

Propriétés des attracteurs de Birkhoff

P. LE CALVEZ

*Université Paris-Sud et UA 1169 du CNRS Mathématiques, Batiment 425, F-91405
Orsay cedex, France*

(Received 29 July 1986 and revised 27 October 1986)

Abstract. We study dissipative twist maps of the annulus, following the ideas of G. D. Birkhoff explained in an article of 1932.

In the first part, we give complete and rigorous proofs of the results of this article. We define the Birkhoff attractor of a dissipative twist map which has an attracting bounded annulus, we give its main properties and we define its upper and lower rotation numbers.

In the second part we give further results on these sets, thus we show that they often coincide with the closure of a hyperbolic periodic point and that they can contain an infinite number of sinks. We also show that the Birkhoff attractors don't depend on a continuous way on the maps.

Introduction

L'un des derniers résultats de la riche théorie des difféomorphismes de l'anneau $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ préservant les aires et déviant la verticale est celui obtenu indépendamment par Aubry et Mather sur l'existence d'orbites ordonnées et plus précisément d'ensembles compacts invariants par f , minimaux, se projetant injectivement sur \mathbb{T}^1 et tels que f préserve sur ces ensembles l'ordre donné par la projection sur \mathbb{T}^1 (voir Chenciner [Che] pour un exposé complet de ces résultats). Un tel ensemble que l'on appellera au cours de cette étude un ensemble d'Aubry-Mather est formé d'orbites ordonnées possédant toutes le même nombre de rotation, élément de \mathbb{T}^1 pour f , élément de \mathbb{R} pour tout relèvement \tilde{f} de f à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Ce travail est consacré principalement à l'étude des ensembles d'Aubry-Mather des difféomorphismes dissipatifs de l'anneau et déviant la verticale. Il a pour base un article de Birkhoff ([B1]) dans lequel celui-ci, après avoir donné un résultat important sur les difféomorphismes de l'anneau préservant la mesure et déviant la verticale (voir Herman [He2]), étudie la composée d'un tel difféomorphisme et d'une contraction radiale dans une zone d'instabilité.

Le premier chapitre de ce travail, après un paragraphe de notations et de rappels sur les homéomorphismes du cercle et la topologie du plan, est consacré à l'article de Birkhoff. Nous suivons le plan de celui-ci en donnant les démonstrations précises et rigoureuses des résultats qu'il obtient. Nous considérons une couronne $C \subset \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ délimitée par deux graphes disjoints d'applications continues de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{R} et un difféomorphisme $f: C \rightarrow \text{Int } C$ déviant la verticale à droite et dissipatif (i.e. qui

diminue les aires). Nous définissons alors dans le § 2 l'attracteur de Birkhoff Λ_1 obtenu à partir du compact connexe $\Lambda_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(C)$ en ne considérant que les points qui sont adhérents à chacune des deux composantes connexes de son complémentaire. Nous obtenons ainsi un compact connexe invariant par f et frontière commune des deux composantes connexes de son complémentaire. En utilisant les propriétés des chemins négatifs, définis au § 3, nous obtenons dans le même paragraphe une propriété géométrique vérifiée par Λ_1 , celle d'être 'roulé vers la droite' et surtout le résultat suivant (voir § 4): l'image par f^{-1} d'un point de Λ_1 radialement accessible par le bas (resp. par le haut) est lui-même radialement accessible par le bas (resp. par le haut). Nous en déduisons, au § 5, l'existence d'un ensemble d'Aubry-Mather formé de points radialement accessibles par le bas (resp. par le haut); les nombres de rotation réels $\tilde{\rho}^-$ et $\tilde{\rho}^+$ de ces ensembles définis pour un relèvement \tilde{f} de f ne sont pas forcément égaux et nous donnons dans le § 8 un exemple où il en est ainsi. En interprétant ces nombres de rotation en termes de bouts premiers (voir § 6), nous pouvons donner une démonstration du résultat suivant de Marie Charpentier ([Cha1]) (voir § 7): si $\tilde{\rho}^- \neq \tilde{\rho}^+$, alors Λ_1 est un continu indécomposable; il ne peut pas s'écrire comme réunion de deux compacts connexes propres. On obtient dans ce cas un ensemble dont la dynamique et la topologie sont très compliquées.

Dans le chapitre II, nous considérons des difféomorphismes définis cette fois-ci sur l'anneau $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ tout entier, déviant la verticale et dissipatifs. Dans le § 9, nous montrons comment l'on peut prolonger l'application définie dans le premier chapitre en un tel difféomorphisme, et nous rappelons les propriétés de ceux-ci. Nous rappelons en particulier l'existence d'un élément minimal au sens de l'inclusion parmi les ensembles compacts connexes invariants et séparant $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, appelé attracteur de Birkhoff, qui est la frontière commune des deux composantes connexes de son complémentaire, et d'un intervalle formé des nombres de rotation d'ensembles d'Aubry-Mather et dont chacune des bornes correspond à un ensemble d'Aubry-Mather formé de points radialement accessibles de l'attracteur de Birkhoff. L'existence d'un intervalle de nombre de rotation nous indique alors une analogie entre l'étude des attracteurs de Birkhoff, celle des difféomorphismes de l'anneau, préservant la mesure et déviant la verticale et celle des endomorphismes de degré 1 du cercle. Chacun des deux derniers cas apparaît d'ailleurs comme un cas limite de celui des attracteurs de Birkhoff (voir § 11).

Nous nous intéressons ensuite à différents problèmes sur les attracteurs de Birkhoff. Ainsi, par le résultat précédent, nous savons déjà qu'un attracteur de Birkhoff dont les deux nombres extrêmes sont distincts possède une infinité d'orbites périodiques, nous pouvons montrer en fait (voir § 14) qu'on peut avoir une infinité d'orbites périodiques attractives. Nous étudions pour cela la dépendance de l'attracteur de Birkhoff par rapport à la fonction et nous montrons dans les § 10 et 12 que l'application qui à f associe son attracteur de Birkhoff est semi-continue inférieurement pour la C^1 -topologie, mais n'est pas continue. Enfin dans le § 13, on s'intéresse à l'hyperbolicité possible des ensembles d'Aubry-Mather. On peut avoir dans l'attracteur de Birkhoff une infinité d'ensembles de Cantor d'Aubry-Mather hyperboliques,

mais jamais un ensemble de Cantor hyperbolique formé de points radialement accessibles. Finalement, dans le § 15, nous examinons les attracteurs de Birkhoff qui ont un unique nombre de rotation.

Je remercie Michel Herman de m'avoir proposé ce travail et d'avoir su me pousser à le mener au bout. Je remercie également Raphaël Douady et Albert Fathi pour leurs nombreuses remarques qui ont permis d'améliorer le contenu et la rédaction de ce texte, ainsi que Bernadette Barbichon pour la compétence avec laquelle elle a tapé le manuscrit.

CHAPITRE I: RESULTATS PRINCIPAUX SUR LES ATTRACTEURS DE BIRKHOFF

On expose dans cette partie les résultats de Birkhoff ([B1]) en suivant le plan de son article et en donnant les démonstrations rigoureuses qui manquent. On retrouvera aussi des résultats de Marie Charpentier ([Cha1]) à propos des attracteurs de Birkhoff ainsi que d'autres résultats supplémentaires.

1. Notations et rappels

1.1. On note $\mathbb{D}, \bar{\mathbb{D}}, S^1$ les sous-ensembles de \mathbb{C} suivants:

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

$$\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\},$$

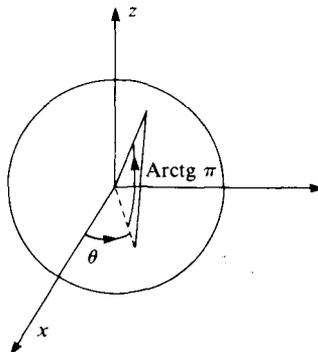
$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

On note $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le tore de dimension 1 muni de sa distance et de son orientation usuelle.

On note \mathbb{A} la variété $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, la forme $d\theta \wedge dr$ définit alors sur \mathbb{A} une orientation et la mesure de Lebesgue notée m .

On suppose \mathbb{A} plongée dans la sphère $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ par l'application:

$$(\theta, r) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \cos 2\pi\theta, \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \sin 2\pi\theta, \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \right).$$



On appelle p_1 et p_2 les projections canoniques de \mathbb{A} :

$$p_1: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{T}^1, (\theta, r) \mapsto \theta; \quad p_2: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}, (\theta, r) \mapsto r.$$

On définit de même sur le revêtement universel $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de \mathbb{A} , les projections $\tilde{p}_1: \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{T}^1, (\tilde{\theta}, r) \mapsto \tilde{\theta}$ et $\tilde{p}_2: \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{R}, (\tilde{\theta}, r) \mapsto r$.

On note $\pi: \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{A}$ la projection canonique et $\tilde{T}: \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$ la translation définie pour $(\tilde{\theta}, r) \in \tilde{\mathbb{A}}$ par $\tilde{T}(\tilde{\theta}, r) = (\tilde{\theta} + 1, r)$.

On note $\tilde{X} = \pi^{-1}(X) \subset \tilde{\mathbb{A}}$ la préimage de toute partie $X \subset \mathbb{A}$.

On écrit $\tilde{\psi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour le relèvement d'une application $\psi: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$; et si $\psi_0, \psi_1: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux applications vérifiant $\psi_0(\theta) \leq \psi_1(\theta)$ (resp. $\psi_0(\theta) < \psi_1(\theta)$) pour tout $\theta \in \mathbb{T}^1$, on note $\psi_0 \leq \psi_1$ (resp. $\psi_0 < \psi_1$).

Si \tilde{x} et \tilde{x}' sont deux points de $\tilde{\mathbb{A}}$, on appelle segment orienté $[\tilde{x}, \tilde{x}']$ l'application $\gamma: [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}, t \mapsto t\tilde{x}' + (1-t)\tilde{x}$ et segment $[\tilde{x}, \tilde{x}']$ l'ensemble $\gamma([0, 1])$. On écrira aussi $]\tilde{x}, \tilde{x}'[$ pour désigner l'ensemble $\gamma(]0, 1[)$.

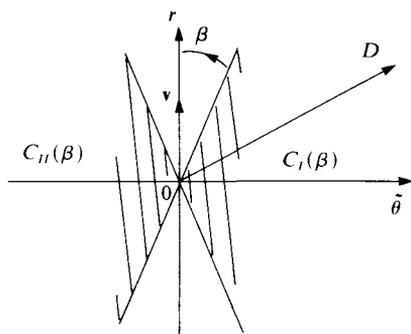
De même, si x et x' sont deux points de \mathbb{A} et si $p_1(x) - p_1(x') \neq \frac{1}{2} \pmod 1$, on appellera segment orienté $[x, x']$ (resp. segment $[x, x']$) l'application $\pi \circ \gamma$ (resp. l'ensemble $\pi \circ \gamma([0, 1])$) où γ est le segment $[\tilde{x}, \tilde{x}']$, les points $\tilde{x}, \tilde{x}' \in \tilde{\mathbb{A}}$ vérifiant $\pi(\tilde{x}) = x, \pi(\tilde{x}') = x'$ et $|\tilde{p}_1(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}')| < \frac{1}{2}$.

On écrira $\bar{Y}, \text{Fr } Y, \text{Int } Y, X \setminus Y$ pour l'adhérence, la frontière, l'intérieur et le complémentaire d'une partie Y d'un espace topologique X .

Si X est un espace topologique et si f est un homéomorphisme de X , on appelle ensemble α -limite (resp. ω -limite) d'un point $x \in X$, et on note $\alpha(x)$ (resp. $\omega(x)$) l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(f^{-n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$), c'est un fermé invariant par f .

1.2. On note \mathbf{v} le vecteur de $\mathbb{R}^2: \mathbf{v} = (0, 1)$.

On définit pour tout $\beta \in]0, \pi/2[$ le cône $C_I(\beta)$ formé par les demi-droites OD vérifiant $|\text{angle}(\text{OD}, \text{O}\tilde{\theta})| \leq (\pi/2) - \beta$ et $C_{II}(\beta)$ le cône opposé, $C_{II}(\beta) = -C_I(\beta)$.



Définition (voir Herman [He2]). On dit qu'un difféomorphisme de classe C^1 , $f: W \rightarrow W'$ où W et W' sont des ouverts de \mathbb{A} , préservant l'orientation, dévie la verticale à droite si, l'espace tangent de \mathbb{A} étant muni de sa trivialisation canonique, il existe $\beta \in]0, \pi/2[$ tel que les applications Df_x et $Df_{x'}^{-1}$ vérifient, pour tout $x \in W$ et pour tout $x' \in W'$, les relations:

$$Df_x(\mathbf{v}) \in C_I(\beta), \quad Df_{x'}^{-1}(\mathbf{v}) \in C_{II}(\beta).$$

Remarque. Pour tout $x \in W$ et pour tout $x' \in W'$, on a :

$$p_1 \circ Df_x(-\text{tg } \beta, 1) > 0 \quad \text{et} \quad p_1 \circ Df_{x'}^{-1}(\text{tg } \beta, 1) < 0.$$

1.3. On dira qu'un homéomorphisme $f: X \rightarrow X'$ entre deux parties X et X' de \mathbb{A} est dissipatif s'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que, pour tout borélien $Y \subset X$, on ait: $m(f(Y)) \leq \alpha m(Y)$.

1.4. On va se donner, dans la partie I, deux applications ψ^- et $\psi^+ : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ continues avec $\psi^- < \psi^+$. On définit alors l'ensemble $C = \{(\theta, r) \mid \theta \in \mathbb{T}^1, \psi^-(\theta) \leq r \leq \psi^+(\theta)\}$, c'est la couronne bordée par les courbes, orientées positivement C^- et C^+ graphes respectifs de ψ^- et ψ^+ .

La couronne C plongée dans S^2 sépare cet ensemble en deux ouverts simplement connexes notés \hat{U} et \hat{V} de frontière respective C^- et C^+ .

On notera pour tout $x = (\theta, r) \in C$ (resp. $\tilde{x} = (\tilde{\theta}, r) \in \tilde{C} = \pi^{-1}(C)$)

$$\begin{aligned} V^-(x) &= (\theta) \times [\psi^-(\theta), r] & (\text{resp. } V^-(\tilde{x}) &= \{\tilde{\theta}\} \times [\tilde{\psi}^-(\tilde{\theta}), r]) \\ V^+(x) &= \{\theta\} \times [r, \psi^+(\theta)] & (\text{resp. } V^+(\tilde{x}) &= \{\tilde{\theta}\} \times [r, \tilde{\psi}^+(\tilde{\theta})]). \end{aligned}$$

On notera pour tout $\theta \in \mathbb{T}^1$ (resp. $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$):

$$V_\theta = \{\theta\} \times [\psi^-(\theta), \psi^+(\theta)] \quad (\text{resp. } V_{\tilde{\theta}} = \{\tilde{\theta}\} \times [\tilde{\psi}^-(\tilde{\theta}), \tilde{\psi}^+(\tilde{\theta})]).$$

1.5. On se donne ensuite une application $f: C \rightarrow \text{Int } C$, vérifiant:

- (i) f est un homéomorphisme de C sur son image, homotope à l'identité;
- (ii) f est un C^1 -difféomorphisme de $\text{Int } C$ sur son image, déviant la verticale à droite;
- (iii) f est dissipatif.

La condition $f(C) \subset \text{Int } C$ donne l'existence d'un ensemble attractif $\bigcap_{n \geq 0} f^n(C)$ pour cette application. On étudiera dans la partie I les premières propriétés de cet attracteur dues au caractère dissipatif de f , puis surtout celles qui proviennent de la déviation de la verticale.

1.6. *Rappels de topologie du plan et de la sphère* (voir Newman [Newm] ou Kuratowski [Ku]). Si X est un fermé connexe de S^2 , les composantes connexes de $S^2 \setminus X$ sont toutes simplement connexes.

Si W est un ouvert connexe, simplement connexe de S^2 , alors la frontière de W est connexe.

Un ensemble de \mathbb{R}^2 ou de S^2 homéomorphe à \mathbb{T}^1 est appelé une courbe de Jordan. Le complémentaire d'une courbe de Jordan de S^2 est formé de deux composantes connexes simplement connexes; le complémentaire d'une courbe de Jordan de \mathbb{R}^2 est formé de deux composantes connexes, l'une bornée et simplement connexe appelée composante intérieure, l'autre non bornée et appelée composante extérieure.

1.7. *Rappels sur les homéomorphismes du cercle* (voir Herman [He1]). Si \tilde{g} est un homéomorphisme de \mathbb{R} vérifiant $\tilde{g}(\tilde{\theta} + 1) = \tilde{g}(\tilde{\theta}) + 1$ pour tout $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$, alors la suite $(\tilde{g}^n - \text{Id})/n$ converge uniformément, quand n tend vers $\pm\infty$, vers une constante, notée $\tilde{\rho}(\tilde{g})$, appelée nombre de rotation de \tilde{g} , et on a la relation suivante pour tout réel $\tilde{\theta}$ et tout entier $k \in \mathbb{Z}$:

$$-1 < \tilde{g}^k(\tilde{\theta}) - \tilde{\theta} - k\tilde{\rho}(\tilde{g}) < 1.$$

Si g est un homéomorphisme de \mathbb{T}^1 , homotope à l'identité et si \tilde{g} est un relèvement à \mathbb{R} de g , l'élément du tore $\tilde{\rho}(\tilde{g}) \bmod 1$ est alors indépendant du relèvement choisi et définit le nombre de rotation $\rho(g)$ de g .

Si g est un homéomorphisme de \mathbb{T}^1 , homotope à l'identité et vérifiant $\rho(g) = (p/q) \bmod 1$, alors l'ensemble α -limite et l'ensemble ω -limite d'un point x de \mathbb{T}^1 sont des orbites périodiques de g de période q . Ces orbites dépendent de x .

Si g est un homéomorphisme de \mathbb{T}^1 , homotope à l'identité et vérifiant $\rho(g) \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors l'ensemble α -limite et l'ensemble ω -limite de tout point sont égaux et ne dépendent pas du point. Cet ensemble est soit \mathbb{T}^1 , auquel cas g est topologiquement conjugué à la translation $x \rightarrow x + \rho(g) \bmod 1$, soit un ensemble de Cantor.

Si g et g' sont deux homéomorphismes de \mathbb{T}^1 topologiquement conjugués par un homéomorphisme homotope à l'identité, alors $\rho(g) = \rho(g')$.

2. Définition et premières propriétés des attracteurs

2.1. On considère donc ici la couronne C (1.4) et l'application f (1.5). On remarque d'abord que tout borélien invariant par f est de mesure nulle (en effet si $f(X) = X$, alors $m(X) \leq \alpha m(X)$).

2.2. DEFINITION et PROPOSITION [B1]. On pose $\Lambda_0 = \bigcap_{n \geq 0} f^n(C)$. *C'est un compact connexe non vide, invariant par f . Cet ensemble sépare C en deux ouverts U_0 et V_0 contenant respectivement C^- et C^+ et tels que $U_0 \cup \hat{U}$ et $V_0 \cup \hat{V}$ (notations 1.4) soient des ouverts simplement connexes de S^2 .*

Démonstration. L'ensemble Λ_0 , intersection décroissante de compacts connexes non vides, est un compact connexe non vide. Par la condition (i) de 1.4, l'ouvert $S^2 \setminus f^n(C)$ est formé de deux ouverts connexes, simplement connexes \hat{U}^n et \hat{V}^n contenant respectivement \hat{U} et \hat{V} (notations 1.4). Les ouverts $\hat{U}_0 = \bigcup_{n \geq 0} \hat{U}^n$ et $\hat{V}_0 = \bigcup_{n \geq 0} \hat{V}^n$ réunions croissantes d'ouverts connexes et simplement connexes sont aussi connexes et simplement connexes et de plus ne s'intersectent pas. La proposition suit avec $U_0 = \hat{U}_0 \cap C$ et $V_0 = \hat{V}_0 \cap C$.

L'invariance de Λ_0 est évidente: $\bigcap_{n \geq 1} f^n(C) = \bigcap_{n \geq 0} f^n(C)$. □

2.3. Remarque. L'attracteur ainsi défini dépend du bassin d'attraction. Si C' est une couronne contenue dans C , bordée par deux graphes $r = \psi'^+(\theta)$ et $\psi'^-(\theta)$ où $\psi'^- < \psi'^+$ et si $f(C') \subset \text{Int } C'$, on peut avoir $\bigcap_{n \geq 0} f^n(C') \neq \Lambda_0$ (il suffit qu'il y ait un point périodique de f dans $C \setminus C'$). On va donc définir une partie irréductible de cet attracteur qui ne dépende pas du bassin d'attraction.

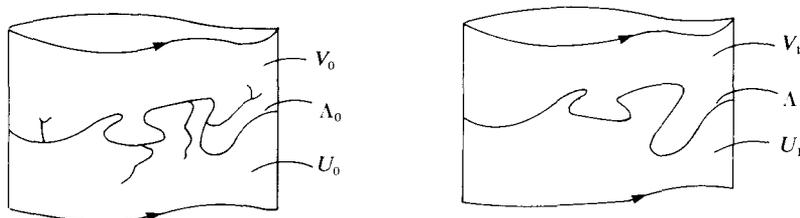
2.4. DEFINITION et PROPOSITION [B1]. On pose $\Lambda_1 = \text{Fr } U_0 \cap \text{Fr } V_0$. *C'est un compact connexe non vide, invariant par f . Cet ensemble sépare C en deux ouverts U_1 et V_1 contenant respectivement U_0 et V_0 et tels que $U_1 \cup \hat{U}$ et $V_1 \cup \hat{V}$ soient des ouverts connexes et simplement connexes de S^2 . De plus, Λ_1 est indépendant du bassin d'attraction et on a: $\Lambda_1 = \text{Fr } U_1 = \text{Fr } V_1$.*

Démonstration. On va utiliser 1.6 et le fait que Λ_0 étant invariant par f , il est de mesure nulle et donc d'intérieur vide (voir 2.1).

L'ensemble \hat{U}_0 (voir 2.2) est un fermé connexe de S^2 ne rencontrant pas \hat{V}_0 . Puisque Λ_0 est d'intérieur vide, l'ouvert $S^2 \setminus \hat{U}_0$ n'est formé que d'une composante connexe; elle contient \hat{V}_0 et est simplement connexe. On la note \hat{V}_1 . De même, $S^2 \setminus \hat{V}_0 = \hat{U}_1$ où \hat{U}_1 est un ouvert connexe simplement connexe contenant \hat{U}_0 . Puisque Λ_0 est d'intérieur vide, on a les relations: $S^2 = \hat{U}_0 \cup \hat{V}_0$, $\hat{V}_1 \subset \hat{V}_0$ et $\hat{V}_1 = \hat{V}_0$. On en déduit $\text{Fr } \hat{V}_1 \subset \hat{U}_0 \cap \hat{V}_0 = \text{Fr } \hat{U}_0 \cap \text{Fr } \hat{V}_0$ et réciproquement $\text{Fr } \hat{U}_0 \cap \text{Fr } \hat{V}_0 \subset \hat{V}_0 = \hat{V}_1$, $\text{Fr } \hat{U}_0 \cap \text{Fr } \hat{V}_0 \subset \hat{U}_0 = S^2 \setminus \hat{V}_1$, et par conséquent $\text{Fr } \hat{U}_0 \cap \text{Fr } \hat{V}_0 = \text{Fr } \hat{V}_1$. On a donc une égalité, et de même $\text{Fr } \hat{U}_0 \cap \text{Fr } \hat{V}_0 = \text{Fr } \hat{U}_1$. On note alors Λ_1 l'ensemble $\text{Fr } \hat{U}_0 \cap \text{Fr } \hat{V}_0 = \text{Fr } \hat{U}_1 = \text{Fr } \hat{V}_1$, c'est un compact connexe non vide (voir 1.6) séparant C en deux ouverts $U_1 = \hat{U}_1 \cap C$ et $V_1 = \hat{V}_1 \cap C$.

Les ensembles $\text{Fr } U_0$ et $\text{Fr } V_0$ sont invariants par f , il en est de même de $\Lambda_1 = \text{Fr } U_0 \cap \text{Fr } V_0$.

On choisit maintenant une couronne $C' \subset C$ bordée par deux graphes $C'^- = \text{gr } \psi'^-$ et $C'^+ = \text{gr } \psi'^+$ où $\psi'^- < \psi'^+$, telle que $f(C') \subset \text{Int } C'$, et on définit de façon analogue l'attracteur $\Lambda'_0 = \bigcap_{n \geq 0} f^n(C')$ et les ensembles $\hat{U}'_0, \hat{V}'_0, \hat{U}'_1, \hat{V}'_1, \Lambda'_1$ correspondants. Les inclusions évidentes $\hat{U}_0 \subset \hat{U}'_0$ et $\hat{V}_0 \subset \hat{V}'_0$ prouvent les relations $\hat{U}'_0 \cap \hat{V}'_0 = \emptyset$, $\hat{U}_0 \cap \hat{V}'_0 = \emptyset$, et par conséquent les égalités: $\hat{U}'_0 = \hat{U}_0, \hat{V}'_0 = \hat{V}_0$. On en déduit $\Lambda'_1 = \hat{U}'_0 \cap \hat{V}'_0 = \hat{U}_0 \cap \hat{V}_0 = \Lambda_1$. □



On exclut dans Λ_1 les points de Λ_0 qui ne sont pas adhérents aux deux côtés.

3. Propriétés topologiques des attracteurs dues à la déviation à droite

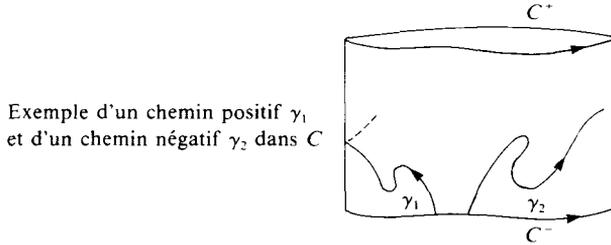
On va montrer, dans ce paragraphe, une propriété supplémentaire sur les attracteurs, due à la déviation à droite (ce que Birkhoff appelle le fait pour Λ_0 et Λ_1 d'être roulés sur la droite), à savoir que tout point hors de l'attracteur Λ_0 (resp. Λ_1) est accessible par un chemin négatif issu d'un des bords de C et ne rencontrant pas Λ_0 (resp. Λ_1).

3.1. Sous les conditions vérifiées par f (voir 1.6), on peut toujours trouver deux applications de classe C^1 : $\psi^{*-}, \psi^{*+}, \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\psi^- < \psi^{*-} < \psi^{*+} < \psi^+$ suffisamment proches de façon uniforme de ψ^- et ψ^+ pour que la couronne C^* bordée par leurs graphes respectifs vérifie: $f(C) \subset C^* \subset C$. Les ensembles Λ_0^* et Λ_1^* définis pour C^* sont alors égaux aux ensembles Λ_0 et Λ_1 et puisque notre étude porte sur ces ensembles, on ne perd rien à supposer dans les hypothèses que ψ^- et ψ^+ sont de classe C^1 et que la différentielle de f se prolonge sur les bords C^- et C^+ .

3.2. On va étudier U_0 et U_1 , une étude analogue pouvant être faite pour V_0 et V_1 . Les courbes $f^n(C^-)$ où $n \in \mathbb{N}$ sont orientées positivement. On rappelle que le vecteur \mathbf{v} représente le vecteur vertical $\mathbf{v} = (0, 1)$ (voir 1.2).

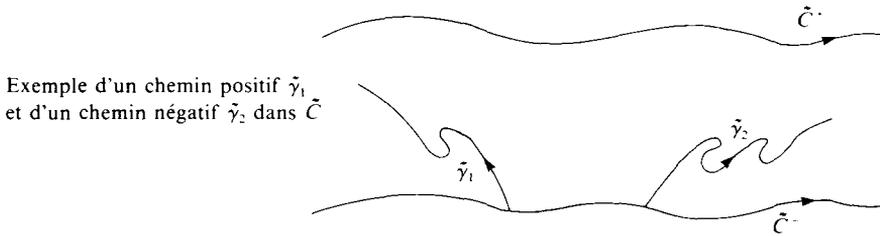
3.3. *Définition* (voir Herman [He2]). On appelle *chemin positif* (resp. *négatif*) issu de C^- , un plongement C^1 , $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$ tel que:

- (i) $\tilde{p}_1 \circ \gamma'(0) \leq 0$ (resp. ≥ 0);
- (ii) $\gamma(]0, 1]) \cap C^- = \emptyset$;
- (iii) le relèvement à \mathbb{R} de l'angle $(v, \gamma'(t))$ qui est entre 0 et π (resp. $-\pi$ et 0) en 0 est toujours strictement positif (resp. strictement négatif) pour t non nul.



Exemple d'un chemin positif γ_1 et d'un chemin négatif γ_2 dans C

Remarque. On définit de même dans \tilde{C} la notion de chemin positif ou négatif issu de \tilde{C}^- ; et bien entendu si γ est un chemin positif dans C , tout relèvement de γ dans \tilde{C} est alors positif pour cette notion.



Exemple d'un chemin positif $\tilde{\gamma}_1$ et d'un chemin négatif $\tilde{\gamma}_2$ dans \tilde{C}

3.4. PROPOSITION [B1]. Si x est un point de U_0 , il existe un chemin négatif γ issu de C^- vérifiant:

$$\gamma([0, 1]) \subset U_0, \quad \gamma(1) = x.$$

Démonstration. On définit pour tout $n \geq 1$ l'ouvert de C , $U^n = \hat{U}^n \cap C$, bordé par C^- et $f^n(C^-)$. La relation $U_0 = \bigcup_{n \geq 0} U^n$ et le lemme qui suit suffisent à montrer la proposition.

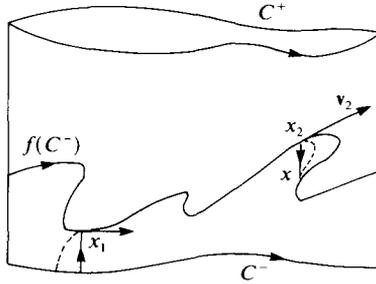
LEMME 1. Si x est un point de U^n , il existe un chemin négatif γ issu de C^- et vérifiant:

$$\gamma([0, 1]) \subset U^{n+1}, \quad \gamma(1) = x, \quad \gamma'(0) = v,$$

où v est le vecteur de \mathbb{R}^2 de coordonnées $(0, 1)$.

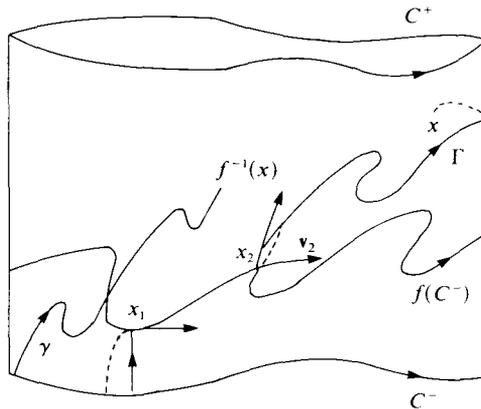
Démonstration. Cas où $n = 1$. On choisit un point x_1 de $f(C^-)$ d'ordonnée minimale. Pour des raisons d'orientation, le vecteur unitaire tangent à la courbe orientée $f(C^-)$ en ce point est le vecteur de \mathbb{R}^2 de coordonnées $(1, 0)$. Soit x un point de U^1 quelconque, la verticale $V^+(x)$ (voir 1.4) rencontre alors $f(C^-)$ et on note x_2 le point de $V^+(x) \cap f(C^-)$ d'ordonnée minimale. Pour des raisons d'orientation, le vecteur unitaire tangent v_2 à la courbe orientée $f(C^-)$ au point x_2 vérifie: $\tilde{p}_1(v_2) \geq 0$. On considère maintenant le chemin C^1 par morceaux formé par la verticale $V^-(\tilde{x}_1)$

(voir 1.2) orientée vers le haut, par le chemin $f(C^-)$ entre x_1 et x_2 et par le segment orienté $[x_2, x]$. Puisque f dévie la verticale à droite, le vecteur unitaire tangent à la courbe $f(C^-)$ en tout point de $f(C^-)$ n'est jamais le vecteur v et on peut donc déformer le chemin défini précédemment en un chemin négatif à valeur dans U^2 et vérifiant le lemme 1. □



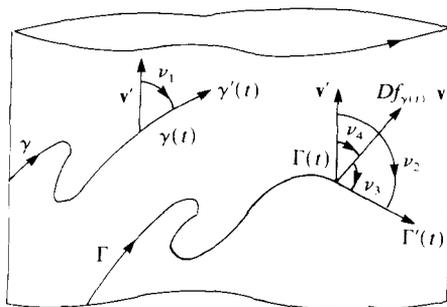
On suppose le lemme vrai jusqu'au rang n et on le montre au rang $n+1$; on utilise pour cela le lemme 2 qui suit:

Démonstration du lemme 1 (suite). Soit $x \in U^{n+1} \setminus U^n$ et soit γ un chemin négatif vérifiant $\gamma(0) \in C^-$, $\gamma'(0) = v$, $\gamma(]0, 1]) \cap C^- = \emptyset$, $\gamma([0, 1]) \subset U^{n+1}$, $\gamma(1) = f^{-1}(x)$. On définit le chemin $\Gamma = f \circ \gamma$ et on pose $x_2 = f(\gamma(0))$. On choisit un point x_1 de $f(C^-)$ d'ordonnée minimale et on considère le chemin C^1 par morceaux formé par la verticale $V^-(\tilde{x}_1)$ orientée vers le haut, par le chemin $f(C^-)$ entre x_1 et x_2 et par Γ . Puisque f préserve l'orientation, l'angle $(v_2, \Gamma'(0))$ est compris entre 0 et $\pi \text{ mod } 2\pi$, où v_2 est le vecteur unitaire tangent à la courbe orientée $f(C^-)$ au point x_2 et on peut alors déformer l'arc simple défini précédemment en un chemin C^1 à valeur dans U^{n+2} et vérifiant le lemme 1. Le lemme 1 est démontré et la proposition 3.4 suit. □



LEMME 2. Soit γ un chemin négatif issu de C^- avec $\gamma'(0) = v$. On note Γ le chemin $f \circ \gamma$. Le relèvement à \mathbb{R} de l'angle $(v, \Gamma'(t))$, qui en 0 est entre $-\pi + \beta$ et $-\beta$, est toujours inférieur à $-\beta$, où β est l'angle défini en 1.2.

Démonstration. On considère les fonctions $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ relèvements à \mathbb{R} des angles respectifs suivants: $(\mathbf{v}, \gamma'(t))$, $(\mathbf{v}, \Gamma'(t))$, $(Df_{\gamma(t)}\mathbf{v}, \Gamma'(t))$ et $(\mathbf{v}, Df_{\gamma(t)}\mathbf{v})$, et vérifiant en 0 les relations respectives suivantes: $\nu_1(0) = 0$, $\nu_2(0) \in [-\pi + \beta, -\beta]$, $\nu_3(0) = 0$ et $\nu_4(0) \equiv \nu_2(0)$. On a les relations suivantes pour tout $t \in [0, 1]$: $\nu_2(t) = \nu_3(t) + \nu_4(t)$, $-\pi + \beta \leq \nu_4(t) \leq -\beta$ et $\nu_1(t) \leq 0$. On suppose que $\nu_2(t_0) \geq -\beta$ où $t_0 \in [0, 1]$. On a donc $\nu_3(t_0) \geq 0$, et puisque $\nu_3(t)$ est strictement négatif pour t proche de 0, on en déduit l'existence de $t_1 \in]0, t_0]$ vérifiant $\nu_3(t_1) = 0$. La valeur de $\nu_1(t_1)$ est donc de la forme $-2k\pi$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\nu_1(0) = \nu_3(0) = 0$, il existe un $t_2 \in]0, t_1[$ tel que $\nu_3(t_2) = \nu_1(t_2) + \pi$ et ceci contredit le fait que f préserve l'orientation. \square



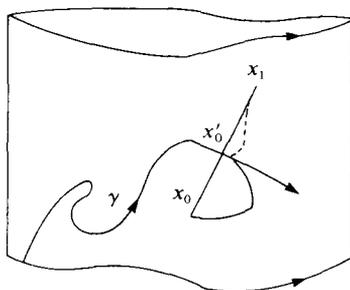
On a une propriété analogue pour U_1 .

3.5. PROPOSITION [B1]. Si x est un point de U_1 , il existe un chemin négatif γ issu de C^- vérifiant:

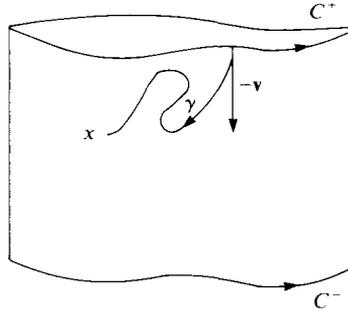
$$\gamma([0, 1]) \subset U_1, \quad \gamma(1) = x.$$

Démonstration. Soit $x_1 = (\theta_1, r_1)$ un point de U_1 ; puisque $U_1 \subset \bar{U}_0$ (voir 2.4), il existe un point $x_0 = (\theta_0, r_0)$ dans U_0 tel que: $r_0 < r_1$, $\theta_1 - \theta_0 \in]0, \frac{1}{2}[\pmod{1}$, et tel que le segment $[x_0, x_1]$ (cf. 1.1) soit contenu dans U_1 .

