf{N}$ . La surjection  $\mathcal{O}_X(1)^{N+1} \rightarrow \mathcal{T}_X$  induit un morphisme surjectif gradué d'algèbres graduées  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$  qui fait de  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{A}$ -module gradué, cohérent, puisque  $\mathcal{M}$  est quasi-cohérent et que  $\mathcal{A}$  est noethérienne. On peut alors appliquer le corollaire 2.3.4 avec  $l = N$  pour obtenir une résolution de  $\mathcal{M}(r)$  et passer aux composantes homogènes dans cette résolution. Considérons

$$k_0 = \max_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq s_i} \{\rho - \alpha_j^i - r_i - r\}.$$

Du fait que l'on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{A}_{k+\alpha_j^i}(r_i + r) \simeq \mathcal{B}^{(m)}(k + \alpha_j^i + r_i + r) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{O}_X^{N+1}),$$

les faisceaux  $\mathcal{A}_k(r_i + r)[\alpha_j^i]$  sont acycliques pour  $k \geq k_0$  et le module  $\mathcal{M}_k(r)$  vérifie les conditions du Lemme 2.3.1, d'où la proposition.

2.3.6. COROLLAIRE. *Fixons  $r \in \mathbf{Z}$ . Alors,*

- (i)  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $H^n(X, \mathcal{D}^{(m)}(r))$  est un  $A$ -module de type fini de  $p$ -torsion.
- (ii) Le conoyau de l'homomorphisme gradué injectif

$$\text{gr}_\bullet \Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)}(r)) \rightarrow \Gamma(X, \text{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)}(r))$$

est de type fini sur  $A$ , nul en degrés assez grands.

DÉMONSTRATION. Pour alléger les notations, on supposera que  $r$  vaut 0. Considérons les suites exactes  $E_k^l$

$$0 \rightarrow F_k \mathcal{D}^{(m)} \rightarrow F_{k+l} \mathcal{D}^{(m)} \rightarrow F_{k+l} \mathcal{D}^{(m)} / F_k \mathcal{D}^{(m)} \rightarrow 0.$$

Rappelons que  $\text{gr}_k \mathcal{D}^{(m)} \simeq \mathcal{B}^{(m)} \otimes \mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{T}_X)$  et considérons un  $k_0$  comme dans la proposition. Il existe aussi des suites exactes  $F_l$

$$0 \rightarrow F_{k_0+l} \mathcal{D}^{(m)} / F_{k_0} \mathcal{D}^{(m)} \rightarrow F_{k_0+l+1} \mathcal{D}^{(m)} / F_{k_0} \mathcal{D}^{(m)} \rightarrow \text{gr}_{k_0+l+1} \mathcal{D}^{(m)} \rightarrow 0.$$

Si  $k \geq k_0$ , les suites exactes  $F_l$  permettent de montrer par récurrence sur  $l$  à partir de  $l = 0$  que les faisceaux  $F_{k_0+l} \mathcal{D}^{(m)} / F_{k_0} \mathcal{D}^{(m)}$  sont acycliques. Finalement, en passant à la longue suite exacte de cohomologie associée à  $E_{k_0}^l$ , on voit que

- il existe une surjection  $H^1(X, F_{k_0} \mathcal{D}^{(m)}) \rightarrow H^1(X, F_{k_0+l} \mathcal{D}^{(m)})$ ;
- si  $n \geq 2$ ,  $H^n(X, F_{k_0} \mathcal{D}^{(m)}) \simeq H^n(X, F_{k_0+l} \mathcal{D}^{(m)})$ .

Prenons la limite inductive sur  $l$  des  $F_{k_0+l} \mathcal{D}^{(m)}$ : comme le schéma  $X$  est noethérien, la cohomologie commute à la limite inductive, donc  $H^1(X, \mathcal{D}^{(m)})$  est un quotient de  $H^1(X, F_{k_0} \mathcal{D}^{(m)})$  et si  $n \geq 2$ ,  $H^n(X, \mathcal{D}^{(m)}) \simeq H^n(X, F_{k_0} \mathcal{D}^{(m)})$ . Comme  $F_{k_0} \mathcal{D}^{(m)}$  est un  $\mathcal{B}^{(m)}$ -module cohérent, sa cohomologie est de type fini sur  $A$ , d'après 2.1.1 et il en va de même de la cohomologie de  $\mathcal{D}^{(m)}$ . De plus, comme il a été rappelé dans l'introduction, les faisceaux  $\mathcal{D}^{(m)} \otimes \mathbf{Q}$  sont acycliques, ie  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $H^n(X, \mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{(m)}) = H^n(X, \mathcal{D}^{(m)}) \otimes \mathbf{Q} = 0$ . Donc la cohomologie de  $\mathcal{D}^{(m)}$  est de torsion (finie), ce qui montre la première assertion.

Pour  $k \geq k_0$ , notons

$$N_l^k = \ker(H^1(X, F_{k_0} \mathcal{D}^{(m)}) \rightarrow H^1(X, F_k \mathcal{D}^{(m)}))$$

et

$$N_k = \ker(H^1(X, F_k \mathcal{D}^{(m)}) \rightarrow H^1(X, F_{k+1} \mathcal{D}^{(m)})),$$

qui sont des  $A$ -modules de type fini. Les  $N_k^l$  forment une suite croissante de sous-modules de  $H^1(X, F_{k_0} \mathcal{D}^{(m)})$ , qui est noethérien. Cette suite est stationnaire et il

existe  $l_0 \in \mathbf{N}$  tel que  $N_{l_0}^l = N_{l_0+1}^l$ , c'est-à-dire que pour  $k \geq l_0$ ,  $N_k$  est nul. Avec cette remarque, pour  $k \geq l_0$ , on tire des suites exactes  $E_k^{k+1}$ , des suites exactes

$$0 \rightarrow \Gamma(X, F_k \mathcal{D}^{(m)}) \rightarrow \Gamma(X, F_{k+1} \mathcal{D}^{(m)}) \rightarrow \Gamma(X, \text{gr}_{k+1} \mathcal{D}^{(m)}) \rightarrow 0,$$

d'où l'énoncé.

**2.3.7. PROPOSITION.** *Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}^{(m)}$ -module cohérent. Alors,  $\forall n \geq 1$ ,  $H^n(X, \mathcal{E})$  est un  $A$ -module de type fini de  $p$ -torsion.*

**DÉMONSTRATION.** On procède par récurrence descendante sur  $n$ , et on montre que si  $\mathcal{E}$  est un faisceau cohérent et si  $l \geq n$ ,  $H^l(X, \mathcal{E})$  est un  $A$ -module de type fini de  $p$ -torsion. En effet, c'est vrai si  $n = N + 1$ . Ensuite, d'après 2.2.3, il existe une surjection  $\mathcal{D}^{(m)}$ -linéaire:  $(\mathcal{D}^{(m)}(-r))^s \rightarrow \mathcal{E}$ . D'après 2.3.6, si  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $H^n(X, \mathcal{D}^{(m)}(-r))$  est un  $A$ -module de type fini de  $p$ -torsion, ce qui permet de procéder par récurrence.

### 3. Calcul de la cohomologie des $\mathcal{D}_Q^\dagger$ -modules cohérents sur l'espace projectif

#### 3.1. PRÉLIMINAIRES

Dans cette partie,  $A$  est un anneau noethérien, complet pour la topologie  $p$ -adique. On considère  $\mathcal{S} = \text{Spf } A$  et  $\mathcal{X}$  l'espace projectif formel de dimension  $N$  sur  $\mathcal{S}$ . Les notations  $X$ ,  $X_i$  et  $\alpha_i$  désigneront respectivement l'espace projectif algébrique  $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}^N$ , la réduction modulo  $p^{i+1}$  de cet espace projectif et l'immersion fermée  $X_i \hookrightarrow X$ .

Soit  $\mathcal{B}^{(m)}$  une  $\mathcal{O}_X$ -algèbre, vérifiant la condition (C) de 2.1. On note toujours  $\mathcal{D}^{(m)} = \mathcal{B}^{(m)} \otimes \mathcal{D}_X^{(m)}$ , et on introduit  $\mathcal{D}_i^{(m)} = \alpha_i^* \mathcal{D}^{(m)}$  et  $\hat{\mathcal{D}}^{(m)} = \lim_{\leftarrow i} \mathcal{D}_i^{(m)}$ . C'est un faisceau d'anneaux cohérent, à sections noethériennes sur les ouverts affines d'après 3.3.4 de [4].

Etant donné un système inductif d'algèbres, indexé par  $m$ , vérifiant chacune la condition (C), on dira que  $(\mathcal{B}^{(m)})$  vérifie la condition (C') si

- (c) Le morphisme  $\mathcal{B}^{(m)} \rightarrow \mathcal{B}^{(m+1)}$  est  $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaire à gauche. On en déduit des morphismes d'anneaux  $\varphi_{m,m+1}: \mathcal{D}^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}^{(m+1)}$  qui doivent satisfaire:
- (d) les morphismes complétés  $\hat{\varphi}_{(m,m+1)}$ , tensorisés par  $\mathbf{Q}$ , sont plats à droite et à gauche.

Si  $(\mathcal{B}^{(m)})$  vérifie (C'), on notera  $\mathcal{D}_Q^\dagger = \lim_{\rightarrow m} \hat{\mathcal{D}}_Q^{(m)}$ ; c'est un faisceau d'anneaux cohérent d'après la proposition 3.3.4 de [4].

*Remarques.* (i) Considérons  $\mathcal{B}_t^{(m)}$  la partie de torsion de  $\mathcal{B}^{(m)}$  et  $\mathcal{B}^{l(m)} = \mathcal{B}^{(m)} / \mathcal{B}_t^{(m)}$ . Comme  $X$  est quasi-compact et que  $\mathcal{B}^{(m)}$  est noethérienne, il existe  $c \in$

$\mathbf{N}$  tel que  $p^c \mathcal{B}_t^{(m)} = 0$ . Construisons  $\mathcal{D}'^{(m)}$  le faisceau des opérateurs différentiels à coefficients dans  $\mathcal{B}'^{(m)}$ , ainsi que son complété  $\widehat{\mathcal{D}}'^{(m)}$ . Alors, on voit facilement que le morphisme canonique  $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}'^{(m)}$  est un isomorphisme après tensorisation par  $\mathbf{Q}$ . Pour obtenir un théorème d'acyclicité pour les modules cohérents sur  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ , il suffira donc de regarder si l'algèbre  $\mathcal{B}'^{(m)}$  vérifie la condition (C).

