SUR DEUX CLASSES D'ANNEAUX NON-COMMUTATIFS

Jean Menard

(reçu le 30 août 1968)

Nous nous proposons ici d'étendre certains résultats de la théorie des anneaux commutatifs à deux classes d'anneaux non-commutatifs. Il s'agit, d'une part, des anneaux inversifs à droite, définis par Thierrin [4], et des anneaux réversifs. Les premiers possèdent la propriété $xyR = yxR$, les seconds la propriété $xRy = yRx$, ce pour tout $x, y \in R$. Nous considérons aussi la réunion des parties d'un anneau qui possèdent respectivement l'une ou l'autre propriété. Ce "noyau" d'interversion ou de réversion jouit de propriétés intéressantes ; par exemple, s'il est non-nul, l'anneau primitif qui le contient est un corps. Nous étudions aussi les idéaux A d'un anneau R dont la structure d'anneau est interversive à droite ou réversive, i.e., $abA = baA$ (ou $aAb = bAa$) pour tout $a, b \in A$.

1. Anneaux réversifs

Définition 1. Un anneau R est dit réversif si $xRy = yRx$, pour tout $x, y \in R$. Ce qui est équivalent à dire que, pour tout $x, y, a \in R$, il existe $a' \in R$ tel que $xay = ya'x$.

Exemple 1. Soit K un corps, et définissons les deux opérations suivantes sur $K \times K$:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) . (c, d) = (ad + bc, bd).$$

On vérifie aisément que $K \times K$ devient alors un anneau (à élément unité) et un anneau réversif.

Exemple 2. Les anneaux A vérifiant la relation (plus forte) $axb = bxa$, $\forall a, b, x \in A$. Ces anneaux sont en fait une classe de PI-anneaux.

Canad. Math. Bull. vol. 12, no. 4, 1969

https://doi.org/10.4153/CMB-1969-049-7 Published online by Cambridge University Press

Exemple 3. Soit A un anneau à élément unité. Supposons que tout $x \in A$ est de la forme cu où c est central et u inversible. Il est facile de vérifier que A est alors réversif. En effet l'équation

$$c_1 u_1 c_2 u_2 c_3 u_3 = c_3 u_3 c' u' c_1 u_1$$

admet comme solution

$$c' = c_2 , \quad u' = u_3^{-1} u_1 u_2 u_3 u_1^{-1} .$$

Considérons en particulier la situation suivante : Soit K un corps et soit $K[x]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée sur K. Considérons dans $K[x]$ l'idéal I_n formé de 0 et des polynômes dont tous les termes sont de degré $\geq n$. On vérifie que $K_n = K[x]/I_n$ possède un élément unité et que $K_n/\mathrm{rad}\, K_n$ est un corps, i.e., que K_n est complètement primaire [3, page 56]. Les éléments de K_n sont donc de la forme $x^k u$ où u est inversible. Donc K_n est un anneau réversif. De façon plus générale, on voit que l'anneau des séries formelles $R[[x]]$ est aussi réversif, si l'on remarque [6, page 16] que les éléments inversibles de $K[[x]]$ sont ceux dont le "terme constant" est $\neq 0$.

Rappelons ici qu'un anneau commutatif sous-directement irréductible et sans éléments nilpotents $\neq 0$ est un corps; de même un anneau commutatif simple ou primitif est aussi un corps.

Nous montrons ici que dans ces résultats, on peut remplacer commutatif par réversif.

LEMME 1. <u>Tout idempotent de l'anneau réversif</u> R <u>est central.</u>

LEMME 2. <u>Dans l'anneau réversif</u> R, <u>tout idéal à droite minimal</u> A $(A^2 \neq 0)$ <u>est un corps</u>.

En effet, il existe [1] un idempotent $e \in A$ tel que $A = eR$. Puisque e est central, A est bilatère et e est élément unité pour A. Puisque $xA = A$, pour tout $x \in A$, $x \neq 0$, A est un corps.

THÉORÈME 1. <u>Tout anneau réversif</u> R <u>sous-directement irréductible et sans nilpotents</u> $\neq 0$ <u>est un corps</u>.