On considère maintenant un chemin γ négatif issu de C^- , à valeur dans U_0 et vérifiant $\gamma(1) = x_0$. On appelle x'_0 le premier point de rencontre de γ avec le segment $[x_1, x_0]$ et on considère le chemin C^1 par morceaux à valeur dans U_1 formé par γ jusqu'au point x'_0 et par le segment orienté $[x'_0, x_1]$. Si on note \mathbf{v}' le vecteur unitaire porté par ce segment, on remarque que l'angle $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ appartient à $]-\pi/2, 0[\pmod{2\pi}$. On peut par conséquent déformer l'arc défini précédemment en un arc γ' vérifiant la proposition. \square



3.6. De même, tout point de V_0 (resp. V_1) est accessible par un plongement de classe C^1 de $[0, 1]$, noté γ , tel que $\gamma([0, 1]) \subset V_0$ (resp. V_1), $\gamma(0) \in C^+$, $\gamma'(0) = -v$ et tel que le relèvement à \mathbb{R} de l'angle $(-v, \gamma'(t))$, qui est nul en 0, est toujours négatif.



4. Etude des points radialement accessibles

Dans ce paragraphe et dans le suivant, U_0 et U_1 jouant un rôle identique, on écrira U_i ($i=0, 1$) pour désigner l'un ou l'autre de ces ouverts, de même pour V_i .

4.1. Définition. Un point x de U_i (resp. de V_i) est dit *radialement accessible* si $V^-(x) \subset U_i$ (resp. $V^+(x) \subset V_i$).

De même, un point \tilde{x} de \tilde{U}_i (resp. de \tilde{V}_i) est dit *radialement accessible* si $V^-(\tilde{x}) \subset \tilde{U}_i$ (resp. $V^+(\tilde{x}) \subset \tilde{V}_i$).

On note U_i^- (resp. V_i^+ , \tilde{U}_i^- , \tilde{V}_i^+) l'ensemble des points radialement accessibles de U_i (resp. V_i , \tilde{U}_i , \tilde{V}_i).

4.2. Définition. On définit les ensembles suivants:

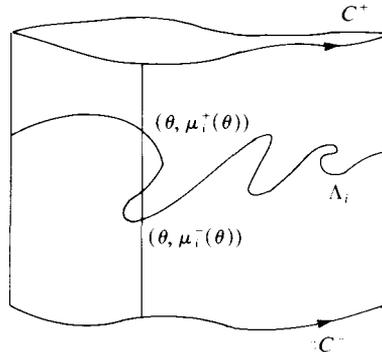
$$\Lambda_i^- = \{x \in \Lambda_i \mid V^-(x) \setminus \{x\} \subset U_i\},$$

$$\Lambda_i^+ = \{x \in \Lambda_i \mid V^+(x) \setminus \{x\} \subset V_i\},$$

et les applications μ_i^- et μ_i^+ , de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{R} définies, pour tout $\theta \in \mathbb{T}^1$ par les relations:

$$(\theta, \mu_i^-(\theta)) \in \Lambda_i^-, \quad (\theta, \mu_i^+(\theta)) \in \Lambda_i^+.$$

Les points de Λ_i^- (resp. de Λ_i^+) sont appelés *points de Λ_i radialement accessibles par le bas* (resp. *par le haut*).

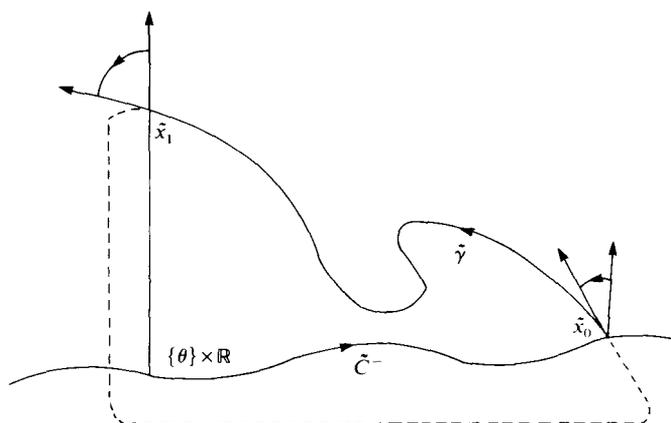


On définit de même l'ensemble $\tilde{\Lambda}_i^-$ (resp. $\tilde{\Lambda}_i^+$) des points de $\tilde{\Lambda}_i$ radialement accessibles par le bas (resp. par le haut). On a $\tilde{\Lambda}_i^- = \pi^{-1}(\Lambda_i^-)$ (resp. $\tilde{\Lambda}_i^+ = \pi^{-1}(\Lambda_i^+)$).

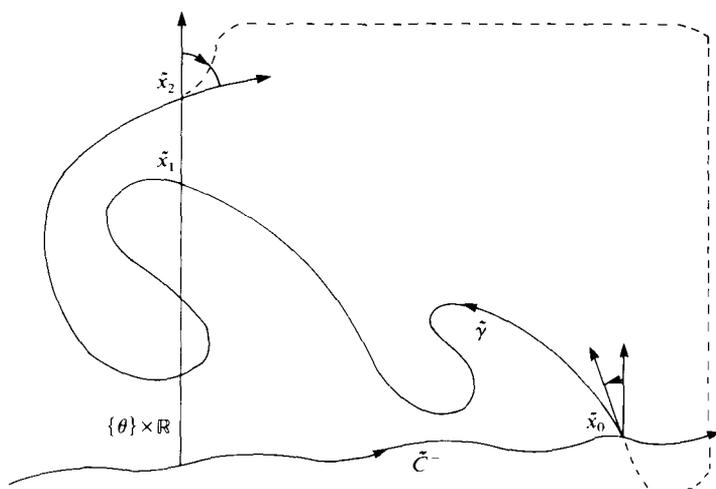
4.3. On se place dans tout le paragraphe dans le revêtement \tilde{C} et on considère un relèvement \tilde{f} de f . On va utiliser des résultats, sur les chemins positifs que l'on rappelle ici (voir Herman [He2]).

RAPPEL. Si $\tilde{\gamma}$ est un chemin positif dans \tilde{C} issu de \tilde{C}^- et si $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$, le point d'ordonnée la plus grande de l'ensemble (supposé non vide) $\tilde{\gamma}([0, 1]) \cap \{\tilde{\theta}\} \times \mathbb{R}$ est celui de paramètre $t \in [0, 1]$ le plus petit. De plus, la valeur algébrique de l'angle $(v, \gamma'(t))$ que l'on a choisi entre 0 et π en $\gamma(0)$ est aussi entre 0 et π en ce point. On a un résultat analogue pour les chemins négatifs.

Démonstration (voir Herman [He2]). La démonstration repose sur le fait que la variation d'angle le long d'un cercle plongé de classe C^1 dans \mathbb{R} est -2π ou 2π suivant l'orientation du cercle (voir Berger-Gastiaux [BG]) et sur les dessins suivants.



Le premier point de rencontre de $\tilde{\gamma}$ et de $\{\tilde{\theta}\} \times \mathbb{R}$ est $\tilde{x}_1 = (\tilde{\theta}, r_1)$. On peut alors construire un cercle plongé positivement, de classe C^1 , en joignant \tilde{x}_1 à \tilde{x}_0 par la courbe en pointillée ci-contre. La variation de l'angle est alors 2π et l'angle en \tilde{x}_1 est compris entre 0 et π .

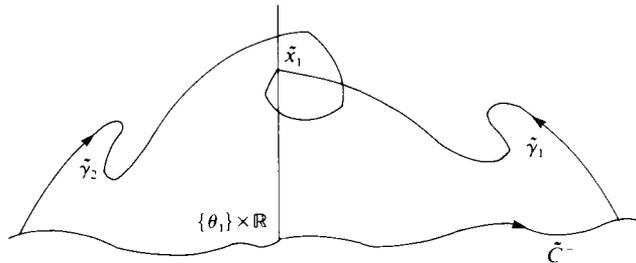


On suppose que $\tilde{\gamma}$ rencontre ultérieurement la verticale $V^+(\tilde{x}_1)$ et l'on appelle \tilde{x}_2 le premier point de rencontre. On peut alors construire un cercle plongé négativement, de classe C^1 , en joignant \tilde{x}_2 à \tilde{x}_0 par la courbe en pointillé. La variation d'angle est alors -2π et l'angle en \tilde{x}_2 doit être négatif, d'où la contradiction.

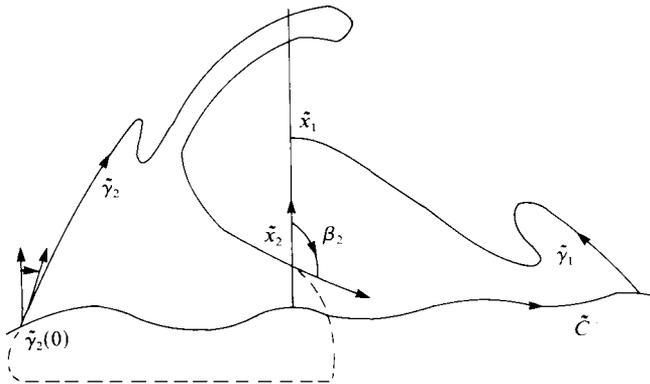
4.4. PROPOSITION [B1]. Si γ est un chemin positif issu de C^- , à valeur dans U_i , les points de $\gamma([0, 1])$ sont radialement accessibles.

Démonstration. Il suffit de montrer la proposition équivalente dans le revêtement.

Soit $\tilde{\gamma}_1$ un chemin positif issu de \tilde{C}^- , à valeur dans \tilde{U}_i et $\tilde{x}_1 = (\tilde{\theta}_1, r_1) = \tilde{\gamma}_1(1)$. On va montrer que $\tilde{x}_1 \in \tilde{U}_i^-$. D'après (4.3), on peut toujours supposer que $\tilde{\gamma}_1$ se trouve à droite de \tilde{x}_1 . Soit $\tilde{\gamma}_2$ un chemin négatif issu de \tilde{C}^- , à valeur dans \tilde{U}_i et tel que $\tilde{\gamma}_2(1) = \tilde{x}_1$. Le chemin $\tilde{\gamma}_2$ rencontre $\tilde{\gamma}_1([0, 1])$ ainsi que $V^-(\tilde{x}_1)$ (puisque $\tilde{x}_1 \in \tilde{\gamma}_1[0, 1] \cap V^-(\tilde{x}_1)$). S'il rencontre $\tilde{\gamma}_1([0, 1])$ avant $V^-(\tilde{x}_1)$, la simple connexité de \tilde{U}_i prouvera l'inclusion $V^-(\tilde{x}_1) \subset \tilde{U}_i$ et la proposition.



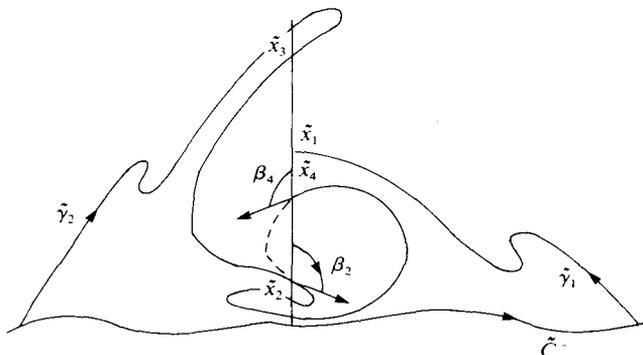
On va donc supposer le contraire et montrer une contradiction. On note alors $\tilde{x}_2 = \tilde{\gamma}_2(t_2) = (\tilde{\theta}_1, r_2)$, $r_2 < r_1$, le premier point de rencontre de $\tilde{\gamma}_2$ avec $V^-(\tilde{x}_1)$, et β_2 la valeur algébrique de l'angle $(v, \tilde{\gamma}'_2(t_2))$ qui au point $\tilde{\gamma}_2(0)$ est choisie entre $-\pi$ et 0. On peut joindre \tilde{x}_2 à $\tilde{\gamma}_2(0)$ par la courbe en pointillé ci-dessous; on obtient alors un cercle plongé positivement et on en déduit $\beta_2 \in [-\pi, 0[$.



On sait (voir 4.3) que $\tilde{\gamma}_2([0, t_2[) \cap V^+(\tilde{x}_1) \neq \emptyset$ et on note alors $\tilde{x}_3 = \tilde{\gamma}_2(t_3)$ le point de $\tilde{\gamma}_2([0, t_2[) \cap V^+(\tilde{x}_1)$ d'ordonnée la plus petite. L'ensemble $\tilde{\gamma}_2(]t_2, 1])$ intersecte la courbe de Jordan réunion de $\tilde{\gamma}_2(]t_3, t_2])$ et de $[\tilde{x}_2, \tilde{x}_3]$ (puisque $\tilde{\gamma}_2(1) = \tilde{x}_1$) et

comme $\beta_2 \in [-\pi, 0[$, on peut considérer le point d'intersection $\tilde{x}_4 = \tilde{\gamma}_2(t_4)$ de paramètre t_4 le plus petit tel que $t_4 > t_2$ et on a $\tilde{x}_4 \in]\tilde{x}_2, \tilde{x}_3[$.

On peut alors joindre \tilde{x}_4 à \tilde{x}_2 par la courbe dessinée en pointillé ci-dessous et obtenir un cercle plongé positivement de classe C^1 . Puisque $\beta_2 \in [-\pi, 0[$, on en déduit que l'angle $\beta_4 = (\mathbf{v}, \gamma'(t_4))$ est positif, d'où la contradiction. \square



4.5. COROLLAIRE. Si $x \in f(C) \cap U_i^-$, alors:

$$f^{-1}(x) \in U_i^- \quad \text{et} \quad f(V^-(f^{-1}(x))) \subset U_i^-.$$

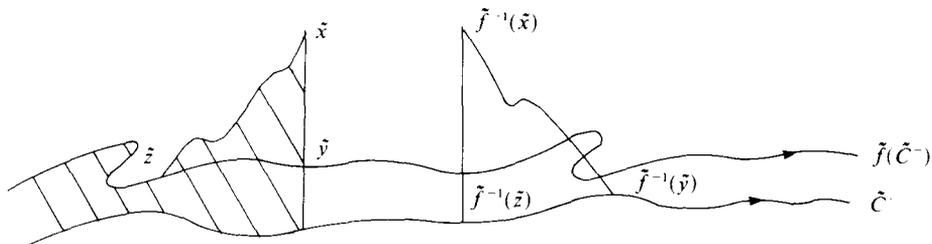
Démonstration. On se place dans le revêtement universel \tilde{C} et on montre le résultat analogue.

Soit $\tilde{x} \in \tilde{f}(\tilde{C}) \cap \tilde{U}_i^-$ et soit \tilde{y} le point de $\tilde{f}(\tilde{C}^-) \cap V^-(\tilde{x})$ d'ordonnée maximale; l'image par \tilde{f}^{-1} du segment orienté $[\tilde{y}, \tilde{x}]$ définit alors un chemin positif, issu de \tilde{C}^- , à valeur dans \tilde{U}_i et aboutissant en $\tilde{f}^{-1}(\tilde{x})$. La proposition 4.4 nous donne alors la relation $\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}) \in \tilde{U}_i^-$, d'où on déduit les inclusions:

$$V^-(f^{-1}(\tilde{x})) \subset \tilde{U}_i^-, \quad \tilde{f}(V^-(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}))) \subset \tilde{U}_i.$$

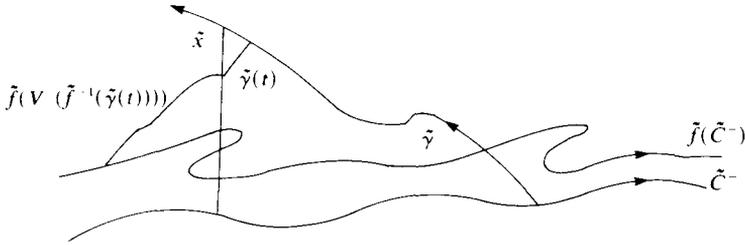
On note alors z l'extrémité autre que x de $\tilde{f}(V^-(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x})))$.

Puisque f dévie la verticale à droite, la tangente orientée à la courbe $f(C^-)$ n'est jamais portée par le vecteur \mathbf{v} . Ainsi, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, on sait que la partie de $f(C^-)$ formée des points situés avant \tilde{z} pour l'orientation ne rencontre pas $V^-(\tilde{z})$, ni d'ailleurs $V^-(\tilde{y})$ puisque \tilde{z} est situé avant \tilde{y} . On sait, comme première conséquence, que cette courbe ne rencontre pas $V^-(\tilde{x})$; on peut alors considérer l'ouvert délimité par la réunion de la courbe précédente, de $\tilde{f}(V^-(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x})))$ et de $V^-(\tilde{x})$ qui est hachurée sur le dessin ci-dessous. Cet ouvert, qui a son bord contenu dans l'ouvert simplement connexe \tilde{U}_i , est inclus dans \tilde{U}_i^- . En particulier, on obtient $\tilde{f}(V^-(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}))) \subset \tilde{U}_i^-$.



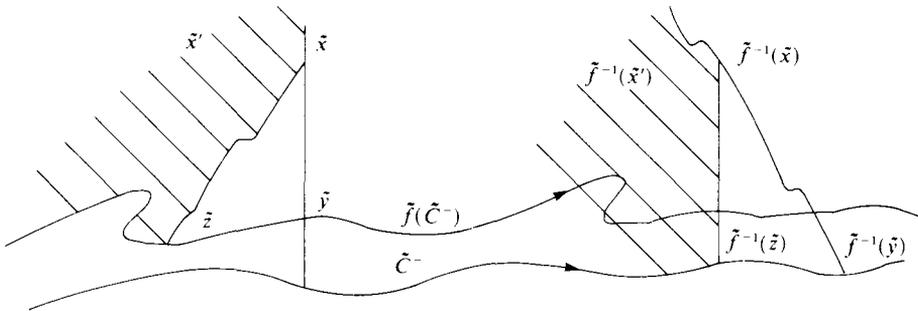
4.6. COROLLAIRE. Si $x \in \Lambda_i$ et si γ est un chemin positif issu de C^- vérifiant $\gamma([0, 1[) \subset U_i$, $\gamma(1) = x$, alors $x \in \Lambda_i^-$.

Démonstration. Soit γ un chemin positif issu de C^- vérifiant $\gamma([0, 1[) \subset U_i$, $\gamma(1) = x$. Par (4.4), on sait que $\gamma([0, 1[) \subset U_i^-$. On en déduit $\gamma([0, 1[) \cap V^+(x) = \emptyset$, et par 4.3, $\tilde{p}_1 \circ \gamma'(1) \leq 0$. D'autre part, pour t assez proche de 1, $\gamma(t) \in f(C^-)$, et d'après 4.5, $f(V^-(f^{-1}(\gamma(t)))) \subset U_i^-$. En faisant tendre t vers 1, on obtient $V^-(x) \setminus \{x\} \subset U_i^-$. □



4.7. COROLLAIRE. On a $f^{-1}(\Lambda_i^-) \subset \Lambda_i^-$. De plus, l'ordre défini par la première projection est préservé par f^{-1} .

Démonstration. L'inclusion $f^{-1}(\Lambda_i^-) \subset \Lambda_i^-$ est une conséquence du corollaire 4.6. Soient $\tilde{x}, \tilde{x}' \in \tilde{\Lambda}_i^-$ vérifiant $\tilde{p}_1(\tilde{x}') < \tilde{p}_1(\tilde{x})$. Le corollaire 4.5 prouve que $\tilde{f}(\tilde{V}^-(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}))) \subset U_i^-$. Le point x' appartient à la région hachurée ci-dessous et par conséquent $\tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^{-1}(\tilde{x}') < \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^{-1}(x)$. □



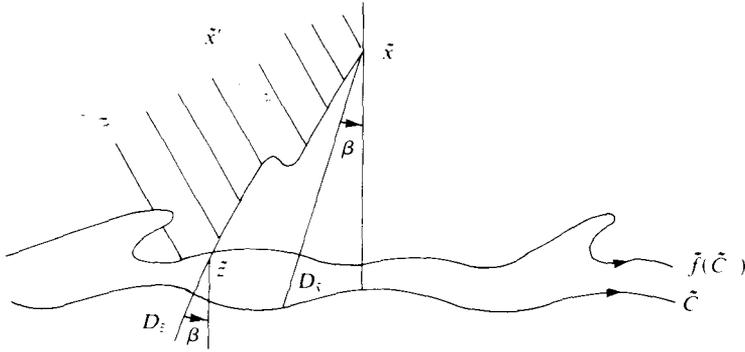
4.8. COROLLAIRE. L'application $\mu_i^- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement, continue à droite et admet une limite à gauche en chaque point.

De plus, $\tilde{\mu}_i^-(\tilde{\theta}') - \tilde{\mu}_i^-(\tilde{\theta}) \leq (\tilde{\theta}' - \tilde{\theta}) \cotg \beta$ si $\tilde{\theta}' > \tilde{\theta}$, où β est défini en 1.2.

Démonstration. On montre d'abord l'inégalité

$$\tilde{\mu}_i^-(\tilde{\theta}') - \tilde{\mu}_i^-(\tilde{\theta}) \leq (\tilde{\theta}' - \tilde{\theta}) \cotg \beta \quad \text{si } \tilde{\theta}' > \tilde{\theta}.$$

On considère pour cela les points de Λ_i^- , $\tilde{x} = (\tilde{\theta}, \tilde{\mu}_i^-(\tilde{\theta}))$ et $\tilde{x}' = (\tilde{\theta}', \tilde{\mu}_i^-(\tilde{\theta}'))$; on utilise alors les notations de 4.7. On considère les demi-droites affines $D_{\tilde{x}}$ et $D_{\tilde{z}}$ passant respectivement par \tilde{x} et par \tilde{z} et dirigées par le vecteur $(-1, -\cotg \beta)$. La partie $f(C^-)$ située avant \tilde{z} pour son orientation ne rencontre pas $D_{\tilde{z}}$ (on utilise la définition de β) et par conséquent \tilde{x}' se trouve au-dessus de la demi-droite $D_{\tilde{x}}$, ce qui prouve l'inégalité demandée.

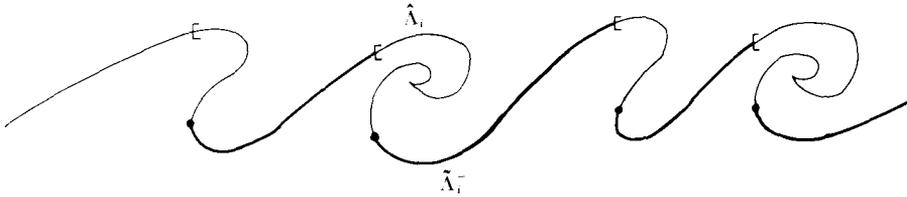


La semi-continuité de $\tilde{\mu}_i^-$ est évidente car $\tilde{\Lambda}_i$ est fermé, par conséquent $\liminf_{\tilde{\theta}' \rightarrow \tilde{\theta}} \tilde{\mu}_i^-(\tilde{\theta}') \geq \tilde{\mu}_i^-(\tilde{\theta})$. Or l'inégalité démontrée précédemment prouve que

$$\limsup_{\tilde{\theta}' \rightarrow \tilde{\theta}^+} \tilde{\mu}_i^-(\tilde{\theta}') \leq \tilde{\mu}_i^-(\tilde{\theta});$$

on a donc une continuité à droite en tout point.

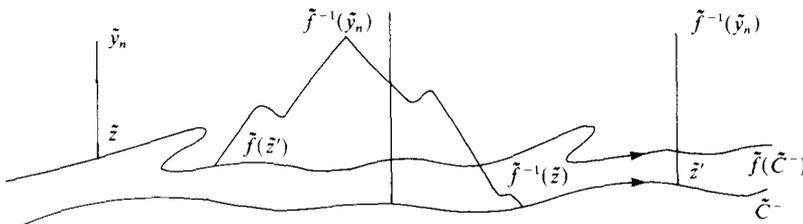
D'autre part, si $(\tilde{\theta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{\theta}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent toutes deux vers $\tilde{\theta}$ par valeurs négatives et si $(\tilde{\mu}_i^-(\tilde{\theta}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{\mu}_i^-(\tilde{\theta}'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tendent respectivement vers l et l' avec $l < l'$, on peut toujours violer l'inégalité démontrée plus haut avec $\tilde{\theta}_n < \tilde{\theta}'_m$ proches de $\tilde{\theta}$. La fonction $\tilde{\mu}_i^-$ admet donc une limite à gauche en tout point. \square



4.9. COROLLAIRE. On a $f^{-1}(\overline{\Lambda_i^-}) \subset \Lambda_i^-$.

Démonstration. On montre l'inclusion équivalente $\tilde{f}^{-1}(\overline{\tilde{\Lambda}_i^-}) \subset \tilde{\Lambda}_i^-$. Soit \tilde{x} un point de $\tilde{f}^{-1}(\overline{\tilde{\Lambda}_i^-})$. On choisit une suite $(\tilde{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\tilde{\Lambda}_i^-$ convergant vers $\tilde{f}(\tilde{x})$. La suite $\tilde{f}^{-1}(\tilde{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \tilde{x} .

Utilisant 4.7 et 4.5, on montre la relation $f^{-1}(\tilde{y}_n) \subset \tilde{\Lambda}_i^-$ et les inclusions $\tilde{f}^{-1}(V^-(\tilde{y}_n) \setminus \tilde{y}_n) \subset U_i^-$ et $\tilde{f}(V^-(\tilde{f}^{-2}(\tilde{y}_n)) \setminus \tilde{f}^{-2}(\tilde{y}_n)) \subset U_i^-$. Si maintenant on fait tendre n vers l'infini, la suite $\tilde{f}^{-1}(\tilde{y}_n)$ se rapproche de \tilde{x} et tout point de $V(x) \setminus \{x\}$ est alors, dès que n est assez grand, au-dessous d'une des courbes $\tilde{f}^{-1}(V^-(\tilde{y}_n) \setminus \tilde{y}_n)$ ou $\tilde{f}(V^-(\tilde{f}^{-2}(\tilde{y}_n)) \setminus \tilde{f}^{-2}(\tilde{y}_n))$ et se trouve donc dans U_i^- . On en déduit $x \in \Lambda_i^-$. \square



4.10 On a des résultats analogues pour les points radialement accessibles par le haut, à savoir:

$$f^{-1}(\Lambda_i^+) \subset \Lambda_i^+ \text{ et l'ordre défini par la première projection est préservé par } f^{-1};$$

$$f^{-1}(\Lambda_i^+) \subset \Lambda_i^+;$$

l'application $\tilde{\mu}_i^+$ est semi-continue supérieurement, continue à gauche et admet une limite à droite en chaque point.

$$\text{De plus: } \tilde{\mu}_i^+(\tilde{\theta}') - \tilde{\mu}_i^+(\tilde{\theta}) \leq \cotg \beta'(\tilde{\theta}' - \tilde{\theta}) \quad \text{si } \tilde{\theta}' > \tilde{\theta}.$$

4.11. PROPOSITION [B1]. *La suite $(\tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^n - \tilde{p}_1)/n$ est uniformément convergente sur chaque ensemble $\tilde{\Lambda}_i^-$ et $\tilde{\Lambda}_i^+$ et converge sur chacun vers une constante.*

Démonstration. On définit les applications $g_i^-, g_i^+ : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ et $\tilde{g}_i^-, \tilde{g}_i^+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par les relations:

$$g_i^-(\theta) = p_1 \circ f^{-1}(\theta, \mu_i^-(\theta)),$$

$$g_i^+(\theta) = p_1 \circ f^{-1}(\theta, \mu_i^+(\theta)),$$

$$\tilde{g}_i^-(\tilde{\theta}) = \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{\mu}_i^-(\tilde{\theta})),$$

$$\tilde{g}_i^+(\tilde{\theta}) = \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^{-1}(\tilde{\theta}, \tilde{\mu}_i^+(\tilde{\theta})).$$

La proposition est alors une conséquence du résultat suivant qui généralise la théorie du nombre de rotation de Poincaré (1.7) pour des applications qui ne sont pas des homéomorphismes. □

4.12. PROPOSITION. *Soit $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application croissante vérifiant $\tilde{g}(\tilde{\theta} + 1) = \tilde{g}(\tilde{\theta}) + 1$ pour tout réel $\tilde{\theta}$. Alors,*

(i) *La suite $(\tilde{g}^n - \text{Id})/n, n \in \mathbb{N}$, est uniformément convergente et converge vers une fonction constante notée $\tilde{\rho}(\tilde{g})$.*

(ii) *Pour tout réel $\tilde{\theta}$ et tout entier positif n , on a:*

$$-1 < \tilde{g}^n(\theta) - \tilde{\theta} - n\tilde{\rho}(\tilde{g}) < 1.$$

(iii) *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\rho}(\tilde{g}^n) = n\tilde{\rho}(\tilde{g})$.*

(iv) *Si \tilde{g}' est une autre application croissante vérifiant $\tilde{g}'(\tilde{\theta} + 1) = \tilde{g}'(\tilde{\theta}) + 1$ pour tout réel $\tilde{\theta}$ et si $\tilde{g} \leq \tilde{g}'$, alors $\tilde{\rho}(\tilde{g}) \leq \tilde{\rho}(\tilde{g}')$.*

(v) *Si $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ et $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$ vérifient $\tilde{g}^q(\theta) = \tilde{\theta} + p$, alors $\tilde{\rho}(\tilde{g}) = p/q$.*

Démonstration. (i) On écrit $\psi_n = \tilde{g}^n - \text{Id}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Chaque ψ_n est borné et vérifie $\sup \psi_n - \inf \psi_n \leq 1$, on pose alors $M_n = \sup \psi_n$ et $m_n = \inf \psi_n$. La relation $\psi_n = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_1 \circ \tilde{g}^k$ prouve que les suites M_n/n et m_n/n sont bornées et donne les inégalités: $M_{p+q} \leq M_p + M_q, m_{p+q} \geq m_p + m_q$. Les suites M_n/n et m_n/n sont donc convergentes et puisque $0 \leq M_n - m_n \leq 1$ ont même limite, on obtient (i).

(ii) S'il existe $\tilde{\theta}_0 \in \mathbb{R}$ et $n \geq 0$ tel que

$$\tilde{g}^n(\tilde{\theta}_0) - \tilde{\theta}_0 - n\tilde{\rho}(\tilde{g}) - 1 = \eta > 0,$$

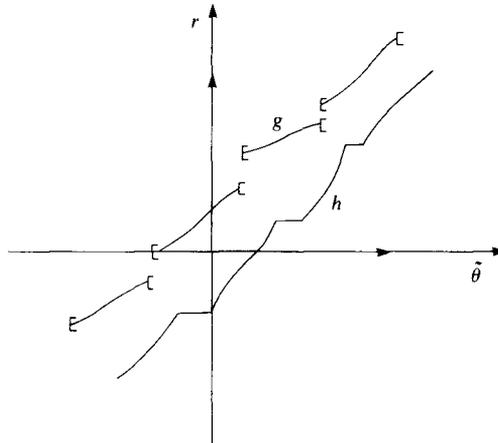
alors, pour tout $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$, on aura: $\tilde{g}^n(\tilde{\theta}) - \tilde{\theta} - n\tilde{\rho}(\tilde{g}) \geq \eta$; et pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, on aura $\tilde{g}^{mn}(\tilde{\theta}) \geq \tilde{\theta} + mn\tilde{\rho}(\tilde{g}) + m\eta$, soit:

$$\tilde{\rho}(\tilde{g}) \geq \tilde{\rho}(\tilde{g}) + \eta/n,$$

d'où la contradiction.

Les assertions (iii), (iv) et (v) sont évidentes. □

Remarque. Dans le cas qui nous intéresse (4.11), l'application \tilde{g} est de plus injective et admet un inverse à gauche \tilde{h} continu, croissant avec $\tilde{h}(\tilde{\theta} + 1) = \tilde{h}(\tilde{\theta}) + 1$, pour $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$. La théorie des homéomorphismes du cercle se transpose de la même façon (existence d'une mesure invariante, etc. . . .) au cas de \tilde{h} et permet de montrer directement la proposition 4.12.



5. Définition des nombres de rotation des attracteurs

5.1. Définition [B1]. On appelle *nombre de rotation inférieur* (resp. *supérieur*) de $\tilde{\Lambda}_i$, le nombre

$$\tilde{\rho}_i^- = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{g}_i^{-n} - \text{Id}}{n} \quad \left(\text{resp. } \tilde{\rho}_i^+ = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{g}_i^{+n} - \text{Id}}{n} \right).$$

Remarque 1. Chacun des nombres $\tilde{\rho}_0^-, \tilde{\rho}_0^+, \tilde{\rho}_1^-, \tilde{\rho}_1^+$ dépend du relèvement \tilde{f} de f et varie d'un entier si l'on change de relèvement. Ils définissent donc par projection dans \mathbb{T}^1 des éléments ne dépendant que de f , les nombres de rotation $\rho_0^-, \rho_0^+, \rho_1^-, \rho_1^+$. Par contre, la différence entre deux des nombres de rotation (réels) est indépendante du relèvement et intrinsèque à f .

Remarque 2. Puisque $\tilde{g}_0^- \geq \tilde{g}_1^- \geq \tilde{g}_1^+ \geq \tilde{g}_0^+$, la proposition prouve les inégalités: $\tilde{\rho}_0^- \leq \tilde{\rho}_1^- \leq \tilde{\rho}_1^+ \leq \tilde{\rho}_0^+$, et d'autre part, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}_i^-$ (resp. $\tilde{\Lambda}_i^+$) et tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$-1 \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^{-n}(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) + n\tilde{\rho}_i^- \leq 1 \quad (\text{resp. } -1 \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) + n\tilde{\rho}_i^+ \leq 1).$$

5.2. PROPOSITION. Pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}_i$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\begin{aligned} -1 + n\tilde{\rho}_i^- &\leq p_1 \circ \tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \leq 1 + n\tilde{\rho}_i^+ \\ -1 - n\tilde{\rho}_i^+ &\leq p_1 \circ \tilde{f}^{-n}(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \leq 1 - n\tilde{\rho}_i^- \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit pour montrer la proposition de montrer la seconde double-inegalité et de remplacer \tilde{x} par $\tilde{f}^n(\tilde{x})$ pour avoir la première.

On considère donc $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}_i$ et on définit les suites $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\tilde{x}_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{x}_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_n &= (\tilde{\theta}_n, r_n) = \tilde{f}^{-n}(\tilde{x}) \\ \tilde{x}_n^- &= (\tilde{\theta}_n, \tilde{\mu}_i^-(\tilde{\theta}_n)) \\ \tilde{x}_n^+ &= (\tilde{\theta}_n, \tilde{\mu}_i^+(\tilde{\theta}_n)). \end{aligned}$$

On en déduit, pour tout $n \geq 1$, la relation:

$$\tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^{-1}(\tilde{x}_{n-1}^+) \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^{-1}(\tilde{x}_{n-1}) \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^{-1}(\tilde{x}_{n-1}^-),$$

soit

$$\tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^{-1}(\tilde{x}_{n-1}^+) \leq \tilde{p}_1(\tilde{x}_n^+) = \tilde{p}_1(\tilde{x}_n^-) \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^{-1}(\tilde{x}_{n-1}^-).$$

En utilisant maintenant la relation $\tilde{f}^{-1}(\tilde{\Lambda}_i^-) \subset \tilde{\Lambda}_i^-$ et le fait que \tilde{f}^{-1} préserve sur $\tilde{\Lambda}_i^-$ l'ordre défini par \tilde{p}_1 , on en déduit, par une récurrence évidente, la relation:

$$\tilde{p}_1(\tilde{x}_n^-) \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^{-n}(\tilde{x}_0^-).$$

En utilisant maintenant la remarque 2 de 5.1 et le fait que

$$\tilde{p}_1(\tilde{x}_n^-) = \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^{-n}(\tilde{x}) \quad \text{et} \quad \tilde{p}_1(\tilde{x}_0^-) = \tilde{p}_1(\tilde{x}),$$

on en déduit l'inégalité

$$\tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^{-n}(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \leq 1 - n\tilde{\rho}_i^-.$$

On fait de même pour obtenir l'autre inégalité. □

5.3. On va montrer l'existence sur Λ_i d'orbites de nombre de rotation ρ_i^- (resp. ρ_i^+), c'est-à-dire de points $x \in \Lambda_i$ pour lesquels les éléments de la suite $(p_1 \circ f^k(x))_{k \in \mathbb{Z}}$ sont ordonnés comme ceux de la suite $(k\rho_i^-)_{k \in \mathbb{Z}}$ (resp. $(k\rho_i^+)_{k \in \mathbb{Z}}$). On donne d'abord les définitions suivantes:

Définition (voir Chenciner [Che]). On appelle fermé \tilde{f} -ordonné, un fermé \tilde{E} de $\tilde{\Lambda}_0$ ayant les propriétés suivantes:

- (i) $\tilde{f}(\tilde{E}) = \tilde{E}$; $\tilde{T}(\tilde{E}) = \tilde{E}$ (voir 1.1 pour les notations);
- (ii) la restriction de \tilde{p}_1 à \tilde{E} est injective;
- (iii) si $\tilde{x}, \tilde{x}' \in \tilde{E}$ vérifient $\tilde{p}_1(\tilde{x}) < \tilde{p}_1(\tilde{x}')$, alors $\tilde{p}_1(\tilde{f}(\tilde{x})) < \tilde{p}_1(\tilde{f}(\tilde{x}'))$.