(ii) Naturellement, le système inductif constant égal à  $\mathcal{O}_X$  vérifie la condition (C'); c'est aussi le cas des coefficients  $\mathcal{B}_X^{(m)}$ , d'après 4.2.1 et 4.2.2 de [4].

Dans la suite de cette partie, on considérera toujours des coefficients vérifiant la condition (C) si  $m$  est fixé ou (C') si  $m$  varie. Pour obtenir des théorèmes d'acyclicité, on commencera par comparer la cohomologie d'un  $\mathcal{D}^{(m)}$ -module cohérent à celle de son complété  $p$ -adique. On en déduira des résultats pour les  $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}$ -modules cohérents analogues à ceux obtenus pour les  $\mathcal{D}^{(m)}$ -modules cohérents. Finalement il sera facile d'en déduire les propriétés comparables des  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^\dagger$ -modules cohérents, par des arguments de passage à la limite inductive, puisque  $\mathcal{X}$  est noethérien.

**3.2. PROPOSITION.** *Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}^{(m)}$ -module cohérent et  $\widehat{\mathcal{E}} = \lim_{\leftarrow i} \mathcal{E}/p^{i+1}\mathcal{E}$ . Alors*

- (i)  $\forall n \in \mathbf{N}, H^n(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{E}}) = \lim_{\leftarrow i} H^n(X_i, \mathcal{E}/p^{i+1}\mathcal{E})$ ;
- (ii)  $\forall n \in \mathbf{N}^*, H^n(X, \mathcal{E}) \simeq H^n(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{E}})$ ;
- (iii)  $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{E}}) \simeq \lim_{\leftarrow i} \Gamma(X, \mathcal{E})/p^{i+1}\Gamma(X, \mathcal{E})$ .

**DÉMONSTRATION.** Notons  $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}/p^{i+1}\mathcal{E}$ . Soit  $\mathcal{E}_t$ , la partie de torsion de  $\mathcal{E}$ : c'est un  $\mathcal{D}^{(m)}$  module cohérent par noethérianité de  $\mathcal{D}^{(m)}$ . Introduisons alors  $\mathcal{G} = \mathcal{E}/\mathcal{E}_t$  qui est aussi un  $\mathcal{D}^{(m)}$ -module cohérent. D'après 2.3.7, il existe  $c \in \mathbf{N}$  tel que tel que  $p^c \mathcal{E}_t, p^c H^n(X, \mathcal{G})$  et  $p^c H^n(X, \mathcal{E})$  soient nuls pour tout  $n \geq 1$ . Montrons d'abord (i) et (ii). Soient  $i, j \geq c$ . Considérons la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\nu_i} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_i \rightarrow 0,$$

où  $\nu_i$  est la factorisation de la multiplication par  $p^i$  sur  $\mathcal{E}$ , et les morphismes de suites exactes  $\mu_{i+j,i}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\nu_{i+j}} & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}_{i+j} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow p^j & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\nu_i} & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}_i \longrightarrow 0. \end{array}$$



D'où un morphisme de suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{H}^n(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^n(X, \mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^n(X_{i+j}, \mathcal{E}_{i+j}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^{n+1}(X, \mathcal{G}) \\ \downarrow p^j & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \lambda_{i+j,i} & & \downarrow p^j \\ \mathbf{H}^n(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^n(X, \mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^n(X_i, \mathcal{E}_i) & \xrightarrow{\tau} & \mathbf{H}^{n+1}(X, \mathcal{G}). \end{array}$$

Alors, si  $j \geq c$ ,  $\tau \circ \lambda_{i+j,i} = 0$ , ce qui signifie que  $\text{Im}(\lambda_{i+j,i}) = \mathbf{H}^n(X, \mathcal{E})$  et le système projectif des  $\mathbf{H}^n(X_i, \mathcal{E}_i)$  vérifie la condition de Mittag-Leffler pour tout  $n \geq 0$ . On en déduit que  $\mathbf{H}^n(X, \widehat{\mathcal{E}}) = \lim_{\leftarrow i} \mathbf{H}^n(X_i, \mathcal{E}_i)$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et donc le (i). En outre, pour tout  $n \geq 1$ , la limite projective  $\lim_{\leftarrow i} \mathbf{H}^n(X_i, \mathcal{E}_i)$  s'identifie à  $\mathbf{H}^n(X, \mathcal{E})$ , puisque le système projectif des  $\mathbf{H}^n(X, \mathcal{G})$  est essentiellement nul pour tout  $n \geq 1$ , d'où (ii).

Comparons maintenant les limites projectives  $\lim_{\leftarrow i} \Gamma(X_i, \mathcal{E}_i)$  et  $\lim_{\leftarrow i} (\Gamma(X, \mathcal{E})/p^i)$ . Soient  $i$  et  $j \geq c$ . Partons de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_t \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{p^i} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_i \rightarrow 0.$$

Cette suite se scinde en deux suites exactes courtes

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_t \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{G} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\nu_i} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_i \rightarrow 0.$$

Par passage à la longue suite exacte de cohomologie, on en déduit deux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{E}_t) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{u} \Gamma(X, \mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{H}^1(X, \mathcal{E}_t) \quad \text{et} \\ 0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\nu_i} \Gamma(X, \mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(X_i, \mathcal{E}_i) \rightarrow \mathbf{H}^1(X, \mathcal{G}). \end{aligned}$$

On déduit de cette dernière suite exacte et du morphisme  $\mu_{i+j,i}$  un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\nu_{i+j}} & \Gamma(X, \mathcal{E}) & \longrightarrow & \Gamma(X_{i+j}, \mathcal{E}_{i+j}) \longrightarrow \mathbf{H}^1(X, \mathcal{G}) \\ & & \downarrow p^j & & \downarrow & & \downarrow \lambda_{i+j} \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\nu_i} & \Gamma(X, \mathcal{E}) & \longrightarrow & \Gamma(X_i, \mathcal{E}_i) \xrightarrow{\tau} \mathbf{H}^1(X, \mathcal{G}). \end{array}$$

Comme  $\nu_i \circ u$  est la multiplication par  $p^i$  sur  $\Gamma(X, \mathcal{E})$ , on obtient une surjection canonique

$$\sigma_i: \Gamma(X, \mathcal{E})/p^i \Gamma(X, \mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{E})/\nu_i(\Gamma(X, \mathcal{G})).$$

Les  $\sigma_i$  forment un homomorphisme de systèmes projectifs. Grâce à la multiplication par  $p^i$ , le noyau de  $\sigma_i$  s'identifie à  $\text{coker } u$  qui se plonge dans  $H^1(X, \mathcal{E}_t)$  et est donc annulé par  $p^c$ . D'autre part, l'homomorphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_t & \longrightarrow & \mathcal{E} & \xrightarrow{p^{i+j}} & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}_{i+j} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow p^j & & \downarrow p^j & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_t & \longrightarrow & \mathcal{E} & \xrightarrow{p^i} & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}_i & \longrightarrow & 0,
 \end{array}$$

induit un homomorphisme de suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{coker } u & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{E})/p^{i+j}\Gamma(X, \mathcal{E}) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{E})/\nu_{i+j}(\Gamma(X, \mathcal{G})) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow p^j & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{coker } u & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{E})/p^i\Gamma(X, \mathcal{E}) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{E})/\nu_i(\Gamma(X, \mathcal{G})) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

On en déduit que le système projectif des  $\text{Ker } \sigma_i$  est essentiellement nul, puisque  $\text{coker } u$  est annulé par  $p^c$ . Par conséquent, les applications  $\sigma_i$  induisent un isomorphisme entre les deux limites projectives  $\lim_{\leftarrow i}(\Gamma(X, \mathcal{E})/p^i)$  et  $\lim_{\leftarrow i}(\Gamma(X, \mathcal{E})/\nu_i(\Gamma(X, \mathcal{G})))$ , et donc entre  $\lim_{\leftarrow i}(\Gamma(X, \mathcal{E})/p^i)$  et  $\lim_{\leftarrow i} \Gamma(X_i, \mathcal{E}_i)$ , qui coïncide encore avec  $\Gamma(\mathcal{X}, \hat{\mathcal{E}})$ . D'où finalement le (iii).

3.3. PROPOSITION. Soit  $\mathcal{E}$  un  $\hat{\mathcal{D}}^{(m)}$ -module cohérent. Alors

- (i) Il existe  $r_0 \in \mathbf{N}$  tel que,  $\forall r \geq r_0$ , il existe  $s \in \mathbf{N}$  et une surjection  $\hat{\mathcal{D}}^{(m)}$ -linéaire  $(\hat{\mathcal{D}}^{(m)}(-r))^s \rightarrow \mathcal{E}$ .
- (ii) Il existe  $r_0 \in \mathbf{N}$  tel que,  $\forall r \geq r_0, \forall n \geq 1, H^n(\mathcal{X}, \mathcal{E}(r)) = 0$ .

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que, compte tenu de 3.2 et de 2.2.2, l'assertion (ii) résulte de (i) comme en 2.2.3. Si  $\mathcal{E}$  est un  $\hat{\mathcal{D}}^{(m)}$ -module cohérent, sa partie de torsion  $\mathcal{E}_t$  est aussi un  $\hat{\mathcal{D}}^{(m)}$ -module cohérent car  $\hat{\mathcal{D}}^{(m)}$  est à sections noethériennes sur les ouverts affines. De plus, il existe une suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{E}_t \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/\mathcal{E}_t \rightarrow 0$ . Soient  $\mathcal{G} = \mathcal{E}/\mathcal{E}_t$  et  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}/p\mathcal{G}$ . Comme  $\mathcal{E}_t$  est cohérent et que  $\mathcal{X}$  est quasi-compact, il existe  $a \in \mathbf{N}$  tel que  $p^a \mathcal{E}_t = 0$ . Pour  $i \geq a$  on en déduit une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{G}_0 \xrightarrow{p^i} \alpha_{i+1}^* \mathcal{E} \rightarrow \alpha_i^* \mathcal{E} \rightarrow 0.$$

Le module  $\mathcal{G}_0$  est un  $\mathcal{D}_0^{(m)}$ -module cohérent: choisissons  $r_1$  tel que  $H^1(X_0, \mathcal{G}_0(r)) = 0$  pour tout  $r \geq r_1$ . Pour tout  $r \geq r_1$  et tout  $i \geq a$ , les homomorphismes

$\Gamma(X_{i+1}, \alpha_{i+1}^* \mathcal{E}(r)) \rightarrow \Gamma(X_i, \alpha_i^* \mathcal{E}(r))$  sont alors surjectifs. Comme  $\alpha_a^* \mathcal{E}$  est un  $\mathcal{D}_a^{(m)}$ -module cohérent, il existe  $r_2 \in \mathbf{Z}$  tel que, pour tout  $r \geq r_2$ , il existe  $s \in \mathbf{N}$  et une surjection  $(\mathcal{D}_a^{(m)})^s \rightarrow \alpha_a^* \mathcal{E}(r)$ . Soient  $r_0 = \sup(r_1, r_2)$ , et  $r \geq r_0$ . Si  $e_t$  est le  $t$ -ième vecteur de la base canonique de  $(\mathcal{D}_a^{(m)})^s$ , on peut ainsi relever les  $\lambda_a(e_t)$  pour  $1 \leq t \leq s$  dans  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E}(r))$ , ce qui définit un homomorphisme  $\lambda: (\widehat{\mathcal{D}}^{(m)})^s \rightarrow \mathcal{E}(r)$ , qui est surjectif car, modulo  $p^a$ , c'est un morphisme surjectif entre deux faisceaux provenant de  $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}$ -modules cohérents.