<u>Démonstration</u>. L'intersection $\mathfrak{A}$ de tous les idéaux non-nuls de R est un idéal non-nul de R évidemment minimal. De plus $\mathfrak{A}$ est

aussi un idéal à droite minimal. En effet, soit I un idéal à droite tel que $(0) \subset I \subset \mathfrak{a}$.

Alors $R^2 I \subseteq I$, donc $R^2 I = 0$, puisque $R^2 I$ est idéal bilatére. C'est une contradiction, puisque R ne contient pas de nilpotents non-nuls.

Selon le lemme 2, $\mathfrak{a}$ est un corps, et il existe un idempotent e tel que $\mathfrak{a} = eR$.

L'ensemble $T = \{ea - a \mid a \in R\}$ est un idéal de R, puisque e est central. De plus, si $b \in \mathfrak{a} \cap T$,

$$b = ex = ez - z ,$$

et

$$eb = eex = ex = b = eez - ez = 0 .$$

Donc $\mathfrak{a} \cap T = (0)$. Mais R étant sous-directement irréductible $T = (0)$ et $ea = a$, pour tout $a \in R$.

Donc $\mathfrak{a} = R$, et R est un corps.

THÉORÈME 2. <u>Tout anneau primitif réversif est un corps</u>.

<u>Démonstration</u>. Soit A un tel anneau. Soit I un idéal à droite modulaire maximal de A tel que $(I:A) = 0$. Montrons que I est bilatère, car alors $I \subseteq (I:A) = 0$ est un idéal modulaire maximal, ce qui entraîne que A est un corps. Soient $x \in I$, $a \in A$. Alors $ax - eax \in I$ où e est unité à gauche modulo I. Donc

$$ax - eax = j \in I ,$$

$$ax = eax + j = xbe + j \in I .$$

THÉORÈME 3. <u>Tout anneau réversif simple</u> A <u>est un corps</u>.

<u>Démonstration</u>. Selon le théorème 2, il nous suffit de montrer que A est primitif. Pour ce faire, il suffit de vérifier que A est semi-simple, car alors A doit posséder au moins un idéal primitif P, et comme $P \subset A$, alors $P = 0$, ce qui entraîne que A est primitif. Remarquons que A ne contient aucun idéal à droite. Soit en effet I un idéal à droite de A; alors $AI = A^2 I \subseteq I$, et I est bilatère, donc

$$I = (0) \quad \text{ou} \quad I = A .$$

Soit alors $\mathfrak{R}$ le radical de A (au sens de Jacobson). Montrons que $\mathfrak{R} = (0)$. Supposons $\mathfrak{R} \neq (0)$. Alors puisque A est simple, $\mathfrak{R} = A = A^2 = \mathfrak{R}^2$. Il existe donc $b \in \mathfrak{R}$ tel que $b\,\mathfrak{R} = \mathfrak{R}$ et il existe $z \in \mathfrak{R}$ tel que $bz = b$.

Soit z' le quasi-inverse de z ; alors

$$0 = b - bz = (b - bz)z'$$

$$= b - b(z \circ z') = b ,$$

une contradiction. Donc $\mathfrak{R} = (0)$.

2. Le noyau de réversion

Définition 2. Une partie non-vide K d'un anneau R est un complexe de réversion si $xKy = yKx$, quels que soient $x, y \in R$. Le noyau de réversion H de R est la réunion de tous ces complexes :

$$H = \bigcup \{K \mid K \text{ est un complexe de réversion de } R\} .$$

PROPOSITION 1. *H est un idéal de R et un anneau réversif. On vérifie en effet que si K et L sont deux complexes de réversion de R, alors les complexes suivants sont aussi complexes de réversion:*

$$K + L = \{k + \ell \mid k \in K,\ \ell \in L\} ,$$

$$K\,R = \{kr \mid k \in K,\ r \in R\} ,$$

$$R\,K = \{rk \mid r \in R,\ k \in K\} ,$$

$$K^* = \{ -k \mid k \in K \} .$$

THÉORÈME 4. *Soit R un anneau primitif. Alors H est un corps $(= R)$ ou $H = (0)$.*