Définition (voir Chenciner [Che]). On appelle ensemble d'Aubry-Mather un fermé E invariant minimal (toute orbite $(f^k(x))_{k \in \mathbb{Z}}$ où $x \in E$ est dense dans E) dont la préimage \tilde{E} est un fermé \tilde{f} -ordonné.

Remarque. Si E est un ensemble d'Aubry-Mather, il existe un unique réel ρ tel que, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{E}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on ait:

$$-1 < \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^k(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) - k\tilde{\rho} < +1.$$

Ce réel est appelé le nombre de rotation de l'ensemble d'Aubry-Mather E .

5.4. PROPOSITION. Il existe dans Λ_i^- (resp. Λ_i^+) un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation ρ_i^- (resp. ρ_i^+).

Démonstration. Soit $x \in \Lambda_i^-$, l'ensemble α -limite $\alpha^-(x)$ est un compact invariant par f et, d'après 4.7, contenu dans Λ_i^- . Mais puisque $f^{-1}(\Lambda_i^-) \subset \Lambda_i^-$ (cf. 4.9), il est contenu dans Λ_i^- . L'ensemble $\tilde{\alpha}^-(x) = \pi^{-1}(\alpha^-(x))$ est donc un fermé \tilde{f} -ordonné.

La projection p_1 définit un homéomorphisme entre $\alpha(x)$ et un compact $K(x)$ de \mathbb{T}^1 . L'application \tilde{g}_i^- induit alors sur $\tilde{K}(x) = \pi^{-1}(K(x))$ une bijection croissante que l'on peut par interpolation linéaire prolonger en un homéomorphisme \tilde{g} de \mathbb{R} relevant un homéomorphisme g de \mathbb{T}^1 . Le nombre de rotation (voir 1.7) de g est alors égal à $-\tilde{\rho}_i^-$ puisque \tilde{g} et \tilde{g}_i^- coïncident sur $\tilde{K}(x)$. D'autre part, $K(x)$ est l'ensemble ω -limite de $p_1(x)$ par g et il est donc minimal pour g (voir 1.7). On en déduit que $\alpha(x)$ est minimal pour f , c'est un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation $\tilde{\rho}_i^-$. □

5.5. *Etude du cas $\tilde{\rho}_i^- = p/q$ (ou $\tilde{\rho}_i^+ = p/q$), $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.* Dans ce cas, $\alpha(x)$ est une orbite q -périodique (voir 1.7) mais qui peut dépendre de x . De plus, si x n'appartient pas à $\alpha(x)$ (ce qui correspond au cas où x n'est pas lui-même périodique), cet ensemble est une orbite non attractive, ainsi la dérivée Df^q possède en tout point de $\alpha(x)$ une valeur propre de module supérieur ou égal à 1.

5.6. *Etude du cas $\tilde{\rho}_i^- \notin \mathbb{Q}$ (ou $\tilde{\rho}_i^+ \notin \mathbb{Q}$).* Dans ce cas, $\alpha(x)$ est indépendant de x . En effet, si $y \in \tilde{\Lambda}_i^-$, l'ensemble $\tilde{\alpha}(x) \cup \tilde{\alpha}(y)$ est un fermé \tilde{f} -ordonné et on peut construire un homéomorphisme g de \mathbb{T}^1 dont un relèvement \tilde{g} coïncide avec \tilde{g}_i^- sur $\tilde{K}(x) \cup \tilde{K}(y)$. Le nombre de rotation de \tilde{g} est alors égal à $\tilde{\rho}_i^-$ et puisque $\tilde{\rho}_i^- \notin \mathbb{Q}$, les ensembles ω -limites de $p_1(x)$ et $p_1(y)$ pour g coïncident. On a donc $\alpha(x) = \alpha(y)$. On écrit alors $\alpha(x) = \Omega_i^-$ et on obtient deux cas (voir 1.7):

Ω_i^- est le graphe d'une application continue définie sur \mathbb{T}^1 ;

Ω_i^- est un ensemble de Cantor.

Dans les deux cas, toute orbite de Ω_i^- est une orbite de nombre de rotation $\tilde{\rho}_i^-$.

Remarque. Dans le cas où Ω_i^- est le graphe d'une application continue du tore, il sépare C en deux ouverts contenant respectivement U_0 et V_0 . Par conséquent, les points de $\tilde{U}_0 \cap \tilde{V}_0$ sont tous sur Ω_i^- et comme $\Lambda_1 = \tilde{U}_0 \cap \tilde{V}_0$ disconnecte C , on en déduit l'égalité: $\Lambda_1 = \Omega_i^-$. En particulier dans ce cas, $\tilde{\rho}_i^- = \tilde{\rho}_i^+ = \tilde{\rho}_i^-$. Plus généralement, si Λ_0 contient une courbe de Jordan, cette courbe est Λ_1 , mais peut être distincte de Λ_0 ; on peut avoir dans Λ_0 un graphe invariant de nombre de rotation irrationnel, et, au-dessus ou en-dessous du graphe, un point périodique.

5.7. PROPOSITION. *Si E est un ensemble d'Aubry-Mather de f , son nombre de rotation est contenu dans l'intervalle $[\tilde{\rho}_0^-, \tilde{\rho}_0^+]$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'inclusion $E \subset \Lambda_0$, la définition du nombre de rotation de E (5.3) et la proposition 5.2. □

5.8. PROPOSITION. *Si deux des nombres $\tilde{\rho}_0^-$, $\tilde{\rho}_1^-$, $\tilde{\rho}_1^+$ et $\tilde{\rho}_0^+$ sont égaux et irrationnels, les ensembles d'Aubry-Mather correspondants sont égaux.*

Démonstration. On peut montrer que deux homéomorphismes de \mathbb{T}^1 de même nombre de rotation irrationnel ont des graphes qui se rencontrent (voir Herman [He1]); la démonstration qui suit est du même type.

On envisage le cas $\tilde{\rho}_0^- = \tilde{\rho}_1^- \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, la démonstration étant la même dans le cas d'égalité de deux des autres nombres. On va supposer $\Omega_0^- \neq \Omega_1^-$ et on va montrer une contradiction. Puisque $\Omega_0^- \neq \Omega_1^-$, alors d'après 5.6, $\Lambda_0^- \cap \Lambda_1^- = \emptyset$; on en déduit $f(\Lambda_0^-) \cap f(\Lambda_1^-) = \emptyset$, et par 4.9, $\tilde{\Lambda}_0^- \cap \tilde{\Lambda}_1^- = \emptyset$. Il existe donc un réel $l > 0$ tel que, pour

tout $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{g}_1^-(\tilde{\theta}) \leq g_0^-(\tilde{\theta}) - l.$$

Soit $\tilde{\theta}_0$ un réel choisi de la façon suivante: si $p_1(\Omega_1^-) = \mathbb{T}^1$, $\tilde{\theta}_0$ est quelconque, si Ω_1^- est un ensemble de Cantor, $\tilde{\theta}_0$ est un point de $\tilde{K}_1^- = \tilde{p}_1(\tilde{\Omega}_1^-)$ qui n'est pas l'extrémité d'un intervalle de $\mathbb{R} \setminus \tilde{K}_1^-$. Puisque Ω_1^- est minimal, il existe deux entiers $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ tels que:

$$\tilde{\theta}_0 + p - l < \tilde{g}_1^{-q}(\tilde{\theta}_0) < \tilde{\theta}_0 + p.$$

Soit $l' = \tilde{\theta}_0 + p - \tilde{g}_1^{-q}(\tilde{\theta}_0)$, les relations $l' < l$, $\tilde{\rho}(\tilde{g}_1^{-q}) \leq \tilde{\rho}(\tilde{g}_1^{-q} + l')$, $\tilde{\rho}(\tilde{g}_1^{-q}) \notin \mathbb{Q}$ et $\tilde{\rho}(\tilde{g}_1^{-q} - l') = p$ prouvent alors:

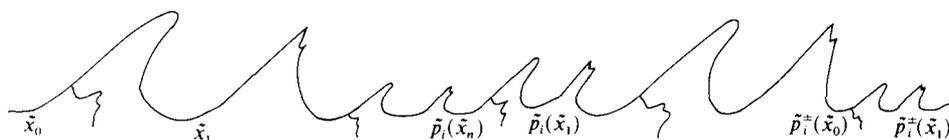
$$\tilde{\rho}(\tilde{g}_1^{-q}) < \tilde{\rho}(\tilde{g}_1^{-q} + l') \leq \tilde{\rho}(\tilde{g}_1^{-q} + l) \leq \tilde{\rho}((\tilde{g}_1^{-1} + l)^q) \leq \tilde{\rho}(\tilde{g}_0^{-q})$$

et une contradiction. □

5.9. *Remarque.* On suppose $\tilde{\rho}_1^- \notin \mathbb{Q}$ et on s'intéresse à $\tilde{\rho}_0^-$.

Si $\tilde{\rho}_0^- \neq \tilde{\rho}_1^-$, il n'y a pas de point de Λ_1 qui soit radialement accessible par U_0 . Il y a alors beaucoup de points dans Λ_0 qui ne sont pas adhérents à V_0 , l'ensemble Λ_0 semble beaucoup plus grand que Λ_1 .

Si $\tilde{\rho}_0^- = \tilde{\rho}_1^-$, alors on a $\Omega_0^- = \Omega_1^-$. Si Ω_1^- est un graphe, alors $U_0 = U_1$ et cet ouvert est délimité par deux graphes C^- et Ω_0^- . Dans le second cas, Ω_1^- est un ensemble de Cantor formé de points de Λ_1 radialement accessibles. Il peut y avoir des queues intérieures, c'est-à-dire des points de Λ_0 qui ne soient pas adhérents à V_0 , mais puisque deux points de Ω_1^- correspondants à des extrémités du même intervalle de $\mathbb{T}^1 \setminus p_1(\Omega_0^-)$ ont des orbites qui se rapprochent dans le futur et dans le passé, les images par f^n et par f^{-n} de ces queues deviennent de plus en plus petites (leur distance à Λ_1 tend vers zéro) quand n tend vers $+\infty$ et ceci à cause de 4.8.



5.10. **PROPOSITION.** Si $\tilde{\rho}_i^- = \tilde{\rho}_i^+ \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors la restriction de f à Λ_i est semi-conjuguée topologiquement à la rotation de nombre ρ_i^- .

Démonstration. Dans le cas où $\Omega_i^- = \Omega_i^+$ est un graphe, on a l'égalité $\Lambda_i = \Omega_i^-$ et la proposition est une conséquence de la théorie des homéomorphismes du cercle, on a d'ailleurs une conjugaison à la rotation de nombre ρ_i^- (voir [He1]).

Dans le cas où $\Omega_i^- = \Omega_i^+$ est un ensemble de Cantor, les applications g_i^- et g_i^+ coïncident sur $p_1(\Omega_i^-)$; on prolonge par interpolation linéaire cette application en un homéomorphisme g de \mathbb{T}^1 .

On sait alors qu'il existe une application $h: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ telle que $h \circ g^{-1} = R_{\rho_i^-} \circ h$ où $R_{\rho_i^-}: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$, $x \rightarrow x + \rho_i^-$, et cette application est constante sur chaque intervalle de $\mathbb{T}^1 \setminus p_1(\Omega_i^-)$. On en déduit, si f_i est la restriction de f à Λ_i , la relation:

$$h \circ p \circ f_i = R_{\rho_i^-} \circ h \circ p,$$

ce qui prouve la proposition. □

6. Une autre interprétation des nombres de rotation

Les nombres ρ_i^- et ρ_i^+ , $i = 0, 1$, ont été définis en utilisant les propriétés des points radialement accessibles, propriétés dues pour la plupart au fait que f dévie la verticale à droite. En fait, ces nombres ont une interprétation en termes de bouts premiers (voir Markushevitch [Ma, p. 52-77]) utilisant l'invariance de Λ_i par f , la sous-invariance des composantes connexes de $C \setminus \Lambda$ à savoir $f(U_i) \subset U_i, f(V_i) \subset V_i$ et le fait que f induise un homéomorphisme entre deux voisinages de Λ_i . On n'exposera pas ici la théorie des bouts premiers, mais on donnera une interprétation de ρ_1^- et de ρ_1^+ (la méthode ne marchera pas pour ρ_0^- et ρ_0^+) en termes de points accessibles (voir 6.2).

On rappelle d'abord au début de ce paragraphe quelques définitions et quelques résultats sur les applications conformes.

6.1. Définitions. On appelle *chemin* (resp. *chemin semi-ouvert*) dans un espace topologique X , une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ (resp. $\gamma :]0, 1[\rightarrow X$).

On appelle *image d'un chemin* (resp. *chemin semi-ouvert*) l'ensemble $\gamma([0, 1])$ (resp. $\gamma(]0, 1[)$).

Un chemin (resp. chemin semi-ouvert) injectif est appelé *un arc* (resp. *arc semi-ouvert*).

Si γ est un chemin ou un chemin semi-ouvert, si $Y \subset X$, si $\gamma(0) \in Y$ et si, pour tout t non nul, $\gamma(t) \notin Y$, on dit que γ est issu de Y .

Si γ est un chemin semi-ouvert et si $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = x$ existe, on dit que γ atteint le point x , ou aboutit en x . (Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on parlera aussi plus simplement de chemin pour désigner un chemin semi-ouvert).

Dans tout ce paragraphe 6, la sphère S^2 est munie de sa structure complexe de sphère de Riemann et l'ensemble $A \setminus$ est muni de la structure complexe induite par l'application:

$$\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^2 \quad (\theta, r) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \cos 2\pi\theta, \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \sin 2\pi\theta, \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \right).$$

6.2. RAPPEL. Si γ est un chemin dans un espace topologique X et si $\gamma(0) \neq \gamma(1)$, on peut trouver un arc γ^* vérifiant: $\gamma^*(0) = \gamma(0), \gamma^*(1) = \gamma(1), \gamma^*([0, 1]) \subset \gamma([0, 1])$.

Démonstration. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin vérifiant $\gamma(0) \neq \gamma(1)$. On définit pour $\varepsilon \in]0, 1[$ l'ensemble F_ε suivant: $F_\varepsilon = \{t \in [0, 1] \text{ tel qu'il existe } t' \in [0, 1] \text{ vérifiant: } t' \geq t + \varepsilon, \gamma(t') = \gamma(t)\}$. Si $F_\varepsilon = \emptyset$, on pose $\gamma_\varepsilon = \gamma$, sinon on note $t_0 = \inf F_\varepsilon, t'_0 = \sup \{t \in [0, 1] | t \geq t_0 + \varepsilon, \gamma(t) = \gamma(t_0)\}$ et γ^1 le chemin égal à γ sur $[0, t_0] \cup [t'_0, 1]$ et constant égal à $\gamma(t_0)$ sur $[t_0, t'_0]$. Si $F_\varepsilon \setminus [t_0, t'_0] = \emptyset$, on pose $\gamma_\varepsilon = \gamma^1$, sinon on note $t_1 = \inf F_\varepsilon \setminus [t_0, t'_0], t'_1 = \sup \{t \in [0, 1] | t \geq t_1 + \varepsilon, \gamma(t) = \gamma(t_1)\}$ et γ^2 le chemin égal à γ^1 sur $[0, t_1] \cup [t'_1, 1]$ et constant égal à $\gamma^1(t_1)$ sur $[t_1, t'_1]$. On continue cette construction et, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}, t_{n+1} \geq t'_n \geq t_n + \varepsilon$, au bout d'un nombre fini d'opérations, on a $F_\varepsilon \setminus [t_n, t'_n] = \emptyset$, et on pose alors $\gamma_\varepsilon = \gamma^n$.

Ce chemin γ_ε vérifie: $\gamma_\varepsilon(0) = \gamma(0), \gamma_\varepsilon(1) = \gamma(1), \gamma_\varepsilon([0, 1]) \subset \gamma([0, 1])$, et si $t' \geq t + \varepsilon$ vérifie $\gamma_\varepsilon(t') = \gamma_\varepsilon(t)$, alors pour tout $t'' \in [t, t']$, $\gamma_\varepsilon(t'') = \gamma_\varepsilon(t)$.

On considère alors la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante: $\gamma_0 = \gamma, \gamma_{n+1} = (\gamma_n)_{1/2^{n+1}}$.

Puisque $[0, 1]$ est compact, cette suite converge uniformément sur $[0, 1]$ vers un chemin γ^{**} vérifiant: $\gamma^{**}(0) = \gamma(0)$, $\gamma^{**}(1) = \gamma(1)$, $\gamma^{**}([0, 1]) \subset \gamma([0, 1])$, et si $t' > t$ vérifie $\gamma^{**}(t) = \gamma^{**}(t')$, alors pour tout $t'' \in [t, t']$, $\gamma^{**}(t'') = \gamma^{**}(t)$.

Il existe donc une application $\xi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue et croissante, telle que, pour tout $t \in [0, 1]$ et $t' \in [0, 1]$, on ait l'équivalence

$$\xi(t) = \xi(t') \iff \gamma^{**}(t) = \gamma^{**}(t').$$

On peut alors écrire $\gamma^{**} = \gamma^* \circ \xi$ où γ^* est un arc vérifiant:

$$\gamma^*(0) = \gamma(0), \quad \gamma^*(1) = \gamma(1), \quad \gamma^*([0, 1]) \subset \gamma([0, 1]). \quad \square$$

6.3. Définition. Un point $x \in \Lambda_1$ est dit *accessible par le bas* (resp. *par le haut*) si on peut l'atteindre par un chemin à valeur dans U_1 (resp. dans V_1). On note alors Δ_1^- (resp. Δ_1^+) l'ensemble des points de Λ_1 accessibles par le bas (resp. par le haut).

Remarques. (i) Les ensembles Δ_1^- et Δ_1^+ sont invariants par f ; on note $f|_{\Delta_1^-}$ et $f|_{\Delta_1^+}$ la restriction de f à chacun de ces ensembles.

(ii) On a les inclusions: $\Lambda_1^- \subset \Delta_1^-$, $\Lambda_1^+ \subset \Delta_1^+$;

(iii) On peut définir $\hat{\Delta}_1^- = \pi^{-1}(\Delta_1^-)$ et $\hat{\Delta}_1^+ = \pi^{-1}(\Delta_1^+)$ ensembles des points atteints par des chemins respectivement dans \hat{U}_1 et dans \hat{V}_1 .

(iv) Tout point de Δ_1^- (resp. de Δ_1^+) est atteint par un arc à valeur dans U_1 (resp. dans V_1) (voir 6.2).

6.4. Rappels sur les applications conformes (voir Markushevitch [Ma, pp. 52-57]).

(i) Si U est un ouvert simplement connexe, qui n'est ni S^2 , ni S^2 privé d'un point, on peut trouver un difféomorphisme \mathbb{C} -analytique $\varphi: U \rightarrow \mathbb{D}$;

(ii) Sous les conditions précédentes, si γ est un arc dans U atteignant un point de $\text{Fr } U$, alors $\varphi \circ \gamma$ atteint un point de S^1 . Ce point de S^1 dépend de l'arc et non pas seulement du point de $\text{Fr } U$ atteint.

(iii) Si γ_1 et γ_2 sont deux arcs dans U atteignant deux points distincts de $\text{Fr } U$, alors $\varphi \circ \gamma_1$ et $\varphi \circ \gamma_2$ atteignent deux points distincts de S^1 .

(iv) Si γ_1 et γ_2 sont deux arcs dans U atteignant le même point x de $\text{Fr } U$, et si les images de γ_1 et de γ_2 s'intersectent dans tout voisinage de x (i.e. si les ensembles $\gamma_1(]t, 1[)$ et $\gamma_2(]t, 1[)$ ne sont jamais disjoints pour $t \in [0, 1[)$, alors $\varphi \circ \gamma_1$ et $\varphi \circ \gamma_2$ atteignent le même point de S^1 .

En conséquence, si γ_1 et γ_2 sont deux arcs dans U atteignant le même point x de $\text{Fr } U$ et si l'on peut trouver un arc γ_3 dans U atteignant x et dont l'image rencontre celles de γ_1 et de γ_2 dans tout voisinage de x , alors $\varphi \circ \gamma_1$ et $\varphi \circ \gamma_2$ atteignent le même point de S^1 .

(v) L'ensemble des points de $\text{Fr } U$ atteints par un arc dans U est dense dans $\text{Fr } U$.

(vi) L'ensemble des points de S^1 atteints par un arc de la forme $\varphi \circ \gamma$ où γ est un arc atteignant un point de $\text{Fr } U$ est dense dans S^1 .

6.5. On expose ici l'autre définition de $\tilde{\rho}_1^-$; la méthode convient aussi à $\tilde{\rho}_1^+$. La démonstration des points délicats suit cette exposition. On se place dans S^2 , les points de Δ_1^- sont alors les points de $\text{Fr } \hat{U}_1$ atteints par un arc dans \hat{U}_1 (voir 2.4).

Soit $\varphi: \hat{U}_1 \rightarrow \mathbb{D}$ (voir en 1.1 la définition de \mathbb{D}) difféomorphisme \mathbb{C} -analytique. Soient γ_1 et γ_2 deux arcs dans \hat{U}_1 atteignant le même point x de Δ_1^- . Du fait que

Λ_1 est frontière commune de \hat{U}_1 et \hat{V}_1 , on peut montrer (voir 6.6) que les arcs $\varphi \circ \gamma_1$ et $\varphi \circ \gamma_2$ atteignent le même point. On obtient alors une bijection φ^* entre Δ_1^- et une partie dense Σ de S^1 , en associant à tout point de $x \in \Delta_1^-$ le point $\varphi^*(x)$ atteint par l'arc $\varphi \circ \gamma$, où γ est un arc dans \hat{U}_1 quelconque atteignant x . L'application $F_\varphi = \varphi^* \circ f|_{\Delta_1^-} \circ \varphi^{*-1}$ est alors une bijection de Σ et cette bijection conserve l'ordre (voir 6.6). Elle se prolonge donc en un homéomorphisme de S^1 puisque Σ est dense.

Si $\hat{\varphi}: \hat{U}_1 \rightarrow \mathbb{D}$ est un autre difféomorphisme \mathbb{C} -analytique, on définit de même, $\hat{\Sigma}$, $\hat{\varphi}^*$ et $F_{\hat{\varphi}}$. L'application $\hat{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ se prolonge sur $\bar{\mathbb{D}}$ en un homéomorphisme qui envoie Σ sur $\hat{\Sigma}$. Les applications $F_{\hat{\varphi}}$ et F_φ sont alors conjuguées par la restriction à S^1 de cet homéomorphisme.

Cette classe de conjugaison nous définit alors un nombre de rotation (voir 1.7) dans \mathbb{T}^1 intrinsèque à f . Si l'on montre (voir 6.7) que l'ordre des points de Λ_1^- donné par leur première projection coïncide avec l'ordre de leurs images par φ^* , on en déduit, utilisant une orbite dans Λ_1^- de nombre de rotation ρ_1^- , que le nombre défini précédemment est en fait ρ_1^- .

6.6. PROPOSITION. *Si γ_1 et γ_2 sont deux arcs continus simples dans \hat{U}_1 atteignant le même point x de Λ_1 , il existe un arc continu simple γ_3 dont l'image rencontre les images de γ_1 et de γ_2 dans tout voisinage de x .*

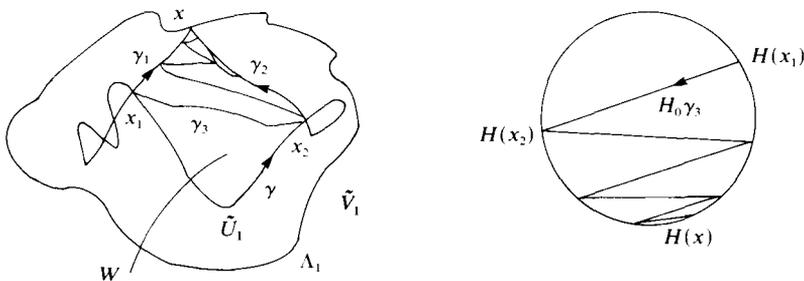
Démonstration. On suppose qu'il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $\gamma_1([t_0, 1[) \cap \gamma_2([t_0, 1[) = \emptyset$ (dans le cas contraire, le chemin $\gamma_3 = \gamma_1$ vérifie la proposition).

On considère un arc γ à valeur dans \hat{U}_1 joignant $\gamma_1(t_0)$ à $\gamma_2(t_0)$. Si on définit

$$\begin{aligned} t_1 &= \sup \{t \in [t_0, 1[\mid \gamma_1(t) \in \gamma([0, 1])\}; \\ t_2 &= \sup \{t \in [t_0, 1[\mid \gamma_2(t) \in \gamma([0, 1])\}; \\ x_1 &= \gamma_1(t_1) \quad \text{et} \quad x_2 = \gamma_2(t_2), \end{aligned}$$

on obtient une courbe de Jordan en prenant la réunion de $\{x\}$, $\gamma_1([t_1, 1[)$, $\gamma_2([t_2, 1[)$ et la partie de γ joignant x_1 à x_2 . Celle-ci ne rencontre pas \hat{V}_1 et donc l'une des composantes connexes de son complémentaire, notée W , ne rencontre pas \hat{V}_1 . Comme $\Lambda_1 = \text{Fr } \hat{V}_1$, l'ouvert W ne rencontre pas Λ_1 , et on a finalement l'inclusion $W \subset \hat{U}_1$.

La proposition est alors évidente, on considère un difféomorphisme \mathbb{C} -analytique entre W et \mathbb{D} , il se prolonge en un homéomorphisme $H: \bar{W} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$ qui envoie les ensembles $\gamma_1([t_1, 1[)$ et $\gamma_2([t_2, 1[)$ sur deux arcs semi-ouverts de S^1 entourant l'image de x . Pour construire γ_3 , on prend par exemple l'image par H^{-1} de l'arc de $\bar{\mathbb{D}}$ dessiné ci-dessous:



6.7. On pourrait montrer directement, sans beaucoup de difficultés, que $\varphi^* \circ f|_{\Delta_1} \circ \varphi^{*-1}$ (voir 6.5) préserve l'ordre sur Σ et que l'ordre des points radialement accessibles coïncide avec l'ordre de leurs images dans Σ , mais on va le montrer en fait à partir du paragraphe 6.9 dans le revêtement universel où les résultats sont plus visuels.

6.8. *Remarque.* La proposition 6.6 est fautive pour Λ_0 car les ensembles \hat{U}_0 et $S^2 \setminus \hat{V}_0$ peuvent être distincts. Il faudrait alors pour continuer le raisonnement, distinguer les chemins qui aboutissent au même point et utiliser la théorie des bouts premiers.

6.9. On peut définir sur \mathbb{A} deux structures complexes, celle induite pour la structure complexe de S^2 (que l'on considère en 6.5) et la structure complexe quotient $\mathbb{A} = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} = \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. On sait alors qu'il existe un difféomorphisme \mathbb{C} -analytique entre $U_1 \setminus C^-$ muni de la première structure et l'anneau $\mathbb{T}^1 \times]0, R[\subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}$, où $R > 0$ est unique, et ne dépend que de $U_1 \setminus C^-$.

On obtient alors par prolongement, puis par identification des deux variétés analytiques et de leurs espaces topologiques associés, un homéomorphisme φ entre les deux parties U_1 et $\mathbb{T}^1 \times]0, R[$ de \mathbb{A} , envoyant C^- sur $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ et préservant l'orientation (voir Nehari [Ne]).

Si $\hat{\varphi}$ est un difféomorphisme \mathbb{C} -analytique entre $\hat{U}_1 \subset S^2$ et \mathbb{D} , l'image de C^- par $\hat{\varphi}$ est une courbe de Jordan. L'application $\hat{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ définit par prolongement un homéomorphisme entre $\mathbb{T}^1 \times]0, R[$ et l'anneau fermé de \mathbb{D} délimité par S^1 et $\hat{\varphi}(C^-)$. On a alors les résultats suivants qui se déduisent de 6.4 et de 6.6:

Si γ est un arc dans U_1 atteignant un point de Λ_1 , alors $\varphi \circ \gamma$ atteint un point de $\mathbb{T}^1 \times \{R\}$.

Si γ_1 et γ_2 sont deux arcs dans U_1 atteignant le même point de Λ_1 , alors $\varphi \circ \gamma_1$ et $\varphi \circ \gamma_2$ atteignent le même point.

On peut définir une bijection φ^* entre Δ_1^- et un ensemble $\Sigma \subset \mathbb{T}^1 \times \{R\}$, dense dans $\mathbb{T}^1 \times \{R\}$, en associant à $x \in \Delta_1^-$ le point atteint par $\varphi \circ \gamma$ (où γ est un arc dans U_1 quelconque atteignant x).

6.10. On choisit un homéomorphisme $\tilde{\varphi}: \tilde{U}_1 \rightarrow \mathbb{R} \times]0, R[$ relevant φ , et on va définir $\tilde{\varphi}^*: \tilde{\Delta}_1^- \rightarrow \tilde{\Sigma}$ ($\tilde{\Sigma} = \pi^{-1}(\Sigma)$) de la façon suivante:

Si $\tilde{x} \in \tilde{\Delta}_1^-$ et si $\tilde{\gamma}$ est un arc dans \tilde{U}_1 atteignant \tilde{x} , le chemin $\pi \circ \tilde{\gamma}$ atteint le point $x = \pi(\tilde{x})$. Il est injectif sur un intervalle de la forme $[t, 1[$ et le chemin $\varphi \circ \pi \circ \tilde{\gamma} = \pi \circ \tilde{\varphi} \circ \tilde{\gamma}$ atteint par conséquent le point $y = \varphi^*(x)$. Le chemin $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\gamma}$ atteint donc un point $\tilde{y} \in \mathbb{R} \times \{R\}$, où $y = \pi(\tilde{y})$. Le point \tilde{y} obtenu ne dépend pas de l'arc $\tilde{\gamma}$ choisi et on construit ainsi une bijection $\tilde{\varphi}^*: \tilde{\Delta}_1^- \rightarrow \tilde{\Sigma}$ vérifiant:

$$\begin{aligned} \pi \circ \tilde{\varphi} &= \varphi \circ \pi \\ \tilde{\varphi} \circ \tilde{T} &= \tilde{T} \circ \tilde{\varphi} \quad (\text{voir 1.1 pour la définition de } \tilde{T}). \end{aligned}$$

6.11. *Définition.* On définit un ordre \leq sur $\tilde{\Delta}_1^-$ par la relation: \leq .

$$\tilde{x}_1 \leq \tilde{x}_2 \iff \tilde{p}_1 \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}_1) \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}_2), \quad \text{où } \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{\Delta}_1^-.$$

On écrit alors: $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2$ si $\tilde{x}_1 \leq \tilde{x}_2$ et $\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_2$.

6.12. PROPOSITION. Deux points distincts \tilde{x}_1 et \tilde{x}_2 de $\tilde{\Delta}_1^-$ vérifient $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2$ si et seulement si il existe deux arcs $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ dans \tilde{U}_1 , issus de \tilde{C}^- , atteignant respectivement \tilde{x}_1 et \tilde{x}_2 , d'images disjointes et avec $\tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}_1(0) < \tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}_2(0)$.

Démonstration. Si de tels arcs existent, leurs images $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\gamma}_2$ sont alors deux arcs de $\mathbb{R} \times [0, R[$ issus de $\mathbb{R} \times \{0\}$, d'images disjointes et avec

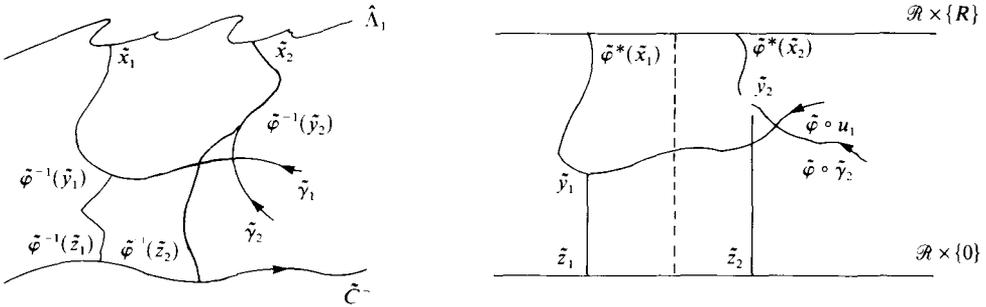
$$\tilde{p}_1 \circ \tilde{\varphi}' \circ \tilde{\gamma}_1(0) < \tilde{p}_1 \circ \tilde{\varphi}' \circ \tilde{\gamma}_2(0).$$

On en déduit: $\tilde{p}_1 \circ \tilde{\varphi}'(\tilde{x}_1) < \tilde{p}_1 \circ \tilde{\varphi}'(\tilde{x}_2)$, soit $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2$.

Réciproquement, si $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2$ et si $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ sont deux arcs atteignant \tilde{x}_1 et \tilde{x}_2 , les arcs $\tilde{\varphi}' \circ \tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\varphi}' \circ \tilde{\gamma}_2$ atteignent respectivement $\tilde{\varphi}'(\tilde{x}_1)$ et $\tilde{\varphi}'(\tilde{x}_2)$, et pour t assez proche de 1, on a:

$$\tilde{p}_1 \circ \tilde{\varphi}' \circ \tilde{\gamma}_1(t) < \frac{\tilde{p}_1 \circ \tilde{\varphi}'(\tilde{x}_1) + \tilde{p}_1 \circ \tilde{\varphi}'(\tilde{x}_2)}{2} < \tilde{p}_1 \circ \tilde{\varphi}' \circ \tilde{\gamma}_2(t).$$

On construit alors aisément deux arcs $\tilde{\gamma}'_1$ et $\tilde{\gamma}'_2$ qui vérifient les propriétés demandées dans la proposition et dont les images coïncident avec celles de $\tilde{\gamma}_1$ et de $\tilde{\gamma}_2$ dans des voisinages de \tilde{x}_1 et de \tilde{x}_2 . □



Remarque. La proposition 6.12 exprime en fait que l'ordre \leq défini en 6.11 ne fait intervenir φ qu'indirectement et a une interprétation intrinsèque à Λ_1 .

6.13. PROPOSITION. (a) Si $\tilde{x}_1 \in \tilde{\Delta}_1^-$ est atteint par un arc $\tilde{\gamma}_1$ dans \tilde{U}_1 , issu de \tilde{C}^- et si $\tilde{x}_2 \in \tilde{\Delta}_1^-$ vérifie $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2$, on peut construire un arc $\tilde{\gamma}_2$ dans \tilde{U}_1 , issu de \tilde{C}^- , atteignant \tilde{x}_2 , dont l'image est disjointe de celle de $\tilde{\gamma}_1$ et vérifiant: $\tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}_1(0) < \tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}_2(0)$.

(b) Si $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{\Delta}_1^-$ avec $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2$ sont atteints par deux arcs $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ vérifiant la proposition 6.12, et si $\tilde{x}_3 \in \tilde{\Delta}_1^-$ vérifie $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_3 < \tilde{x}_2$, on peut construire un arc $\tilde{\gamma}_3$ dans \tilde{U}_1 , issu de \tilde{C}^- atteignant \tilde{x}_3 , dont l'image est disjointe de celle de $\tilde{\gamma}_1$ et de $\tilde{\gamma}_2$ et vérifiant:

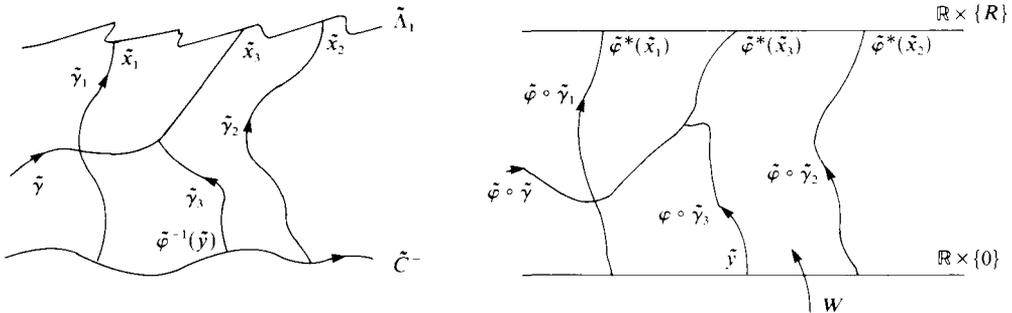
$$\tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}_1(0) < \tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}_3(0) < \tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}_2(0).$$

Démonstration. L'assertion (a) est une conséquence de (b). On considère \tilde{x}_1 et un itéré $\tilde{T}^n(x_1)$ tel que $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < \tilde{T}^n(\tilde{x}_1)$ et tel que $\tilde{T}^n(\tilde{\gamma}_1([0, 1])) \cap \tilde{\gamma}_1([0, 1]) = \emptyset$; on va donc montrer l'assertion (b).