**3.4. PROPOSITION.** *Soit  $\mathcal{E}$  un  $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}$ -module cohérent. Alors*

- (i)  $\forall n \in \mathbf{N}^*, H^n(\mathcal{X}, \mathcal{E})$  est un  $\mathcal{V}$ -module de torsion de type fini,
- (ii)  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E}) \simeq \lim_{\leftarrow i} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E})/p^i \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ .

**DÉMONSTRATION.** Compte tenu de 3.3 et de 3.2 appliqué aux faisceaux  $\mathcal{D}^{(m)}(r)$ , la démonstration de (i) est identique à celle donnée en 2.3.7. La démonstration de (ii) est alors identique à la démonstration de (iii) dans 3.2 puisqu'il existe  $c \in \mathcal{C}$  tel que  $p^c \mathcal{E}_t = 0$  et tel que  $p^c H^n(\mathcal{X}, \mathcal{G}) = p^c H^n(\mathcal{X}, \mathcal{E}) = 0$ , pour tout  $n \geq 1$ , avec les notations de 3.2.

**3.5. THÉORÈME.** *Soit  $\mathcal{B}^{(m)}$  une  $\mathcal{O}_X$ -algèbre quasi-cohérente, vérifiant la condition (C) (resp. un système inductif de coefficients vérifiant la condition (C')) et  $\mathcal{E}$  un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -module cohérent (resp. un  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^\dagger$ -module cohérent). Alors*

- (i) *Il existe  $r_0 \in \mathbf{N}$  tel que,  $\forall r \geq r_0$ , il existe  $s \in \mathbf{N}$  et une surjection  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -linéaire*

$$(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}(-r))^s \rightarrow \mathcal{E}, \quad (\text{resp. } \mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^\dagger)$$

- (ii)  $\forall n \geq 1, H^n(\mathcal{X}, \mathcal{E}) = 0$ .

**DÉMONSTRATION.** Montrons (i) dans le cas d'un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -module cohérent  $\mathcal{E}$ . D'après la proposition 3.4.5 de [4] un tel module  $\mathcal{E}$  admet un modèle entier  $\mathcal{F}$  qui est un  $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}$ -module cohérent. Appliquons la proposition 3.3 à ce module, on obtient une surjection  $(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}(-r))^s \rightarrow \mathcal{F}$ , et en tensorisant par  $\mathbf{Q}$ , on voit que  $\mathcal{E}$  est quotient d'un  $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}(-r))^s$ . Si maintenant  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^\dagger$ -module cohérent, d'après 3.6.2 de [4], il existe un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -module cohérent  $\mathcal{F}$  tel que  $\mathcal{E} \simeq \mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^\dagger \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}} \mathcal{F}$ . En appliquant le (i) à  $\mathcal{E}$ , on trouve alors une surjection comme cherchée.

Si  $m$  est fixé, remarquons que  $H^n(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}(r)) = H^n(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}(r)) \otimes K$  est nul pour tout  $r \in \mathbf{Z}$  et tout  $n \geq 1$ , d'après 2.3.7 et 3.2. On montre donc (ii) à partir de (i), par récurrence descendante sur  $N$ . Ensuite, si  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^\dagger$ -module cohérent, il existe un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -module cohérent  $\mathcal{F}$  tel que  $\mathcal{E} \simeq \mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^\dagger \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}} \mathcal{F}$ . Notons  $\mathcal{F}^{(m')} = \mathcal{D}^{(m')} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}} \mathcal{F}$ . Alors  $H^n(\mathcal{X}, \mathcal{E}) = \lim_{\rightarrow m'} H^n(\mathcal{X}, \mathcal{F}^{(m')}) = 0$  si  $n \geq 1$ .

#### 4. Propriétés de finitude des sections globales

On s'intéresse ici à des coefficients particuliers vérifiant une condition supplémentaire à la condition (C). Avec cette condition, nous établissons que  $\Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)})$  et  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^{(m)})$  sont des anneaux noethériens. De plus, si  $\mathcal{E}$  est un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -module cohérent, alors  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E})$  est un  $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)})$ -module de type fini.

##### 4.1. CONDITIONS SUR LES COEFFICIENTS

Dans cette sous-section,  $m$  est fixé.

**4.1.1. DÉFINITION.** Soient  $\mathcal{B}^{(m)}$  un faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -algèbres vérifiant la condition (C),  $B = \Gamma(X, \mathcal{B}^{(m)})$ . On dit que  $\mathcal{B}^{(m)}$  vérifie la condition (D), si:

- (i) L'algèbre  $B$  est une  $A$ -algèbre noethérienne;
- (ii) Comme  $\mathcal{O}_X$ -module,  $\mathcal{B}^{(m)}$  est engendrée par ses sections globales.

*Remarque.* Il est évident que  $\mathcal{O}_X$  vérifie la condition (D). D'autre part, nous avons montré en 3.1.1.3 de [9] que  $\mathcal{B}_X^{(m)}$  satisfait aussi la condition (D), par un calcul des sections globales.

Considérons l'algèbre  $B \otimes_A \mathcal{O}_X$ . Comme  $\mathcal{O}_X$  est de type fini sur  $A$ , cette algèbre est quasi-cohérente et noethérienne, donc cohérente.

**4.1.2. LEMME.** Soit  $\mathcal{E}$  un  $B \otimes_A \mathcal{O}_X$ -module cohérent. Alors,  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $H^n(X, \mathcal{E})$  est un  $B$ -module de type fini.

**DÉMONSTRATION.** Comme  $X$  est noethérien, le module  $\mathcal{E}$  est limite inductive de ses sous-faisceaux  $\mathcal{O}_X$ -cohérents. On en déduit qu'il existe une surjection  $B \otimes_A \mathcal{O}_X$ -linéaire

$$(B \otimes_A \mathcal{O}_X(-r))^a \rightarrow \mathcal{E}.$$

En itérant ce procédé, on voit que  $\mathcal{E}$  admet une résolution par des modules du type  $(B \otimes_A \mathcal{O}_X(-r))^a$ . Cela nous ramène à montrer l'énoncé dans le cas où  $\mathcal{E} = B \otimes_A \mathcal{O}_X(-r)$ . Or, les modules de cohomologie de  $\mathcal{O}_X(-r)$  étant plats sur  $A$  pour tout  $r \in \mathbf{Z}$ , on a l'égalité:  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $H^n(X, B \otimes_A \mathcal{O}_X(-r)) = B \otimes_A H^n(X, \mathcal{O}_X(-r))$ . En particulier  $H^n(X, B \otimes_A \mathcal{O}_X(-r))$  est un  $B$ -module de type fini. D'où le lemme.

**4.1.3. PROPOSITION.** Soit  $\mathcal{B}^{(m)}$  une algèbre de coefficients vérifiant la condition (D), alors  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $H^n(X, \mathcal{E})$  est un  $B$ -module de type fini pour tout  $\mathcal{B}^{(m)}$ -module cohérent  $\mathcal{E}$ .

**DÉMONSTRATION.** D'après la condition (ii) de (D), il existe une surjection de  $\mathcal{O}_X$ -algèbres:  $B \otimes_A \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{B}^{(m)}$ . Tout module  $\mathcal{B}^{(m)}$ -cohérent peut donc être

considéré comme un  $B \otimes_A \mathcal{O}_X$ -module cohérent. La conclusion résulte alors de 4.1.2.

4.2. SECTIONS GLOBALES DES  $\mathcal{D}$ -MODULES SUR L'ESPACE PROJECTIF.

4.2.1. LEMME. (i) *L'algèbre  $\Gamma(X, \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1}))$  est une  $A$ -algèbre de type fini.*

(ii) *Le module  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(r) \otimes \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1}))$  est de type fini sur  $\Gamma(X, \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1}))$  pour tout  $r \in \mathbf{Z}$ .*

DÉMONSTRATION. Introduisons  $\mathcal{A} = \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1})$ . Remarquons que

$$\Gamma(X, \mathcal{A}) = \bigoplus_{k \in \mathbf{N}} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(k) \otimes \mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{O}_X^{N+1})).$$

Notons  $T_0, \dots, T_N$  la base canonique de  $\mathcal{O}_X^{N+1}$  et  $[x_0, \dots, x_N]$  les coordonnées projectives sur  $X$ , alors

$$\Gamma(X, \mathcal{A}) = \bigoplus_{|\underline{\alpha}|=|\underline{k}|} A \cdot x_0^{\alpha_0} \dots x_N^{\alpha_N} T_0^{\langle k_0 \rangle} \dots T_N^{\langle k_N \rangle}.$$

Soit  $C$  la sous- $V$ -algèbre de  $\mathcal{A}$  engendrée par les

$$\{\underline{x}^{\underline{\alpha}} \underline{T}^{\underline{k}} : |\underline{\alpha}| = |\underline{k}| \text{ et } |\underline{k}| \leq (N + 1) \cdot p^m\}.$$

Montrons par récurrence sur  $n$ , que si  $|\underline{\alpha}| = |\underline{k}| = n$ ,  $\underline{x}^{\underline{\alpha}} \underline{T}^{\underline{k}} \in C$ . On peut supposer que  $n > (N + 1)p^m$ ; dans ce cas il existe  $i$  tel que  $k_i > p^m$ , et  $T_i^{\langle k_i \rangle} = u T_i^{\langle k_i - p^m \rangle} T_i^{\langle p^m \rangle}$  où  $u \in \mathbf{Z}_{(p)}^*$ . Si  $\underline{\beta} \in \mathbf{N}^{N+1}$  est tel que  $|\underline{\beta}| = p^m$  avec  $\forall i: \beta_i \leq \alpha_i$ , alors

$$\underline{x}^{\underline{\alpha}} \underline{T}^{\langle \underline{k} \rangle} = u \underline{x}^{\underline{\beta}} T_i^{\langle p^m \rangle} \underline{x}^{\underline{\alpha} - \underline{\beta}} \underline{T}^{\langle \underline{k} - p^m \mathbf{1}_i \rangle},$$

qui est dans  $C$  par hypothèse de récurrence. Finalement,  $\mathcal{A}$  est égale à  $C$ , ce qui achève la démonstration du (i).