Démonstration. Soit I un idéal à droite modulaire maximal de R tel que $(I : R) = (0)$. Supposons $H \neq (0)$:

1) si $H \subseteq I$, I contient un idéal bilatère, donc $I = (0)$; donc $H = (0)$, une contradiction.

https://doi.org/10.4153/CMB-1969-049-7 Published online by Cambridge University Press

2) soit donc $H \not\triangleleft I$. Posons $\overline{H} = H \cap I$. Puisque R est primitif, H l'est aussi [1, page 34]. H étant réversif, est donc un corps (Théorème 2). Donc $\overline{H} = (0)$ ou $\overline{H} = H$. Si $\overline{H} = H$, $H \cap I = H$, donc $H \subseteq I$, une contradiction. Donc $\overline{H} = (0)$ et $R = H \oplus I$. Donc I est bilatère, donc $I = (0)$ et $R = H$ est un corps.

COROLLAIRE. Un anneau primitif R est un corps si et seulement s'il existe un complexe $K \neq (0)$, tel que $aKb = bKa$, $\forall a, b \in R$.

THÉORÈME 5. Soit R un anneau premier et soit H le noyau de réversion de R. Pour que R soit intègre, il suffit que $H \neq 0$.

Démonstration. Soient $x, y \in R$, $xy = 0$. Supposons $x \neq 0$, $y \neq 0$. Alors,

$$\begin{aligned} xyH &= 0 \\ xyHx &= 0 \\ x^2 Hy &= 0 \\ yH x^2 &= 0 \\ xHyx &= 0 . \end{aligned}$$

$HR \neq 0$ et $HR \subseteq H$ entraînent $xHRyx = 0$. D'où $xH = 0$ ou $yx = 0$. On montre de façon analogue que $Hy = 0$ ou $yx = 0$. Si $yx = 0$, (0) est premier et réflectif [3], donc complètement premier et R est intègre. D'où $x = 0$ ou $y = 0$, une contradiction. Si $yx \neq 0$, $xH = 0$ et $Hy = 0$. Alors $xRH = 0$ et $HRy = 0$. Donc $x = 0 = y$, une contradiction.

Donc $x = 0$ ou $y = 0$ et R est intègre.

3. Idéaux réversifs d'un anneau

Définition 3. Nous dirons qu'un idéal à droite A d'un anneau R est réversif si A est un anneau réversif, i.e. si $aAb = bAa$, $\forall a, b \in A$.

THÉORÈME 6. Soit R un anneau primitif. Soit A un idéal à droite réversif non-nul de R. Alors A est un corps et $R = A$.

Démonstration. Soit S le radical de A. On sait [1] que $S = \{s \in A \mid sA = 0\}$. $\overline{A} = A/S$ est primitif et réversif, donc un corps. De plus, S est un nil-idéal, donc $\overline{A}$ est un anneau SBI [1, page 53].

Soit $\overline{u}$ l'élément unité de $\overline{A}$; il existe alors $e \in A$, tel que $e^2 = e$

et $\bar{e} = \bar{u}$. e est central (Lemme 1). On vérifie que

$$A = eA = eR \text{ et que } eRe = eAe \text{ est un corps.}$$

De plus $A = eAe = eA = eR = eRe$, d'où l'on voit que eR est un corps et un idéal à droite minimal. A ($= eR$) est donc un corps. Montrons que $A = eR = R$. En effet

$$R = eR \oplus (1-e) R .$$

Mais $eR((1-e)R) = eRe((1-e)R) = 0$. Puisque R est primitif, donc premier, $(1-e)R = 0$.

COROLLAIRE. Un anneau R est un corps si et seulement si R est primitif et possède un idéal à droite réversif non-nul.

Pour terminer, nous généralisons notre théorème 1 comme suit:

THÉORÈME 7. Soit R un anneau sous-directement irréductible sans éléments nilpotents $\neq 0$. Soit A un idéal réversif $\neq 0$ de R. Alors A est un corps et $A = R$.