On considère deux points $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{\Delta}_1^-$ et deux arcs $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ vérifiant les hypothèses de la proposition et on définit une courbe de Jordan dans $\mathbb{R} \times [0, R]$ en prenant la réunion de $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\gamma}_1([0, 1[)$, de $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\gamma}_2([0, 1[)$ et des segments $[\tilde{\varphi}^*(\tilde{x}_1), \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}_2)]$ et $[\tilde{\varphi} \circ \tilde{\gamma}_1(0), \tilde{\varphi} \circ \tilde{\gamma}_2(0)]$.

Si $\tilde{y} \in]\tilde{\varphi}^*(\tilde{x}_1), \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}_2)[$, les points de $\mathbb{R} \times [0, R[$ proches de \tilde{y} sont dans la composante intérieure W de cette courbe de Jordan, par conséquent si $\tilde{x}_3 \in \tilde{\Delta}_1^-$ vérifie $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_3 < \tilde{x}_2$ et si $\tilde{\gamma}$ est un arc dans \tilde{U}_1 atteignant \tilde{x}_3 , l'arc $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\gamma}$ qui atteint $\tilde{\varphi}^*(\tilde{x}_3)$ est en fait dans un voisinage de ce point à valeur dans W .

Si on choisit $\tilde{y} \in]\tilde{\varphi} \circ \tilde{\gamma}_1(0), \tilde{\varphi} \circ \tilde{\gamma}_2(0)[$, on peut construire un arc $\tilde{\Gamma}_3$ issu de \tilde{y} atteignant $\tilde{\varphi}^*(\tilde{x}_3)$, à valeur dans W sauf à l'origine et dont l'image coïncide avec celle de $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\gamma}$ dans un voisinage de $\tilde{\varphi}(\tilde{x}_3)$. L'arc $\tilde{\gamma}_3 = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\Gamma}_3$ convient alors. □



6.14. PROPOSITION. Si \tilde{x}_1 et \tilde{x}_2 sont deux points de $\tilde{\Lambda}_1^-$, alors:

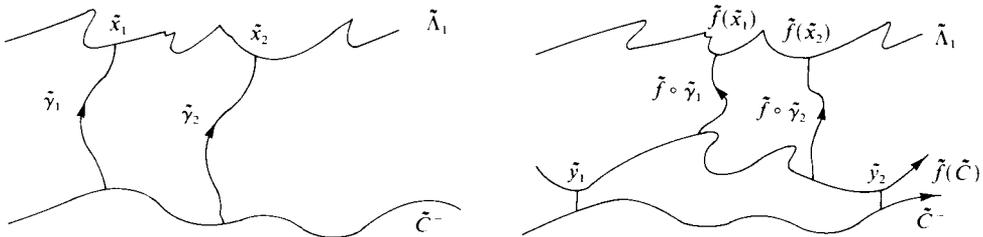
$$\tilde{x}_1 \leq \tilde{x}_2 \Leftrightarrow \tilde{p}_1(\tilde{x}_1) \leq \tilde{p}_1(\tilde{x}_2).$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 6.12. □

6.15. PROPOSITION. La fonction \tilde{f} est croissante sur $\tilde{\Delta}_1^-$ pour l'ordre \leq .

Démonstration. On suppose $\tilde{x}_1 \in \tilde{\Delta}_1^-, \tilde{x}_2 \in \tilde{\Delta}_2^-$ et $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2$.

Soient $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ deux arcs définis par la proposition 6.11. Puisque $\tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}_1(0) < \tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}_2(0)$, le point $\tilde{f} \circ \tilde{\gamma}_1(0)$ se trouve avant $\tilde{f} \circ \tilde{\gamma}_2(0)$ sur le chemin orienté $\tilde{f}(\tilde{C}^-)$, et en considérant deux points \tilde{y}_1 et \tilde{y}_2 de $\tilde{f}(\tilde{C}^-)$ d'ordonnée minimale, \tilde{y}_1 avant $\tilde{f} \circ \tilde{\gamma}_1(0)$, \tilde{y}_2 après $\tilde{f} \circ \tilde{\gamma}_2(0)$, on construit aisément deux arcs continus $\tilde{\Gamma}_1$ et $\tilde{\Gamma}_2$ atteignant $\tilde{f}(\tilde{x}_1)$ et $\tilde{f}(\tilde{x}_2)$ et vérifiant la propriété 6.11. □



6.16. PROPOSITION. La fonction $\tilde{\varphi}^* \circ \tilde{f}|_{\tilde{\Delta}_1^-} \circ \tilde{\varphi}^{*-1}$ est croissante sur $\tilde{\Sigma}'$ et définit par prolongement un homéomorphisme \tilde{F} de $\mathbb{R} \times \{R\}$ commutant avec \tilde{T} et de nombre de rotation \tilde{p}_1^- .

Démonstration. La croissance de $\tilde{\varphi}^* \circ \tilde{f}|_{\tilde{\Delta}_1^-} \circ \tilde{\varphi}^{*-1}$ est une conséquence de la proposition 6.13. Comme $\tilde{\Sigma}'$ est dense dans $\mathbb{R} \times \{R\}$, cette application se prolonge alors par

continuité de façon unique en un homéomorphisme croissant \tilde{F} de $\mathbb{R} \times \{R\}$. L'application $\tilde{\varphi}^* \circ \tilde{f}|_{\tilde{\Lambda}_1^-} \circ \tilde{\varphi}^{*-1}$ commutant avec \tilde{T} , il en est de même pour \tilde{F} . Cette application relève alors un homéomorphisme de $\mathbb{T}^1 \times \{R\}$ et possède un nombre de rotation $\tilde{\rho}$ déterminé par l'inégalité suivante, vraie pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{R} \times \{R\}$:

$$-1 < \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{F}^k(\tilde{x}) - \tilde{\rho}_1(\tilde{x}) - k\tilde{\rho} < 1.$$

On choisit $\tilde{x}_0 \in \tilde{\Lambda}_1^-$. Si $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}_1^-$ vérifie $\tilde{\rho}_1(\tilde{x}_0) < \tilde{\rho}_1(\tilde{x}) < \tilde{\rho}_1(\tilde{x}_0) + 1$, alors:

$$\tilde{\rho}_1 \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}_0) < \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}) < \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}_0) + 1 \quad (\text{cf. 6.14 et 6.15});$$

et donc:

$$\tilde{\rho}_1(\tilde{x}_0) - \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}_0) - 1 < \tilde{\rho}_1(\tilde{x}) - \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}) < \tilde{\rho}_1(\tilde{x}_0) - \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}_0) + 1.$$

On note $M = \tilde{\rho}_1(\tilde{x}_0) - \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}_0)$, et on utilise le fait que $\tilde{\varphi}^*$ commute avec \tilde{T} pour montrer la double inégalité vraie pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}_1^-$:

$$M - 1 < \tilde{\rho}_1(\tilde{x}) - \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}) < M + 1.$$

On a donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$M - 1 < \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{f}^{-n}(\tilde{x}) - \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{\varphi}^* \circ \tilde{f}^{-n}(\tilde{x}) < M + 1;$$

soit:

$$M - 1 < \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{f}^{-n}(\tilde{x}) - \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{F}^{-n} \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}) < M + 1;$$

et donc:

$$-2 < \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{f}^{-n}(\tilde{x}) - \tilde{\rho}_1(\tilde{x}) - \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{F}^{-n} \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}) + \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}) < 2.$$

Soit, par la définition des nombres de rotations:

$$-4 < n\tilde{\rho}_i^- - n\tilde{\rho} < 4.$$

On en déduit: $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_i^-$. □

6.17. PROPOSITION. La restriction de $\tilde{\varphi}^*$ à $\tilde{\Lambda}_1^-$ est continue.

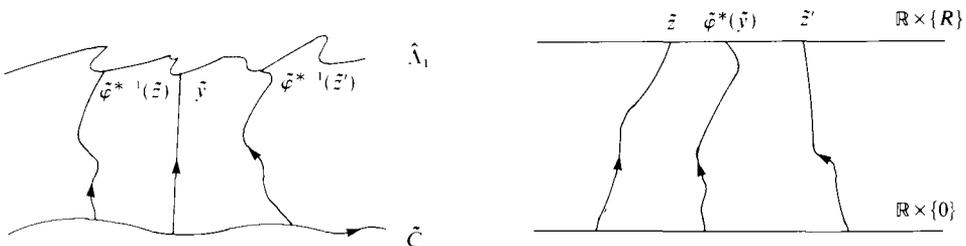
Démonstration. Puisque $\tilde{\Lambda}_1^- \subset \tilde{f}(\tilde{\Lambda}_1^-) \subset \tilde{\Delta}_1^-$, la proposition a bien un sens.

On suppose que la suite $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($\tilde{x}_n \in \tilde{\Lambda}_1^-$) converge vers $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}_1^-$. La suite $(\tilde{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $\tilde{y}_n = \tilde{f}^{-1}(\tilde{x}_n)$, converge alors vers $\tilde{y} = \tilde{f}^{-1}(\tilde{x})$, et tous ces points sont alors radialement accessibles.

On fixe $\varepsilon > 0$. On considère alors deux points $\tilde{z}, \tilde{z}' \in \tilde{\Sigma}'$ (voir 6.9) vérifiant:

$$\tilde{\rho}_1 \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{y}) - \varepsilon < \tilde{z} < \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{y}) < \tilde{z}' < \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{y}) + \varepsilon,$$

et deux arcs $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ dans \tilde{U}_1 , issus de \tilde{C}^- atteignant $\tilde{\varphi}^{*-1}(\tilde{z})$ et $\tilde{\varphi}^{*-1}(\tilde{z}')$ et dont les images ne rencontrent pas la verticale $V^-(\tilde{y})$ (on utilise pour cela 6.13).



Quand n est assez grand, la verticale $V^-(\tilde{y}_n)$ ne rencontre pas les images de ces deux arcs, et on a :

$$\tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}(0) < \tilde{p}_1(\tilde{y}_n) < \tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}_2(0).$$

Par conséquent :

$$\tilde{z} < \tilde{p}_1 \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{y}_n) < \tilde{z}';$$

et on obtient donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\varphi}^*(\tilde{y}_n) = \tilde{\varphi}^*(y),$$

puis :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{F} \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{y}_n) = \tilde{F} \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{y}) = \varphi^*(\tilde{x}). \quad \square$$

6.18. *Remarque.* L'étude qui vient d'être faite depuis 6.9 permet ensuite de montrer tous les résultats exposés en 6.5 pour n'importe quel difféomorphisme \mathbb{C} -analytique $\hat{\varphi} : \hat{U}_1 \rightarrow \mathbb{D}$. De plus, si $\tilde{\rho}_1^-$ est irrationnel, $\tilde{\varphi}^*$ définit un homéomorphisme entre Ω_1^- (voir 5.6) et une partie de S^1 minimale pour $F_{\hat{\varphi}}$ (cf. 6.5). Cette image est alors l'ensemble α -limite et l'ensemble ω -limite de tout point de S^1 par $F_{\hat{\varphi}}$. Ce résultat est bien sûr faux dans \mathbb{C} , Ω_1^- n'est pas forcément l'ensemble ω -limite d'un point accessible.

7. *Topologie des attracteurs à nombres de rotations inférieurs et supérieurs distincts*

On va montrer dans ce paragraphe que si $\tilde{\rho}_1^- < \tilde{\rho}_1^+$, l'attracteur Λ_1 (et par conséquent Λ_0) est topologiquement compliqué. On donnera pour cela une condition topologique impliquant une certaine homogénéité dynamique de Λ_1 et qui ne sera donc pas vérifiée pour Λ_1 .

7.1. PROPOSITION. *S'il existe un intervalle I de $\mathbb{R} \times \{R\}$ de longueur 1, tel que $\tilde{\varphi}^{*-1}(I)$ soit borné, alors, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}_1$, on a :*

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{\tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^k(\tilde{x})}{k} = \tilde{\rho}_1^-.$$

Démonstration. On écrit $I = [a, a + 1] \times \{R\}$, et on suppose que

$$\tilde{p}_1(\tilde{\varphi}^{*-1}([a, a + 1] \times \{R\})) \subset [-b, b] \quad \text{où } b > 0.$$

Puisque $\tilde{\varphi}^* \circ \tilde{T} = \tilde{T} \circ \tilde{\varphi}^*$, on a, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$:

$$\tilde{p}_1(\tilde{\varphi}^{*-1}([a + k, a + k + 1] \times \{R\})) \subset [-b + k, b + k].$$

Donc, si $\tilde{x} \in \tilde{\Delta}_1^-$, $\tilde{\varphi}^*(x)$ se trouve dans un intervalle $[a + k, a + k + 1] \times \{R\}$ et $\tilde{p}_1(\tilde{x})$ se trouve dans l'intervalle $[-b + k, b + k]$ correspondant, et on a les inégalités :

$$a - b \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{\psi}^*(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \leq a + b + 1;$$

or, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\Delta}_1^-$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$-1 < \tilde{p}_1 \circ \tilde{F}^k(\tilde{\varphi}^*(\tilde{x})) - \tilde{p}_1 \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}) - k\tilde{\rho}_1^- < 1.$$

On en déduit, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\Delta}_1^-$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$-1 + 2(a - b) < \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^k(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) - k\tilde{\rho}_1^- < 1 + 2(a + b + 1),$$

et comme $\tilde{\Delta}_1^-$ est dense dans $\tilde{\Lambda}_1$ (cf. 6.4), pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}_1$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$-1 + 2(a - b) \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^k(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) - k\tilde{\rho}_1^- \leq 1 + 2(a + b + 1),$$

et on obtient la proposition. □

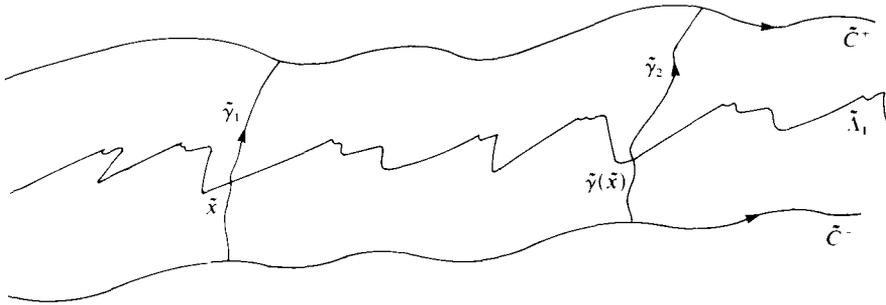
7.2. COROLLAIRE. Si $\tilde{\rho}_i^- < \tilde{\rho}_i^+$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\tilde{\varphi}^{*-1}([a, a + 1] \times \{R\})$ est non borné.

Remarque. Le corollaire 7.2 peut aussi s'énoncer sous la forme suivante (voir Charpentier [Cha1]). On ne peut pas borner le nombre de tours autour de l'origine qu'il faut faire pour joindre deux points quelconques de Δ_1^- par un arc dans U_i sauf aux extrémités.

7.3. PROPOSITION. Si on suppose $\tilde{\rho}_1^- < \tilde{\rho}_1^+$, alors $\tilde{\Delta}_1^- \cap \tilde{\Delta}_1^+ = \emptyset$.

Démonstration. Soit $\tilde{x} \in \tilde{\Delta}_1^- \cap \tilde{\Delta}_1^+$ un point accessible des deux côtés. On peut construire, par 6.12, deux arcs $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ dans \tilde{C} d'images disjointes vérifiant:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1(]0, 1[) \cap (\tilde{C}^- \cup \tilde{C}^+) &= \tilde{\gamma}_2(]0, 1[) \cap (\tilde{C}^- \cup \tilde{C}^+) = \emptyset, \\ \tilde{\gamma}_1(0) \in \tilde{C}^-, \quad \tilde{\gamma}_2(0) \in \tilde{C}^-, \quad \tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}_1(0) &< \tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}_2(0), \\ \tilde{\gamma}_1(1) \in \tilde{C}^+, \quad \tilde{\gamma}_2(1) \in \tilde{C}^+, \quad \tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}_1(1) &< \tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}_2(1), \\ \tilde{\gamma}_1([0, 1]) \cap \Lambda_1 &= \{\tilde{x}\}, \quad \tilde{\gamma}_2([0, 1]) \cap \Lambda_2 = \{\tilde{x}\}. \end{aligned}$$



Par la proposition 6.13, on sait que l'ensemble $\tilde{\varphi}^{*-1}(] \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}), \tilde{T} \circ \tilde{\varphi}^*(\tilde{x}) [)$ est contenu dans la composante intérieure de la courbe de Jordan réunion de $\gamma_1([0, 1])$, de $\gamma_2([0, 1])$ et les morceaux d'arcs de \tilde{C}^- et de \tilde{C}^+ respectivement entre $\tilde{\gamma}_1(0)$ et $\tilde{\gamma}_2(0)$ et entre $\tilde{\gamma}_1(1)$ et $\tilde{\gamma}_2(1)$. Cette composante est bornée, ce qui contredit le corollaire 7.2. □

7.4. PROPOSITION ([Cha1]). Si on suppose $\tilde{\rho}_1^- < \tilde{\rho}_1^+$, alors Λ_1 n'est pas réunion de deux compacts connexes propres; c'est un continu indécomposable.

Démonstration. On écrit $\Lambda_1 = \Lambda_1^* \cup \Lambda_1^{**}$ où Λ_1^* et Λ_1^{**} sont deux compacts connexes propres, c'est-à-dire $\Lambda_1^* \neq \Lambda_1$ et $\Lambda_1^{**} \neq \Lambda_1$. Puisque $\Lambda_1^* \neq \Lambda_1$, on peut choisir $x \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_1^*$ et une boule centrée en x ne rencontrant pas Λ_1^* . On choisit dans cette boule un point x^- de Δ_1^- , et un point x^+ de Δ_1^+ . On peut joindre C^- à x^- (resp. C^+ à x^+) par un arc à valeur dans U_i^- (resp. dans U_i^+) sauf en x^- (resp. en x^+) et en considérant le segment $[x^-, x^+]$, on en déduit l'existence d'un chemin γ joignant C^- à C^+ et ne rencontrant pas Λ_1^* . Comme l'ensemble $C^- \cup C^+ \cup \gamma([0, 1])$ est connexe et comme $\Lambda_1^* \subset C \setminus (C^- \cup C^+ \cup \gamma([0, 1]))$, la préimage $\pi^{-1}(\Lambda_1^*)$ de Λ_1^* dans le revêtement universel est formée de copies translattées de Λ_1^* , c'est-à-dire:

$$\pi^{-1}(\Lambda_1^*) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{T}^k(\Lambda_1^*),$$

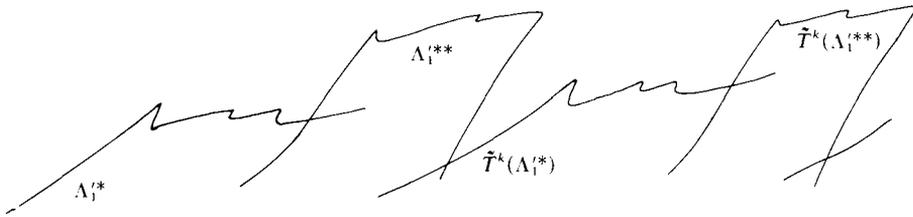
où $\pi: \Lambda_1'^* \rightarrow \Lambda_1^*$ est un homéomorphisme. De même:

$$\pi^{-1}(\Lambda_1^{**}) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{T}^k(\Lambda_1'^{**}),$$

où $\pi: \Lambda_1'^{**} \rightarrow \Lambda_1^{**}$ est un homéomorphisme.

Comme $\tilde{\Lambda}_1 = \pi^{-1}(\Lambda_1^* \cup \Lambda_1^{**})$ est connexe, les ensembles $\pi^{-1}(\Lambda_1^*)$ et $\pi^{-1}(\Lambda_1^{**})$ s'intersectent et on peut donc supposer $\Lambda_1'^* \cap \Lambda_1'^{**} \neq \emptyset$. De même, puisque $\tilde{\Lambda}_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{T}^k(\Lambda_1'^* \cup \Lambda_1'^{**})$, l'ensemble $\Lambda_1'^* \cup \Lambda_1'^{**}$ rencontre un itéré $\tilde{T}^k(\Lambda_1'^* \cup \Lambda_1'^{**})$ où $k \in \mathbb{Z}^*$. On peut donc finalement supposer les conditions suivantes:

$$\begin{cases} \Lambda_1'^* \cap \Lambda_1'^{**} \neq \emptyset \\ (\tilde{T}^k(\Lambda_1'^*)) \cap \Lambda_1'^{**} \neq \emptyset \end{cases} \text{ pour un } k \in \mathbb{N}^*.$$



Soit x un point de $\Lambda_1 \setminus \Lambda_1^{**}$, on peut trouver une boule centrée en x ne rencontrant pas Λ_1^{**} et un point de $\tilde{\Delta}_1^-$ dans cette boule (puisque $\tilde{\Delta}_1^- = \Lambda_1$). On a donc $\Lambda_1'^* \cap \tilde{\Delta}_1^- \neq \emptyset$. On considère donc un point $\tilde{y} \in \Lambda_1'^* \cap \tilde{\Delta}_1^-$ et deux arcs $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ dans \tilde{U}_1 , issus de \tilde{C}^- et atteignant respectivement \tilde{y} et $\tilde{T}^k(\tilde{y})$ et dont les images sont disjointes. On choisit alors un réel $M > 0$ tel que:

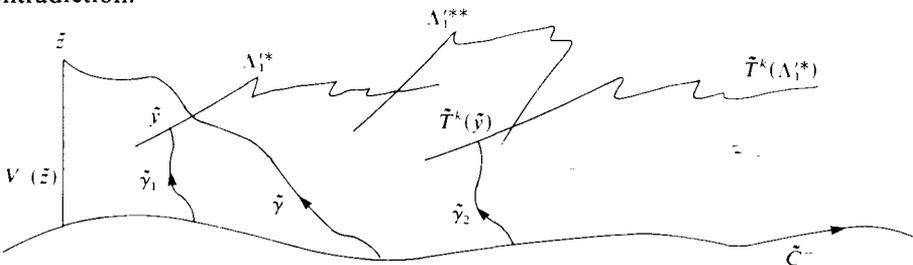
$$\tilde{p}_1(\tilde{\gamma}_1([0, 1]) \cup \tilde{\gamma}_2([0, 1]) \cup \Lambda_1'^* \cup \Lambda_1'^{**} \cup \tilde{T}^k(\Lambda_1'^*)) \subset [-M, +M].$$

Puisque $\tilde{\rho}_1^- < \tilde{\rho}_1^+$, l'ensemble $\tilde{\varphi}^{*-1}([\tilde{\varphi}^*(\tilde{y}), \tilde{T}^k(\tilde{\varphi}^*(\tilde{y}))])$ n'est pas borné et on peut, par 6.13, trouver un arc $\tilde{\gamma}$ dans \tilde{U}_1^- issu de \tilde{C}^- , avec

$$\tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}_1(0) < \tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}(0) < \tilde{p}_1 \circ \tilde{\gamma}_2(0)$$

dont l'image ne rencontre ni celle de $\tilde{\gamma}_1$, ni celle de $\tilde{\gamma}_2$ et tel que $\tilde{\gamma}(1)$ est un point $\tilde{z} \in \tilde{U}_1$ vérifiant $|\tilde{p}_1(\tilde{z})| > M$. On peut toujours supposer quitte à restreindre $\tilde{\gamma}$ que $V^-(\tilde{z}) \cap \tilde{\gamma}([0, 1]) = \{\tilde{z}\}$.

On définit alors une courbe de Jordan par la réunion de $\tilde{\gamma}([0, 1])$, de $\tilde{V}^-(\tilde{z})$ et de l'arc compris dans \tilde{C}^- qui joint $V^-(\tilde{z}) \cap \tilde{C}^-$ à $\tilde{\gamma}(0)$. Cette courbe rencontre l'un des arcs $\tilde{\gamma}_1([0, 1])$ et $\tilde{\gamma}_2([0, 1])$ à l'origine et ne rencontre pas l'autre. Les deux points \tilde{y} et $\tilde{T}^k(\tilde{y})$ sont alors chacun dans une des deux composantes connexes du complémentaire de la courbe. Ils peuvent être joints par un ensemble connexe $\Lambda_1'^* \cup \Lambda_1'^{**} \cup \tilde{T}^k(\Lambda_1'^{**})$ qui ne rencontre pas la courbe (par le choix de M), d'où la contradiction. □



8. Exemple d'attracteur indécomposable

On expose dans ce paragraphe la façon dont Birkhoff obtient un attracteur Λ_1 possédant deux nombres de rotation distincts.

8.1. On connaît l'existence (voir Birkhoff [B2] ou Herman [He2, page 33]) d'un difféomorphisme f de \mathbb{A} de classe C^∞ ou même \mathbb{R} -analytique, homotope à l'identité, préservant la mesure de Lebesgue m , déviant la verticale à droite et possédant une zone d'instabilité, c'est-à-dire:

f laisse invariants deux graphes de fonctions lipschitziennes de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{R} , ψ^- et ψ^+ avec $\psi^- < \psi^+$;

f n'a pas d'autres graphes continus invariants dans l'anneau C délimité par $C^- = \text{gr } \psi^-$ et $C^+ = \text{gr } \psi^+$.

Dans ce cas, si \tilde{f} est un relèvement de f dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, les nombres de rotations $\tilde{\rho}^-$ et $\tilde{\rho}^+$ des applications définies par $\tilde{g}^-(\tilde{\theta}) = \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}^-(\tilde{\theta}))$ et $\tilde{g}^+(\tilde{\theta}) = \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}^+(\tilde{\theta}))$ pour $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$, vérifient $\tilde{\rho}^- < \tilde{\rho}^+$.

Remarque. Si $\tilde{\rho}^-$ (resp. $\tilde{\rho}^+$) est irrationnel, le graphe de ψ^- (resp. de ψ^+) est le seul graphe invariant de nombre de rotation $\tilde{\rho}^-$ (resp. $\tilde{\rho}^+$) pour \tilde{f} , et si $\tilde{\rho}^-$ (resp. $\tilde{\rho}^+$) est rationnel, l'application ψ^- (resp. ψ^+) est définie pour tout $\theta \in \mathbb{T}^1$ par la relation: $\psi^-(\theta) = \sup_{\varphi \in E_{\tilde{\rho}^-}} \varphi(\theta)$ (resp. $\psi^+(\theta) = \inf_{\varphi \in E_{\tilde{\rho}^+}} \varphi(\theta)$), où $E_{\tilde{\rho}^-}$ (resp. $E_{\tilde{\rho}^+}$) est l'ensemble des applications de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{R} dont le graphe est invariant par f et admet $\tilde{\rho}^-$ (resp. $\tilde{\rho}^+$) comme nombre de rotation pour \tilde{f} .

8.2. On considère alors une application $\psi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ de même classe que f (de classe C^∞ si f est de classe C^∞ , analytique si f est analytique) vérifiant $\psi^- < \psi < \psi^+$ (Birkhoff [B1] demande en plus au graphe de ψ de diviser C en deux parties d'aires égales, ce qu'on ne suppose pas ici), et on définit, pour $\varepsilon \in]0, 1[$, l'application $f_\varepsilon : C \rightarrow \text{Int } C$ par:

$$f_\varepsilon(\theta, r) = f(\theta, \varepsilon\psi(\theta) + (1 - \varepsilon)r) \quad (\theta, r) \in C.$$

Cette application, de même classe que f , vérifie alors les propriétés 1.5 (en particulier, $\text{Det } Df_\varepsilon = 1 - \varepsilon$), et on peut définir pour $\varepsilon \in]0, 1[$ les attracteurs de f_ε que l'on notera $\Lambda_{0,\varepsilon}$ et $\Lambda_{1,\varepsilon}$, les ouverts $U_{i,\varepsilon}$, $V_{i,\varepsilon}$ ($i = 0, 1$), les ensembles $\Lambda_{i,\varepsilon}^-$, $\Lambda_{i,\varepsilon}^+$, les applications $\mu_{i,\varepsilon}^-$, $\mu_{i,\varepsilon}^+$, les nombres de rotation $\rho_{i,\varepsilon}^-$, $\rho_{i,\varepsilon}^+$ ($i = 0, 1$), et pour le relèvement \tilde{f}_ε de f_ε défini par:

$$\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{\theta}, r) = \tilde{f}(\tilde{\theta}, \varepsilon\tilde{\psi}(\tilde{\theta}) + (1 - \varepsilon)r) \quad (\tilde{\theta}, r) \in \tilde{C},$$

les nombres de rotation réels $\tilde{\rho}_{i,\varepsilon}^-$ et $\tilde{\rho}_{i,\varepsilon}^+$ ($i = 0, 1$).

Remarques. (1) Si $0 < \varepsilon_0 < 1$, on peut trouver deux nombres β et β' caractérisant la déviation à droite de f_ε uniformément pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ (voir 1.2).

(2) La mesure de $U_{i,\varepsilon}$ et $V_{i,\varepsilon}$ est indépendante de ε , à savoir:

$$m(U_{0,\varepsilon}) = m(U_{1,\varepsilon}) = \int_{\mathbb{T}^1} \psi(\theta) - \psi^-(\theta) d\theta$$

$$m(V_{0,\varepsilon}) = m(V_{1,\varepsilon}) = \int_{\mathbb{T}^1} \psi^+(\theta) - \psi(\theta) d\theta.$$

En effet, la mesure de la couronne U_ε^1 délimitée par C^- et par $f_\varepsilon(C)$, qui est l'image

par f de la couronne délimitée par C^- et par le graphe de $\varepsilon\psi + (1 - \varepsilon)\psi^-$, est égale à $\int_{\mathbb{T}^1} \varepsilon(\psi(\theta) - \psi^-(\theta)) d\theta$, puisque f préserve m . Ainsi:

$$m(U_{0,\varepsilon}) = m(U_{1,\varepsilon}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \varepsilon)^n m(U_\varepsilon^1) = \int_{\mathbb{T}^1} \psi(\theta) - \psi^-(\theta) d\theta.$$

8.3. PROPOSITION. Si on définit $d(\Lambda_{i,\varepsilon}^-, C^-) = \inf_{\theta \in \mathbb{T}^1} \mu_{i,\varepsilon}^-(\theta) - \psi^-(\theta)$, alors: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(\Lambda_{i,\varepsilon}^-, C^-) = 0$.

Démonstration. On va raisonner par l'absurde et montrer la proposition pour $\Lambda_{1,\varepsilon}^-$ ce qui suffira puisque $\psi^- \leq \mu_0^- \leq \mu_1^-$. On suppose l'existence de $C > 0$ et d'une suite $(\varepsilon_p)_{p \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\Lambda_{1,\varepsilon_p}^- \cap H_C = \emptyset$, où $H_C = \{(\theta, r) \in C \mid \psi^-(\theta) \leq r \leq \psi^-(\theta) + c\}$. Utilisant la théorie de Birkhoff (voir [B1] ou [He2, page 34]), on a l'inclusion suivante:

$$C^+ \subset \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(H_C)}.$$

Comme

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(H_C) = \bigcup_{n' \in \mathbb{N}} f^{n'}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(H_C)\right),$$

et comme f préserve la mesure, on a:

$$m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(H_C)\right) = m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(H_C)\right),$$

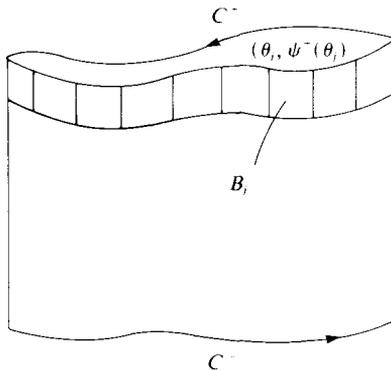
et ces ensembles étant ouverts, on en déduit:

$$C^+ \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(H_C)}.$$

On note ensuite L la constante de Lipschitz de ψ^+ et $E = \inf_{\theta \in \mathbb{T}^1} \psi^+(\theta) - \psi^-(\theta)$ et on choisit $j_0 \in \mathbb{N}^*$ vérifiant: $2/(j_0 E - 2 - EL) \leq \text{tg } \beta'/2$, où β' caractérise la déviation à droite (voir 1.3) pour toutes les applications f_{ε_p} , $p \in \mathbb{N}$.

On considère ensuite les familles $\theta_j = j/j_0 \text{ mod } 1$, $j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$,

$$B_j = \{(\theta, r) \in C \mid |\theta - \theta_j| < 1/2j_0, |\psi^+(\theta) - r| < 2/j_0\}.$$



Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que: pour tout $j \in \{0, \dots, j_0 - 1\}$:

$$\bigcup_{0 < n < n_0} f^{-n}(H_C) \cap B_j \neq \emptyset.$$

Mais la suite f_{ε_p} (resp. $f_{\varepsilon_p}^{-1}$) converge uniformément vers f (resp. f^{-1}) sur tout compact de \mathbb{A} quand ε tend vers zéro. On en déduit l'existence de $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $j \in \{0, \dots, j_0 - 1\}$:

$$\bigcup_{0 \leq n \leq n_0} f_{\varepsilon_{p_0}}^{-n}(H_C) \cap B_j \neq \emptyset.$$

Mais par hypothèse $H_C \subset U_{i,\varepsilon_p}^-$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et, utilisant 4.5, on obtient:

$$\text{pour tout } j \in \{0, \dots, j_0 - 1\}, \quad U_{i,\varepsilon_{p_0}}^- \cap B_j \neq \emptyset,$$

et par conséquent:

$$\text{pour tout } j \in \{0, \dots, j_0 - 1\}, \quad \Lambda_{i,\varepsilon_{p_0}}^- \cap B_j \neq \emptyset.$$

Comme $m(U_{1,\varepsilon_{p_0}}) = \int_{\mathbb{T}^1} \psi(\theta) - \psi^-(\theta) d\theta$, il existe $x = (\theta, r) \in \Lambda_{i,\varepsilon_{p_0}}^-$ vérifiant $r \leq \psi(\theta)$, et on peut donc trouver dans le revêtement \tilde{C} deux points $\tilde{x} = (\tilde{\theta}, r)$ et $\tilde{x}' = (\tilde{\theta}', r)$ de $\tilde{\Lambda}_{1,\varepsilon_{p_0}}^- = \pi^{-1}(\Lambda_{1,\varepsilon_{p_0}}^-)$ vérifiant:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} < \tilde{\theta}' < \tilde{\theta} + 2/j_0, \\ r < \psi(\tilde{\theta}), \\ r' \geq \psi^+(\tilde{\theta}) - 2/j_0. \end{aligned}$$

On en déduit: $r' - r \geq E - 2/j_0 - 2L/j_0$, soit $(\theta' - \theta)/(r' - r) \leq \text{tg } \beta'/2$ ce qui est impossible d'après 4.8. □

8.4. On en déduit alors le corollaire suivant, qui prouve l'existence d'attracteurs de Birkhoff ayant deux nombres de rotation distincts.