De plus, observons que

$$\Gamma(X, \mathcal{A}(r)) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \bigoplus_{|\underline{\alpha}|=n+r, |\underline{k}|=n} A \cdot x_0^{\alpha_0} \dots x_N^{\alpha_N} T_0^{\langle k_0 \rangle} \dots T_N^{\langle k_N \rangle}.$$

On en déduit que si  $r \geq 0$ ,  $\Gamma(X, \mathcal{A}(r))$  est engendré comme  $\Gamma(X, \mathcal{A})$ -module, par les éléments  $\{\underline{x}^{|\underline{\alpha}|} : |\underline{\alpha}| = r\}$ , qui sont homogènes de degré zéro. Si  $r < 0$ , il existe une injection  $\Gamma(X, \mathcal{A})$ -linéaire:

$$\Gamma(X, \mathcal{A}(r)) \xrightarrow{x_0^r} \Gamma(X, \mathcal{A}).$$

Par noethérianité de  $\Gamma(X, \mathcal{A})$ ,  $\Gamma(X, \mathcal{A}(r))$  est donc un  $\Gamma(X, \mathcal{A})$ -module de type fini. Ce qui conclut le (ii).

4.2.2. LEMME. (i) La  $B$ -algèbre  $\Gamma(X, \mathcal{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1}))$  est une  $B$ -algèbre de type fini.

(ii) Les modules  $H^n(X, \mathcal{B}^{(m)}(r) \otimes \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1}))$  sont de type fini sur  $\Gamma(X, \mathcal{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1}))$  pour tout  $r \in \mathbf{Z}$  et tout  $n \in \mathbf{N}$ .

(iii) Si  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1})$ -module cohérent, alors  $\Gamma(X, \mathcal{E})$  est un module de type fini sur  $\Gamma(X, \mathcal{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X(1)^{N+1}))$ .

(iv) L'algèbre  $\Gamma(X, \text{gr}_{\bullet} \mathcal{D}^{(m)})$  est une  $B$ -algèbre noethérienne et le module  $\Gamma(X, \text{gr}_{\bullet} \mathcal{D}^{(m)}(r))$  est de type fini sur cette algèbre.

DÉMONSTRATION. Notons  $\mathcal{B}' = \mathcal{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}$  et  $\mathcal{C} = B \otimes_A \mathcal{A}$ . Les algèbres  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{B}'$  sont des  $\mathcal{O}_X$ -algèbres quasi-cohérentes noethériennes. En particulier, (iii) se déduira de (ii) en arguant du fait que tout  $\mathcal{B}'$ -module cohérent admet une résolution par des modules du type  $\mathcal{B}'(-r)$ . Notons d'autre part que

$$\mathcal{C}_k \simeq B \otimes_A \mathcal{O}_X(k) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{O}_X^{N+1}).$$

Comme la cohomologie des faisceaux  $\mathcal{O}_X(k) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{O}_X^{N+1})$  est plate sur  $A$ , il existe des isomorphismes canoniques  $\Gamma(X, \mathcal{C}) \simeq B \otimes_A \Gamma(X, \mathcal{A})$  et  $\Gamma(X, \mathcal{C}(r)) \simeq B \otimes_A \Gamma(X, \mathcal{A}(r))$ . En particulier, d'après le lemme précédent,  $\Gamma(X, \mathcal{C})$  est une  $B$ -algèbre de type fini et  $\Gamma(X, \mathcal{C}(r))$  est un  $\Gamma(X, \mathcal{C})$ -module de type fini pour tout  $r \in \mathbf{Z}$ . En passant aux composantes homogènes dans les isomorphismes précédents, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, H^n(X, \mathcal{C}_k(r)) \simeq B \otimes_A H^n(X, \mathcal{O}_X(k+r) \otimes \mathbf{S}_k^{(m)}(\mathcal{O}_X^{N+1})).$$

En particulier, si  $r \in \mathbf{Z}$  est fixé, pour tout  $k \geq -r$ , le module  $\mathcal{C}_k(r)$  est acyclique.

Etant donné la condition (ii) de (D), il existe une surjection canonique  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}'$ , qui est en fait graduée. Soit  $\mathcal{I}$  le noyau de cette surjection: c'est un  $\mathcal{C}$ -module cohérent gradué, dont les composantes homogènes sont des  $B \otimes_A \mathcal{O}_X$ -modules cohérents. Nous nous trouvons donc dans une situation identique à 2.3.5, et on peut en déduire qu'il existe  $k_0 \in \mathbf{N}$  tel que

$$\forall k \geq k_0, \forall n \in \mathbf{N}, H^n(X, \mathcal{I}_k) = H^n(X, \mathcal{I}_k(r)) = 0.$$

D'où finalement deux suites exactes

$$\Gamma(X, \mathcal{C}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{B}') \rightarrow H^1(X, \oplus_{k \leq k_0} \mathcal{I}_k) \quad \text{et}$$

$$\Gamma(X, \mathcal{C}(r)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{B}'(r)) \rightarrow H^1(X, \oplus_{k \leq k_0} \mathcal{I}_k(r)).$$

Remarquons enfin que les modules  $\oplus_{k \leq k_0} \mathcal{I}_k$  et  $\oplus_{k \leq k_0} \mathcal{I}_k(r)$  sont des  $B \otimes_A \mathcal{O}_X$ -modules cohérents, de sorte que  $H^1(X, \oplus_{k \leq k_0} \mathcal{I}_k)$  et que  $H^1(X, \oplus_{k \leq k_0} \mathcal{I}_k(r))$  sont des  $B$ -modules de type fini d'après le Lemme 4.1.2. On en déduit donc que  $\Gamma(X, \mathcal{B}')$

est finie comme  $\Gamma(X, \mathcal{C})$ -algèbre et donc de type fini sur  $B$  puisque c'est le cas de  $\Gamma(X, \mathcal{C})$  d'après le lemme précédent. En outre, le module  $\Gamma(X, \mathcal{B}'(r))$  est de type fini sur  $\Gamma(X, \mathcal{C})$  et donc a fortiori sur  $\Gamma(X, \mathcal{B}')$ . De plus, la cohomologie de  $\mathcal{B}'(r)$  en degrés  $\geq 1$ , se réduit à la cohomologie de  $\bigoplus_{k < \rho-r} \mathcal{B}'_k(r)$ ; on en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , les  $H^n(X, \mathcal{B}'(r))$  sont des  $A$ -modules de type fini. D'où le (ii).

L'assertion (iv) découle en fait de (iii). En effet, on dispose d'une surjection  $\mathcal{B}' \rightarrow \text{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)}$ , qui fait de  $\text{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)}$  un  $\mathcal{B}'$ -module cohérent. En particulier  $\Gamma(X, \text{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)})$  est un  $\Gamma(X, \mathcal{B}')$ -module de type fini et donc une  $B$ -algèbre de type fini. Le module  $\Gamma(X, \text{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)}(r))$  est aussi de type fini sur  $\Gamma(X, \mathcal{B}')$  et donc a fortiori sur  $\Gamma(X, \text{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)})$ .

**4.2.3. PROPOSITION.** *Soit  $\mathcal{B}^{(m)}$  une algèbre de coefficients vérifiant la condition (D). Alors,*

- (i) *L'algèbre  $\Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)})$  est une  $A$ -algèbre noethérienne.*
- (ii) *Si  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{D}^{(m)}$ -module cohérent,  $\Gamma(X, \mathcal{E})$  est un  $\Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)})$ -module de type fini.*

**DÉMONSTRATION.** Montrons (i). Comme  $\Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)})$  est filtrée par l'ordre des opérateurs différentiels, il suffit de montrer que  $\text{gr}_\bullet \Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)})$  est noethérien. D'après 2.3.6, le conoyau de l'homomorphisme canonique

$$0 \rightarrow \text{gr}_\bullet \Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)}) \xrightarrow{\lambda} \Gamma(X, \text{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)})$$

est nul en degrés supérieurs à un certain  $k_0$  et de type fini sur  $A$ . Notons que  $\lambda$  est un morphisme d'algèbres. Le module  $\bigoplus_{k \leq k_0-1} \text{gr}_k \Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)})$  est donc un  $B$ -module de type fini, engendré par  $\{z_1, \dots, z_s\}$ . D'après le lemme précédent, l'algèbre  $\Gamma(X, \text{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)})$  est une  $B$ -algèbre de type fini. Soient  $y_1, \dots, y_t$  des générateurs homogènes de  $\Gamma(X, \text{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)})$ , de degré respectif  $n_i$  (où  $n_1 \leq \dots \leq n_t$ ). Soient maintenant  $l \geq \max\{k_0, n_t\}$  et  $C$  la sous-algèbre de  $\text{gr}_\bullet \Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)})$  engendrée par les éléments

$$\left\{ y_1^{\alpha_1} \dots y_t^{\alpha_t} : k_0 \leq \sum n_i \alpha_i \leq 3l - 1 \right\} \cup \{z_1, \dots, z_s\}.$$

Montrons par récurrence sur le degré que  $\text{gr}_k \Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)}) \subset C$ . C'est vrai si  $k \leq 3l - 1$ . Prenons  $k \geq 3l$  et supposons que ce soit vrai pour tout  $k' \leq k - 1$ . En degré  $k$ , les algèbres  $\text{gr}_\bullet \Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)})$  et  $\Gamma(X, \text{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)})$  coïncident, si bien que nous sommes ramenés à montrer que tout élément  $y^\alpha$ , avec  $|\sum n_i \alpha_i| = k$ , est dans  $C$ . Or, avec notre choix de  $l$ , il existe  $\underline{\beta} \leq \underline{\alpha}$  tel que  $\sum n_i \beta_i \geq l$  et tel que  $\sum n_i (\alpha_i - \beta_i) \geq l$ . Alors,  $y^\alpha = y^{\underline{\beta}} \cdot y^{\alpha - \underline{\beta}} \in C$ , par hypothèse de récurrence. Ce qui conclut (i).

Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}^{(m)}$ -module cohérent. Alors, d'après 2.3.6, il existe une suite exacte  $\mathcal{D}^{(m)}$ -linéaire

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow (\mathcal{D}^{(m)}(-r))^a \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0.$$

En passant aux sections globales, on trouve une suite exacte

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{R}) \rightarrow \Gamma(X, (\mathcal{D}^{(m)}(-r))^a) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{E}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{R}).$$

Comme le module  $H^1(X, \mathcal{R})$  est un  $A$ -module de type fini d'après 2.3.7, cela nous ramène à montrer l'assertion (ii) pour les modules du type  $\mathcal{D}^{(m)}(-r)$ . Appliquons alors de nouveau (ii) de 2.3.6: le conoyau de l'homomorphisme

$$0 \rightarrow \text{gr}_\bullet \Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)}(-r)) \xrightarrow{\lambda'} \Gamma(X, \text{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)}(-r))$$

est encore de type fini sur  $A$ . Or, le module  $\Gamma(X, \text{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)}(-r))$  est de type fini sur  $\Gamma(X, \text{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)})$ . Comme l'algèbre  $\Gamma(X, \text{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)})$  est finie sur  $\text{gr}_\bullet \Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)})$  via  $\lambda$ , cela montre que  $\text{gr}_\bullet \Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)}(-r))$  est de type fini sur  $\text{gr}_\bullet \Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)})$  et la proposition.

**4.2.4. COROLLAIRE.** *Si  $A$  est complet et si  $\mathcal{B}^{(m)}$  est une algèbre de coefficients vérifiant la condition (D), alors*

- (i) *L'algèbre  $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)})$  est une  $A$ -algèbre noethérienne.*
- (ii) *Si  $\mathcal{E}$  est un  $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}$ -module cohérent,  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E})$  est un  $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)})$ -module de type fini.*

**DÉMONSTRATION.** D'après 3.2, l'algèbre  $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)})$  est la séparée complétée de  $\Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)})$ . Comme cette algèbre est noethérienne, il résulte des rappels 3.2 de [4] que  $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)})$  est noethérienne. Soit  $\mathcal{E}$  un  $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}$ -module cohérent, alors d'après 3.3, il existe une suite exacte  $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}$ -linéaire

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow (\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}(-r))^a \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0.$$

En passant aux sections globales, on trouve une suite exacte

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{R}) \rightarrow \Gamma(X, (\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}(-r))^a) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{E}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{R}).$$

Comme le module  $H^1(X, \mathcal{R})$  est un  $A$ -module de type fini d'après 3.2, cela nous ramène à montrer l'assertion (ii) pour les modules du type  $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}(-r)$ . Or d'après 3.2, le module  $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}(-r))$  est le séparé complété de  $\Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)}(-r))$  qui est de type fini sur  $\Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)})$ . Il en résulte que  $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}(-r))$  est de type fini sur  $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)})$ , d'où le (ii).

Cet énoncé est aussi vrai pour  $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)})$  et pour les modules cohérents sur  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$  en passant à des modèles entiers  $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}$ -cohérents.

**4.2.1. Remarque.**

La cohomologie des  $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}$ -modules cohérents n'est pas triviale sur  $\mathcal{X}$ . Pour voir cela, on peut par exemple s'inspirer de [7]: si tel était le cas, la cohomologie des



$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}(r)$  serait triviale pour tout  $r \in \mathbf{Z}$  et d'après la suite exacte  $0 \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}(r) \xrightarrow{p} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}(r) \rightarrow \mathcal{D}_{X_0}^{(m)}(r) \rightarrow 0$ , cela entraînerait que la cohomologie des  $\mathcal{D}_{X_0}^{(m)}(r)$  est triviale pour tout  $r \in \mathbf{Z}$  et donc, que la cohomologie des  $\mathcal{D}_{X_0}^{(m)}$ -modules cohérents est triviale. Or, d'après la proposition (2.2.7) de [4], l'image de  $\mathcal{D}_{X_0}^{(m)}$  dans  $\mathcal{D}_{X_0}$ , l'anneau des opérateurs différentiels usuels, s'identifie à  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_{X^{(m+1)}}}(\mathcal{O}_X)$ , où  $X^{(m+1)}$  est le schéma déduit de  $X$  par changement de base par la puissance  $m + 1$ -ième du Frobenius absolu de  $S$ . Il existe donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}_{X_0}^{(m)} \rightarrow \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_{X^{(m+1)}}}(\mathcal{O}_X) \rightarrow 0,$$

où  $\mathcal{I}$  est un idéal de  $\mathcal{D}_{X_0}^{(m)}$ , qui est cohérent comme  $\mathcal{D}_{X_0}^{(m)}$ -module, puisque  $\mathcal{D}_{X_0}^{(m)}$  est un faisceau d'anneaux noethériens; de même,  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_{X^{(m+1)}}}(\mathcal{O}_X)$  est un  $\mathcal{D}_{X_0}^{(m)}$ -module à gauche cohérent. Notons  $F^{(m+1)}$  le Frobenius relatif:  $X \rightarrow X^{(m+1)}$ , alors

$$\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_{X^{(m+1)}}}(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X^{(m+1)}}}(F_*^{(m+1)}\mathcal{O}_X, F_*^{(m+1)}\mathcal{O}_X).$$

On en déduit que  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_{X^{(m+1)}}}(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F^{(m+1)*}F_*^{(m+1)}\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ . D'après [8], le faisceau  $F_*^{(m+1)}(\mathcal{O}_X)$  est somme directe de twists de Serre:  $F_*^{(m+1)}(\mathcal{O}_X) = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_X(k_i)$  où  $k_i \in \mathbf{Z}$  et donc, si  $l \geq \max\{k_i\} + N + 1$ , le faisceau  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_{X^{(m+1)}}}(\mathcal{O}_X)(-l)$  n'est pas acyclique, d'où la remarque.

### 5. Equivalence de catégories entre les $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^\dagger$ -modules cohérents et leurs sections globales

Nous nous plaçons maintenant sous les hypothèses de la Section 4. Pour  $m$  fixé, nous considérons donc des coefficients  $\mathcal{B}^{(m)}$  vérifiant les conditions (C) et (D) énoncées respectivement en 2.1 et en 4.1.1. Si de plus, on travaille avec un système inductif d'algèbres  $(\mathcal{B}^{(m)})$ , on supposera que  $(\mathcal{B}^{(m)})$  vérifie la condition (C') énoncée en 3.1 et que chaque  $\mathcal{B}^{(m)}$  vérifie la condition (D). Sous ces hypothèses, nous établissons ici que l'algèbre  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^\dagger)$  est une  $\mathcal{V}$ -algèbre cohérente et qu'il existe une équivalence de catégories entre les  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^\dagger$ -modules cohérents et leurs sections globales, qui sont des  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^\dagger)$ -modules cohérents. Ce résultat utilise le fait qu'un  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}$ -module cohérent est engendré par ses sections globales (cf. par exemple B de [2]).

NOTATION. Les symboles  $D^{(m)}, \widehat{D}^{(m)}, \widehat{D}_{\mathbf{Q}}^{(m)}, D_{\mathbf{Q}}^\dagger$  désigneront respectivement  $\Gamma(X, \mathcal{D}^{(m)}), \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}), \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}), \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^\dagger)$ .

5.1. PROPOSITION. (i) Si  $\mathcal{E}$  est un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -module cohérent, alors  $\mathcal{E}$  est engendré par ses sections globales comme  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -module. De plus,  $\mathcal{E}$  admet sur  $\mathcal{X}$  une résolution par des  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -modules libres de rang fini.

(ii) Si  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -module cohérent, alors  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E})$  est un  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger})$ -module de présentation finie et  $\mathcal{E}$  est engendré par ses sections globales comme  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -module. De plus,  $\mathcal{E}$  admet sur  $\mathcal{X}$  une résolution par des  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -modules libres de rang fini.

DÉMONSTRATION. Commençons par (i). D'après 3.5, le module  $\mathcal{E}$  est un quotient d'un  $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}(r))^k$  pour un certain  $r \in \mathbf{Z}$ , de sorte qu'il suffit de montrer (i) pour  $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}(r)$  avec  $r \in \mathbf{Z}$ . Notons  $\mathcal{F} = \mathcal{D}^{(m)}(r)$ . Comme  $F = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  est de type fini sur  $D^{(m)}$ , le conoyau de l'application canonique:  $\mathcal{D}^{(m)} \otimes_{D^{(m)}} F \rightarrow \mathcal{F}$  est un  $\mathcal{D}^{(m)}$ -module cohérent  $\mathcal{C}$ , qui est de  $p$ -torsion (finie) car  $\mathcal{F}_{\mathbf{Q}}$  est engendré par ses sections globales. Si  $(D^{(m)})^k \rightarrow F$  est une surjection  $D^{(m)}$ -linéaire, on en déduit une suite exacte

$$(\mathcal{D}^{(m)})^k \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0,$$

et par passage aux complétés une suite exacte de  $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}$ -modules cohérents:

$$(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)})^k \rightarrow \varprojlim_i \mathcal{F}/p^i \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0.$$

On voit finalement que  $\mathcal{E}$  est un quotient de  $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)})^k$ , d'où (i).

Si maintenant  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -module cohérent, il existe  $m \geq 0$  et un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -module cohérent  $\mathcal{F}$  tel que  $\mathcal{E} \simeq \mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}} \mathcal{F}$ . On déduit de (i) que  $\mathcal{E}$  admet une résolution libre de rang fini sur  $\mathcal{X}$ , d'où aussi l'assertion sur les sections globales par acyclicité de  $\Gamma$  et (ii).

### 5.1. EQUIVALENCE DE CATÉGORIES

Soit  $E$  un  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -module de présentation finie (resp. un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -module de type fini), on note  $\varphi(E)$  (resp.  $\varphi_m(E)$ ) le  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -module cohérent (resp. le  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -module cohérent) qui est le faisceau associé au préfaisceau  $\mathcal{U} \mapsto \mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}(\mathcal{U}) \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}} E$  (resp.  $\mathcal{U} \mapsto \widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}(\mathcal{U}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}} E$ ). Dans la suite, nous donnerons des énoncés pour les  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -modules cohérents, ainsi que pour les  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -modules cohérents. Nous nous contenterons de donner les démonstrations dans le cas des  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -modules, le cas des  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -modules étant analogue.

