L'ALGÈBRE SYMBOLIQUE EN MÉCANIQUE CÉLESTE

ANDRÉ DEPRIT
National Institute of Standards and Technology,
Gaithersburg, MD 20899–0001, U.S.A.

Que dire de l'algèbre symbolique en mécanique céleste si ce n'est que les astronomes furent les premiers sur le chantier. Rien là qui doive surprendre.

LA GRANDE PÉRIODE

D'un calcul qui dépasse les bornes de la patience humaine, on dit qu'il est astronomique. L'expression est heureuse, vous l'admettrez volontiers s'il vous arrive de retirer de la bibliothèque les mémoires de Lagrange, de Laplace, du sieur de Pontécoulant et de Leverrier, à quoi vous pourriez ajouter, s'il vous reste de la place au creux des coudes, une certaine théorie de la lune qui fit histoire par ses formules longues comme des écheveaux sans fin. Nul ne se faisait un nom en mécanique céleste s'il n'était un athlète en calcul algébrique. Hansen, Hill, Airy, Tisserand, Radau, Brown, Von Zeipel consacrèrent des années, voire des décennies, à pousser le rocher de leur théorie au sommet de la précision. A de rares exceptions, pour chacun d'eux la légende se répéta: les observations haussaient la précision de plusieurs ordres, le souffle coupé, Sisyphe lâchait prise et sa théorie tombait à pic dans l'oubli.

De ces travaux d'Hercule, la discipline est sortie apauvrie, rétrécie, écœurée, écœurante même, et probablement à jamais, au goût des astronomes. Il fallait se rendre à l'évidence. Patience et longueur de temps n'en font pas plus que force ni que rage quand il s'agit de réduire la complexité des calculs algébriques que la mécanique céleste se doit d'exécuter.

LE TEMPS DES MOULINETTES

Il en est toutefois du calcul comme de la diplomatie: la fortune ne vous clôt jamais une porte qu'elle ne vous en déclôt une autre aussitôt. Tandis que la mécanique céleste faisait sa dépression, apparaissaient les moulinettes commerciales, des Mercedes et des Brunsviga. L'analyse numérique prit le pas sur l'algèbre symbolique. Comme de bien entendu, la mécanique céleste

S. Ferraz-Mello et al. (eds.), Dynamics, Ephemerides and Astrometry of the Solar System, 267–282.

suivit le mouvement, mais de loin. On se mit à créer les figures qui manquaient aux *Méthodes nouvelles* de Poincaré. George Darwin se choisit les orbites périodiques, Elie Strømgren les familles d'orbites périodiques. Pour leur compte, Georges Lemaître, Sandoval Vallarta et René de Vogelaere s'en prenaient à des sujets délicats comme les exposants caractéristiques et les orbites asymptotiques. Il importe, à notre point de vue, de se rendre compte que ces explorations numériques couvaient une conversion radicale des esprits: à dater de ce temps, le sort de la mécanique céleste est lié à l'avenir des moyens de calcul. Fort de cette conviction, Leslie Comrie introduisit les tabulatrices comptables imprimantes au Nautical Almanach Office de Greenwich. Aussi riche de promesses fut la nomination de Wallace Eckert à la direction du Nautical Almanach Office à Washington.

Eckert était un homme de calcul au double sens du mot. Son initiation à l'algèbre symbolique, il la tenait de Brown; sa formation en analyse numérique, il l'acquit au cours des années que Brown l'employa à réduire les observations de la lune. Au Nautical Almanach Office, Eckert établit les tâches de calcul sur la base des cartes perforées. C'était une innovation.

RÉVEIL

L'effort de guerre d'abord, la course à l'espace ensuite, sans parler de l'impitoyable concurrence commerciale et financière, imprimaient une allure effrénée au développement des calculateurs. Eckert surveillait la tempête. Le moment lui sembla venu en 1958 d'offrir à ses collègues l'occasion de prendre ensemble conscience des conditions dans lesquelles se ferait à l'avenir la recherche en mécanique céleste. Ils le firent à souhait lors de la conférence convoquée à New York, si du moins l'on en croit le procès verbal publié par l'*Astronomical Journal*.

Qu'on se garde toutefois de voir un plan de travail dans ce rapport: sur le thème central des équipements et du logiciel comme aussi des approches et des axes de recherche, le document ne contient rien de précis. Il s'en dégage néanmoins plusieurs éléments de grande conséquence pour l'avenir, à commencer par le fait que le lancement de Sputnik a tiré la mécanique céleste de son état dépressif. Au début du siècle, la discipline s'était réfugiée auprès des gens du Métier des Almanachs; à lire le rapport, on devine qu'elle ne s'est pas encore soustraite à leur emprise. Les circonstances ne le permettaient pas.

Il fallait en effet fournir de toute urgence aux ingénieurs d'aérospatiale de quoi prédire la trajectoire d'un satellite dans le champ de gravité de la terre. La mécanique céleste sortit donc des étagères tout ce qu'elle avait accumulé à propos de modèles dynamiques intégrables et de leurs perturbations. A la conférence d'Eckert, par exemple, tandis qu'Herget plaçait son mot sur la méthode de Hansen, Brouwer confessait qu'il essayait d'appliquer au problème des opérations que Delaunay, un siècle auparavant, avait mises au point dans la théorie de la lune.