COROLLAIRE. *On a les égalités suivantes:*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\rho}_{i,\varepsilon}^- = \tilde{\rho}^-, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\rho}_{i,\varepsilon}^+ = \tilde{\rho}^+.$$

Démonstration. On se contente de démontrer la première égalité. Puisque $\tilde{\rho}^-$ est le nombre de rotation induit sur C^- par \tilde{f}^{-1} , on a la relation suivante, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{C}^-$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$-1 < \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{f}^{-k}(\tilde{x}) - \tilde{\rho}_1(\tilde{x}) + k\tilde{\rho}^- < 1.$$

Fixons un entier k_0 . Il existe alors un voisinage W de C^- tel que, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{W}$ et tout $k \in \{0, \dots, k_0\}$, on ait:

$$-1 < \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{f}^{-k}(\tilde{x}) - \tilde{\rho}_1(\tilde{x}) + k\tilde{\rho}^- < 1.$$

Puisque la famille $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0, 1[}$ converge vers f quand ε tend vers 0, il existe $\varepsilon_0 \in]0, 1[$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{W}$ et tout $k \in \{0, \dots, k_0\}$, on ait:

$$-1 < \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{f}_\varepsilon^{-k}(\tilde{x}) - \tilde{\rho}_1(\tilde{x}) + k\tilde{\rho}^- < 1.$$

On sait d'autre part, grâce à la proposition 8.3, qu'il existe $\varepsilon_1 \in]0, 1[$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1[$, on ait, pour $i = 0$ ou 1 , l'inclusion $\Lambda_{i,\varepsilon}^- \subset \tilde{W}$. Aussi, pour tout $\varepsilon \in]0, \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2)[$, on obtient les inégalités suivantes, pour $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}_{i,\varepsilon}^-$:

$$\begin{aligned} -1 < \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{f}_\varepsilon^{-k_0}(\tilde{x}) - \tilde{\rho}_1(\tilde{x}) + k_0\tilde{\rho}^- < 1, \\ -1 < \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{f}_\varepsilon^{-k_0}(\tilde{x}) - \tilde{\rho}_1(\tilde{x}) + k_0\tilde{\rho}_{i,\varepsilon}^- < 1, \end{aligned}$$

et donc:

$$|\tilde{\rho}^- - \tilde{\rho}_{i,\varepsilon}^-| < \frac{2}{k_0}.$$

On a ainsi montré la première égalité de la proposition. □

CHAPITRE II: PROPRIETES SUPPLEMENTAIRES DES ATTRACTEURS DE BIRKHOFF

9. Rappels sur les difféomorphismes de l'anneau dissipatifs et déviant la verticale à droite

Pour des raisons d'écriture, il est plus facile quand on étudie les attracteurs de Birkhoff, de considérer des applications définies non plus sur une couronne bornée comme dans le premier chapitre, mais sur l'anneau $\mathbb{A} = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ tout entier. On va rappeler dans ce paragraphe les principales propriétés des difféomorphismes de \mathbb{A} dissipatifs et déviant la verticale à droite (voir Le Calvez [L]), puis on montrera que l'application f définie au chapitre I se prolonge sur \mathbb{A} en un tel difféomorphisme. On obtiendra en particulier, sous les notations de ce chapitre, l'existence, pour tout réel $\tilde{\rho}$ appartenant à l'intervalle $[\tilde{\rho}_1^-, \tilde{\rho}_1^+]$, d'un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation $\tilde{\rho}$ contenu dans l'attracteur de Birkhoff Λ_1 .

9.1. On dira qu'un ensemble compact connexe X de \mathbb{A} sépare \mathbb{A} , si et seulement si $\mathbb{A} \setminus X$ possède deux composantes connexes non bornées (éventuellement d'autres composantes connexes bornées), et on écrira respectivement $U(X)$ et $V(X)$ pour les composantes connexes de $\mathbb{A} \setminus X$ contenant $\mathbb{T}^1 \times]-\infty, -M]$ et $\mathbb{T}^1 \times [M, +\infty[$, dès que M est grand. Si $\mathbb{A} \setminus X$ n'a pas d'autre composante connexe que $U(X)$ et $V(X)$, on dira que X est un compact annulaire.

9.2. On considère un difféomorphisme f de \mathbb{A} , de classe C^1 , homotope à l'identité, dissipatif et déviant la verticale à droite, c'est-à-dire qui vérifie les conditions:

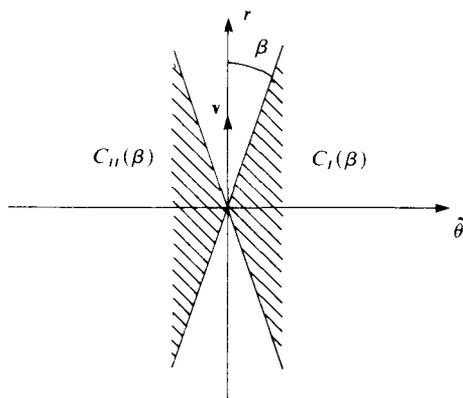
(i) il existe $\alpha \in]0, 1]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{A}$, on ait

$$0 < \det Df(x) < \alpha;$$

(ii) il existe $\beta \in]0, \pi/2[$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{A}$, on ait

$$Df(x) \cdot v \in C_I(\beta), \quad Df^{-1}(x) \cdot v \in C_{II}(\beta),$$

où v est le vecteur $(0, 1)$ et où $C_I(\beta)$ et $C_{II}(\beta)$ sont les cônes fermés définis en 1.2. et dessinés ci-dessous.



9.3. PROPOSITION. Il existe un réel strictement positif M , tel que $f(\mathbb{T}^1 \times [-M, M])$ soit contenu dans $\mathbb{T}^1 \times]-M, M[$.

Démonstration. Voir Le Calvez [L]. □

Remarque. La proposition précédente nous dit qu'il existe une couronne attractive, comme dans le chapitre I. En particulier l'ensemble $X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(\mathbb{T}^1 \times [-M, M])$ est compact, connexe, invariant par f et sépare \mathbb{A} . On expose dans la suite de ce paragraphe (9.4-9.8) les propriétés des ensembles compacts, connexes, invariants par f et séparant \mathbb{A} (voir Le Calvez [L] pour les démonstrations).

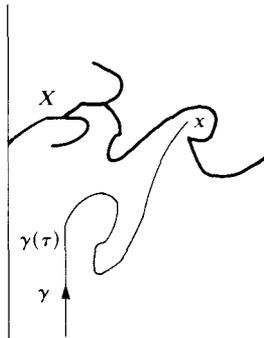
9.4. Tout ensemble X compact, connexe, séparant \mathbb{A} et invariant par f est de mesure nulle et donc d'intérieur vide, il est aussi annulaire. L'ensemble $X' = \text{Fr}(U(X)) \cap \text{Fr}(V(X))$ est alors un compact annulaire invariant par f , frontière de $U(X')$ et de $V(X')$. De plus si Y est un autre ensemble compact, connexe, séparant \mathbb{A} et invariant par f , l'ensemble $Y' = \text{Fr}(U(Y)) \cap \text{Fr}(V(Y))$ est égal à X' . Il n'y a donc qu'un seul compact annulaire invariant par f et frontière commune des deux composantes connexes de son complémentaire, on l'appelle l'attracteur de Birkhoff de f et on le note Λ ; il est contenu dans tous les compacts annulaires invariants par f et plus généralement dans tous les compacts annulaires invariants par un itéré f^q de f , où q est un entier non nul.

9.5. On obtient de la déviation à droite une propriété géométrique supplémentaire. Si X est un compact annulaire invariant par f , tout point de $U(X)$ (resp. $V(X)$) est accessible par un chemin négatif issu verticalement de l'infini à valeur dans $U(X)$ (resp. $V(X)$). Ainsi, par exemple, si x appartient à $U(X)$, il existe un plongement γ de classe C^1 de $]-\infty, 0]$ dans $U(X)$ et un réel τ strictement négatif tels que:

$\gamma(0)$ soit égal à x ,

$\gamma'(t)$ soit égal à v si t est inférieur ou égal à τ ,

le relèvement à \mathbb{R} de l'angle que fait v avec $\gamma'(t)$, qui vaut 0 en τ , est strictement négatif quand t est strictement supérieur à τ .



9.6. Si X est compact, connexe, invariant par f et sépare \mathbb{A} , et si θ appartient à \mathbb{T}^1 , on note $(\theta, \mu_{\bar{X}}(\theta))$ et $(\theta, \mu_{X^+}(\theta))$ les points de $X \cap \{\theta\} \times \mathbb{R}$ d'ordonnées respectivement minimale et maximale, définissant ainsi deux applications $\mu_{\bar{X}}$ et μ_{X^+} de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{R} . On définit alors les graphes respectifs X^- et X^+ de $\mu_{\bar{X}}$ et de μ_{X^+} , ainsi que

les ensembles

$$U^-(X) = \{(\theta, r) \in \mathbb{A} \mid r < \mu_{\tilde{X}}^-(\theta)\}$$

et

$$V^+(X) = \{(\theta, r) \in \mathbb{A} \mid r > \mu_{\tilde{X}}^+(\theta)\}.$$

On obtient alors les résultats suivants:

- (i) $f^{-1}(U^-(X)) \subset U^-(X)$, $f^{-1}(V^+(X)) \subset V^+(X)$;
- (ii) $f^{-1}(X^-) \subset X^-$, $f^{-1}(X^+) \subset X^+$;
- (iii) l'application $\mu_{\tilde{X}}^-$ est semi-continue inférieurement, continue à droite et admet une limite à gauche en tout point;
- (iv) l'application $\mu_{\tilde{X}}^+$ est semi-continue supérieurement, continue à gauche et admet une limite à droite en tout point.

9.7. Si \tilde{f} est un relèvement de f , son inverse préserve alors sur \tilde{X}^- l'ordre donné par la première projection, et on en déduit qu'il existe un réel, noté, $\tilde{\rho}_{\tilde{X}}^-$, tel que pour tout \tilde{x} appartenant à \tilde{X}^- et tout entier n appartenant à \mathbb{N} , on ait

$$-1 < \tilde{p}_1(\tilde{f}^{-n}(\tilde{x})) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) + n\tilde{\rho}_{\tilde{X}}^- < 1,$$

puis d'un ensemble d'Aubry-Mather contenu dans X^- , dont le nombre de rotation pour le relèvement \tilde{f} est $\tilde{\rho}_{\tilde{X}}^-$.

On définit de même $\tilde{\rho}_{\tilde{X}}^+$ pour les points radialement accessibles par le haut, et on montre que si X et Y sont deux compacts annulaires invariants par f tels que X soit inclus dans Y , on a

$$\tilde{\rho}_Y^- \leq \tilde{\rho}_X^- \leq \tilde{\rho}_X^+ \leq \tilde{\rho}_Y^+.$$

Les réels $\tilde{\rho}_X^-$ et $\tilde{\rho}_X^+$ sont appelés nombre de rotation inférieur et supérieur de X .

9.8. On a pour finir la propriété suivante, vérifiée par l'attracteur de Birkhoff Λ de f .

THEOREME. *Pour tout réel $\tilde{\rho}$ appartenant à l'intervalle $[\tilde{\rho}_\Lambda^-, \tilde{\rho}_\Lambda^+]$, il existe un ensemble d'Aubry-Mather de \tilde{f} , contenu dans Λ , de nombre de rotation $\tilde{\rho}$.*

Démonstration. Voir Le Calvez [L]. □

9.9. *Remarque.* L'application f , définie en 9.2. possède par la proposition 9.3 une couronne attractive $C = \mathbb{T}^1 \times [-M, M]$ (i.e. $f(C)$ est inclus dans $\text{Int}(C)$), sa restriction à C s'étudie comme dans le premier chapitre; en particulier l'ensemble Λ_1 défini dans ce chapitre et l'attracteur de Birkhoff Λ défini en 9.8 coïncident. Réciproquement, si C est une couronne délimitée par deux graphes d'applications continues ψ^- et ψ^+ de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{R} , vérifiant $\psi^- < \psi^+$, toute application f de C dans C difféomorphisme de classe C^1 homotope à l'identité de C sur son image, dissipatif et déviant la verticale à droite, peut être prolongée en un difféomorphisme g de \mathbb{A} possédant les mêmes propriétés.

On commence par construire un petit voisinage \hat{C} de C , couronne délimitée par les graphes de deux applications de classe C^2 $\hat{\psi}^-$ et $\hat{\psi}^+$, vérifiant $\hat{\psi}^- < \psi^- < \psi^+ < \hat{\psi}^+$ et un difféomorphisme \hat{f} de classe C^1 de \hat{C} dans une partie de lui-même, qui prolonge f , qui soit dissipative, qui dévie la verticale à droite, et qui soit de classe C^2 au voisinage de chacun des bords de \hat{C} . Le champ de vecteur $D\hat{f}(\hat{f}^{-1}(x)) \cdot v$

défini sur $\hat{f}(\hat{C})$ peut alors se prolonger en un champ de vecteur $\hat{\omega}$ continu sur \mathbb{A} , de classe C^1 en dehors de $\hat{f}(\hat{C})$ et sur un voisinage de chacun de ses bords, vérifiant

$$\begin{aligned} \hat{\omega}(x) &\in C_I(\beta) \text{ pour tout } x \in \mathbb{A}, \\ \hat{\omega}(x) &= (1, \cotg \beta \vec{y}) \text{ si } |p_2(x)| \text{ est suffisamment grand.} \end{aligned}$$

On obtient alors un difféomorphisme \hat{g} de classe C^1 de \mathbb{A} sur son image, homotope à l'identité et qui dévie la verticale à droite, par les équations:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\theta, \hat{\psi}^+(\theta)) &= \hat{f}(\theta, \hat{\psi}^+(\theta)), \\ \hat{g}(\theta, \hat{\psi}^-(\theta)) &= \hat{f}(\theta, \hat{\psi}^-(\theta)), \\ \partial \hat{g} / \partial r(\theta, r) &= \hat{\omega}(\hat{g}(\theta, r)); \end{aligned}$$

c'est-à-dire en envoyant chaque verticale $\{\theta\} \times \mathbb{R}$ sur une courbe intégrale du champ $\hat{\omega}$ qui passe par les points $(\theta, \hat{\psi}^+(\theta))$ et $(\theta, \hat{\psi}^-(\theta))$.

Puisque la direction de $\hat{\omega}(x)$ en tout point de \mathbb{A} est dans le cône $C_I(\beta)$, l'image $\hat{g}(\mathbb{A})$ est soit égale à \mathbb{A} soit bordée par une ou deux courbes intégrales de $\hat{\omega}$, chacune égale au graphe d'une application de classe C^2 de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{R} . Supposons par exemple que $\hat{g}(\mathbb{A})$ ait un bord supérieur, noté B^+ , et considérons une application $\xi : \mathbb{A} \rightarrow [0, 1]$ de classe C^1 , égale à 1 au-dessus et au voisinage de B^+ et égale à 0 au-dessous et au voisinage de $\hat{f}(\hat{C}^+)$. Le champ de vecteur ω^* défini en tout point de \mathbb{A} par l'égalité

$$\omega^*(x) = \xi(x)(1, \cotg \beta) + (1 - \xi(x))\hat{\omega}(x)$$

a une direction, en tout point, à valeur dans $C_I(\beta)$ et plus proche de la verticale que celle de $\hat{\omega}$; aussi la courbe intégrale de ce champ qui passe par $(\theta, \hat{\psi}^+(\theta))$ sera-t-elle située au-dessus de celle de $\hat{\omega}$. On en déduit que ω^* ne possède aucune courbe intégrale fermée entre $\hat{f}(\hat{C}^+)$ et B^+ et comme il est constant égal à $(1, \cotg \beta)$ au-dessus de B^+ , qu'il ne possède en fait aucune courbe intégrale fermée au-dessus de $\hat{f}(\hat{C}^+)$. Ainsi si on remplace $\hat{\omega}$ par ω^* dans l'équation définissant \hat{g} , l'image $\hat{g}(\mathbb{A})$ n'a pas de bord supérieur; on peut raisonner de même et supposer qu'elle n'a pas de bord inférieur, c'est-à-dire en fait que $\hat{g}(\mathbb{A})$ est égal à \mathbb{A} .

On définit alors, pour tous réels strictement positifs ε et η , une fonction de classe C^1 , $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que:

$$\begin{aligned} \partial \Phi / \partial r(\theta, r) &> 0, \\ \Phi(\theta, r) &= r \text{ si } \hat{\psi}^-(\theta) \leq r \leq \hat{\psi}^+(\theta), \\ \partial \Phi / \partial r(\theta, r) &< \eta \text{ si } r \leq \hat{\psi}^-(\theta) - \varepsilon \text{ et si } r \geq \hat{\psi}^+(\theta) + \varepsilon. \end{aligned}$$

En choisissant ε et η suffisamment petits, on obtient un prolongement g qui convient par la relation:

$$g(\theta, r) = \hat{g}(\theta, \Phi(\theta, r)).$$

10. Semi-continuité des nombres de rotation

10.1. On note \mathcal{H} l'ensemble des difféomorphismes de \mathbb{A} de classe C^1 , homotopes à l'identité, dissipatifs et déviant la verticale à droite (voir 9.2). On note de même $\tilde{\mathcal{H}}$ l'ensemble des difféomorphismes de $\tilde{\mathbb{A}}$ qui sont des relèvements d'un élément de \mathcal{H} .

Si $f \in \mathcal{H}$, on notera $\Lambda(f)$ l'attracteur de Birkhoff de f (voir 9.4); on écrira de même $\Lambda^-(f)$ et $\Lambda^+(f)$ pour l'ensemble des points de $\Lambda(f)$ radialement accessibles

respectivement par le bas et par le haut, et $\tilde{\Lambda}(f)$ pour la préimage de $\Lambda(f)$ dans $\tilde{\mathbb{A}}$ ($\tilde{\Lambda}(f) = \pi^{-1}(\Lambda(f))$).

De même, si $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}$ relève l'application $f \in \mathcal{H}$, on posera $\Lambda(\tilde{f}) = \Lambda(f)$, $\Lambda^-(\tilde{f}) = \Lambda^-(f)$, $\Lambda^+(\tilde{f}) = \Lambda^+(f)$, $\tilde{\Lambda}(\tilde{f}) = \tilde{\Lambda}(f)$. On notera aussi $\tilde{\rho}^-(\tilde{f})$ et $\tilde{\rho}^+(\tilde{f})$ les nombres de rotation respectivement inférieurs et supérieurs définis par \tilde{f} sur $\tilde{\Lambda}(\tilde{f})$.

On obtient ainsi des applications définies sur $\tilde{\mathcal{H}}$, à valeur dans \mathbb{R} ou dans l'ensemble des parties de \mathbb{A} , et on veut étudier la continuité de ces applications.

On dira qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$) d'éléments de \mathcal{H} (resp. $\tilde{\mathcal{H}}$) converge vers $f \in \mathcal{H}$ (resp. $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}$) au sens de la C^1 -topologie, si elle converge uniformément vers f (resp. \tilde{f}) sur tout compact et si la suite des dérivées $(Df_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $D\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers Df (resp. $D\tilde{f}$) sur tout compact. On munit \mathcal{H} (resp. $\tilde{\mathcal{H}}$) de la C^1 -topologie, et on obtient ainsi des variétés fréchétiennes.

On définit de même sur l'ensemble des compacts de \mathbb{A} la distance de Hausdorff dont on rappelle quelques propriétés ci-dessous.

10.2. *Définitions et rappels sur la distance de Hausdorff.* Si (E, d) est un espace métrique, on note $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble des fermés bornés non vides de E . On peut alors munir $\mathcal{K}(E)$ d'une topologie définie par la distance suivante:

$$D(X, Y) = \max \left(\sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X) \right),$$

où X et Y sont deux éléments de $\mathcal{K}(E)$ et où $d(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y)$.

On note alors:

$$B_d(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) \leq r\},$$

$$B_D(X, r) = \{Y \in \mathcal{K}(E) \mid D(X, Y) \leq r\},$$

où $r \geq 0$, $x \in E$, $X \in \mathcal{K}(E)$.

De plus, si (E, d) est compact, on peut munir l'ensemble des applications continues de E dans E , noté $\mathcal{F}(E)$, de la distance suivante δ , qui définit la convergence uniforme:

$$\delta(f, g) = \sup_{x \in E} d(f(x), g(x)), \quad \text{où } f \text{ et } g \text{ appartiennent à } \mathcal{F}(E).$$

PROPOSITION. (i) Si (E, d) est compact, alors $(\mathcal{K}(E), D)$ l'est aussi.

(ii) Si (E, d) est compact, l'ensemble des fermés connexes de E est fermé dans $(\mathcal{K}(E), D)$.

(iii) L'ensemble des compacts connexes de \mathbb{A} , séparant \mathbb{A} , est un fermé pour la distance de Hausdorff.

(iv) Si E est compact, l'application $\mathcal{L}: \mathcal{K}(E) \times \mathcal{F}(E) \rightarrow \mathcal{K}(E)$ définie par $\mathcal{L}(X, f) = f(X)$ est continue.

Les résultats (i) et (ii) sont classiques, on les trouve dans Choquet [Cho] ou dans Kuratowski [Ku]. Le résultat (iii) se montre de façon analogue. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de compacts connexes séparant \mathbb{A} et convergeant vers le compact X , on peut trouver $M > 0$ tel que $\mathbb{T}^1 \times]-M, +M[$ contient X et tous les éléments de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On sait déjà par (ii) que X est connexe; pour montrer qu'il sépare \mathbb{A} , on considère un chemin γ joignant $\mathbb{T}^1 \times \{-M\}$ à $\mathbb{T}^1 \times \{M\}$. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\gamma([0, 1]) \cap X_n \neq \emptyset$, on en déduit $\gamma([0, 1]) \cap X \neq \emptyset$ et le résultat.

Pour montrer (iv), on fixe un couple $(X_0, f_0) \in \mathcal{H}(E) \times \mathcal{F}(E)$ et on a alors les inégalités suivantes pour tout $(X, f) \in \mathcal{H}(E) \times \mathcal{F}(E)$:

$$\begin{aligned} D(f(X), f_0(X_0)) &\leq D(f(X), f_0(X)) + D(f_0(X), f_0(X_0)) \\ &\leq \delta(f, f_0) + D(f_0(X), f_0(X_0)). \end{aligned}$$

Or, f_0 étant uniformément continue, $f_0(X)$ tend vers $f_0(X_0)$ quand X tend X_0 , et on a le résultat. □

COROLLAIRE. Si E est compact, si f_n est une suite d'éléments de $\mathcal{F}(E)$ convergeant uniformément vers f , si X_n est une suite de fermés non vides de E convergeant vers X et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(X_n) = X_n$, alors $f(X) = X$.

Démonstration. Le résultat (iv) de la proposition précédente prouve que $\mathcal{N} = \{(X, f) \mid \mathcal{L}(X, f) = X\}$ est un fermé de $\mathcal{H}(X) \times \mathcal{F}(X)$. □

On termine ces rappels sur la définition suivante (voir Choquet [Cho] ou Kuratowski [Ku]):

Definition. Soit (E, d) un espace métrique et (F, \mathcal{T}) un espace topologique. Une application $f: F \rightarrow \mathcal{H}(E)$ sera dite *semi-continue inférieurement* si, pour tout fermé $X \subset E$, l'ensemble des x tels que $f(x) \subset X$ est un fermé de F .

10.3. PROPOSITION. L'application Λ de \mathcal{H} dans $\mathcal{H}(\mathbb{A})$, qui à $f \in \mathcal{H}$ associe son attracteur de Birkhoff $\Lambda(f)$, est semi-continue inférieurement.

Démonstration. On considère un fermé $X \subset \mathbb{A}$, une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{H} convergeant vers $f \in \mathcal{H}$ au sens de la C^1 -topologie, et on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Lambda(f_n) \subset X$. On veut montrer l'inclusion $\Lambda(f) \subset X$.

On sait qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $f(\mathbb{T}^1 \times [-M, +M]) \subset \mathbb{T}^1 \times]-M, +M[$ (voir 9.3). Par conséquent, pour n assez grand, on a:

$$f_n(\mathbb{T}^1 \times [-M, +M]) \subset \mathbb{T}^1 \times]-M, +M[\quad \text{et} \quad \Lambda(f_n) \subset \mathbb{T}^1 \times]-M, +M[.$$

La proposition 10.2 prouve alors la compacité relative de $\{\Lambda(f_n), n \in \mathbb{N}\}$ et donc l'existence d'une valeur d'adhérence Λ' de la suite $(\Lambda(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$. On a d'ailleurs $\Lambda' \subset X$. En utilisant de nouveau la proposition et le corollaire 10.2, on en déduit que Λ' est un compact connexe séparant \mathbb{A} invariant par f . Utilisant la définition de $\Lambda(f)$, on trouve finalement $\Lambda(f) \subset \Lambda' \subset X$. □

COROLLAIRE. L'ensemble des points de continuité de l'application $f \rightarrow \Lambda(f)$ est un G_δ dense de \mathcal{H} .

Démonstration. Si E est un espace de Baire et si (F, d) est un espace métrique compact, toute application semi-continue inférieurement de E dans $\mathcal{H}(F)$ admet un G_δ dense comme ensemble des points de continuité (voir [Cho] ou [Ku]). Malheureusement, comme \mathbb{A} n'est pas compact, l'ensemble \mathcal{H} muni de la C^1 -topologie, n'est pas un espace de Baire. En effet, on a l'égalité $\mathcal{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{H}_n$, où \mathcal{H}_n est l'ensemble des fonctions de \mathcal{H} qui vérifient les conditions 9.2 avec $\alpha = 1 - 1/n$ et $\beta = 1/n$ et chacun des \mathcal{H}_n est un fermé d'intérieur vide pour la C^1 -topologie. On peut cependant utiliser le résultat énoncé plus haut comme le montre ce qui suit.

Puisque $\mathcal{H}(A)$ est un espace métrique, l'ensemble \mathcal{C} des points de continuité de l'application considérée est un G_δ , il reste à montrer qu'il est dense. Soit f_0 un élément de \mathcal{H} , il existe $M > 0$ tel que $f_0(\mathbb{T}^1 \times [-M, +M]) \subset \mathbb{T}^1 \times]-M, +M[$. On note \mathcal{V} le voisinage ouvert de f_0 formé des éléments f de \mathcal{H} vérifiant

$$f(\mathbb{T}^1 \times [-M, +M]) \subset \mathbb{T}^1 \times]-M, +M[$$

et on note \mathcal{V}' l'ensemble des restrictions à $\mathbb{T}^1 \times [-M, +M]$ d'éléments de \mathcal{V} . Mais par la remarque 9.9, \mathcal{V}' est un ouvert de l'espace des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{T}^1 \times [-M, +M]$ dans $\mathbb{T}^1 \times [-M, +M]$ muni de la C^1 -topologie. Ce dernier espace est complet et \mathcal{V}' est donc un espace de Baire. En appliquant le résultat cité plus haut, on en déduit que l'application qui à un élément f de \mathcal{V}' associe son attracteur de Birkhoff est continue en tout point d'un G_δ dense de \mathcal{V}' .

Pour montrer que \mathcal{C} est dense dans \mathcal{V} , il suffit de montrer que si $f \in \mathcal{V}$ et si W est un voisinage de f , alors toute application de \mathcal{V}' suffisamment proche dans la C^1 -topologie de la restriction de f à $\mathbb{T}^1 \times [-M, +M]$ se prolonge en un élément de W . Or, ceci se montre aisément en utilisant la méthode des champs de vecteurs employée déjà dans la remarque 9.9.

10.4. On a des résultats analogues pour les nombres de rotation.

PROPOSITION. L'application de $\tilde{\mathcal{H}}$ dans \mathbb{R} qui à $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}$ associe le réel $\tilde{\rho}^+(\tilde{f})$ (resp. $\tilde{\rho}^-(\tilde{f})$) est semi-continue inférieurement (resp. semi-continue supérieurement).

Démonstration. On considère un réel a , une suite $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\tilde{\mathcal{H}}$ convergent vers $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}$ au sens de la C^1 -topologie et on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\rho}^+(\tilde{f}_n) \leq a$. On veut montrer l'inégalité: $\tilde{\rho}^+(\tilde{f}) \leq a$.

Puisque $\tilde{\rho}^+(\tilde{f}_n) \leq a$, on sait par 5.2 que l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}(\tilde{f}_n)$:

$$\tilde{p}_1 \circ \tilde{f}_n^k(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \leq 1 + ka.$$

On a vu dans la proposition 10.3 que la suite $\Lambda(\tilde{f}_n)$ admettait une valeur d'adhérence Λ' contenant $\Lambda(\tilde{f})$, limite d'une suite extraite $\Lambda(\tilde{f}_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$.

Si $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}' = \pi^{-1}(\Lambda')$, on peut trouver une suite $(\tilde{x}_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$ avec $\tilde{x}_{n_p} \in \tilde{\Lambda}(\tilde{f}_{n_p})$ et convergent vers \tilde{x} . La suite $(\tilde{f}_{n_p}^k(\tilde{x}_{n_p}))_{p \in \mathbb{N}}$ converge alors vers $\tilde{f}^k(\tilde{x})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On en déduit l'inégalité suivante vérifiée pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}'$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^k(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \leq 1 + ka.$$

Cette inégalité est vraie en particulier pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}(\tilde{f})$ puisque $\tilde{\Lambda}(\tilde{f}) \subset \tilde{\Lambda}'$. En considérant un ensemble d'Aubry-Mather formé de points radialement accessibles par le haut, on en déduit l'inégalité $\tilde{\rho}^+(\tilde{f}) \leq a$. La démonstration est analogue pour l'application $\tilde{f} \mapsto \tilde{\rho}^-(\tilde{f})$. □

COROLLAIRE. L'ensemble des points de continuité de l'application $\tilde{f} \mapsto \tilde{\rho}^+(\tilde{f})$ (resp. $\tilde{f} \mapsto \tilde{\rho}^-(\tilde{f})$) est un G_δ dense de $\tilde{\mathcal{H}}$.

Démonstration. La démonstration est identique à celle du corollaire 10.3. □

10.5. Remarque. On verra dans le paragraphe 12 que les applications définies en 10.3 et 10.4 admettent des points de discontinuité. On note aussi que tout point de continuité de l'application $\tilde{f} \mapsto \Lambda(\tilde{f})$ est un point de continuité des applications

$\tilde{f} \mapsto \tilde{\rho}^+(\tilde{f})$ et $\tilde{f} \mapsto \tilde{\rho}^-(\tilde{f})$. En effet, si $\tilde{f}_0 \in \tilde{\mathcal{H}}$, on a la relation suivante pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}(\tilde{f}_0)$ (voir 5.2):

$$-1 + k\tilde{\rho}^-(\tilde{f}_0) \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}_0^k(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \leq 1 + k\tilde{\rho}^+(\tilde{f}_0).$$

Un entier k et un réel $\varepsilon > 0$ étant fixé, on a la relation suivante pour \tilde{x} dans un voisinage de $\tilde{\Lambda}(\tilde{f}_0)$:

$$-1 + k\tilde{\rho}^-(\tilde{f}_0) - \varepsilon < \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}_0^k(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) < 1 + k\tilde{\rho}^+(\tilde{f}_0) + \varepsilon.$$

Si l'application $\tilde{f} \mapsto \Lambda(\tilde{f})$ est continue en \tilde{f}_0 , on en déduit l'existence d'un voisinage de \tilde{f}_0 dans $\tilde{\mathcal{H}}$ tel que, pour tout \tilde{f} dans ce voisinage et pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}(\tilde{f})$, on ait:

$$-1 + k\tilde{\rho}^-(\tilde{f}_0) - \varepsilon < \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^k(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) < 1 + k\tilde{\rho}^+(\tilde{f}_0) + \varepsilon.$$

En choisissant un point dans un ensemble d'Aubry-Mather formé de points radialement accessibles par le haut, on obtient:

$$\tilde{\rho}^+(\tilde{f}) - \tilde{\rho}^+(\tilde{f}_0) < \frac{2 + \varepsilon}{k};$$

et de même:

$$\tilde{\rho}^-(\tilde{f}) - \tilde{\rho}^-(\tilde{f}_0) > -\frac{2 + \varepsilon}{k}.$$

On conclut en utilisant 10.4.

Remarque. Dans les démonstrations des propositions 10.3 et 10.4, on n'utilise jamais la convergence des dérivées et si on munit les ensembles \mathcal{H} et $\tilde{\mathcal{H}}$ non plus de la C^1 -topologie, mais seulement de la C^0 -topologie (c'est-à-dire de la topologie compacte ouverte), les propositions 10.3 et 10.4 sont encore valables (on se servira de cette remarque dans le paragraphe 1). Cependant, on n'a pas pour cette topologie les équivalents des corollaires 10.3 et 10.4.

11. Etude d'une famille d'attracteurs de Birkhoff

On étudie dans ce paragraphe une famille d'applications de \mathbb{A} possédant un attracteur de Birkhoff. Ces applications ont généralement une écriture simple et peuvent être étudiées sur ordinateur. D'autre part, elles permettent de répondre à un grand nombre de questions sur les attracteurs de Birkhoff. On rappelle dans le paragraphe 11.1 des résultats sur une famille de difféomorphismes de \mathbb{A} préservant la mesure (voir Herman [He2]).

11.1. Soit $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application 1-périodique de classe C^1 . On définit alors un difféomorphisme \tilde{f}_1 de $\tilde{\mathbb{A}}$ de classe C^1 qui relève un difféomorphisme f_1 de \mathbb{A} , préservant la mesure et déviant la verticale à droite par la relation:

$$\tilde{f}_1(\tilde{\theta}, r) = (\tilde{\theta} + r, r + \tilde{\varphi}(\tilde{\theta} + r)), \quad \text{si } (\tilde{\theta}, r) \in \tilde{\mathbb{A}}.$$

Si $\int_0^1 \tilde{\varphi}(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} \neq 0$, f_1 ne laisse invariant aucun compact connexe séparant \mathbb{A} .

Si $\int_0^1 \tilde{\varphi}(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 0$, et si X est un compact connexe séparant \mathbb{A} et invariant par f_1 , alors les ensembles $\text{Fr } U(X)$ et $\text{Fr } V(X)$ (voir 9.1) sont des graphes lipschitziens de la forme $\{r = \psi_i(\theta)\}$.

Si l'on a un graphe invariant par f_1 de la forme $\{r = \psi(\theta)\}$ et si $\tilde{\psi}$ est l'application 1-périodique définie sur \mathbb{R} par ψ , alors l'application $\tilde{g} = \text{Id} + \tilde{\psi}$ est un homéo-

morphisme croissant de \mathbb{R} relevant un homéomorphisme de \mathbb{T}^1 , conjugué par la projection \tilde{p}_1 à la restriction de \tilde{f}_1 au graphe de ψ , et on a la relation suivante:

$$\frac{\tilde{g} + \tilde{g}^{-1}}{2} = \text{Id} + \frac{1}{2}\tilde{\varphi}.$$

Réciproquement, si \tilde{g} est un homéomorphisme de \mathbb{R} relevant un homéomorphisme de \mathbb{T}^1 vérifiant l'égalité ci-dessous, alors le graphe de $\tilde{g} - \text{Id}$ est invariant par \tilde{f}_1 .

Si l'on définit pour tout graphe Γ invariant par f_1 le nombre de rotation induit par \tilde{f}_1 sur $\tilde{\Gamma}$ et si l'on note \mathcal{R} l'ensemble des nombres de rotation ainsi obtenus, on a le résultat qui suit:

\mathcal{R} est un fermé invariant par translation et par symétrie,

(c'est-à-dire: $\tilde{\rho} \in \mathcal{R} \Rightarrow \tilde{\rho} + 1 \in \mathcal{R}$ et $-\tilde{\rho} \in \mathcal{R}$).

En effet, ψ est un graphe invariant si et seulement si l'application $\tilde{g} = \text{Id} + \tilde{\psi}$ qui définit le nombre de rotation vérifie: $(\tilde{g} + \tilde{g}^{-1})/2 = \text{Id} + \frac{1}{2}\tilde{\varphi}$. On note alors $\tilde{\rho}_1 = \inf \mathcal{R} \cap [0, +\infty[$ (en particulier $\tilde{\rho}_1 = +\infty$ si $\mathcal{R} = \emptyset$).

11.2. Soit $\tilde{\varphi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application 1-périodique de classe C^1 . On introduit de la même façon une famille $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0, 1[}$ de difféomorphismes de \mathbb{A} en définissant pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ le relèvement \tilde{f}_ε par la relation:

$$\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{\theta}, r) = (\tilde{\theta} + r, \varepsilon r + \tilde{\varphi}(\tilde{\theta} + r)), \quad \text{si } (\tilde{\theta}, r) \in \tilde{\Lambda}.$$

On obtient une famille de difféomorphismes dissipatifs ($\text{Det } Df_\varepsilon = \varepsilon$) et déviant la verticale à droite. On note alors Λ_ε l'attracteur de Birkhoff $\Lambda(f_\varepsilon)$ de f_ε , $\tilde{\rho}_\varepsilon^+$ et $\tilde{\rho}_\varepsilon^-$ les nombres de rotation définis par \tilde{f}_ε sur Λ_ε . On écrira de même: $\Lambda_\varepsilon^-, \Lambda_\varepsilon^+, U_\varepsilon, U_\varepsilon^-, V_\varepsilon, V_\varepsilon^+, \dots$ pour $\Lambda^-(f_\varepsilon), \Lambda^+(f_\varepsilon), U(f_\varepsilon), U^-(f_\varepsilon), V(f_\varepsilon), V^+(f_\varepsilon), \dots$.

11.3. PROPOSITION. Si $\int_0^1 \tilde{\varphi}(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 0$, alors $\tilde{\rho}_\varepsilon^- \leq 0 \leq \tilde{\rho}_\varepsilon^+$.