5.2.1. PROPOSITION. *Les foncteurs  $\varphi$  et  $\Gamma$  (resp.  $\varphi_m$  et  $\Gamma$ ) sont des foncteurs quasi-inverses entre la catégorie des  $\mathcal{D}_Q^\dagger$ -modules cohérents et la catégorie des  $\widehat{\mathcal{D}}_Q^\dagger$ -modules de présentation finie (resp. entre la catégorie des  $\widehat{\mathcal{D}}_Q^{(m)}$ -modules cohérents et la catégorie des  $\widehat{\mathcal{D}}_Q^{(m)}$ -modules de type fini).*

DÉMONSTRATION. Soient  $E$  un  $\mathcal{D}_Q^\dagger$ -module cohérent et  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{D}_Q^\dagger$ -module cohérent. Il existe des morphismes canoniques:  $E \rightarrow \Gamma \circ \varphi(E)$  et  $\varphi \circ \Gamma(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ . Comme  $E$  est de présentation finie sur  $\mathcal{D}^\dagger$ , il existe une résolution de  $E : (\mathcal{D}_Q^\dagger)^k \rightarrow (\mathcal{D}_Q^\dagger)^l \rightarrow E \rightarrow 0$ , d'où une suite exacte  $(\mathcal{D}_Q^\dagger)^k \rightarrow (\mathcal{D}_Q^\dagger)^l \rightarrow \varphi(E) \rightarrow 0$ . Par acyclicité de  $\Gamma$ , le diagramme suivant est un diagramme de suites exactes courtes:

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathcal{D}_Q^\dagger)^k & \longrightarrow & (\mathcal{D}_Q^\dagger)^l & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ (\mathcal{D}_Q^\dagger)^k & \longrightarrow & (\mathcal{D}_Q^\dagger)^l & \longrightarrow & \Gamma \circ \varphi(E) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

dont les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes. On voit ainsi que l'application canonique  $E \rightarrow \Gamma \circ \varphi(E)$  est un isomorphisme. Le fait que l'application  $\varphi \circ \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$  est un isomorphisme se démontre de façon analogue compte tenu de la proposition précédente et de l'acyclicité de  $\Gamma$ .

5.2.2. COROLLAIRE. *L'algèbre  $\mathcal{D}_Q^\dagger$  est une  $\mathcal{V}$ -algèbre cohérente.*

DÉMONSTRATION. Soit  $I$  un idéal à gauche de type fini de  $\mathcal{D}_Q^\dagger$ ,  $s$  la surjection canonique  $\mathcal{D}_Q^\dagger \rightarrow \mathcal{D}_Q^\dagger/I$ . Ces deux modules étant de présentation finie, les modules  $\varphi(\mathcal{D}_Q^\dagger)$  et  $\varphi(\mathcal{D}_Q^\dagger/I)$  sont des  $\mathcal{D}_Q^\dagger$ -modules cohérents. Le noyau de la surjection  $\varphi(s)$  est donc un  $\mathcal{D}_Q^\dagger$ -module cohérent qui admet une résolution libre de rang finie sur  $\mathcal{X} : \mathcal{L}^\bullet$ . Comme  $\Gamma$  est exact sur la catégorie des  $\mathcal{D}_Q^\dagger$ -modules cohérents, le complexe suivant est exact

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^\bullet) \rightarrow \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_Q^\dagger) \rightarrow \Gamma \circ \varphi(\mathcal{D}_Q^\dagger/I) \rightarrow 0,$$

si bien que le complexe  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}^\bullet)$  est une résolution libre de rang fini de  $I$ , qui est donc de présentation finie.

5.2.3. COROLLAIRE. *Le foncteur  $\varphi$  (resp.  $\varphi_m$ ) est exact de la catégorie des  $\mathcal{D}_Q^\dagger$ -modules cohérents vers la catégorie des  $\mathcal{D}_Q^\dagger$ -modules cohérents (resp. de*

la catégorie des  $\widehat{D}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -modules de type fini vers la catégorie des  $\widehat{D}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -modules cohérents).

DÉMONSTRATION. Le foncteur  $\varphi$  est bien sûr exact à droite. Soit  $i: E \rightarrow F$  un morphisme injectif entre deux  $D_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -modules cohérents et  $\mathcal{C}$  le  $D_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -module cohérent qui est le noyau de  $\varphi(E) \rightarrow \varphi(F)$ . Le module  $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{C})$ , qui est le noyau de l'application  $\Gamma \circ \varphi(E) \rightarrow \Gamma \circ \varphi(F)$ , est nul d'après la Proposition 5.2.1. Finalement, d'après 5.1,  $\mathcal{C}$  est nul car il est engendré par ses sections globales.

Nous pouvons maintenant reformuler la proposition 5.2.1.

5.2.4. THÉORÈME. *Les foncteurs  $\Gamma$  et  $\varphi$  (resp.  $\Gamma$  et  $\varphi_m$ ) induisent une équivalence de catégories entre la catégorie des  $D_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -modules cohérents et celle des  $D_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -modules cohérents (resp. entre la catégorie des  $\widehat{D}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -modules cohérents et celle des  $\widehat{D}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -modules de type fini). De plus, ces deux foncteurs sont exacts (resp.  $\Gamma$  et  $\varphi_m$  sont exacts).*

Nous énonçons maintenant un dernier corollaire concernant des théorèmes de platitude démontrés directement dans le cas de coefficients à pôles surconvergens dans [9].

5.2.5. THÉORÈME. *Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert affine de  $\mathcal{X}$ . Alors*

- (i)  $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger})$  est un  $D_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -module à droite plat (resp.  $\Gamma(\mathcal{U}, \widehat{D}_{\mathbf{Q}}^{(m)})$  est un  $\widehat{D}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -module à droite plat).
- (ii) Si  $E$  est un  $D_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -module cohérent (resp. un  $\widehat{D}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -module de type fini), alors  $\Gamma(\mathcal{U}, \varphi(E)) = \mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}(\mathcal{U}) \otimes_{D_{\mathbf{Q}}^{\dagger}} E$  (resp.  $\Gamma(\mathcal{U}, \varphi_m(E)) = \widehat{D}_{\mathbf{Q}}^{(m)}(\mathcal{U}) \otimes_{\widehat{D}_{\mathbf{Q}}^{(m)}} E$ ).

DÉMONSTRATION. Soit  $E$  un  $D_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -module à gauche cohérent. Il suffit de montrer que  $\mathrm{Tor}_{D_{\mathbf{Q}}^{\dagger}}^1(\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}(\mathcal{U}), E)$  est nul. Considérons une résolution de  $E$  par des  $D_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -modules à gauche libres de rang fini:  $L_{\bullet}$  (ce qui est possible car  $D_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$  est une algèbre cohérente). Notons  $\mathbf{D}^{-}(\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}(\mathcal{U}))$  la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée des complexes de  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}(\mathcal{U})$ -modules à gauche, formée des éléments à cohomologie nulle en degrés assez grands. L'élément  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}(\mathcal{U}) \otimes_{D_{\mathbf{Q}}^{\dagger}}^{\mathbf{L}} E$  de  $\mathbf{D}^{-}(\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}(\mathcal{U}))$  est représenté par le complexe  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}(\mathcal{U}) \otimes_{D_{\mathbf{Q}}^{\dagger}} L_{\bullet}$ . D'autre part, le foncteur  $\varphi$  étant exact sur la catégorie des  $D_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -modules cohérents, on a une résolution de  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^{\dagger}$ -modules à gauche cohérents  $\varphi(L_{\bullet}) \rightarrow \varphi(E) \rightarrow 0$ . L'ouvert  $\mathcal{U}$  étant affine, on déduit de 3.6.4 de [4] la résolution  $\Gamma(\mathcal{U}, \varphi(L_{\bullet})) \rightarrow \Gamma(\mathcal{U}, \varphi(E)) \rightarrow 0$ . Or, le complexe  $\Gamma(\mathcal{U}, \varphi(L_{\bullet}))$  est

égal au complexe  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^\dagger(\mathcal{U}) \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^\dagger} L_\bullet$ . En particulier, ce dernier complexe est acyclique en degrés non nuls et  $\Gamma(\mathcal{U}, \varphi(E))$  s'identifie à  $\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^\dagger(\mathcal{U}) \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbf{Q}}^\dagger} E$ , d'où la proposition.

Par des arguments analogues, on peut aussi montrer que  $\widehat{D}_{\mathbf{Q}}^{(m+1)}$  est un  $\widehat{D}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$ -module à droite plat.

### Appendice. Cohomologie des $\mathcal{B}_X(Z, s)$ -modules cohérents

Par Pierre Berthelot

Nous donnons ici quelques résultats sur la cohomologie des modules cohérents sur les algèbres  $\mathcal{B}_X(Z, s)$ , lorsque  $Z$  est un diviseur ample dans un schéma  $X$  projectif sur une base  $S$ . Rappelons que, si  $S = \text{Spec } \mathcal{V}$ , où  $\mathcal{V}$  est un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques  $(0, p)$ , d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , de corps des fractions  $K$ , et si  $\mathcal{X}$  est le schéma formel associé à  $X$ , les complétées  $\mathfrak{m}$ -adiques  $\widehat{\mathcal{B}}_X(Z, s)$  de ces algèbres fournissent des modèles entiers des algèbres de fonctions analytiques sur certains ouverts affinoïdes de la fibre générique  $\mathcal{X}_K$  de  $\mathcal{X}$  (au sens rigide analytique), complémentaires de tubes ouverts de rayon  $< 1$  de  $Z$  dans  $\mathcal{X}_K$  (voir par exemple [3]). Par suite, il résulte a priori des théorèmes d'annulation de Kiehl que, sous ces hypothèses, la cohomologie d'un  $\widehat{\mathcal{B}}_X(Z, s)$ -module cohérent est de torsion en degrés positifs. Toutefois, cette propriété est trop faible pour s'étendre directement aux modules cohérents sur les anneaux d'opérateurs différentiels complétés considérés ici. Nous la précisons donc par des résultats de finitude et d'annulation des groupes de cohomologie de degré  $\geq 1$ , qui montrent que, du point de vue cohomologique, une variété projective munie du faisceau  $\mathcal{B}_X(Z, s)$  associé à un diviseur ample se comporte à torsion bornée près comme l'ouvert affine complémentaire de  $Z$ . En particulier, nous verrons que, lorsque  $X = \mathbf{P}_S^N$ , les algèbres  $\mathcal{B}_X(Z, s)$  satisfont les propriétés (b1) et (b2) de 2.1, de sorte qu'on peut appliquer les résultats de cet article aux faisceaux d'opérateurs différentiels à singularités surconvergentes.