Démonstration. Soit N idéal minimal de R. On voit facilement que aAa est idéal non-nul de A, pour chaque $a \neq 0 \in A$. De plus, aAa est idéal de R. En effet, si $x \in R$,

$$aAax = axAa \subseteq aAa$$

$$xaAa = aAxa \subseteq aAa .$$

Donc $N \subseteq aAa$. Soit maintenant B un idéal de A. Si $b \in B$, $b \neq 0$, bAb est idéal de R et $N \subseteq bAb \subseteq B$. Donc N est idéal minimal de A qui est sous-directement irréductible, donc un corps. De plus $A = R$, car A est idéal minimal à droite de R, donc $A = eR$ et $R = eR = A$.

4. Anneaux interversifs à droite

Définition 4. Un anneau R est interversif à droite (voir [3]) si $xyR = yxR$, pour tout $x, y \in R$.

L'ensemble R des matrices de la forme $\begin{pmatrix} n & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $n, m \in Z$, est un anneau interversif à droite (sans élément unité).

https://doi.org/10.4153/CMB-1969-049-7 Published online by Cambridge University Press

Remarquons qu'il est facile de donner des exemples d'anneaux interversifs à droite qui ne sont pas réversifs. Ainsi, soit A l'algèbre sur le corps F à 2 éléments, engendrée par le demigroupe $D = \{a, b\}$, avec $xy = y$. Il est facile de voir que A est un anneau interversif à droite, mais non réversif.

Dans un mémoire célèbre, McCoy a caractérisé les anneaux commutatifs dont au moins un élément n'est pas diviseur de zéro à droite. Le théorème suivant étend ce résultat aux anneaux interversifs à droite.

THÉORÈME 8. Soit R un anneau interversif à droite dont au moins un élément n'est pas diviseur de zéro à droite, et soit D l'ensemble des diviseurs de zéro à droite de R. Alors R est sous-directement irréductible si et seulement si R possède les quatre propriétés suivantes :

(i) $\{x \in R \mid xD = 0\}$ est un idéal principal $I = (j) \neq 0$;

(ii) $\{y \in R \mid Iy = 0\} = D$;

(iii) R/D est un corps ;

(iv) si $d \in D, , d \notin I$, il existe $c \in R$ tel que $dc = j$.

La démonstration est essentiellement celle de McCoy. Rappelons ici (voir [3]) qu'un sous-ensemble K non-vide d'un anneau R est dit complexe d'interversion à droite si $abK = baK$, quels que soient $a, b \in R$. La réunion T de tous ces complexes est le noyau d'interversion à droite de R. Le résultat suivant est le pendant du théorème 4, et la démonstration en est analogue.

THÉORÈME 9. Soit R un anneau primitif et soit T le noyau d'interversion à droite de R. Alors $T = (0)$ ou $T = R$ et R est un corps.

THÉORÈME 10. Soit R un anneau semi-simple artinien à droite, et soit T le noyau d'interversion à droite de R. Alors $T = (0)$ ou T est somme directe de corps.

Démonstration. On sait que $R = G_1 \oplus \ldots \oplus G_n$, où les G_i sont simples. Soit $x \in T$, $x = \Sigma x_i$, $x_i \in G_i$.

Si $a, b \in R$, alors $abx = \Sigma abx_i$, $abx_i \in G_i$. Il existe donc

https://doi.org/10.4153/CMB-1969-049-7 Published online by Cambridge University Press

$x' \in T$ tel que $abx = bax'$. Donc $bax' = \Sigma\, bax'_i \in G_i$. Puisque la somme est directe, $abx_i = bax'_i$, et $x_i \in T \cap G_i$. Donc $T \subseteq T \cap G_1 \oplus \ldots \oplus T \cap G_n$. Si maintenant $x \in T \cap G_1 \oplus \ldots \oplus T \cap G_n$, alors $x = x_1 + \ldots + x_n$ et

$$\begin{aligned} abx &= ab(x_1 + \ldots + x_n) \\ &= abx_1 + \ldots + abx_n \\ &= bax'_1 + \ldots + bax'_n \\ &= bax', \quad \text{et} \quad x \in T. \end{aligned}$$

Donc $T = T \cap G_1 \oplus \ldots \oplus T \cap G_n$. Mais $T \cap G_2$ est un idéal de G_i, donc $T \cap G_i = (0)$ où $T \cap G_i = G_i$. Puisque G_i est simple et interversif à droite, G_i est un corps. Il suffit en effet pour le voir d'adapter la preuve du théorème 3.