Démonstration. On montre l'inégalité $\tilde{\rho}_\varepsilon^+ \geq 0$, l'autre inégalité s'en déduit aisément. On suppose que $\varepsilon \in]0, 1[$ et que $\int_0^1 \tilde{\varphi}(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 0$. L'application f_ε laisse invariant l'ensemble Λ_ε et envoie $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ sur le graphe de φ . Si Λ_ε ne rencontre pas $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$, ces deux ensembles délimitent une couronne ouverte bornée dont l'image par f_ε délimitée par Λ_ε et par le graphe de φ aura même mesure puisque $\int_0^1 \tilde{\varphi}(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 0$ et ceci est impossible puisque f_ε est dissipatif. On en déduit que Λ_ε rencontre $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ et comme il est invariant par f_ε il rencontre aussi le graphe de φ , image par f de $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$.

Il existe donc un point $\tilde{x} = (\tilde{\theta}, r) \in \tilde{\Lambda}_\varepsilon^+$ vérifiant $r \geq \tilde{\varphi}(\tilde{\theta})$. Le point $\tilde{f}_\varepsilon^{-1}(\tilde{x})$ appartient aussi à $\tilde{\Lambda}_\varepsilon^+$ et on a:

$$\tilde{p}_1 \circ \tilde{f}_\varepsilon^{-1}(\tilde{x}) = \tilde{\theta} + \frac{\tilde{\varphi}(\tilde{\theta}) - r}{\varepsilon} \leq \tilde{\theta} = \tilde{p}_1(\tilde{x}).$$

Mais, comme $\tilde{f}_\varepsilon^{-1}$ préserve sur $\tilde{\Lambda}_\varepsilon^+$ l'ordre donné par la première projection, on en déduit que la suite $(\tilde{p}_1 \circ \tilde{f}_\varepsilon^{-n}(\tilde{x}))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. On obtient

$$\tilde{\rho}_\varepsilon^+ = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{p}_1 \circ \tilde{f}_\varepsilon^{-n}(\tilde{x})}{n} \geq 0. \quad \square$$

11.4. On étudie le comportement de f_ε quand ε tend vers 1. On rappelle que le réel $\tilde{\rho}_1$ a été défini en 11.1.

PROPOSITION. Si $\int_0^1 \tilde{\varphi}(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 0$, alors pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on a :

$$-\tilde{\rho}_1 \leq \tilde{\rho}_\varepsilon^- \leq \tilde{\rho}_\varepsilon^+ \leq \tilde{\rho}_1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \tilde{\rho}_\varepsilon^+ = \tilde{\rho}_1 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \tilde{\rho}_\varepsilon^- = -\tilde{\rho}_1.$$

Démonstration. On envisage trois cas :

1er cas: $\tilde{\rho}_1 = +\infty$. On suppose que la fonction $\varepsilon \mapsto \tilde{\rho}_\varepsilon^+$ ne tend pas vers $+\infty$ quand ε tend vers 1; on considère alors une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 1 telle que $(\rho_{\varepsilon_n}^+)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un nombre $\tilde{\rho} \in \mathbb{R}$ et on va montrer alors une contradiction.

On définit pour $\varepsilon \in]0, 1[$, l'ensemble $\Lambda_\varepsilon'^+ = \text{Fr } V_\varepsilon^+$, c'est un compact connexe séparant \mathbb{A} (en fait une courbe de Jordan) et V_ε^+ est la composante connexe non bornée supérieure de $\mathbb{A} \setminus \Lambda_\varepsilon'^+$. Puisque la suite $(\tilde{\rho}_\varepsilon^+)$ est bornée, il en est de même de la suite $(\Lambda_{\varepsilon_n}^+)_{n \in \mathbb{N}}$. En effet, si $\tilde{x} = (\tilde{\theta}, r) \in \tilde{\Lambda}_{\varepsilon_n}^+$ et si $\tilde{x}' = \tilde{f}_{\varepsilon_n}^{-1}(\tilde{x}) = (\tilde{\theta}', r')$, on doit avoir :

$$|\tilde{\theta}' - \tilde{\theta}| \leq 1 + |\tilde{\rho}_{\varepsilon_n}^+|,$$

soit

$$\left| \frac{r - \tilde{\varphi}(\tilde{\theta})}{\varepsilon_n} \right| \leq 1 + |\tilde{\rho}_{\varepsilon_n}^+|;$$

et donc :

$$|r| \leq 1 + \sup_{n \in \mathbb{N}} |\tilde{\rho}_{\varepsilon_n}^+| + \sup_{\tilde{\theta} \in [0,1]} |\tilde{\varphi}(\tilde{\theta})|.$$

On en déduit que la suite $(\Lambda_{\varepsilon_n}^+)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et on peut donc en extraire une suite $(\Lambda_{\varepsilon_{n_k}}^+)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers un compact connexe Λ' . On rappelle que $V(\Lambda')$ est la composante connexe supérieure de $\mathbb{A} \setminus \Lambda'$. Soit $x \in V(\Lambda')$ et soit B un voisinage compact de x dans $V(\Lambda')$. Pour k suffisamment grand, on aura $B \subset V(\Lambda_{\varepsilon_{n_k}}^+) = V_{\varepsilon_{n_k}}^+$ et par conséquent $f_{\varepsilon_{n_k}}^{-1}(B) \subset V_{\varepsilon_{n_k}}^+$. En faisant tendre k vers $+\infty$, on en déduit $f_1^{-1}(x) \in V(\Lambda')$.

L'inclusion $f_1^{-1}(V(\Lambda')) \subset V(\Lambda')$ et le fait que $\int_0^1 \tilde{\varphi}(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 0$ prouvent alors la relation $V(\Lambda') \subset f_1(V(\Lambda')) \subset \overline{V(\Lambda')}$. L'ouvert $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_1^n(V(\Lambda')) \subset \overline{V(\Lambda')}$ est alors invariant et sa frontière est nécessairement un graphe invariant (voir Herman [He2, chap. I]), ce qui contredit le fait que $\tilde{\rho}_1 = +\infty$.

2e cas: $0 < \tilde{\rho}_1 < +\infty$. C'est le cas étudié par Birkhoff (voir § 8) où il existe une zone d'instabilité C délimitée par deux graphes $C^- = \text{gr } \psi^-$ et $C^+ = \text{gr } \psi^+$ invariants par f_1 et ayant comme nombres de rotation respectifs $-\tilde{\rho}_1$ et $\tilde{\rho}_1$. La couronne C est alors attractive pour f_ε ($f_\varepsilon(C) \subset \text{Int } C$) si $\varepsilon \in]0, 1[$, et la famille $(\Lambda_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0, 1[}$, formée de compacts de C , est relativement compacte. Si $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers 1 telle que $(\Lambda_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Λ' , on sait par le même raisonnement que dans le premier cas que les ensembles $\text{Fr } U(\Lambda')$ et $\text{Fr } V(\Lambda')$ sont alors deux graphes invariants contenus dans C , ils sont donc chacun égal à un bord de C . Mais, d'après 11.3, on a plus précisément $\text{Fr } U(\Lambda') = C^-$ et $\text{Fr } V(\Lambda') = C^+$. On en déduit, comme au corollaire 8.4, les relations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\rho}_{\varepsilon_n}^- = -\tilde{\rho}_1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\rho}_{\varepsilon_n}^+ = \tilde{\rho}_1.$$

D'autre part, si x est un point radialement accessible par le haut et contenu dans un ensemble d'Aubry-Mather associé à \tilde{f}_ε et si $\tilde{x} = (\tilde{\theta}, r)$ vérifie $\pi(\tilde{x}) = x$, on a la

relation suivante, puisque f_ε dévie la verticale:

$$\tilde{\rho}_1 \circ \tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) \leq \tilde{\rho}_1 \circ \tilde{f}_\varepsilon((\tilde{\theta}, \psi^+(\tilde{\theta}))) = \tilde{\theta} + \tilde{\psi}^+(\tilde{\theta}).$$

En notant $\tilde{g}^+ = \text{Id} + \psi^+$, on obtient en fait pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{\rho}_1 \circ \tilde{f}_\varepsilon^n(\tilde{x}) \leq \tilde{g}^{+n}(\tilde{\theta}),$$

et on déduit l'inégalité $\tilde{\rho}_\varepsilon^+ \leq \tilde{\rho}_1$, et de façon analogue l'inégalité $-\tilde{\rho}_1 \leq \tilde{\rho}_\varepsilon^-$.

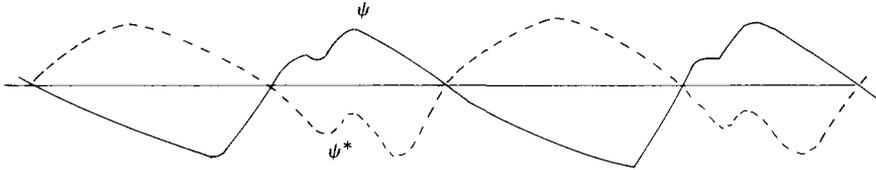
3e cas: $\tilde{\rho}_1 = 0$. Il existe dans ce cas un graphe $r = \tilde{\psi}(\tilde{\theta})$ invariant par \tilde{f}_1 possédant un point fixe. Les points fixes de \tilde{f}_1 appartiennent toujours à $\mathbb{R} \times \{0\}$ et en fait les points fixes du graphe précédent sont les points d'intersection de ce graphe avec la droite $\mathbb{R} \times \{0\}$. On note $\tilde{g} = \text{Id} + \tilde{\psi}$ et on sait (voir 11.1) que le graphe de $\tilde{\psi}^* = \tilde{g}^{-1} - \text{Id}$ est aussi invariant par \tilde{f}_1 . On a d'autre part les implications suivantes pour tout $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\tilde{\theta}) = 0 &\Rightarrow \tilde{\psi}^*(\tilde{\theta}) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}(\tilde{\theta}) = 0, \\ \tilde{\psi}(\tilde{\theta}) > 0 &\Rightarrow \tilde{\psi}^*(\tilde{\theta}) < 0, \\ \tilde{\psi}(\tilde{\theta}) < 0 &\Rightarrow \tilde{\psi}^*(\tilde{\theta}) > 0. \end{aligned}$$

On note

$$\tilde{C} = \{(\tilde{\theta}, r) \mid \inf(\tilde{\psi}^*(\tilde{\theta}), \tilde{\psi}(\tilde{\theta})) \leq r \leq \sup(\tilde{\psi}^*(\tilde{\theta}), \tilde{\psi}(\tilde{\theta}))\}$$

et $C = \pi(\tilde{C})$. L'ensemble C est alors un compact connexe séparant \mathbb{A} et invariant par f_1 . De plus, on a l'inclusion $f_\varepsilon(C) \subset C$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, ce qui implique que l'attracteur de Birkhoff Λ_ε de f est contenu dans C , les points de la forme $(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}(\tilde{\theta}))$ avec $\tilde{\psi}(\tilde{\theta}) = 0$ (et donc aussi $\tilde{\psi}^*(\tilde{\theta}) = 0$) appartiennent donc à Λ_ε et de plus ils sont radialement accessibles par le haut et par le bas. Comme ils sont fixes pour toutes les fonctions \tilde{f}_ε (en effet $\tilde{\psi}(\tilde{\theta}) = \tilde{\varphi}(\tilde{\theta}) = 0$), on a, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, $\tilde{\rho}_\varepsilon^- = \tilde{\rho}_\varepsilon^+ = 0$.



Remarque. Il y a beaucoup d'applications $\tilde{\varphi}$, même très simples, qui vérifient $\int_0^1 \tilde{\varphi}(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 0$ et telles que l'application f_1 ne possède pas de graphes invariants. Il suffit en effet d'avoir l'inégalité $\inf_{\theta \neq \theta'} (\varphi(\theta) - \varphi(\theta')) / (\theta - \theta') < -2$ (voir Herman [He2]). On obtient ainsi des applications simples ayant des attracteurs de Birkhoff avec deux nombres de rotation distincts.

11.5. PROPOSITION. Si $\tilde{\rho} \in \mathbb{R}$ est le nombre de rotation d'un ensemble d'Aubry-Mather de \tilde{f}_ε , $\varepsilon \in]0, 1[$, on a la relation $|\tilde{\rho}| \leq \|\varphi\|_0 / (1 - \varepsilon)$ où $\|\varphi\|_0 = \sup_{\theta \in \mathbb{T}^1} |\varphi(\theta)|$. En particulier, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on a:

$$|\tilde{\rho}_\varepsilon^-| \leq \frac{\|\varphi\|_0}{1 - \varepsilon}, \quad |\tilde{\rho}_\varepsilon^+| \leq \frac{\|\varphi\|_0}{1 - \varepsilon}.$$

Démonstration. Un ensemble \tilde{f}_ε -ordonnée \tilde{E} (voir 5.3) apparaît comme le graphe d'une fonction $\tilde{\psi}$, définie sur un fermé \tilde{K} de \mathbb{R} , telle que $\tilde{g} = \text{Id} + \psi$ soit un homéomorphisme croissant de \tilde{K} . On a alors l'égalité suivante entre fonctions définies sur \tilde{K} :

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{g} - \varepsilon \tilde{\psi} = \tilde{\varphi} \circ \tilde{g};$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\psi} \circ \tilde{g}^{k+1} - \frac{\varepsilon}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\psi} \circ \tilde{g}^k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\varphi} \circ \tilde{g}^{k+1}.$$

Si \tilde{E} est la préimage d'un ensemble d'Aubry-Mather de \tilde{f}_ε de nombre de rotation $\tilde{\rho}$, le terme de gauche de l'égalité précédente converge uniformément en tant que fonction définie sur $\tilde{K} = \tilde{p}_1(\tilde{E})$ vers le réel $\tilde{\rho}(1 - \varepsilon)$. On obtient ainsi l'inégalité $\tilde{\rho} \leq \|\varphi\|_0 / (1 - \varepsilon)$. □

11.6. On étudie, maintenant et jusqu'à la fin du § 11, le comportement de f_ε quand ε tend vers zéro. On remarque d'abord que \tilde{f}_ε converge dans la topologie compacte-ouverte vers l'application \tilde{f}_0 définie par:

$$\tilde{f}_0(\tilde{\theta}, r) = (\tilde{\theta} + r, \tilde{\varphi}(\tilde{\theta} + r)),$$

et que f_ε converge dans la topologie compacte-ouverte vers l'application $f_0: A \rightarrow A$ relevée par \tilde{f}_0 .

Les applications f_0 et \tilde{f}_0 ne sont plus des difféomorphismes, mais des applications à valeurs respectivement dans le graphe de φ et dans le graphe de $\tilde{\varphi}$.

La projection \tilde{p}_1 définit alors une conjugaison entre la restriction de \tilde{f}_0 à $\text{gr } \tilde{\varphi}$ et l'application $\tilde{g} = \text{Id} + \tilde{\varphi}$. De même, p_1 définit une conjugaison entre la restriction de f_0 à $\text{gr } \varphi$ et l'endomorphisme g de \mathbb{T}^1 , de degré 1, que définit \tilde{g} :

$$\begin{array}{ccc} \text{gr } \tilde{\varphi} & \xrightarrow{\tilde{f}_0} & \text{gr } \tilde{\varphi} & & \text{gr } \varphi & \xrightarrow{f_0} & \text{gr } \varphi \\ \tilde{p}_1 \downarrow & & \downarrow \tilde{p}_1 & & p_1 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathbb{R} & & \mathbb{T}^1 & \xrightarrow{g} & \mathbb{T}^1 \end{array}$$

La théorie des endomorphismes du cercle a été étudiée par plusieurs auteurs (voir [CGT], [Mi], [NPT], ...) et l'on va voir ici comment on peut retrouver certains de ces résultats.

11.7. LEMME. *Pour la distance de Hausdorff, on a:*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Lambda_\varepsilon = \text{gr } \varphi.$$

Démonstration. Puisque $|p_2 \circ f_\varepsilon(\theta, r)| \leq \varepsilon|r| + \sup_{\theta \in \mathbb{T}^1} |\varphi(\theta)|$, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]$, on ait: $f_\varepsilon(\mathbb{T}^1 \times [-M, +M]) \subset \mathbb{T}^1 \times [-M, +M]$ et par conséquent $\Lambda_\varepsilon \subset \mathbb{T}^1 \times [-M, +M]$. La famille $(\Lambda_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]}$ est donc relativement compacte pour la distance de Hausdorff. Soit maintenant Λ une valeur d'adhérence de la famille $(\Lambda_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}]}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Par le corollaire 10.6, on sait que $f_0(\Lambda) = \Lambda$. Ainsi, Λ est inclus dans $\text{gr } \varphi$; comme il sépare A (voir proposition 10.2), on a: $\Lambda = \text{gr } \varphi$. □

11.8. PROPOSITION. *Il existe deux réels $\tilde{\rho}_0^-$ et $\tilde{\rho}_0^+$ avec $\tilde{\rho}_0^- \leq \tilde{\rho}_0^+$ et vérifiant:*

(i) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\rho}_\varepsilon^- = \tilde{\rho}_0^-$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\rho}_\varepsilon^+ = \tilde{\rho}_0^+$;

(ii) Pour tout $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$-1 + k\tilde{\rho}_0^- \leq \tilde{g}^k(\tilde{\theta}) - \tilde{\theta} \leq 1 + k\tilde{\rho}_0^+;$$

(iii) Pour tout $\tilde{\rho} \in [\tilde{\rho}_0^-, \tilde{\rho}_0^+]$, il existe $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait:

$$-1 + k\tilde{\rho} \leq \tilde{g}^k(\tilde{\theta}) - \tilde{\theta} \leq 1 + k\tilde{\rho}$$

et tel que la suite $(\tilde{g}^k(\tilde{\theta}))_{k \in \mathbb{N}}$ se projette dans \mathbb{T}^1 dans le même ordre que la suite $(k\tilde{\rho} \text{ mod } 1)_{k \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. La famille $(\Lambda_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[}$ étant uniformément bornée, il en est de même pour les familles $(\tilde{\rho}_\varepsilon^-)_{\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[}$ et $(\tilde{\rho}_\varepsilon^+)_{\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[}$. On considère une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que les deux suites $(\tilde{\rho}_{\varepsilon_n}^-)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{\rho}_{\varepsilon_n}^+)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers deux réels $\tilde{\rho}^-$ et $\tilde{\rho}^+$.

On sait par 5.2 que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}_{\varepsilon_n}$, on a:

$$-1 + k\tilde{\rho}_{\varepsilon_n}^- < \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}_{\varepsilon_n}^k(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) < 1 + k\tilde{\rho}_{\varepsilon_n}^+.$$

Puisque, pour k fixé, la suite $f_{\varepsilon_n}^k$ converge uniformément sur tout compact vers f_0^k , que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Lambda_{\varepsilon_n} = \text{gr } \varphi$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\rho}_{\varepsilon_n}^- = \tilde{\rho}^-$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\rho}_{\varepsilon_n}^+ = \tilde{\rho}^+$, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\tilde{x} \in \text{gr } \tilde{\varphi}$, la relation:

$$-1 + k\tilde{\rho}^- \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}_0^k(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \leq 1 + k\tilde{\rho}^+.$$

On choisit maintenant $\tilde{\rho} \in [\tilde{\rho}^-, \tilde{\rho}^+]$. Il existe une suite $(\tilde{\rho}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\tilde{\rho}_n \in [\tilde{\rho}_{\varepsilon_n}^-, \tilde{\rho}_{\varepsilon_n}^+]$ convergeant vers $\tilde{\rho}$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un ensemble d'Aubry-Mather $\tilde{\Xi}_n \subset \Lambda_{\varepsilon_n}$ de nombre de rotation $\tilde{\rho}_n$ pour $\tilde{f}_{\varepsilon_n}$. La suite $(\tilde{\Xi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et l'on peut considérer une valeur d'adhérence $\tilde{\Xi} \subset \text{gr } \varphi$ de cette suite. On sait que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\Xi}_n$, on a:

$$-1 + k\tilde{\rho}_n^- < \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}_{\varepsilon_n}^k(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \leq 1 + k\tilde{\rho}_n^+.$$

On obtient donc par le raisonnement précédent la relation suivante, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\Xi}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$-1 + k\tilde{\rho}^- \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}_0^k(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \leq 1 + k\tilde{\rho}^+.$$

D'autre part, $\tilde{f}_0(\tilde{\Xi}) = \tilde{\Xi}$ et l'ordre défini par la première projection est préservé par \tilde{f}_0 , c'est-à-dire:

$$\tilde{p}_1(\tilde{x}) < \tilde{p}_1(\tilde{x}') \Rightarrow \tilde{p}_1(f(\tilde{x})) \leq \tilde{p}_1(f(\tilde{x}'))$$

puisque'il en est ainsi pour $\tilde{f}_{\varepsilon_n}$ sur $\tilde{\Xi}_n$, et donc si $\tilde{\theta} \in \tilde{p}_1(\tilde{\Xi})$, la suite $\tilde{g}^k(\tilde{\theta})$ se projette sur \mathbb{T}^1 dans le même ordre que la suite $k\tilde{\theta}$.

Enfin, ce qui précède prouve que le couple $(\tilde{\rho}^-, \tilde{\rho}^+)$ est indépendant de la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ choisie. En effet, si $(\varepsilon'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre suite tendant vers 0 et si $\tilde{\rho}'^-$ et $\tilde{\rho}'^+$ sont les limites respectives de $(\tilde{\rho}_{\varepsilon'_n}^-)_{n \in \mathbb{N}}$ et de $(\tilde{\rho}_{\varepsilon'_n}^+)_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient une orbite positive de nombre de rotation $\tilde{\rho}'^-$ (resp. $\tilde{\rho}'^+$) et par conséquent: $\tilde{\rho}^- \leq \tilde{\rho}'^- \leq \tilde{\rho}'^+ \leq \tilde{\rho}^+$. Par symétrie, on a $\tilde{\rho}'^- \leq \tilde{\rho}^- \leq \tilde{\rho}^+ \leq \tilde{\rho}'^+$, et la proposition est démontrée. \square

11.9. *Remarque.* Tout endomorphisme g de \mathbb{T}^1 de degré 1 et de classe C^1 , possède un relèvement $\tilde{g} = \text{Id} + \tilde{\varphi}$ où $\tilde{\varphi}$ est une fonction de classe C^1 et de période 1. En étudiant alors, comme on vient de le faire, la famille $(\tilde{f}_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[}$ définie par $\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{\theta}, r) = (\tilde{\theta} + r, \varepsilon r + \tilde{\varphi}(\tilde{\theta} + r))$, on retrouve l'existence d'un intervalle de rotation pour \tilde{g} . On pourrait alors par approximation retrouver les résultats pour les endomorphismes continus (voir [CGT], [Mi], [NPT]).

11.10. *Remarque.* Pour rester dans le domaine des analogies entre les endomorphismes du cercle et les attracteurs de Birkhoff, on note la ressemblance entre le résultat de Auslander et de Katznelson [AK] qui exprime qu'un endomorphisme du cercle, sans point périodique, est semi-conjugué à une rotation d'angle irrationnel et le résultat équivalent pour les attracteurs de Birkhoff. Un attracteur de Birkhoff Λ sans points périodiques a ses deux nombres égaux et irrationnels (9.8), et la dynamique sur cet attracteur est semi-conjuguée à une rotation d'angle irrationnel (5.10).

12. *Discontinuité des nombres de rotation*

12.1. On va montrer dans ce paragraphe que les applications définies en 10.8, qui à $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}$ associent les nombres de rotation $\tilde{\rho}^-(\tilde{f})$ et $\tilde{\rho}^+(\tilde{f})$ de l'attracteur de Birkhoff de \tilde{f} , ont des points de discontinuité quand on munit $\tilde{\mathcal{H}}$ de la topologie définie en 11.1.

Si $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^1)$, on notera \tilde{f}_φ le difféomorphisme de $\tilde{\mathbb{A}}$ défini par la relation:

$$\tilde{f}_\varphi(\tilde{\theta}, r) = (\tilde{\theta} + r, r + \tilde{\varphi}(\theta + r)) \quad \text{si } (\tilde{\theta}, r) \in \mathbb{A}$$

et f_φ le difféomorphisme de \mathbb{A} induit par \tilde{f}_φ .

On va construire dans 13.2 une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow (C^4(\mathbb{T}^1) : t \mapsto \gamma_t$, où $C^4(\mathbb{T}^1)$ est muni de la norme $\|\varphi\|_4 = \sup_{0 \leq s \leq 4} (\sup_{\theta \in \mathbb{T}^1} |D^s \varphi(\theta)|)$ et telle que:

pour tout $t \in [0, 1] \int_{\mathbb{T}^1} \gamma_t(\theta) d\theta = 0$;

f_{γ_0} n'a pas de graphe invariant de la forme $r = \psi(\theta)$ de nombre de rotation entier pour \tilde{f}_{γ_0} , mais possède quand même un graphe invariant;

f_{γ_t} n'a pas de graphe invariant si $t \in]0, 1[$.

12.2. D'après le théorème des courbes invariantes (voir par exemple Herman ([He 2, chap. IV]) il existe $a > 0$ tel que si $\varphi \in C^4(\mathbb{T}^1)$ vérifie $\int_{\mathbb{T}^1} \varphi(\theta) d\theta = 0$ et $\|\varphi\|_4 < a$ alors f_φ admet au moins un graphe invariant de la forme $r = \psi(\theta)$.

D'après Herman ([He 2 p. 65-70]), on peut construire un homéomorphisme \tilde{g} croissant de \mathbb{R} tel que:

$\tilde{\psi} = \tilde{g} - \text{Id}$ est 1-périodique;

$\tilde{g}(0) = 0$;

pour tout $t \in]0, 1[$, $\tilde{g}(t) > t$;

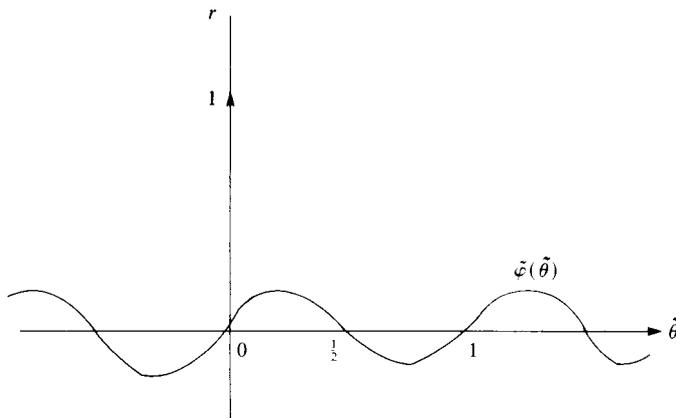
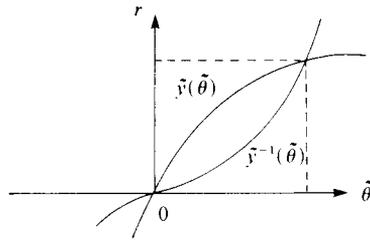
\tilde{g} est de classe C^4 sur $]0, 1[$;

\tilde{g} est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) > 1$;

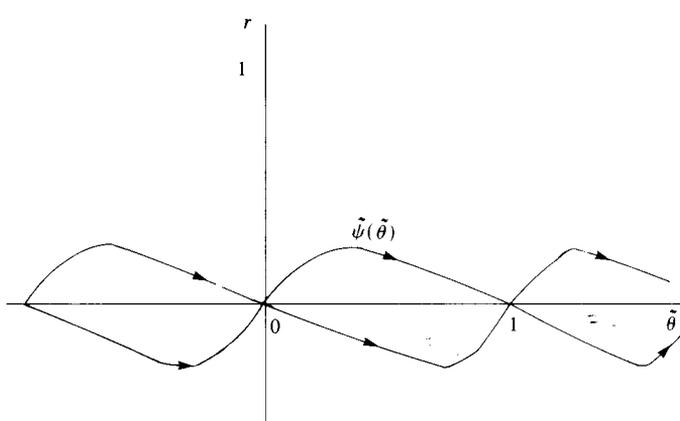
\tilde{g} est dérivable à gauche en 1 et $g'_g(1) < 1$;

l'application $\tilde{\varphi} = \tilde{g} + \tilde{g}^{-1} - 2 \text{Id}$ est de classe C^4 , ne s'annule qu'aux points de la forme $k/2$ où $k \in \mathbb{Z}$ et vérifie $\int_0^1 \tilde{\varphi}(\theta) d\theta = 0$;

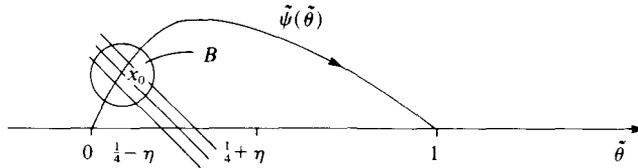
l'application $\varphi \in C^4(\mathbb{T}^1)$ définie par $\tilde{\varphi}$ vérifie $\|\varphi\|_4 < a$.



Les points fixes de \tilde{f}_φ sont alors les points de la forme $(k + \frac{1}{2}, 0)$, avec $k \in \mathbb{Z}$, qui sont elliptiques et les points de la forme $(k, 0)$, avec $k \in \mathbb{Z}$, qui sont hyperboliques. Les deux branches de la variété instable de $(k, 0)$ sont alors formées aux extrémités près respectivement d'une branche de la variété stable de $(k + 1, 0)$ et d'une branche de la variété stable de $(k - 1, 0)$. Ces variétés sont formées des graphes de $\tilde{\psi} = \tilde{g} - \text{Id}$ et de $\tilde{g}^{-1} - \text{Id}$.



La droite $\tilde{\theta} + r = \frac{1}{4}$ rencontre le graphe de $\tilde{\psi}$ en un point \tilde{x}_0 . Il existe alors une boule centrée en x_0 telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on ait $f^k(B \cap \text{gr } \tilde{\psi}) \cap B = \emptyset$ et un réel $\eta > 0$ tel que si $\tilde{x} = (\tilde{\theta}, r) \in \text{gr } \tilde{\psi}$ vérifie $|\tilde{\theta} + r - \frac{1}{4}| < \eta$ alors $\tilde{x} \in B$.



On considère alors une fonction $h \in C^4(\mathbb{T}^1)$ dessinée cidessous et vérifiant:

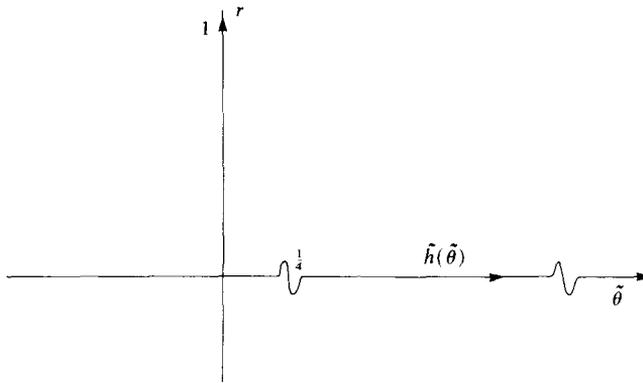
$$h(\theta) = 0 \text{ si } \theta \notin [\frac{1}{4} - \eta, \frac{1}{4} + \eta] \text{ mod } 1;$$

$$h(\frac{1}{4}) = 0, h'(\frac{1}{4}) < 0;$$

$$\int_{\mathbb{T}^1} h(\theta) d\theta = 0;$$

$$\text{pour tout } \theta \in [\frac{1}{4} - \eta, \frac{1}{4} + \eta], |h(\theta)| < \varphi(\theta)$$

$$\inf_{\theta \in \mathbb{T}^1} Dh(\theta) + D\varphi(\theta) < -2.$$

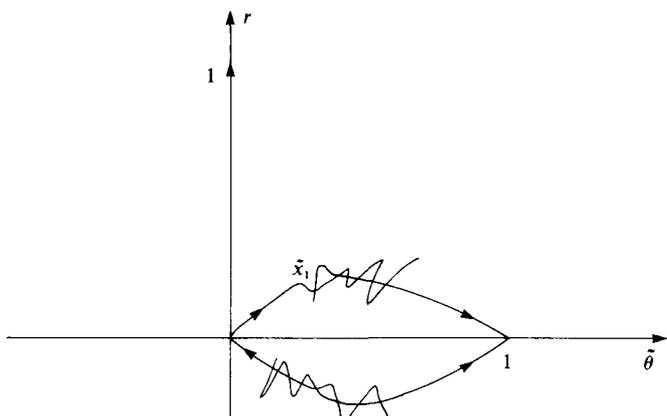


On définit ensuite la famille $(\varphi_u)_{u \in [0,1]}$ en posant $\varphi_u = \varphi + uh$ si $u \in [0, 1]$. On a les résultats suivants:

Il existe $u_0 \in]0, 1[$, tel que si $u \leq u_0$ on ait $\|\varphi_u\|_4 < a$, et par conséquent tel que f_{φ_u} admette au moins un graphe invariant.

L'application f_{φ_1} n'a pas de graphe invariant puisque $\inf_{\theta \in \mathbb{T}^1} D\varphi_1(\theta) < -2$ (voir la remarque en 11.4).

Si $u \in]0, 1]$ les points fixes de \tilde{f}_{φ_u} sont les points de la forme $(k + \frac{1}{2}, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$, qui sont elliptiques et les points de la forme $(k, 0)$, avec $k \in \mathbb{Z}$, qui sont hyperboliques. De plus la variété instable de $(0, 0)$ et la variété stable de $(1, 0)$ se coupent transversalement au point x_1 . On a une intersection homoclinique transverse. On en déduit que \tilde{f}_{φ_u} n'a pas de graphe invariant de nombre de rotation 0. En effet, un tel graphe devrait posséder un point fixe, ce qui l'oblige à rencontrer une des variétés stable ou instable précédentes et de ce fait, à contenir le point $(0, 0)$. Ceci est impossible à cause de l'intersection homoclinique transverse.



L'ensemble des réels $u \in [0, 1]$ tels que f_{φ_u} admette un graphe invariant est un fermé (voir Herman [He2], page 56)), et si on note $u \in]0, 1[$ sa borne supérieure, on obtient le chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow C^4(\mathbb{T}^1)$ demandé en 12.2 en posant $\gamma_t = \varphi_{u_t + t(1-u_t)}$.

On note que f_{γ_0} n'ayant pas de graphe invariant de nombre de rotation 0, il n'a pas de graphe invariant de nombre de rotation entier, car l'ensemble des nombres de rotation est un fermé invariant par translation entière (voir 11.1).

12.3. PROPOSITION. *Les applications de $\tilde{\mathcal{H}}$ dans \mathbb{R} qui à tout élément \tilde{f} de $\tilde{\mathcal{H}}$ associent les réels $\tilde{\rho}^+(\tilde{f})$ et $\tilde{\rho}^-(\tilde{f})$ ont des points de discontinuité dans $\tilde{\mathcal{H}}$.*

Démonstration. On va supposer que l'application $\tilde{f} \mapsto \tilde{\rho}^+(\tilde{f})$ est continue sur $\tilde{\mathcal{H}}$ et on aboutira à une contradiction. La méthode reste valable pour l'application $\tilde{f} \mapsto \tilde{\rho}^-(\tilde{f})$. On rappelle que $\gamma : [0, 1] \rightarrow C^4(\mathbb{T}^1)$ a été définie en 12.1 et 12.2. On définit une famille $(\tilde{f}_\lambda^t)_{t \in [0,1], \lambda \in]0,1[}$ d'éléments de $\tilde{\mathcal{H}}$ par la relation :

$$f'_\lambda(\tilde{\theta}, r) = (\tilde{\theta} + r, \lambda r + \tilde{\gamma}_t(\tilde{\theta})) \quad \text{pour tout } (\tilde{\theta}, r) \in \tilde{\mathbb{A}}.$$

L'application \tilde{f}_{γ_0} admet au moins un graphe invariant, et donc par 11.4, il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0, 1[$ $|\tilde{\rho}^+(\tilde{f}_\lambda^t)| \leq M$. De même par 11.4, pour tout $t \neq 0$, on a :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \rho^+(\tilde{f}_\lambda^t) = +\infty$$

On fixe un entier $\omega > M$ et on pose $\lambda_n = 1 - (1/2^{n+1})$, si $n \in \mathbb{N}$. Sous l'hypothèse de continuité de l'application $\tilde{f} \mapsto \tilde{\rho}^+(\tilde{f})$, il existe t_n vérifiant $0 < t_n \leq 1/2^n$ et $\tilde{\rho}^+(\tilde{f}_{\lambda_n}^{t_n}) < \omega$ et il existe $\lambda'_n > \lambda_n$ tel que $\tilde{\rho}^+(\tilde{f}_{\lambda'_n}^{t_n}) = \omega$. On note alors $\Lambda_n = \Lambda(\tilde{f}_{\lambda'_n}^{t_n})$ l'attracteur de Birkhoff de $\tilde{f}_{\lambda'_n}^{t_n}$ et on définit les ensembles $\Lambda_n^+ = \Lambda^+(\tilde{f}_{\lambda'_n}^{t_n})$, $V_n^+ = V^+(\Lambda_n)$, $\Lambda_n^{++} = \text{Fr } V_n^+$.