A.1. Soient  $p$  un nombre premier,  $s \geq 1$  un entier,  $X$  un schéma,  $Z \subset X$  un diviseur de Cartier effectif. La construction donnée sous des hypothèses plus générales dans [4, 4.2.3] se simplifie ici (avec les notations de [4], on a  $X = S, \mathcal{I} = 0$ ), et permet d'associer à  $Z$  un faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -algèbres  $\mathcal{B}_X(Z, s)$  de la manière suivante. Sur un ouvert  $U$  sur lequel  $Z$  est défini par une équation locale  $f$ , on pose  $\mathcal{B}(f, s) = \mathcal{O}_X[T]/(f^s T - p)$ . Si  $f'$  est une autre équation locale de  $Z$ , donnée par  $f' = af$ , où  $a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X^*)$ , il existe un isomorphisme canonique

$$\mathcal{B}(f, s) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(f', s) = \frac{\mathcal{O}_X[T']}{(f'^s T' - p)},$$

envoyant  $T$  sur  $a^s T'$ , grâce auquel on peut définir  $\mathcal{B}_X(Z, s)$  par recollement.

On dispose alors de la description intrinsèque suivante de l'algèbre  $\mathcal{B}_X(Z, s)$ :

A.2. LEMME. Soient  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $X$ ,  $t \in \Gamma(X, \mathcal{L})$  une section définissant un diviseur de Cartier  $Z \subset X$ , et  $s \in \mathbb{N}^*$ . Si  $\mu$  désigne la multiplication par  $t^{\otimes s}$  sur l'algèbre symétrique  $\mathbf{S}(\mathcal{L}^{\otimes s})$ , il existe une suite exacte naturelle

$$0 \rightarrow \mathbf{S}(\mathcal{L}^{\otimes s}) \xrightarrow{\mu - p} \mathbf{S}(\mathcal{L}^{\otimes s}) \rightarrow \mathcal{B}_X(Z, s) \rightarrow 0. \tag{A.2.1}$$

Soit  $\mathcal{B}'$  le conoyau de  $\mu - p$ . Si  $U$  est un ouvert de  $X$  sur lequel  $\mathcal{L}$  possède une base  $e$ , on peut écrire  $t = fe$ , et  $f$  est une équation locale de  $Z$ . L'isomorphisme  $\mathcal{O}_X[T] \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}(\mathcal{L}^{\otimes s})$  envoyant  $T$  sur  $e^{\otimes s} \in \mathbf{S}_1(\mathcal{L}^{\otimes s})$  passe au quotient, définissant sur  $U$  un isomorphisme  $\mathcal{B}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(f, s)$ , et, si l'on change la base  $e$ , les isomorphismes obtenus se recollent pour définir un isomorphisme  $\mathcal{B}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_X(Z, s)$ .

Lorsqu'aucune confusion n'en résultera, nous noterons  $\mathcal{B}$  pour  $\mathcal{B}_X(Z, s)$ .

A.3. PROPOSITION. Soient  $S = \text{Spec } A$  un schéma affine noethérien,  $X$  un  $S$ -schéma projectif,  $Z \subset X$  un diviseur ample. On pose  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(Z)$ , et, pour tout  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{E}$ , on note  $\mathcal{E}(r) = \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{\otimes r}$ . Pour tout entier  $s \geq 1$ , et tout  $\mathcal{B}_X(Z, s)$ -module cohérent  $\mathcal{E}$ , les propriétés suivantes sont vérifiées:

- (i) Il existe un entier  $r_0$  tel que, pour tout  $r \geq r_0$ , on puisse trouver un entier  $a_r$  et un homomorphisme surjectif  $\mathcal{B}(-r)^{a_r} \rightarrow \mathcal{E}$ .
- (ii) Pour tout  $n \geq 1$ ,  $H^n(X, \mathcal{E})$  est un  $A$ -module de type fini, de  $p$ -torsion.
- (iii) Il existe un entier  $r_0$  tel que, pour tout  $r \geq r_0$  et tout  $n \geq 1$ , on ait  $H^n(X, \mathcal{E}(r)) = 0$ .

Si  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{B}$ -module cohérent, il est quasi-cohérent comme  $\mathcal{O}_X$ -module, donc limite inductive de ses sous- $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents. Comme  $X$  est quasi-compact, la première assertion résulte de ce qu'un tel sous-module est quotient d'un module de la forme  $(\mathcal{L}^{\otimes(-r)})^{a_r}$  pour tout  $r$  assez grand.

Montrons d'abord (ii) et (iii) lorsque  $\mathcal{E}$  est de la forme  $\mathcal{B}(r)$ . Soient  $t \in \Gamma(X, \mathcal{L})$  une section dont l'annulation définit  $Z$ , et  $\mu$  la multiplication par  $t^{\otimes s}$  sur  $\mathbf{S}(\mathcal{L}^{\otimes s})$ . La suite exacte (A.2.1) donne une suite exacte longue

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\mu - p} \bigoplus_{k \geq 0} H^n(X, \mathcal{L}^{\otimes ks+r}) &\rightarrow H^n(X, \mathcal{B}(r)) \\ \rightarrow \bigoplus_{k \geq 0} H^{n+1}(X, \mathcal{L}^{\otimes ks+r}) \xrightarrow{\mu - p} \dots \end{aligned} \tag{A.3.1}$$

Puisque  $X$  est projectif et  $\mathcal{L}$  ample, les termes  $H^n = \bigoplus_{k \geq 0} H^n(X, \mathcal{L}^{\otimes ks+r})$  sont des  $A$ -modules de type fini pour tout  $n \geq 1$ . D'autre part, ce sont de manière naturelle des modules gradués sur l'algèbre graduée  $R = \bigoplus_{k \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes ks})$ , nuls en degré assez grand. Comme  $\mu$  est de degré 1, c'est donc un endomorphisme nilpotent de  $H^n$  pour  $n \geq 1$ . L'assertion (ii) s'en déduit, et l'assertion (iii) résulte de ce que les  $H^n(X, \mathcal{L}^{\otimes ks+r})$  sont nuls pour tout  $k \geq 0$  et tout  $n \geq 1$  si  $r$  est assez grand.

Dans le cas général, on écrit  $\mathcal{E}$  comme quotient d'un  $\mathcal{B}$ -module de la forme  $\mathcal{B}(-r)^{a_r}$ . Comme il existe un entier  $N$  tel que  $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$  pour tout  $n > N$  et tout  $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ , la suite exacte longue qui en résulte permet de conclure par récurrence descendante sur  $n$ .

Lorsque  $X$  est un espace projectif au-dessus de  $S$ , on peut préciser ces résultats:

**A.4. PROPOSITION.** *Soient  $S = \text{Spec } A$  un schéma affine noethérien,  $X = \mathbf{P}_S^N$  l'espace projectif de dimension relative  $N \geq 1$  sur  $S$ , et  $Z \subset X$  un diviseur défini par une section  $t \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))$ , avec  $d \geq 1$ . Pour tout  $s \geq 1$ , on a alors:*

- (i) *Pour tout  $r \in \mathbb{Z}$ , et tout  $n > N$ ,  $H^n(X, \mathcal{B}(r)) = 0$ .*
- (ii) *Pour tout  $r \geq 0$ , et tout  $n \geq 1$ ,  $H^n(X, \mathcal{B}(r)) = 0$ .*
- (iii) *Pour tout  $r < 0$ , et tout  $n \neq 0, N - 1, N$ ,  $H^n(X, \mathcal{B}(r)) = 0$ .*
- (iv) *Pour tout  $r < 0$ ,  $H^N(X, \mathcal{B}(r))$  est un  $A$ -module de type fini, annihilé par une puissance de  $p$  qui ne dépend que de  $N, d, s$  et  $r$ , et non de la base  $S$ . Si  $N \neq 1$ , il en est de même de  $H^{N-1}(X, \mathcal{B}(r))$ .*

L'assertion (i) résulte de la quasi-cohérence de  $\mathcal{B}$ . Les autres assertions résultent comme en A.3 de la suite exacte longue (A.3.1), et du calcul classique de la cohomologie des faisceaux  $\mathcal{O}_X(r)$  sur l'espace projectif.

*Remarque.* Il est facile de voir que, même pour  $r < 0$ , le  $A$ -module  $\Gamma(X, \mathcal{B}(r))$  n'est pas de type fini en général. D'autre part, en prenant par exemple  $r = -N - 1$ , et en supposant  $S$  de caractéristique  $p$ , on voit aussi que  $H^{N-1}(X, \mathcal{B}(r))$  n'est pas nul en général.

**A.5.** Supposons donné un  $m$ -PD-idéal cohérent  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ , qui soit  $m$ -PD-nilpotent, et soit  $X_0$  le sous-schéma fermé de  $X$  défini par  $\mathcal{I}$ . Si  $s$  est divisible par  $p^{m+1}$ , on peut associer plus généralement un faisceau d'algèbres  $\mathcal{B}_X(Z_0, s)$  à tout diviseur  $Z_0$  de  $X_0$ : sur un ouvert  $U$  sur lequel il existe une section  $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$  relevant une équation locale de  $Z_0$ , on définit  $\mathcal{B}_X(Z_0, s)$  comme en A.1, et nous renvoyons à [4, 4.2] pour la définition des isomorphismes de recollement.

On peut alors étendre à cette situation les résultats de A.3:

**A.6. COROLLAIRE.** *Sous les hypothèses précédentes, soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{B}_X(Z_0, s)$ -module cohérent. Alors les conclusions de A.3 sont valables pour  $\mathcal{E}$ .*

On observe d'abord que, si ces propriétés sont vérifiées pour deux  $\mathcal{B}_X(Z_0, s)$ -modules  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ , elles le sont pour toute extension de  $\mathcal{F}$  par  $\mathcal{E}$ . Or l'idéal  $\mathcal{I}$ , étant  $m$ -PD-nilpotent par hypothèse, est a fortiori nilpotent. La filtration  $\mathcal{I}$ -adique de  $\mathcal{O}_X$  est donc finie, et le gradué associé est un faisceau cohérent sur  $\mathcal{B}_X(Z_0, s) \otimes \mathcal{O}_{X_0} \simeq \mathcal{B}_{X_0}(Z_0, s)$ . L'énoncé résulte ainsi de A.3, appliqué sur  $X_0$ .