Définition 5. Nous dirons qu'un idéal à droite A d'un anneau R est un idéal à droite *interversif à droite* si $abA = baA$, quels que soient, $a, b \in A$.

PROPOSITION 2. *Tout idéal à droite minimal A d'un anneau R est interversif à droite.*

La réciproque, qui n'est évidemment pas vraie en général, l'est pour la classe des anneaux primitifs.

THÉORÈME 11. *Si R est un anneau primitif, un idéal à droite A de R est minimal si et seulement si A est un idéal à droite interversif à droite.*

Démonstration. La condition est nécessaire selon la proposition 1. Soit donc A un idéal à droite interversif à droite de R, et soit S le radical (de Jacobson) de A. D'après [1, page 34] $S = \{s \in A \mid sA = 0\}$, et A/S est primitif. Mais A est un idéal interversif à droite, donc $\bar{A} = A/S$ est primitif et interversif à droite. Donc $\bar{A}$ est un corps.

https://doi.org/10.4153/CMB-1969-049-7 Published online by Cambridge University Press

S est un nil-idéal de A, donc A est un anneau SBI*. Soit $\bar{u}$ l'élément unité de $\bar{A}$; il existe alors $e \in A$, tel que $e^2 = e$, et $\bar{e} = \bar{u}$. De là suit $ex - x \in S$, pour tout $x \in A$; donc

$$(ex - x)y = 0 \quad \text{pour tout } y \in A ;$$

donc

$$exy = xy .$$

En particulier, $eae = ae$, et $eAe = Ae$.

Montrons maintenant que $A(1 - e) = S$. De $\bar{u} = \bar{e}$ ($\bar{u}$ élément unité de $\bar{A}$) suit $x - xe \in S$, pour tout $x \in A$. Donc $A(1 - e) \subseteq S$. Inversement soit $a \in S$. Alors $aA = 0$. Mais $a = ae + a - ae = a - ae \in A(1 - e)$. Donc $S \subseteq A(1 - e)$. Donc $A(1 - e) = S$ est un idéal de A, et $A/A(1 - e) \cong Ae$, puisque $A = Ae \oplus A(1 - e)$.

Donc $\bar{A} = A/S \cong Ae$, et Ae est un corps, de même que eAe (= Ae), et e est l'élément unité de ce corps. De plus, $eA \subseteq eR \subseteq A$, donc $eAe \subseteq eRe \subseteq Ae = eAe$, d'où $eAe = eRe = Ae =$ corps.

R étant primitif, n'a pas d'idéaux à droite nilpotents $\neq 0$. Selon [1, page 65] eR est idéal minimal à droite si et seulement si eRe est un corps. Donc eR est idéal à droite minimal. Or eA est idéal à droite, $eA \subseteq eR$, donc $eA = eR$.

Montrons que $eA = A$. On a $A = eA \oplus (1 - e)A$.

D'aprés ci-dessus, $a - ea \in S$, d'où $(1 - e)A \subseteq S$. $(1 - e)A$ est donc un nil-idéal à droite de R. Donc $(1 - e)A = 0$ puisque R est primitif. Donc $A = eA = eR$. A est donc idéal à droite minimal de R.