On utilise maintenant un raisonnement analogue à celui exposé dans la proposition 11.4 (cas où $\tilde{\rho}_1 = +\infty$). Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\tilde{\rho}^+(\tilde{f}_{\lambda'_n}^{t_n}) = \omega$, la suite $(\Lambda_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée de même que la suite $(\Lambda_n^{++})_{n \in \mathbb{N}}$. On considère alors une valeur d'adhérence de cette dernière et on obtient un compact connexe Λ' séparant $\tilde{\mathbb{A}}$. Si on note $V(\Lambda')$ la composante supérieure de $\tilde{\mathbb{A}} \setminus \Lambda'$, on montre la relation $f_0^{-1}(V(\Lambda')) \subset V(\Lambda')$ en utilisant les inclusions $\tilde{f}_{\lambda'_n}^{t_n^{-1}}(V_n^+) \subset V_n^+$, $n \in \mathbb{N}$. Du fait que l'on a $\int_0^1 \tilde{\gamma}_0(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 0$ on en déduit l'inclusion $V(\Lambda') \subset f_{\gamma_0}(V(\Lambda')) \subset \overline{V(\Lambda')}$ puis, utilisant la théorie de Birkhoff

(voir Herman [He2, chap. I]), on en déduit l'existence d'une graphe invariant de la forme $r = \psi(\theta)$ contenu dans la frontière de $V(\Lambda')$ et donc dans Λ' .

Or Λ' est une valeur d'adhérence de la suite $(\Lambda_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$, par conséquent chacun des ensembles $H^- = \{(\theta, r), r \leq \psi(\theta)\}$ et $H^+ = \{(\theta, r), r \geq \psi(\theta)\}$ rencontre une valeur d'adhérence de la suite $(\Lambda_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ et, comme on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\Lambda}_n^+$ la double inégalité:

$$-1 - k\omega \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}_{\lambda_n}^{-k}(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) \leq 1 - k\omega,$$

on peut trouver des points $\tilde{x}_0 \in H^-$ et $\tilde{x}_1 \in H^+$ vérifiant, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$-1 - k\omega \leq \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}_{\gamma_0}^{-k}(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(x) \leq 1 - k\omega \quad i = 0, 1.$$

On en déduit alors que le nombre de rotation induit par \tilde{f}_{γ_0} sur le graphe de $\tilde{\psi}$ est égal à ω , ce qui contredit la non-existence de graphe de nombre de rotation entier pour \tilde{f}_{γ_0} .

13. Étude des ensembles de Cantor hyperboliques des attracteurs de Birkhoff

L'attracteur de Birkhoff d'une application $f \in \mathcal{H}$, ayant ses nombres de rotation inférieur et supérieur distincts, possède par 9.8 une infinité d'ensembles de Cantor invariants. On va étudier dans ce paragraphe la question de l'hyperbolicité possible de ces ensembles et on montrera deux résultats: la possibilité d'avoir une infinité d'ensembles de Cantor hyperboliques et, dans le cas où le nombre de notation inférieur (ou supérieur) de l'attracteur est irrationnel, la non-hyperbolicité de l'ensemble de Cantor d'Aubry-Mather correspondant. On rappelle d'abord la définition d'un ensemble hyperbolique ainsi que quelques propriétés de ces ensembles (voir [Ni] par exemple).

13.1. Soit f un difféomorphisme de classe C^r , $r \geq 1$ d'une variété riemannienne M de dimension 2 et X un fermé de M invariant par f ($f(X) = X$). L'ensemble X sera dit hyperbolique s'il existe deux réels $C \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda \in]0, 1[$, et pour tout $x \in X$ une décomposition $T_x M = E^u(x) \oplus E^s(x)$ en deux droites telles que:

(i) Les applications $x \mapsto E^u(x)$ et $x \mapsto E^s(x)$ sont des sections continues sur X du fibré projectif de M .

(ii) Pour tout $x \in X$, $Tf_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$ et $Tf_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$.

(iii) Pour tout $x \in X$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\xi \in E^u(x)$,

$$\|Tf_x^{-n}(\xi)\| \leq C\lambda^n \|\xi\|.$$

(iv) Pour tout $x \in X$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\xi \in E^s(x)$,

$$\|Tf_x^n(\xi)\| \leq C\lambda^n \|\xi\|.$$

Si X est hyperbolique on montre l'existence de deux familles $(\gamma_x^u)_{x \in X}$ et $(\gamma_x^s)_{x \in X}$ d'immersions injectives de \mathbb{R} de classe C^r vérifiant $\gamma_x^u(0) = \gamma_x^s(0) = x$ telles qu'en notant $W^u(x)$ et $W^s(x)$ les images respectives de γ_x^u et de γ_x^s , autrement appelées respectivement variétés instables et stables, on a pour tout $x \in \Lambda$:

(i) $W^u(x) = \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}$;

(ii) $W^s(x) = \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}$;

(iii) $W^u(x)$ (resp. $W^s(x)$) est tangent en x à $E^u(x)$ (resp. $E^s(x)$);

(iv) si $y \in W^u(x)$ (resp. $W^s(x)$), alors

$$W^u(y) = W^u(x) \text{ (resp. } W^s(y) = W^s(x));$$

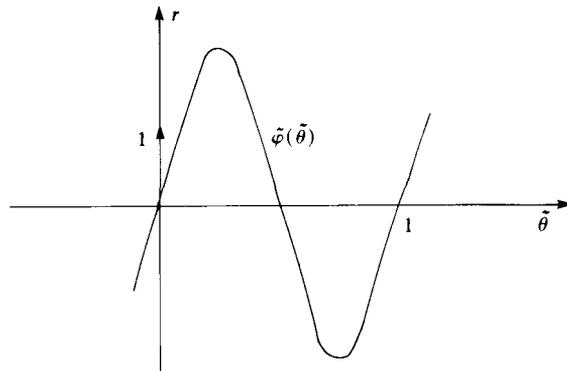
(v) si $x_0 \in X$ et si $T \in \mathbb{R}^+$ on peut trouver sur un voisinage V de x_0 un nouveau paramétrage des variétés stables et instables noté γ_x^{u*} et γ_x^{s*} avec $\gamma_{x_0}^{u*} = \gamma_{x_0}^u$, $\gamma_{x_0}^{s*} = \gamma_{x_0}^s$ et tel que l'application $V \times [-T, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ soit continue,

$$(x, t) \mapsto \gamma_x^*(t).$$

On peut montrer d'autre part que si X est hyperbolique et compact, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si x et y sont deux points de X vérifiant pour tout $k \in \mathbb{Z}$ la relation $d(f^k(x), f^k(y)) \leq \varepsilon$, alors $x = y$. On dit alors que X est expansif.

13.2. Soit $\tilde{\varphi}$ une application de classe C^∞ , de période 1, vérifiant:

- (i) $\int_0^1 \tilde{\varphi}(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta} = 0$.
- (ii) $\tilde{\varphi}^{-1}([-2, +2]) \cap [0, 1] = [0, \frac{1}{6}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{5}{6}, 1]$.
- (iii) Pour tout $x \in [0, \frac{1}{6}] \cup [\frac{5}{6}, 1]$ $\varphi'(x) = 12$.
- (iv) Pour tout $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $\varphi'(x) = -12$.



On définit la famille $(\tilde{f}_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1]}$ de difféomorphismes de $\tilde{\mathbb{A}}$ par la relation:

$$\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{\theta}, r) = (\tilde{\theta} + r, \varepsilon r + \tilde{\varphi}(\tilde{\theta} + r)) \quad \text{si } (\tilde{\theta}, r) \in \tilde{\mathbb{A}},$$

et la famille $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1]}$ de difféomorphismes de \mathbb{A} associée. On peut montrer (voir Herman [He2, p. 26]) que \tilde{f}_1 n'a pas de graphe invariant de la forme $r = \tilde{\psi}(\tilde{\theta})$ et possède pour tout $\tilde{\rho} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un ensemble d'Aubry-Mather hyperbolique de nombre de rotation $\tilde{\rho}$. Plus précisément on va montrer la proposition suivante:

13.3. PROPOSITION. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, f_ε n'a pas de graphe invariant de la forme $r = \psi(\tilde{\theta})$, et si K est un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de notation $\tilde{\rho}$ pour \tilde{f}_ε , où $\tilde{\rho}$ est irrationnel et vérifie $\tilde{\rho}(1 - \varepsilon) \leq 1$, alors K est hyperbolique. En particulier tous les ensembles de Cantor d'Aubry-Mather de f_1 sont hyperboliques.

Démonstration. On suppose, soit que K est un graphe invariant de nombre de rotation quelconque, soit que c'est un ensemble d'Aubry-Mather de type Cantor de nombre de rotation $\tilde{\rho} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On définit $\tilde{K} = \pi^{-1}(K)$ et $\tilde{K}' = \tilde{f}_1(\tilde{K})$. L'ensemble

\tilde{K} est le graphe d'une application $\tilde{\psi}$ définie sur \tilde{K}' , de période 1. Puisque $\tilde{f}_\varepsilon(\tilde{\theta}, r) = (\tilde{\theta} + r, \varepsilon r + \tilde{\varphi}(\tilde{\theta} + r))$, l'application $\tilde{g} = \text{Id} + \tilde{\psi}$ définit un homéomorphisme croissant de \tilde{K}' et on a de plus l'égalité suivante pour tout $\tilde{\theta} \in \tilde{K}'$:

$$\varepsilon \tilde{\psi}(\tilde{\theta}) + \tilde{\varphi}(\tilde{\theta} + \tilde{\psi}(\tilde{\theta})) = \tilde{\psi}(\tilde{\theta} + \tilde{\psi}(\tilde{\theta})).$$

Cette égalité peut s'écrire sous l'une des formes suivantes

- (1) $\tilde{\varphi} \circ \tilde{g} = \tilde{\psi} \circ \tilde{g} - \varepsilon \tilde{\psi};$
- (2) $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} - \varepsilon \tilde{\psi} \circ \tilde{g}^{-1};$
- (3) $\text{Id} + \tilde{\varphi}/(1 + \varepsilon) = (\tilde{g} + \varepsilon \tilde{g}^{-1})/(1 + \varepsilon).$

L'ensemble \tilde{K}' n'a pas de points isolés, et puisque $\text{Id} + \tilde{\varphi}/(1 + \varepsilon) = (\tilde{g} + \varepsilon \tilde{g}^{-1})/(1 + \varepsilon)$ est croissante sur \tilde{K}' on en déduit la relation

$$(4) \quad \tilde{K}' \cap]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[= \emptyset,$$

et le fait que \tilde{K}' est un ensemble de Cantor.

L'application $\tilde{\psi}$ vérifie les inégalités suivantes: pour tout $\tilde{\theta} \in \tilde{K}'$,

$$(5) \quad -1 < \tilde{\psi}(\tilde{\theta}) - \tilde{\rho} < 1;$$

pour tout $\tilde{\theta} \in \tilde{K}'$ et pour tout $\tilde{\theta}' \in \tilde{K}'$,

$$(6) \quad -1 < \tilde{\psi}(\tilde{\theta}) - \tilde{\psi}(\tilde{\theta}') < 1.$$

Dans le cas $\varepsilon = 1$ les relations (4), (6), (2) prouvent que $|\varphi|_K| \leq 1$ et donc que $K' = p_1(K) \subset [-\frac{1}{12}, +\frac{1}{12}] \text{ mod } 1$. Par conséquent, si $x = (\theta, r) \in K$ alors $\theta + r \in [-\frac{1}{12}, +\frac{1}{12}] \text{ mod } 1$ et la matrice de $Df_1(x)$ s'écrit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}.$$

La différentielle de f est donc constante sur K et hyperbolique, K est donc un ensemble de Cantor hyperbolique pour f et ceci quelque soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Dans le cas $\varepsilon < 1$, on écrit pour tout $\tilde{\theta} \in \tilde{K}'$,

$$\varphi(\tilde{\theta}) = (1 - \varepsilon)\psi(\tilde{\theta}) + \varepsilon(\psi(\tilde{\theta}) - \psi \circ \tilde{g}^{-1}(\tilde{\theta}))$$

et d'après (5) et (6) on obtient:

$$(1 - \varepsilon)(-1 + \tilde{\rho}) - \varepsilon \leq \varphi(\tilde{\theta}) \leq (1 - \varepsilon)(1 + \tilde{\rho}) + \varepsilon$$

et si on suppose que $|\tilde{\rho}|(1 - \varepsilon) \leq 1$, on obtient:

$$-2 \leq \varphi(\tilde{\theta}) \leq 2.$$

On en déduit à l'aide de (4) que $K' = p_1(K) \subset [-\frac{1}{6}, +\frac{1}{6}] \text{ mod } 1$ et avec le même raisonnement que dans le cas $\varepsilon = 1$, on obtient que K est hyperbolique (cette méthode d'obtention d'ensemble de Cantor a été étudiée par Goroff [G] et par Herman (communication personnelle)). □

13.4. COROLLAIRE. *Pour tout $C > 0$, il existe $\varepsilon_1 < 1$ tel que, pour tout réel $\varepsilon > \varepsilon_1$ et tout nombre irrationnel $\tilde{\rho}$ vérifiant $|\tilde{\rho}| < C$, l'attracteur de Birkhoff de \tilde{f}_ε possède des ensembles de Cantor d'Aubry-Mather de nombre de rotation $\tilde{\rho}$, et tous ces ensembles de Cantor sont hyperboliques.*

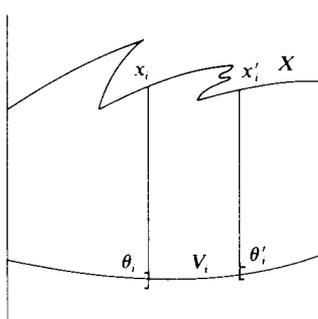
Démonstration. Puisque $\int_0^1 \tilde{\varphi}(\tilde{\theta}) d\theta = 0$ et puisque par 13.3 f_1 n'a pas de graphe invariant, les nombres de rotation inférieurs et supérieurs $\tilde{\rho}^-(\tilde{f}_\varepsilon)$ et $\tilde{\rho}^+(\tilde{f}_\varepsilon)$ tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$ (voir 13.2). Il suffit ensuite d'utiliser 9.8 et 13.3. □

13.5. On montre maintenant pourquoi les ensembles d'Aubry-Mather formés de points radialement accessibles ne sont jamais hyperboliques. On considère une application $f \in \mathcal{H}$, un compact connexe X séparant \mathbb{A} et invariant par f , les nombres de rotation $\tilde{\rho}_X^-$ et $\tilde{\rho}_X^+$ (voir 9.7) définis pour un relèvement $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}$ de f et on suppose que $\tilde{\rho}_X^-$ est irrationnel. On note alors K l'ensemble d'Aubry-Mather correspondant à $\tilde{\rho}_X^-$ et donc formé de points radialement accessibles par le bas. On note aussi β l'angle compris entre 0 et $\pi/2$ caractérisant la déviation à droite de la verticale par f .

13.6. PROPOSITION. Si $\tilde{\rho}_X^- \notin \mathbb{Q}$, l'ensemble d'Aubry-Mather K formé de points radialement accessibles correspondant n'est pas hyperbolique.

Démonstration. Si l'ensemble K est un graphe invariant le résultat est évident. En effet, K étant minimal, la restriction de f à K est topologiquement conjuguée à une rotation et n'est pas expansive, ainsi K n'est pas hyperbolique.

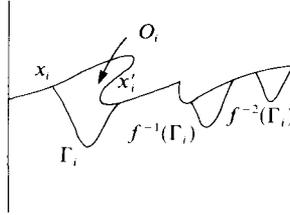
On suppose donc que K est un ensemble de Cantor, on note alors $\tilde{K} = \pi^{-1}(K)$, $K' = p_1(K)$, $\tilde{K}' = \tilde{p}_1(\tilde{K})$. On écrit aussi $\mathbb{T}^1 \setminus K' = \bigcup_{i \in I} V_i$ où $(V_i)_{i \in I}$ est une famille d'intervalles ouverts disjoints de \mathbb{T}^1 , on note $(\theta_i)_{i \in I}$ et $(\theta'_i)_{i \in I}$ les familles des extrémités respectivement gauches et droites de $(V_i)_{i \in I}$, $(x_i)_{i \in I}$ et $(x'_i)_{i \in I}$ les familles des points de K correspondants.



On suppose que K est hyperbolique et on note alors $E^u(x)$ et $E^s(x)$ les directions instables et stables de tout point $x \in K$, et de même $W^u(x)$ et $W^s(x)$ les variétés instables et stables de x .

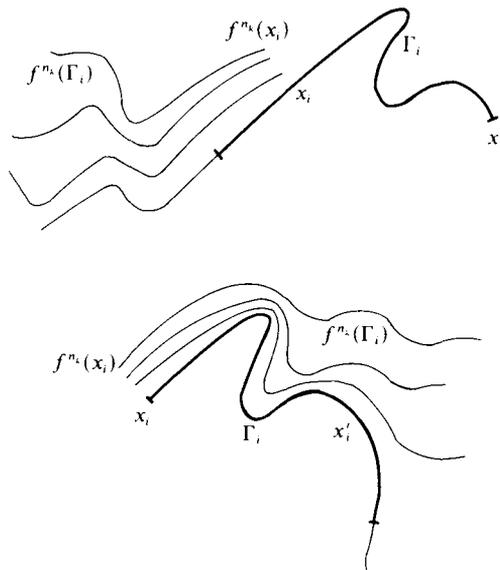
Soit $i \in I$, les points θ_i et θ'_i forment les extrémités d'un même intervalle de $\mathbb{T}^1 \setminus K'$ et on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-n}(x_i), f^{-n}(x'_i)) = 0$. Par conséquent $W^u(x_i) = W^u(x'_i)$, et on note Γ_i le chemin de classe C^1 contenu dans $W^u(x_i)$ et joignant x_i à x'_i . De même si $n \geq 0$, $f^{-n}(\Gamma_i)$ est la partie de $W^u(f^{-n}(x_i))$ qui joint $f^{-n}(x_i)$ à $f^{-n}(x'_i)$ et donc, puisque K est hyperbolique, la suite des diamètres des ensembles $f^{-n}(\Gamma_i)$ tend vers zéro de façon exponentielle; en particulier, la suite $(f^{-n}(\Gamma_i))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour la distance de Hausdorff. On en déduit l'inclusion $\Gamma_i \subset X$, car dans le cas

contraire le complémentaire du compact connexe $X \cup \Gamma_i$ posséderait une composante connexe bornée notée O_i , chaque itérée $f^{-n}(O_i)$, $n \in \mathbb{N}$, étant alors une composante connexe du complémentaire de $f^{-n}(X \cup \Gamma_i) = X \cup f^{-n}(\Gamma_i)$, la famille $(f^{-n}(O_i))_{i \in I}$ serait uniformément bornée en mesure, ce qui contredit le caractère dissipatif de f .



Le compact K étant minimal pour f , on peut choisir une suite extraite $(f^{n_k}(x_i))_{k \in \mathbb{N}}$ de la suite $(f^n(x_i))_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x_i . On définit alors une famille γ_x^{u*} de paramétrages de $W^u(x)$ au voisinage de x_i comme en 13.1 (v) et on fixe $T > 0$. La suite $\gamma_{f^{n_k}(x_i)}^{u*}([-T, +T])$ converge au sens de la distance de Hausdorff vers $\gamma_{x_i}^{u*}([-T, +T])$. Mais pour n assez grand l'un des ensembles $f^{-n_k}(\gamma_{f^{n_k}(x_i)}^{u*}([0, T]))$ ou $f^{-n_k}(\gamma_{f^{n_k}(x_i)}^{u*}([-T, 0]))$ est contenu dans Γ_i , et donc dans X , et il en est de même de l'un des ensembles $\gamma_{f^{n_k}(x_i)}^{u*}([0, T])$ ou $\gamma_{f^{n_k}(x_i)}^{u*}([-T, 0])$. On en déduit, par un passage à la limite, que X contient soit $\gamma_{x_i}^{u*}([0, T])$ soit $\gamma_{x_i}^{u*}([-T, 0])$, et comme cela est vrai pour tout $T > 0$, X contient en fait soit $\gamma_{x_i}^{u*}([0, +\infty[)$ soit $\gamma_{x_i}^{u*}(-\infty, 0])$. On écrit $x'_i = \gamma_{x_i}^{u*}(t_0)$ et on suppose $t_0 > 0$, le cas $t_0 < 0$ se traitant de façon analogue.

On en déduit, en posant $x''_i = x_i$ et $\Gamma = \gamma_{x_i}^{u*}([-1, t_0])$ dans le cas où $\gamma_{x_i}^{u*}(-\infty, 0] \subset X$ ou $x''_i = x'_i$ et $\Gamma = \gamma_{x_i}^{u*}([0, t_0 + 1])$ dans le cas où $\gamma_{x_i}^{u*}([0, +\infty) \subset X$, l'existence d'un point $x''_i \in K$ et d'un arc $\Gamma \subset W^u(x)$, contenant x''_i et dont x''_i n'est pas une de ses extrémités, et tel que $\Gamma \subset X$.

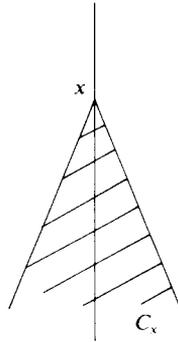


En utilisant maintenant la minimalité de K et donc le fait que tout point $x \in X$ est limite d'une suite de la forme $f^{n_k}(x''_i)$, la relation 13.1(v), la définition de la variété instable et le caractère fermé de X , on en déduit par un raisonnement analogue au précédent que, pour tout $x \in K$, on a $W^u(x) \subset X$.

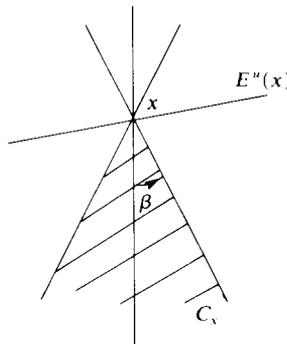
On utilise maintenant le fait que K est formé de points radialement accessibles pour montrer une contradiction. On rappelle que β a été défini en 13.5 et on définit, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{A}}$, l'ensemble suivant:

$$C_x = \{y \in \tilde{\mathbb{A}} \mid |\tilde{p}_1(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{y})| < \text{tg } \beta (\tilde{p}_2(\tilde{x}) - \tilde{p}_2(y))\}$$

et, pour tout $x \in \mathbb{A}$, $C_x = \pi(C_{\tilde{x}})$ où $\pi(\tilde{x}) = x$.

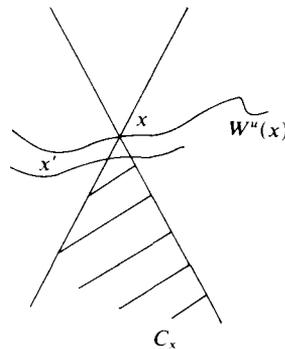


On sait par 4.5 et 4.8 que $C_x \cap X = \emptyset$ pour tout $x \in X$ (en fait les propositions 4.5 et 4.8 ont été montrées pour les ensembles Λ_0 et Λ_1 définis dans la partie I mais le résultat reste vrai pour un compact connexe séparant \mathbb{A} invariant quelconque). En particulier $W^u(x) \cap C_x = \emptyset$ si $x \in K$ et donc $E^u(x) \subset C_I(\beta) \cup C_{II}(\beta)$ (voir 1.2).



On fixe $x \in X$. Puisque la direction $E^u(x)$ n'est pas verticale, il existe une fonction $r = \psi(\theta)$, définie au voisinage de $p_1(x)$, et dont le graphe est une partie de $W^u(x)$ contenant x . Le point x n'est pas isolé dans K et tout point x' de K proche de x est soit sur le graphe précédent, soit strictement en-dessous, puisqu'il est radialement accessible. Mais dans le dernier cas la variété instable de x' est localement un graphe qui doit passer sous le point x (voir 13.1(v)), ce qui contredit cette fois-ci le fait que x est radialement accessible (voir figure ci-après). Par conséquent, tout point de K suffisamment proche de x est contenu dans $W^u(x)$.

Or parmi ces points existent des itérés $f^n(x)$ où $n > 0$ et on a ainsi une contradiction. En effet si $W^u(x) = W^u(f^n(x))$, $n > 0$, on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} d(f^m(x), f^{n+m}(x)) = 0$ et toute valeur d'adhérence de la suite $(f^m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ est un point périodique contenu dans K , ce qui est impossible. \square



Si x' est en dessous de $W^u(x)$, alors x n'est pas radialement accessible.

13.7. *Remarque.* Sous les notations de 13.2, on déduit de 13.3 et de 13.6 que, si $\tilde{\rho}^+(\tilde{f}_\varepsilon)$ est irrationnel, on a $\tilde{\rho}^+(\tilde{f}_\varepsilon) \geq 1/(1 - \varepsilon)$ (comparer avec la proposition 11.5).

14. *Étude des orbites périodiques des attracteurs de Birkhoff*

14.1. On se fixe dans ce paragraphe une application $f \in \mathcal{H}$ et un relèvement $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}$ de f . Si les nombres de rotation $\tilde{\rho}^-(\tilde{f})$ et $\tilde{\rho}^+(\tilde{f})$ sont distincts on sait par 9.8 qu'il existe une infinité d'orbites périodiques dans l'attracteur de Birkhoff de f , ce sont ces orbites que l'on va étudier dans ce chapitre.

Si x est un point périodique de f et si $q \in \mathbb{N}^*$ est sa plus petite période, il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ (qui dépend de \tilde{f}) tel que si $\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{A}}$ vérifie $\pi(\tilde{x}) = x$ alors $\tilde{f}^q(\tilde{x}) = p$. On dit alors que x est un point périodique de type (p, q) . Les itères de x sont aussi des points périodiques de type (p, q) .

On a trois possibilités pour x .

1er cas. C'est un point-selle dissipatif, les valeurs propres (réelles) λ_1 et λ_2 de Tf_x^q vérifient:

$$|\lambda_1| < 1, \quad |\lambda_2| > 1, \quad 0 < \lambda_1 \lambda_2 < 1.$$

Dans ce cas la variété stable $W^s(x) = \{y \in \mathbb{A} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}$ et la variété instable $W^u(x) = \{y \in \mathbb{A} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}$ sont des immersions injectives de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{A} . De même les ensembles $W^s(\tilde{x}) = \{\tilde{y} \in \tilde{\mathbb{A}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(\tilde{x}), \tilde{f}^n(\tilde{y})) = 0\}$ et $W^u(\tilde{x}) = \{\tilde{y} \in \tilde{\mathbb{A}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-n}(\tilde{x}), \tilde{f}^{-n}(\tilde{y})) = 0\}$ où $\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{A}}$ vérifie $\pi(\tilde{x}) = x$ sont des immersions injectives de classe C^1 de \mathbb{R} dans $\tilde{\mathbb{A}}$.

2ème cas. C'est un puits, les valeurs propres (réelles ou complexes) λ_1 et λ_2 de Tf_x^q vérifient: $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$ la variété stable de x est alors un ouvert contenant x .

3ème cas. Le point est parabolique, les valeurs propres (réelles) λ_1 et λ_2 de Tf_x^q vérifient: $|\lambda_1| = 1, |\lambda_2| < 1$.

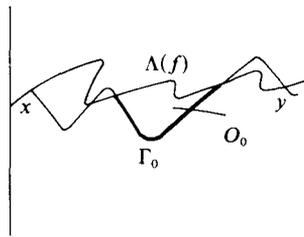
On va étudier les points-selles et les puits. On note déjà le résultat suivant (voir Le Calvez [L]) montré dans le cas où p et q étaient premiers entre eux et dont la démonstration est encore valable dans le cas où p et q sont quelconques:

14.2. PROPOSITION. Si x est un point périodique de type (p, q) et si $p/q \in]\tilde{\rho}^-(\tilde{f}), \tilde{\rho}^+(\tilde{f})[$ alors $x \in \Lambda(f)$.

14.3. Dans le cas où x est un point-selle on a le résultat plus précis suivant:

PROPOSITION. Si x est un point périodique selle de type (p, q) et si $p/q \in]\tilde{\rho}^-(\tilde{f}), \tilde{\rho}^+(\tilde{f})[$ alors $\overline{W^u(x)} \subset \Lambda(f)$.

Démonstration. Puisque $\Lambda(f)$ est un fermé il suffit de montrer l'inclusion $W^u(x) \subset \Lambda(f)$. On suppose donc que x est un point-selle de type (p, q) et que $p/q \in]\tilde{\rho}^-(\tilde{f}), \tilde{\rho}^+(\tilde{f})[$. La variété instable de x est formée de deux branches partant de x , on en choisit une notée Γ , et on va montrer l'inclusion $\Gamma \subset \Lambda(f)$. On sait par 14.2 que $x \in \Lambda(f)$. Si on suppose que $\Gamma \cap \Lambda(f) = \{x\}$, le point x sera accessible par un arc à valeur dans l'un des ensembles $U(\Lambda)$ ou $V(\Lambda)$ et, comme il est de type (p, q) , l'un des deux nombres de rotation $\tilde{\rho}^-(\tilde{f})$ ou $\tilde{\rho}^+(\tilde{f})$ doit être égal à p/q ce qui contredit l'hypothèse. L'intersection $\Gamma \cap \Lambda(f)$ contient donc un point $y \neq x$, et tous les itérés de la forme $f^{2qk}(y)$, $k \in \mathbb{Z}$. Par conséquent si Γ n'est pas contenu dans $\Lambda(f)$ on peut choisir un arc compact Γ_0 contenu dans Γ et ne rencontrant $\Lambda(f)$ qu'à ses extrémités. On utilise alors un argument déjà employé: la famille $(f^{-n}(\Gamma_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour la distance de Hausdorff, l'arc Γ_0 délimite un ouvert O_0 borné et tel que la famille $(f^{-n}(O_0))_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée en mesure, ce qui contredit le caractère dissipatif de f . □



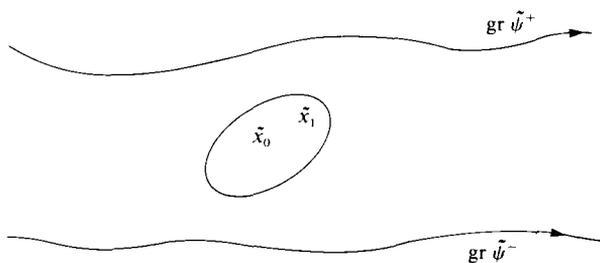
14.4. Remarque 1. Si on suppose que X est un compact connexe séparant \mathbb{A} invariant par f et si on note $\tilde{\rho}_X^-$ et $\tilde{\rho}_X^+$ les deux nombres de rotation correspondants (voir 9.7) on a un résultat analogue à celui de la proposition 14.3. Si x est un point périodique de type (p, q) où $p/q \in]\tilde{\rho}_X^-, \tilde{\rho}_X^+[$ alors $x \in X$ et si c'est un point selle on a $\overline{W^u(x)} \subset X$. En effet, il suffit de montrer que chaque branche Γ de $W^u(x)$ intersecte X en un autre point que x (la suite de la démonstration reste valable).

Or si ce n'est pas le cas, non seulement le point x est accessible, mais en plus le chemin Γ qui aboutit en x vérifie $f^{2q}(\Gamma) = \Gamma$. Si on caractérisait les nombres de rotations $\tilde{\rho}_X^-$ et $\tilde{\rho}_X^+$ par la théorie des bouts premiers, on aurait alors un bout premier périodique et par passage au revêtement on montrerait que l'un des nombres $\tilde{\rho}_X^-$ et $\tilde{\rho}_X^+$ est égal à p/q .

14.5. L'inclusion démontrée dans la proposition 14.3 peut être stricte. Il est facile en effet de construire un difféomorphisme de l'anneau homotope à l'identité, préservant la mesure, déviant la verticale à droite, possédant une zone d'instabilité délimitée par les graphes disjoints de deux fonctions continues $\psi^-, \psi^+ : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ et admettant un relèvement \tilde{f}_0 à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que:

Les nombres de rotations que définit \tilde{f}_0 sur les graphes de ψ^- et ψ^+ sont respectivement strictement négatifs et strictement positifs.

L'application \tilde{f}_0 possède un point fixe elliptique \tilde{x}_0 , une ellipse invariante centrée en ce point et à l'intérieur de cette ellipse un point périodique \tilde{x}_1 hyperbolique.



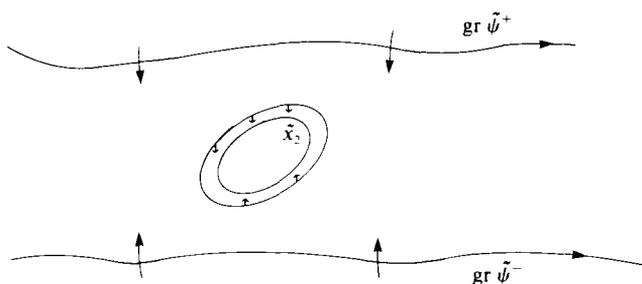
On peut alors trouver un élément \tilde{f}_1 de $\tilde{\mathcal{H}}$ proche en C^1 topologie de \tilde{f}_0 tel que:

$$\tilde{\rho}^-(\tilde{f}_1) < 0 < \tilde{\rho}^+(\tilde{f}_1);$$

l'intérieur de l'ellipse soit envoyé dans lui-même par \tilde{f}_1 ;

\tilde{f}_1 ait un point périodique \tilde{x}_2 hyperbolique près de \tilde{x}_1 .

Le point x_2 est alors de type $(0, q)$ où $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et, par la proposition 14.3, on a $\overline{W^u(\tilde{x}_0)} \subset \Lambda$. D'autre part, l'intérieur de l'ellipse étant envoyé dans lui-même par \tilde{f}_0 la variété instable de \tilde{x}_2 ne sort jamais de l'intérieur de l'ellipse et on ne peut pas avoir l'égalité $\overline{W^u(\tilde{x}_2)} = \Lambda$.



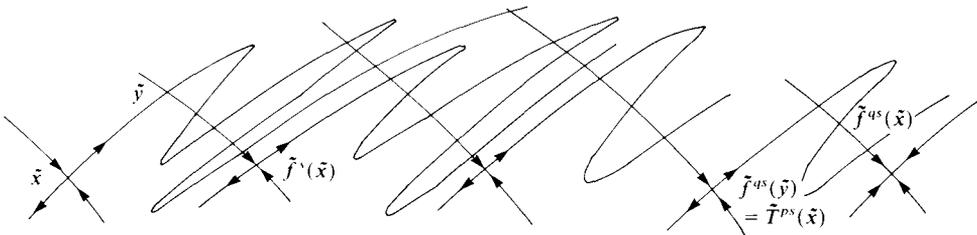
14.6. Dans certains cas cependant, l'inclusion de la proposition 14.3 peut devenir une égalité.

PROPOSITION. Si x est un point périodique selle de type (p, q) si $p/q \in]\tilde{\rho}^-(\tilde{f}), \tilde{\rho}^+(\tilde{f})[$ et si $W^u(\tilde{x})$ est non bornée pour un point $\tilde{x} \in \mathbb{A}$ vérifiant $\pi(\tilde{x}) = x$, alors $\overline{W^u(x)} = \Lambda(f)$.

Démonstration. Il suffit de montrer l'inclusion $\Lambda(f) \subset \overline{W^u(x)}$ et d'utiliser 14.3. Or l'ensemble $\overline{W^u(x)}$ est un compact connexe de \mathbb{A} invariant par f^q et, puisque la courbe $W^u(\tilde{x})$ n'est pas bornée, séparant \mathbb{A} , d'où l'inclusion. \square

COROLLAIRE. Si x est un point périodique selle de type (p, q) si $p/q \in]\tilde{\rho}^-(\tilde{f}), \tilde{\rho}^+(\tilde{f})[$ si $p \neq 0$ et s'il existe un entier $k \neq 0$ et un point $\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{A}}$ tel que $\pi(\tilde{x}) = x$ et tel que $W^u(\tilde{x})$ et $W^s(\tilde{f}^k(\tilde{x}))$ aient une intersection non vide et transverse, alors $\overline{W^u(x)} = \Lambda(f)$.

Démonstration. Si x est un point périodique selle de type (p, q) et si $W^u(\tilde{x})$ et $W^s(\tilde{f}^k(\tilde{x}))$ ont une intersection non vide et transverse pour un point $\tilde{x} \in \pi^{-1}(\{x\})$ et un entier $k \neq 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ les variétés $W^u(\tilde{f}^{kn}(\tilde{x}))$ et $W^s(\tilde{f}^{(k+1)n}(\tilde{x}))$ se rencontrent transversalement. En considérant les entiers $n \in \mathbb{N}$ qui sont multiples de q , on en déduit en fait que la variété instable $W^u(\tilde{x})$ rencontre $W^s(\tilde{f}^k(\tilde{x}))$ en une infinité de points qui se rapprochent de $\tilde{f}^k(\tilde{x})$. Par une démonstration analogue au λ -lemme on montre que $W^u(\tilde{x})$ rencontre transversalement la variété $W^s(\tilde{f}^{2k}(\tilde{x}))$ et de même toutes les variétés $W^s(\tilde{f}^{nk}(\tilde{x}))$. Par conséquent $\overline{W^u(\tilde{x})}$ contient tous les points $\tilde{f}^{nk}(\tilde{x})$ et comme p est non nul cet ensemble n'est pas borné. On conclut par la proposition 14.5. □



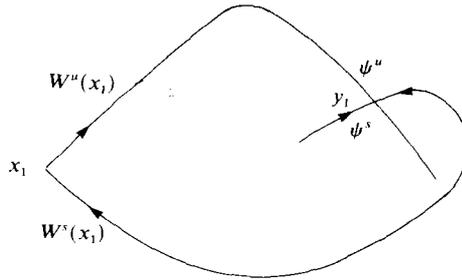
14.7. On peut obtenir facilement des puits dans un attracteur de Birkhoff, comme le montre l'exemple des applications $f_\varepsilon, \varepsilon \in]0, 1[$, définies en 13.2 qui ont un puit au point $(\frac{1}{2} \text{ mod } 1, 0)$. On a même mieux:

PROPOSITION. Il existe $f \in \mathcal{H}$ tel que $\Lambda(f)$ possède une infinité de puits.