**A.7.** Soient  $\mathcal{V}$  un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques  $(0, p)$ , d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  et de corps résiduel  $k$ ,  $A$  une  $\mathcal{V}$ -algèbre complète pour la topologie  $\mathfrak{m}$ -adique, et topologiquement de type fini,  $S = \text{Spec } A$ ,  $X$  un  $S$ -schéma

projectif, plat sur  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{X}$  son complété formel  $p$ -adique. On note  $S_i, X_i$  les réductions de  $S$  et  $X$  modulo  $\mathfrak{m}^{i+1}$ . Soient  $m$  un entier tel que  $\mathfrak{m}$  possède une  $m$ -PD-structure  $m$ -PD-nilpotente, et  $s$  un multiple de  $p^{m+1}$ . On suppose donné un faisceau ample  $\mathcal{L}$  sur  $X$ , de réduction  $\mathcal{L}_0$  sur  $X_0$ , et un diviseur  $Z_0$  de  $X_0$  tel que  $\mathcal{O}_{X_0}(Z_0) \simeq \mathcal{L}_0$ . On pose

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z_0, s) = \varprojlim_i \mathcal{B}_{X_i}(Z_0, s).$$

D’après [4, 3.3.4],  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z_0, s)$  est un faisceau d’anneaux cohérent. On peut alors étendre aux  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z_0, s)$ -modules cohérents les résultats qui précèdent:

**A.8. PROPOSITION.** *Sous les hypothèses de A.7, il existe un entier  $s_0$  tel que, pour tout multiple  $s$  de  $s_0$ , et tout  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z_0, s)$ -module cohérent  $\mathcal{E}$ , les propriétés suivantes soient vérifiées:*

- (i) *Il existe un entier  $r_0$  tel que, pour tout  $r \geq r_0$ , on puisse trouver un entier  $a_r$  et un homomorphisme surjectif  $(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z_0, s)(-r))^{a_r} \rightarrow \mathcal{E}$ .*
- (ii) *Pour tout  $n \geq 1$ , les  $A$ -modules  $H^n(\mathcal{X}, \mathcal{E})$  sont de type fini et de  $p$ -torsion.*
- (iii) *Il existe un entier  $r_1$  tel que, pour tout  $r \geq r_1$  et tout  $n \geq 1$ , on ait  $H^n(\mathcal{X}, \mathcal{E}(r)) = 0$ .*

Comme  $\mathcal{L}$  est ample, il existe un entier  $s_1$  tel que  $H^1(X, \mathfrak{m}\mathcal{L}^{\otimes s}) = 0$  pour tout  $s \geq s_1$ . Soit  $s_0$  le plus petit commun multiple de  $s_1$  et  $p^{m+1}$ . Si  $t \in \Gamma(X_0, \mathcal{L}_0)$  définit  $Z_0$ , on peut alors relever  $t^{\otimes s_0}$  en une section  $t' \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes s_0})$ . L’hypothèse de platitude de  $X$  sur  $\mathcal{V}$  entraîne que le gradué  $\text{gr}_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}_X$  est plat sur  $\mathcal{O}_{X_0}$ , et il en résulte que l’annulation de  $t'$  définit un diviseur de Cartier  $\mathcal{Z}'$  de  $\mathcal{X}$  relevant le diviseur  $s_0 Z_0$  de  $X_0$ . Si  $s$  est de la forme  $s = s_0 s'$ , on obtient donc comme en A.2 une présentation

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes \mathbf{S}(\mathcal{L}^{\otimes s}) \xrightarrow{\mu' - p} \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes \mathbf{S}(\mathcal{L}^{\otimes s}) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s') \rightarrow 0,$$

où  $\mu'$  est la multiplication par  $t'^{\otimes s'}$ , de sorte que les résultats de A.3 restent valables pour  $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s')$ . On remarquera d’autre part que l’algèbre  $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s')$  est telle que

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s')/\mathfrak{m}^{i+1}\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s') \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{X_i}(s_0 Z_0, s') = \mathcal{B}_{X_i}(Z_0, s)$$

pour tout  $i$ , et donc que  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z_0, s) \simeq \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s')$ .

Supposons donc que  $s = s_0 s'$ , et montrons d’abord que  $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z_0, s)$  vérifie les propriétés (ii) et (iii). Comme  $X$  est plat sur  $\mathcal{V}$ , il résulte de [4, 4.3.3] que  $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s')$  est sans  $p$ -torsion. Si  $\pi$  est une uniformisante de  $\mathcal{V}$ , il existe donc un système projectif de suites exactes



$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s') & \xrightarrow{\pi^{i+1}} & \mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s') & \longrightarrow & \mathcal{B}_{X_i}(Z_0, s) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \pi & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s') & \xrightarrow{\pi^i} & \mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s') & \longrightarrow & \mathcal{B}_{X_{i-1}}(Z_0, s) \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

En tensoriant par  $\mathcal{L}^{\otimes r}$  et en passant à la cohomologie, on en déduit une suite exacte longue de systèmes projectifs, dans laquelle le premier système  $(H^n(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s')(r)))_{i \in \mathbb{N}}$  est essentiellement nul pour  $n \geq 1$  grâce à A.3 (ii), et le second constant pour tout  $n$ . Il en résulte d'abord que le système projectif  $(H^n(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{X_i}(Z_0, s)(r)))_{i \in \mathbb{N}}$  satisfait la condition de Mittag-Leffler pour tout  $n$ , de sorte que l'homomorphisme canonique

$$H^n(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z_0, s)(r)) \rightarrow \varprojlim_i H^n(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{X_i}(Z_0, s)(r))$$

est un isomorphisme. D'autre part, pour  $n \geq 1$ , le noyau et le conoyau du morphisme de systèmes projectifs  $(H^n(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s')(r)))_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow (H^n(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{X_i}(Z_0, s)(r)))_{i \in \mathbb{N}}$  sont essentiellement nuls, si bien que l'homomorphisme canonique

$$H^n(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s')(r)) \rightarrow \varprojlim_i H^n(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{X_i}(Z_0, s)(r))$$

est également un isomorphisme pour tout  $n \geq 1$ . Les homomorphismes naturels

$$H^n(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z}', s')(r)) \rightarrow H^n(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}(Z_0, s)(r))$$

sont donc des isomorphismes pour  $n \geq 1$ , et les assertions (ii) et (iii) résultent de A.3.

Dans le cas général, notons d'abord que, si  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  vérifient les propriétés de l'énoncé, il en est de même de toute extension de  $\mathcal{F}$  par  $\mathcal{E}$ . Comme  $\mathcal{E}$  est cohérent, son sous-module de  $p$ -torsion est cohérent, annulé par une puissance fixe de  $p$ . C'est donc un  $\mathcal{B}_{X_i}(Z_0, s)$ -module cohérent, pour un  $i$  assez grand, et il vérifie l'énoncé grâce au corollaire A.6. On est ramené de la sorte au cas où  $\mathcal{E}$  est sans torsion.

Soit  $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}/\pi^{i+1}\mathcal{E}$ . Si l'on fixe  $r_0$  tel que  $H^n(X, \mathcal{E}_0(r)) = 0$  pour tout  $r \geq r_0$  et tout  $n \geq 1$ , les suites exactes

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_0 \xrightarrow{\pi^i} \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_{i-1} \rightarrow 0,$$

montrent qu'il en est de même des  $H^n(X, \mathcal{E}_i(r))$  pour tout  $i$ , et que les homomorphismes  $\Gamma(X, \mathcal{E}_i(r)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{E}_{i-1}(r))$  sont surjectifs. On peut supposer  $r_0$

choisi de telle sorte que, pour tout  $r \geq r_0$ , il existe un homomorphisme surjectif  $(\mathcal{B}_X(Z, s)(-r))^{a_r} \rightarrow \mathcal{E}_0$ . La nullité de  $H^1(X, \mathcal{E}_0(r))$  permet alors de le relever en un système compatible d'homomorphismes  $(\mathcal{B}_{X_i}(Z, s)(-r))^{a_r} \rightarrow \mathcal{E}_i$ , automatiquement surjectifs. Comme  $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_i \mathcal{E}_i$  d'après le Théorème A [4, 3.3.9], on obtient ainsi un homomorphisme  $(\widehat{\mathcal{B}}_X(Z, s)(-r))^{a_r} \rightarrow \mathcal{E}$ , qui est encore surjectif, d'où (i).

Pour prouver les assertions (ii) et (iii), notons d'abord que, grâce au Théorème B[4, 3.3.11], il existe un entier  $N$  tel que  $H^n(\mathcal{X}, \mathcal{F}) = 0$  pour tout  $n > N$  et tout  $\widehat{\mathcal{B}}_X(Z, s)$ -module cohérent  $\mathcal{F}$ . Par récurrence descendante sur  $n$ , l'assertion (i) montre alors que les propriétés (ii) et (iii) pour les  $\widehat{\mathcal{B}}_X(Z, s)(-r)$  entraînent les mêmes propriétés pour tout faisceau cohérent  $\mathcal{E}$ .

## References

1. Beilinson, A. and Bernstein, J.: Localisation de  $\mathcal{G}$ -modules, *Comptes-rendus Acad. Sc.* 292 (1981) 15–18.
2. Benoist, Y.:  $\mathcal{D}$ -modules sur la variété des drapeaux. Travaux en cours. Images directes et constructibilité, *Hermann* 46 (1993) 99–115.
3. Berthelot, P.: Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique  $p$ . Introduction aux cohomologies  $p$ -adiques, *Bull. Soc. Math. France Mémoire* 23 (1990) 7–32.
4. Berthelot, P.:  $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}^{\dagger}$ -modules cohérents I. Opérateurs différentiels de niveau fini, *Annales Scient. E.N.S.* 29 (1996) 185–272.
5. Berthelot, P. and Ogus, A.: *Notes on Crystalline Cohomology*, Math. Notes 21, Princeton University Press, 1978.
6. Borel, A. et al.: *Algebraic D-Modules*, Perspectives in Math. Academic Press, 1987, 2.
7. Haastert, B.: Über Differentialoperatoren un  $D$ -Moduln in positiver Charakteristik. *Manuscript Mathematica* 58 (1987) 385–415.
8. Hartshorne, R.: *Ample Subvarieties of Algebraic Varieties*, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1970, 152.
9. Huyghe, C.: *Constructive et étude de la Transformation de Fourier pour les  $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes I, 1995.
10. Huyghe, C.: Théorèmes d'acyclicité pour les  $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}^{\dagger}$ -modules sur l'espace projectif. *Comptes-rendus Acad. Sc.* 321 (1995) 453–455.
11. Mori, S.: Projective manifolds with ample tangent bundles. *Ann. of Math.* 110 (1981) 593–606.