---

* Soit R un anneau et $\mathfrak{R}$ son radical de Jacobson. On dira que $\mathfrak{R}$ est un anneau SBI [1, page 53] si et seulement si

1. L'équation $x^2 - x = z$, $z \in \mathfrak{R}$ a une solution $z_1 \in \mathfrak{R}$ telle que.

2. Le sous-anneau de R formé des éléments qui commutent avec z coincide avec le sous-anneau formé des éléments qui coincident avec z_1.

https://doi.org/10.4153/CMB-1969-049-7 Published online by Cambridge University Press

Définition 6. Nous dirons d'un anneau R qu'il est un anneau σ-interversif à droite s'il est somme d'idéaux à droite interversifs à droite. Le théorème 10 nous donne alors les tres intéressants corollaires suivants:

COROLLAIRE 1. Soit R un anneau σ-interversif à droite primitif. Alors R est simple et coïncide avec son socle à droite (somme des idéaux à droite minimaux).

COROLLAIRE 2. Un anneau à élément unité R est l'anneau de toutes les matrices sur un corps si et seulement si R est un anneau σ-interversif à droite primitif.

COROLLAIRE 3. Tout anneau σ-interversif à droite semi-simple avec élément unité R est somme sous-directe d'anneaux de matrices sur un corps.

THÉORÈME 11. Soit R un anneau sous-directement irréductible sans éléments nilpotents $\neq 0$. Soit $\mathfrak{a} \neq 0$ un idéal interversif à droite de R. Alors $\mathfrak{a}$ est un corps, et $\mathfrak{a} = R$.

Démonstration. Soit M l'idéal minimal $\neq 0$ de R. Soit $a \in \mathfrak{a}$, $a \neq 0$. Nous allons montrer que

1) $a^2 \mathfrak{a}$ est idéal $\neq 0$ de $\mathfrak{a}$;

2) $a^2 \mathfrak{a}$ est idéal $\neq 0$ de R .

En effet,

1) $a^2 \mathfrak{a}\mathfrak{a} \subseteq a^2 \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a} a^2 \mathfrak{a} = a^2 \mathfrak{a}\mathfrak{a} \subseteq a^2 \mathfrak{a}$;

2) soit $x \in R$. Alors $a^2 \mathfrak{a} x \subseteq a^2 \mathfrak{a}$ et $xa^2 \mathfrak{a} = xaa\mathfrak{a} = axa\mathfrak{a} = aax\mathfrak{a} \subseteq a^2 \mathfrak{a}$.

Soit maintenant $\mathfrak{B} \neq 0$ un idéal quelconque de $\mathfrak{a}$. On voit que si $b \in \mathfrak{B}$, $b \neq 0$, $b^2 \mathfrak{a}$ est idéal $\neq 0$ de $\mathfrak{a}$ et de R, donc

$$M \subseteq b^2 \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{B} .$$

M est donc idéal minimal de $\mathfrak{a}$, qui est donc sous-directement irréductible et sans nilpotents $\neq 0$, donc un corps.

Montrons que $\mathfrak{a} = R$. Remarquons d'abord que $\mathfrak{a}$ est idéal à droite minimal de R, car si $I \subseteq \mathfrak{a}$ $(I \neq 0)$ est idéal à droite de R, I est aussi idéal à droite de $\mathfrak{a}$, ce qui est impossible. Donc $\mathfrak{a} = eR$ où $e^2 = e$. eR est donc idéal de R, et

$$R = eR \oplus (1 - e)R, \quad \text{avec} \quad eR \cap (1 - e)R = 0 .$$

Puisque $eR \neq 0$, il vient $R = eR$, d'où l'on conclut que $R = \mathcal{C}$ est un corps.

REFERENCES

1. N. Jacobson, Structure of rings. (Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 37.)

2. N.H. McCoy Subdirectly irreducible commutative rings. Duke Math. J. 12 (1945) 381-387.

3. G. Thierrin, Contribution à la théorie des anneaux et des demi-groupes. Comm. Math. Helvetici 32 (1957) 94-112.

4. G. Thierrin, Sur le radical corpoïdal d'un anneau, Canad. J. Math. 12 (1960) 101-106.

Département de Mathématiques
Université du Québec
Montréal

et

Faculté des Sciences d'Orsay
Paris

https://doi.org/10.4153/CMB-1969-049-7 Published online by Cambridge University Press