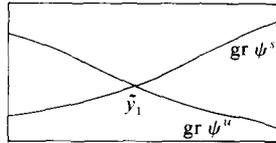
Démonstration. On considère un difféomorphisme f_0 de \mathbb{A} , de classe C^1 homotope à l'identité, déviant la verticale préservant la mesure et un relèvement \tilde{f}_0 de f_0 . On suppose que f_0 admet une zone d'instabilité délimitée par deux graphes dont les nombres de rotations $\tilde{\rho}_0^-$ et $\tilde{\rho}_0^+$ pour \tilde{f}_0 vérifient $\tilde{\rho}_0^- < 0 < \tilde{\rho}_0^+$, et on suppose que \tilde{f}_0 possède un point fixe selle \tilde{x}_0 (et donc contenu dans la zone d'instabilité), tel que les variétés stables et instables de \tilde{x}_0 s'intersectent transversalement en un point \tilde{y}_0 .

On peut, en considérant une petite perturbation radiale (voir paragraphe 8), obtenir une application $\tilde{f}_1 \in \tilde{\mathcal{H}}$ de jacobien majoré par $\alpha < 1$ tel que: $\tilde{\rho}^-(\tilde{f}_1) < 0 < \tilde{\rho}^+(\tilde{f}_1)$ et possédant un point fixe selle x_1 proche de x_0 tel que les variétés stables et instables de \tilde{x}_1 s'intersectent transversalement en un point \tilde{y}_1 .

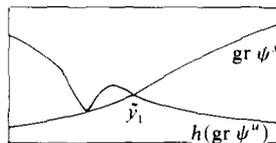
On peut aussi, quitte à faire un changement de variable et à considérer $\tilde{f}_\varepsilon = \tilde{h}_\varepsilon^{-1} \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{h}_\varepsilon$, où $h_\varepsilon : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}} (\tilde{\theta}, r) \mapsto (\tilde{\theta} + \varepsilon r, r)$, supposer que les variétés stables et instables de x définissant autour de \tilde{y}_1 deux graphes de la forme $r = \psi^u(\tilde{\theta})$ et $r = \psi^s(\tilde{\theta})$.



On considère alors un voisinage $W=[a, b] \times [c, d]$ de y_1 traversé par les deux graphes ψ^u et ψ^s et tel que pour tout entier $k > 0$, $f^k(W \cap \text{gr } \psi^s) \cap W = \emptyset$, $f^{-k}(W \cap \text{gr } \psi^u) \cap W = \emptyset$.



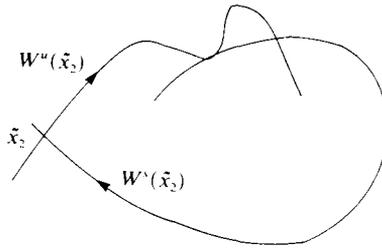
On peut trouver un C^1 difféomorphisme \tilde{h} , égal à l'identité hors de W , laissant invariante chaque verticale $\{\theta\} \times \mathbb{R}$, commutant avec \tilde{T} et envoyant le graphe de ψ^u sur une courbe tangente au graphe de ψ^s .



De plus, comme on peut faire cette déformation, W étant fixé, aussi près que l'on veut de y_1 on peut toujours supposer que \tilde{h} est aussi proche que l'on veut de l'identité dans la topologie de la convergence uniforme et que son jacobien est toujours inférieur à un nombre $\nu < 1/\alpha$ donné.

En considérant $\tilde{f}_1 \circ \tilde{h}$ on en déduit l'existence dans tout voisinage de \tilde{f}_1 dans \mathcal{H} d'un difféomorphisme ayant un point fixe selle tel que les variétés stables et instables se rencontrent tangentiellement. Puisque les applications $\tilde{f} \mapsto \tilde{\rho}^-(\tilde{f})$ et $\tilde{f} \mapsto \tilde{\rho}^+(\tilde{f})$ sont respectivement semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement (voir 10.8) on en déduit l'existence de $\tilde{f}_2 \in \mathcal{H}$ tel que:

$$\begin{cases} \tilde{f}_2 \text{ a un point fixe selle } x_2 \\ W^s(x_2) \text{ et } W^u(x_2) \text{ se rencontrent tangentiellement} \\ \tilde{\rho}^-(\tilde{f}_2) < 0 < \tilde{\rho}^+(\tilde{f}_2) \end{cases}$$



Le point \tilde{x}_2 est alors un point fixe selle dissipatif ($\det d\tilde{f}(\tilde{x}_2) < 1$) et tel que $W^u(\tilde{x}_2)$ et $W^s(\tilde{x}_2)$ se rencontrent tangentiellement. Par la semi-continuité des fonctions $\tilde{f} \mapsto \tilde{\rho}^-(\tilde{f})$ et $\tilde{f} \mapsto \tilde{\rho}^+(\tilde{f})$ on peut trouver un voisinage W de \tilde{f}_2 dans $\tilde{\mathcal{H}}$ tel que pour tout $\tilde{f} \in W$ on ait $\tilde{\rho}^-(\tilde{f}) < 0 < \tilde{\rho}^+(\tilde{f})$ et, par un résultat de Newhouse [Newh], on peut trouver une application \tilde{f}_3 dans W possédant une infinité de puits de type $(0, q)$ qui, par la proposition 14.2, seront contenus dans l'attracteur $\Lambda(\tilde{f}_3)$. En réalité Newhouse prouve qu'un difféomorphisme f de classe C^r sur une variété compacte, possédant un point fixe selle dissipatif tel que ses variétés stables et instables se rencontrent tangentiellement, admet dans chaque voisinage pour la C^r -topologie un difféomorphisme avec une infinité de puits. Ici le difféomorphisme f_2 de \mathbb{A} défini par \tilde{f}_2 admet un anneau $\Pi^1 \times [-M + M]$ attractant (voir 9.3) et on peut approximer f_2 de façon uniforme sur cet anneau par un difféomorphisme f_3 de \mathbb{A} qui soit dissipatif et qui dévie la verticale et possédant une infinité de puits, de type $(0, q)$ pour le relèvement $\tilde{f}_3 \in \tilde{\mathcal{H}}$ proche de \tilde{f}_2 . \square

15. *Attracteurs de Birkhoff avec un unique nombre de rotation*

15.1. On s'est surtout intéressé jusque là aux attracteurs de Birkhoff dont les nombres de rotation inférieurs et supérieurs étaient distincts, cependant le cas d'égalité des deux nombres de rotation est assez fréquent et c'est ce cas qu'on étudie dans ce paragraphe. On rappelle que l'on a donné, dans le § 7, des conditions suffisantes d'égalité des deux nombres de rotation d'un attracteur de Birkhoff, en particulier l'existence d'un point accessible par le haut et par le bas (au sens donné au § 6). On rappelle aussi qu'une application $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}$ dont les nombres de rotation inférieur et supérieur sont tous deux égaux à $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ possède dans son attracteur de Birkhoff un ensemble de Cantor d'Aubry-Mather formé de points radialement accessibles par le haut et par le bas et que la restriction à cet attracteur de l'application $f \in \mathcal{H}$ définie par \tilde{f} est topologiquement semi-conjuguée à la rotation d'angle $\alpha \bmod 1$ (voir 5.8 et 5.10).

15.2. Le cas le plus simple d'égalité des nombres de rotation est le cas où une application $f \in \mathcal{H}$ admet un graphe invariant de la forme $r = \psi(\theta)$ où $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ ou plus généralement une courbe invariante, en appelant courbe un compact annulaire homéomorphe à \mathbb{T}^1 . Dans ce cas en effet l'attracteur de Birkhoff de f sera ce graphe ou cette courbe et les deux nombres de rotation de tout relèvement \tilde{f} de f seront égaux.

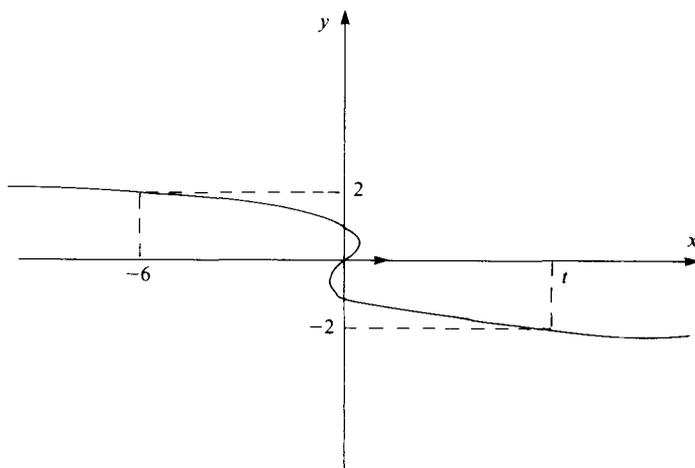
Ainsi, si $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application relevant un difféomorphisme de classe C^1 , g de \mathbb{T}^1 et si $\lambda \in]0, 1[$ vérifie $\lambda D\tilde{g}(\tilde{\theta}) < 1$ pour tout $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$, l'application $\tilde{f} : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$,

$(\tilde{\theta}, r) \mapsto (\tilde{g}(\tilde{\theta}) + \lambda r, \lambda r)$ sera un élément de $\tilde{\mathcal{H}}$ avec un attracteur de Birkhoff égal à $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ et des nombres de rotation $\tilde{\rho}^-(\tilde{f})$ et $\tilde{\rho}^+(\tilde{f})$ tous deux égaux au nombre de rotation de \tilde{g} . On note d'ailleurs que, si de plus $\lambda < D\tilde{g}(\tilde{\theta})$ pour tout $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}$, le tore $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ est normalement hyperbolique (voir [HSP]) et donc que tout élément de $\tilde{\mathcal{H}}$ proche de \tilde{f} pour la topologie définie au § 10 admettra un graphe invariant et aura donc ses deux nombres de rotation égaux. Ce résultat se généralise dans certains cas (Herman, comm. pers.). Si $f \in \mathcal{H}$ admet un graphe invariant $r = \psi(\theta)$, où $\psi \in C^1(\mathbb{T}^1)$ et si la restriction de f à ce graphe est uniquement ergodique (par exemple si le nombre de rotation induit est irrationnel), alors le graphe sera normalement hyperbolique et donc tout élément de \mathcal{H} proche de f aura un graphe invariant.

15.3. PROPOSITION. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}$ avec $\tilde{\rho}^-(\tilde{f}) = \tilde{\rho}^+(\tilde{f}) = \alpha$ et tel que l'attracteur de Birkhoff $\tilde{\Lambda}(\tilde{f})$ soit une courbe, mais ne soit pas un graphe.*

Démonstration. On envisage trois cas:

1er cas: $\alpha = 0$. L'automorphisme linéaire de \mathbb{R}^2 qui à (x, y) associe $(x/8 + 3y/2, y/2)$ est dissipatif, dévie la verticale à droite et laisse invariante la cubique d'équation: $x + y^3 - y = 0$.

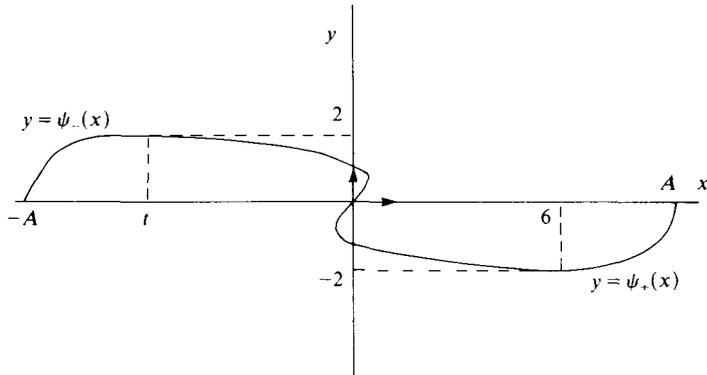


On peut construire pour $A > 6$ deux applications $\psi_- : [-A, -6] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi_+ : [6, A] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que l'application $\gamma : [-A, +A] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie ci-dessous soit un plongement de classe C^∞ vérifiant $\gamma(-A) = (-A, 0)$, $\gamma(A) = (A, 0)$ et pour tout $n \geq 1$, $\gamma^{(n)}(-A) = \gamma^{(n)}(A)$.

$$\begin{cases} \text{Si } t \in [-A, -6], & \gamma(t) = (t, \psi_-(t)), \\ \text{Si } t \in [-6, 6], & \gamma(t) = (-t^3/27 + t/3, t/3), \\ \text{Si } t \in [6, A], & \gamma(t) = (t, \psi_+(t)). \end{cases}$$

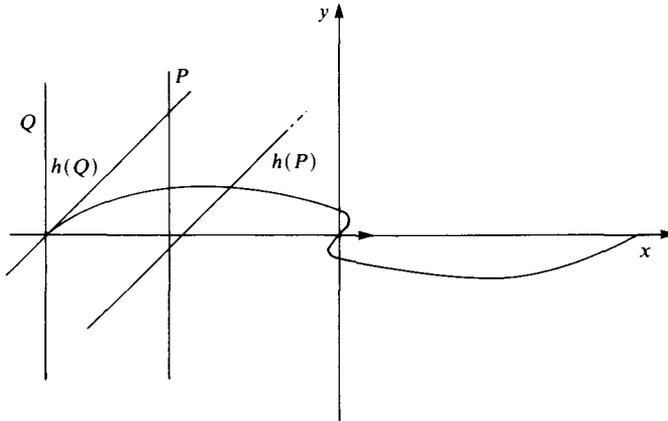
On peut construire également un difféomorphisme g de $[-A, A]$ de classe C^∞ vérifiant:

$$\begin{cases} g^{(n)}(A) = g^{(n)}(-A), & \text{pour tout } n \geq 1 \\ g(t) = t/2, & \text{si } t \in [-6, +6]. \end{cases}$$



Si A est suffisamment grand, on peut choisir γ et g de telle façon que l'application h définie par les relations ci-dessous soit injective et dissipative:

$$\begin{cases} h(x, y) = (x/8 + 3y/8, y/2), & \text{si } |x| \leq 6 \\ h(x, y) = \gamma(g(x)) + (3/8(y - \psi_+(x)), \frac{1}{2}(y - \psi_+(x))), & \text{si } x \in [6, A] \\ h(x, y) = \gamma(g(x)) + (3/8(y - \psi_-(x)), \frac{1}{2}(y - \psi_-(x))), & \text{si } x \in [-A, -6]. \end{cases}$$



On note alors \tilde{f}_0 l'application définie par les relations suivantes:

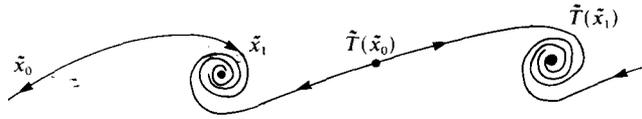
$$\begin{cases} \tilde{f}_0(\tilde{\theta}, r) = \frac{1}{2A} h(2A(\tilde{\theta} - \frac{1}{2}), 2Ar), & \text{si } \tilde{\theta} \in [0, 1[\\ \tilde{f}_0(\tilde{\theta} + k, r) = \tilde{f}_0(\tilde{\theta}, r) + (k, 0), & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

C'est un élément de \mathcal{H} , de classe C^∞ , vérifiant $\tilde{\rho}^-(\tilde{f}) = \tilde{\rho}^+(\tilde{f}) = 0$ et dont l'attracteur de Birkhoff est une courbe, qui est d'ailleurs de classe C^∞ , mais pas un graphe.



Il est également possible de construire $\tilde{f} \in \mathcal{H}$ vérifiant $\tilde{\rho}^-(\tilde{f}) = \tilde{\rho}^+(\tilde{f}) = 0$ tel que son attracteur de Birkhoff soit une courbe, qui ne soit pas de classe C^1 et qui soit

de la forme suivante:



Le point \tilde{x}_1 est un puits dont les valeurs propres sont complexes et conjugués, le point \tilde{x}_0 est un point fixe hyperbolique dont la variété instable s'enroule autour de \tilde{x}_1 et de $\tilde{T}^-(\tilde{x}_1)$.

2e cas: $\alpha \in \mathbb{Q}$. On écrit $\alpha = p/q$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ sont premiers entre eux. L'application $\tilde{f}_\alpha: \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}, (\tilde{\theta}, r) \mapsto 1/q \tilde{f}_0(q\tilde{\theta}, r) + (p/q, 0)$, où \tilde{f}_0 est l'application précédente, est un élément de $\tilde{\mathcal{H}}$ avec ses deux nombres de rotation égaux à α et avec un attracteur de Birkhoff qui est une courbe mais pas un graphe.



3e cas: $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Il existe dans ce cas un difféomorphisme g de \mathbb{T}^1 , de classe C^1 , de nombre de rotation $\alpha \bmod 1$ et dont l'ensemble minimal est un ensemble de Cantor noté K .

On note alors \tilde{g} le relèvement de g à \mathbb{R} dont le nombre de rotation est α et on pose $M = \sup_{\tilde{\theta} \in \mathbb{R}} \tilde{g}'(\tilde{\theta}) \in]1, +\infty[$, $m = \inf_{\tilde{\theta} \in \mathbb{R}} \tilde{g}'(\tilde{\theta}) \in]0, 1[$. On choisit ensuite un réel $\lambda \in]0, \inf(m; 1/M)[$ et on définit l'application $\tilde{f}: \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}, (\tilde{\theta}, r) \mapsto (\tilde{g}(\tilde{\theta}) + \lambda r, \lambda r)$ qui est un élément de $\tilde{\mathcal{H}}$ et dont l'attracteur de Birkhoff est le tore $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$. On choisit maintenant un intervalle $]\tilde{\theta}_0^-, \tilde{\theta}_0^+[$ qui se projette dans \mathbb{T}^1 sur une composante connexe de \mathbb{T}^1/K et on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\theta}_n^- = \tilde{g}^n(\tilde{\theta}_0^-)$, $\tilde{\theta}_n^+ = \tilde{g}^n(\tilde{\theta}_0^+)$. On pose $\delta_0 = (\tilde{\theta}_0^+ - \tilde{\theta}_0^-)/2$, on choisit $\varepsilon \in]0, \delta_0(1 - \lambda/m)[$ et on étudie les images itérées par \tilde{f} du rectangle

$$R_\varepsilon = \left\{ (\tilde{\theta}, r) \in \tilde{\mathbb{A}} \mid |r| \leq \varepsilon, \left| \tilde{\theta} - \frac{\tilde{\theta}_0^- + \tilde{\theta}_0^+}{2} \right| \leq \varepsilon \right\}.$$

Soit $\tilde{x}_0 = (\tilde{\theta}_0, r_0)$ un point de R_ε . Si on pose $f^n(\tilde{x}_0) = (\tilde{\theta}_n, r_n)$, on a de façon évidente la relation $|r_n| = |r_0 \lambda^n| \leq \lambda^n \varepsilon$, et puisque

$$\left| \tilde{\theta}_0 - \frac{\tilde{\theta}_0^+ + \tilde{\theta}_0^-}{2} \right| < \varepsilon,$$

la double inégalité:

$$\tilde{\theta}_0^- + \delta_0 - \varepsilon < \tilde{\theta}_0 < \tilde{\theta}_0^+ - \delta_0 + \varepsilon.$$

On en déduit:

$$\tilde{\theta}_1^- + m(\delta_0 - \varepsilon) < \tilde{g}(\tilde{\theta}_0) < \tilde{\theta}_1^+ - m(\delta_0 - \varepsilon),$$

et

$$\tilde{\theta}_1^- + m(\delta_0 - \varepsilon) - \lambda \varepsilon < \tilde{\theta}_1 < \tilde{\theta}_1^+ - m(\delta_0 - \varepsilon) + \lambda \varepsilon.$$

De même, on montre:

$$\tilde{\theta}_2^- + m^2(\delta_0 - \varepsilon) - \lambda m \varepsilon - \lambda^2 \varepsilon < \tilde{\theta}_2 < \tilde{\theta}_2^+ - m^2(\delta_0 - \varepsilon) + \lambda m \varepsilon + \lambda^2 \varepsilon.$$

Et de façon générale, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{\theta}_n^- + m^n \left(\delta_0 - \varepsilon - \frac{\lambda}{m} \varepsilon - \dots - \frac{\lambda^n}{m^n} \varepsilon \right) < \tilde{\theta}_n < \tilde{\theta}_n^+ - m^n \left(\delta_0 - \varepsilon - \frac{\lambda}{m} \varepsilon - \dots - \frac{\lambda^n}{m^n} \varepsilon \right),$$

et puisque $\lambda < m$ et $\varepsilon < \delta_0(1 - \lambda/m)$:

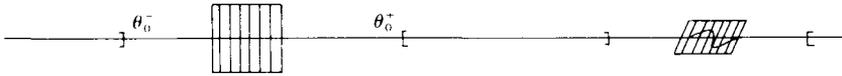
$$\tilde{\theta}_n^- < \tilde{\theta}_n < \tilde{\theta}_n^+.$$

Ainsi les images de R_ε ne se projettent jamais par \tilde{p}_1 sur l'ensemble de Cantor préimage de K .

On peut facilement construire une application \tilde{f}^* relevant un C^1 -difféomorphisme f^* de A , déviant la verticale à droite (et envoyant même chaque verticale sur une droite de pente 1), dissipative, coïncidant avec \tilde{f} en dehors de R_ε et envoyant le segment

$$\left[\frac{\tilde{\theta}_0^- + \tilde{\theta}_0^+}{2} - \varepsilon, \frac{\tilde{\theta}_0^- + \tilde{\theta}_0^+}{2} + \varepsilon \right] \times \{0\}$$

non plus sur un segment mais sur un arc sur lequel p_1 n'est pas injective.



Puisque les images du rectangle R_ε par les itérés positifs de \tilde{f} ont des diamètres de plus en plus petits, on va obtenir une courbe invariante par f^* et qui contiendra toutes les images par les itérés positifs de f de l'arc

$$f \circ \mathbb{T} \left(\left[\frac{\tilde{\theta}_0^- + \tilde{\theta}_0^+}{2} - \varepsilon, \frac{\tilde{\theta}_0^- + \tilde{\theta}_0^+}{2} + \varepsilon \right] \times \{0\} \right).$$

L'attracteur de Birkhoff de \tilde{f}^* est donc une courbe qui n'est pas un graphe et on a $\tilde{\rho}^-(\tilde{f}^*) = \tilde{\rho}^+(\tilde{f}^*) = \alpha$. D'ailleurs, l'ensemble d'Aubry-Mather formé des points radialement accessibles de l'attracteur de Birkhoff de \tilde{f}^* n'est autre que $K \times \{0\}$. □

15.4. PROPOSITION. Il existe $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}$ vérifiant $\tilde{\rho}^-(\tilde{f}) = \tilde{\rho}^+(\tilde{f})$ et tel que son attracteur de Birkhoff ne soit pas une courbe.

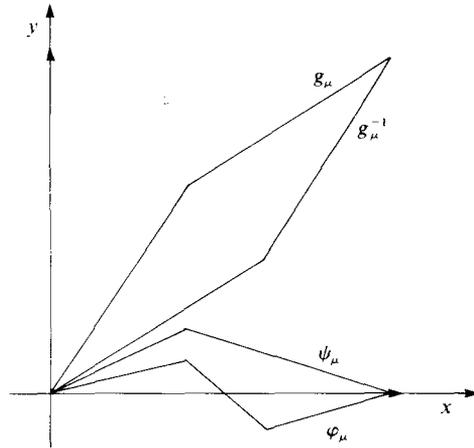
Démonstration. L'idée de la démonstration est de construire $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}$ vérifiant $\tilde{\rho}^-(\tilde{f}) = \tilde{\rho}^+(\tilde{f}) = 0$ et possédant dans son attracteur de Birkhoff des points périodiques de plus petite période différente de 0.

Si $\mu > 0$, on note g_μ l'homéomorphisme de $[0, 1]$ défini de la façon suivante (voir [H2, p. 64]:

$$g_\mu(x) = (\mu + 1)x, \quad \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{\mu + 2} \right]$$

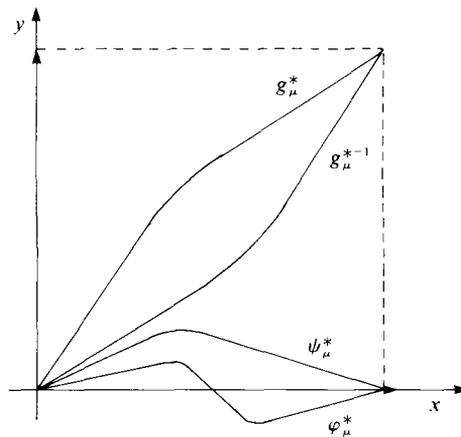
$$g_\mu(x) = \frac{1}{\mu + 1}(x - 1) + 1, \quad \text{si } x \in \left[\frac{1}{\mu + 2}, 1 \right].$$

On définit ensuite sur $[0, 1]$ les applications $\psi_\mu = g_\mu - \text{Id}$ et $\varphi_\mu = g_\mu + g_\mu^{-1} - 2 \text{Id}$, puis leurs prolongements à \mathbb{R} de période 1 notés respectivement $\tilde{\psi}_\mu$ et $\tilde{\varphi}_\mu$.



Si on fixe $\varepsilon < \inf(1/(\mu + 2), \frac{1}{2} - 1/(\mu + 2))$, on peut perturber l'application g_μ sur l'intervalle $[1/(\mu + 2) - \varepsilon, 1/(\mu + 2) + \varepsilon]$ de façon à obtenir un difféomorphisme de $[0, 1]$, g_μ^* , de classe C^∞ , coïncidant avec g_μ en dehors de cet intervalle et dont le graphe, symétrique par rapport à la droite d'équation $x + y - 1 = 0$, ne rencontre la bissectrice $y = x$ qu'aux extrémités.

On définit alors sur $[0, 1]$ les applications $\psi_\mu^* = g_\mu^* - \text{Id}$, $\varphi_\mu^* = g_\mu^* + g_\mu^{*-1} - 2 \text{Id}$ et leurs prolongements à \mathbb{R} de période 1, notés respectivement ψ_μ^* et φ_μ^* .

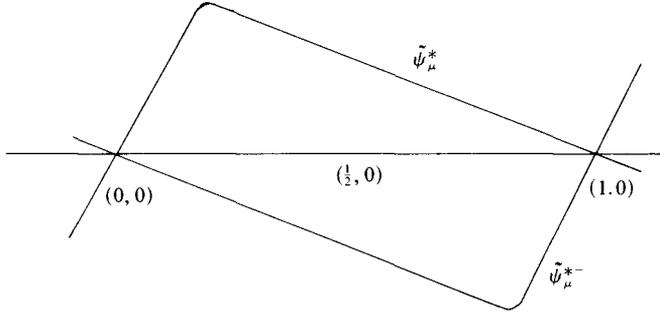


Puisque le graphe de g_μ^* est symétrique par rapport à la droite d'équation $x + y - 1 = 0$, la fonction φ_μ^* est impaire, elle est d'autre part de classe C^∞ , ne s'annule qu'aux points de la forme $k/2$, $k \in \mathbb{Z}$, et a une dérivée constante au voisinage de $\frac{1}{2}$ égale à $-2\mu/(\mu + 1)$. En définissant $\tilde{f}_\mu : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}, (\tilde{\theta}, r) \mapsto (\tilde{\theta} + r, r + \varphi_\mu^*(\tilde{\theta} + r))$, on obtient une famille (\tilde{f}_μ) d'applications de classe C^∞ préservant l'aire, déviant la verticale, impaires, laissant invariant le graphe de ψ_μ^* et celui de $\psi_\mu^{*-} = (\text{Id} + \psi_\mu^*)^{-1} - \text{Id}$, et laissant fixe le point $(\frac{1}{2}, 0)$ au voisinage duquel l'application

s'écrit:

$$\tilde{f}_\lambda(\tilde{\theta}, r) = \left(\tilde{\theta} + r, r + \frac{\mu}{\mu + 1}(1 - 2(\tilde{\theta} + r)) \right)$$

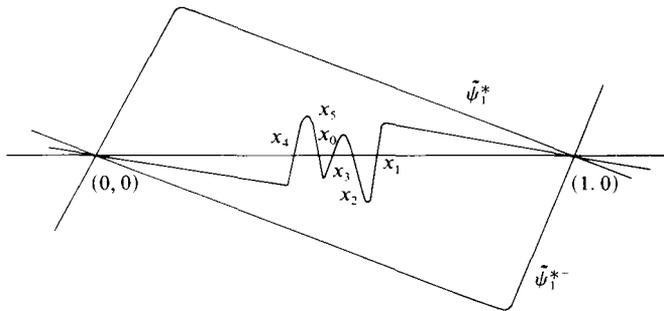
et se trouve donc linéairement conjuguée à la rotation d'angle $\alpha = -\text{Arcos } 1/(\mu + 1)$.



En particulier, l'application \tilde{f}_1 s'écrit $\tilde{f}_1((\tilde{\theta}, r)) = (\tilde{\theta} + r, -\tilde{\theta} + \frac{1}{2})$ dans un voisinage de $(\frac{1}{2}, 0)$, donc tous les points proches et distincts de $(\frac{1}{2}, 0)$ sont périodiques de période 6 et les coordonnées des itérés d'un tel point $(\tilde{\theta}, r)$ s'écrivent:

$$(\tilde{\theta}, r), (\tilde{\theta} + r, -\tilde{\theta} + \frac{1}{2}), (r + \frac{1}{2}, -\tilde{\theta} - r + \frac{1}{2}), (-\tilde{\theta} + 1, -r), (-\tilde{\theta} - r - 1, \tilde{\theta} - \frac{1}{2}) \text{ et } (-r + \frac{1}{2}, \tilde{\theta} + r - \frac{1}{2}).$$

On peut donc trouver un point \tilde{x}_0 proche de $(\frac{1}{2}, 0)$ de période 6, tel que les itérés $\tilde{x}_i = \tilde{f}_1^i(\tilde{x}_0)$, $i = 0, \dots, 5$, admettent des abscisses distinctes, puis une fonction $\tilde{\psi}$ impaire, de classe C^∞ , de période 1, vérifiant $\tilde{\psi}_1^{*-} \leq \tilde{\psi} \leq \tilde{\psi}_1^*$ et dont le graphe contient tous les x_i , $i = 0, \dots, 5$.



On définit maintenant pour $\lambda \in]0, 1[$ l'application $\tilde{f}_1^\lambda: \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}, (\tilde{\theta}, r) \mapsto \tilde{f}_1((\tilde{\theta}, \lambda r + (1 - \lambda)\tilde{\psi}(\tilde{\theta})))$. C'est une application impaire de classe C^∞ qui appartient à $\tilde{\mathcal{H}}$. L'ensemble $\tilde{\Lambda}(\tilde{f}_1^\lambda)$ est contenu dans

$$\tilde{C} = \{(\tilde{\theta}, r) \mid \tilde{\psi}_1^{*-}(\tilde{\theta}) \leq r \leq \tilde{\psi}_1^*(\tilde{\theta})\}$$

puisque $\tilde{f}_1^\lambda(\tilde{C}) \subset \tilde{C}$, et par conséquent le point $(0, 0)$ est un point de $\tilde{\Lambda}(\tilde{f}_1^\lambda)$ radialement accessible par le haut et par le bas. On en déduit: $\tilde{\rho}^-(\tilde{f}_1^\lambda) = \tilde{\rho}^+(\tilde{f}_1^\lambda) = 0$.

D'autre part, comme la fonction \tilde{f}_1^λ est impaire, on a les relations: $\tilde{\Lambda}(\tilde{f}_1^\lambda) = -\tilde{\Lambda}(\tilde{f}_1^\lambda)$, $\tilde{U}(\tilde{\Lambda}(\tilde{f}_1^\lambda)) = -\tilde{V}(\tilde{\Lambda}(\tilde{f}_1^\lambda))$, et donc, puisque le point \tilde{x}_0 vérifie $(\tilde{f}_1^\lambda)^3(\tilde{x}_0) = -\tilde{x}_0 + (1, 0)$, il doit appartenir à $\tilde{\Lambda}(\tilde{f}_1^\lambda)$.

L'attracteur de Birkhoff de \tilde{f}_1^λ contient donc un point fixe et un point dont la plus petite période est 6. Il ne peut pas être homéomorphe à \mathbb{T}^1 car on aurait alors par conjugaison un homéomorphisme de \mathbb{T}^1 avec des points périodiques de période distincte, ce qui est impossible. En particulier, l'attracteur obtenu n'est pas localement connexe, puisque c'est un compact annulaire non homéomorphe à \mathbb{T}^1 . \square

BIBLIOGRAPHIE

- [AK] J. Auslander & Y. Katznelson. Continuous maps of the circle without periodic points. *Israel J. Math.* **32** (1979), 375–381.
- [BG] M. Berger & B. Gastiaux. *Géométrie Différentielle*. Armand Colin (1972), Paris.
- [B1] G. D. Birkhoff. Sur quelques courbes fermées remarquables, *Bull. Soc. Math. France* **60** (1932), 1–26; aussi dans *Collected Math. Papers of G. D. Birkhoff, vol. II*, p. 418–443, Dover, New York (1968).
- [B2] G. D. Birkhoff. Sur l'existence de régions d'instabilité en dynamique, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **8** (1932) et *Collected Math. Papers*, vol. II, p. 444–461.
- [Cha1] M. Charpentier. Sur quelques propriétés des courbes de M. Birkhoff. *Bull. Soc. Math. France* **62** (1934), 193–224.
- [Cha2] M. Charpentier. Sur des courbes fermées analogues aux courbes de M. Birkhoff. *J. Math. Pures et Appl.* **14** (1935), 1–48.
- [Che] A. Chenciner. *Séminaire Bourbaki*, no 622, *Astérisque* **121–123** Soc. Math. de France (1985), 147–170.
- [CGT] A. Chenciner, J. M. Gambaudo & C. Tresser. Une remarque sur la structure des endomorphismes de degré 1 du cercle. *C.R. Acad. Sc. Paris*, **299**, série I, no 5 (1984), 145–147.
- [Cho] G. Choquet. *Lectures on Analysis, vol. 1*, W. A. Benjamin, Inc (1969), New York.
- [G] D. L. Goroff. Hyperbolic sets for twist maps. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **5** (1985), 337–354.
- [Ha] G. R. Hall. A topological version of a theorem of Mather on twist maps. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **4** (1984), 585–603.
- [He1] M. Herman. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à une rotation. *Publ. Math. IHES*, **49** (1979), 5–234.
- [He2] M. Herman. Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau. *Astérisque* **103–104**, Soc. Math. France (1983).
- [HPS] M. W. Hirsch, C. C. Pugh & M. Shub. *Invariant Manifolds*. Lecture Notes Math., vol. 583, Springer, New York.
- [Ka] A. Katok. Some remarks on Birkhoff and Mather twist map theorem. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **2** (1982), 185–194.
- [Ku] C. Kuratowski. *Topologie, Vol. I et II*. Warszawa (1961).
- [L] P. Le Calvez. Existence d'orbites quasi-périodiques dans les attracteurs de Birkhoff. *Commun. Math. Phys.* **106** (1986), 383–394.
- [Ma] A. I. Markushevitch. *Theory of Functions of a Complex Variable, vol. III*. Prentice Hall (1967).
- [Mi] M. Misiurewicz. Twist sets for maps of the circle. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **4** (1984), 391–404.
- [Ne] Z. Nehari. *Conformal Mappings*. McGraw-Hill (1975), New York.
- [Newh] S. E. Newhouse. The abundance of wild hyperbolic sets and non smooth stable sets for diffeomorphisms. *Publ. Math. IHES*, **50** (1979), 101–152.
- [NPT] S. Newhouse, J. Palis & F. Takens. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms. *Publ. Math. IHES*, **57** (1983), 5–72.
- [Newm] M. H. A. Newman. *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*. Cambridge University Press (1939), Cambridge.
- [Ni] Z. Nitecki. *Differentiable Dynamics*. The MIT Press (1971), Cambridge USA.