Avec l'inclinaison critique Brouwer se prit les pieds dans une difficulté de nature mathématique. La mécanique céleste du XIX^e^ siècle ne l'avait pas rencontrée. Orlov s'y était achoppé quelques années auparavant lorsqu'il misait sur la méthode de Lindstedt pour traiter la trajectoire d'un satellite artificiel à la manière de Poincaré comme la déformation d'un arc pris sur une orbite périodique de première espèce. Les complexes militaires-industriels qui, de part et d'autre du Rideau de Fer, jouaient les mécènes d'une renaissance de la mécanique céleste, n'avaient ni patience ni curiosité pour ce genre d'énigmes. Qu'à cela ne tienne! D'entrée de jeu, il aurait fallu faire face au problème, à tout le moins le marquer auprès des générations montantes comme un sujet de recherche susceptible d'ouvrir la discipline à de nouveaux horizons. Mais les invités d'Eckert ne l'ont pas fait. La mécanique céleste faisait sa rentrée à l'avant-scène avec adresse et assurance, mais à reculons, les yeux fixés sur les décors de son passé.

LE PREMIER PAS

On fera exception toutefois pour ce qui est de l'algèbre symbolique. Herget et Musen avaient ouvert la brèche sur une IBM 650 à Cincinnati. Ils demandaient à une machine de réaliser les trois opérations fondamentales

$$\begin{aligned}(f,g) &\to f+g: \quad \mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathcal{F},\\ (f,g) &\to f\,g: \quad \mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathcal{F},\\ (\alpha,f) &\to \alpha\, f: \quad \mathcal{K}\times\mathcal{F}\to\mathcal{F}\end{aligned}$$

dans une algèbre de Fourier $\mathcal{F}$ à plusieurs variables sur le corps des nombres réels. Leurs programmes procédaient d'une représentation triviale des séries de Fourier comme des éléments dans un espace vectoriel. Aux lignes trigonométriques

$$\cos(m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_px_p) \qquad \text{et} \qquad \sin(n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_px_p)$$

correspondaient respectivement des listes de la forme

$$(0,m_1,m_2,\ldots,m_p) \qquad \text{et} \qquad (1,n_1,n_2,\ldots,n_p).$$

Il ne fallait pas être grand clerc pour inventer ce schéma. Mais Herget et Musen entendaient le faire exécuter par une machine rudimentaire dans une langue de programmation primitive.

On a peine, de nos jours, à se représenter les obstacles auxquels Herget et Musen se heurtaient. En voici un exemple parmi beaucoup d'autres. A la sortie d'un calcul qui ne pouvait se faire que sur cartes, chaque vecteur $\{m_j\}$ ou $\{n_j\}$ ainsi que son coefficient était perforé dans des colonnes fixées à l'avance quels que fussent les résultats de l'opération. Ou bien la sous-routine de sortie interceptait les dépassements de capacité—auquel cas elle n'avait d'autre recours que d'arrêter la machine et perdre tout ce qu'elle avait accompli—ou bien elle laissait passer l'indice excédentaire, ce qui déclencherait une perforation multiple, laquelle on ne pouvait déceler qu'en passant le paquet des résultats tout entier à une vérificatrice de cartes perforées. Qu'on pense aussi aux complications de manier des nombres réels avant que n'entrent en exploitation les circuits électroniques opérant sur des nombres en virgule flottante. Bref, si l'entreprise ne se distinguait pas par la hauteur de ses conceptions, elle étonnait par son acharnement à poursuivre une tâche prometteuse sur un équipement de toute évidence insuffisant.

On se serait attendu, pour la démonstration de ces techniques, à des exercices scolaires comme de résoudre l'équation de Képler. Brouwer, au contraire, choisit de les faire appliquer à un problème aussi redoutable à l'époque que la théorie du huitième satellite de Jupiter. La thèse de doctorat de Jean Kovalevsky sur ce sujet fit grand bruit chez les gens de mécanique céleste. Que les machines puissent être programmées pour traiter des formules mathématiques, on en caressait l'idée aussitôt qu'on entra dans l'ère cybernétique. Il n'en reste pas moins que, lorsqu'on attend une surprise et qu'elle survient, elle ne laisse pas pour autant d'émerveiller.

UN COUP DE GRÂCE

Une fois la brèche ouverte, on s'employa sans délai à la rallonge. Tout semblait possible en algèbre symbolique. On ferait tomber toutes ces théories des XVIII^e^ et XIX^e^ siècles qu'on tenait jusqu'ici pour des citadelles inviolables. Ce n'était qu'affaire de creuser une tranchée de programmation sous leurs fondations. On voyait juste; on se trompait sur le temps qu'il faudrait mettre à investir ces ouvrages. J'en prends Eckert à témoin. Il persévéra dans un rôle que la tradition avait consacré, celui d'Atlas traversant les âges l'échine ployée sous le fardeau d'une théorie. Il commença par prendre en charge la théorie de Hill et de Brown.

Seuls les compagnons du Métier des Almanachs peuvent apprécier le travail d'épuration auquel se livra la première équipe d'Eckert. Selon l'ordre établi, une Théorie se composait de trois formules: la longitude, la latitude et, sinon la distance radiale, du moins une fonction de celle-ci comme, par exemple, un angle de parallaxe. Pour en faire un instrument de calcul, il fallait débiter la théorie en schémas emboîtés de formules trigonométriques intermédiaires, de préférence calculables par logarithmes. En termes mathématiques, cela revenait à composer des fonctions: on remplaçait les arguments d'une fonction par des fonctions de nouveaux arguments indépendants des premiers. En termes pratiques, comme on s'adressait à des employés sans formation mathématique avancée, on présentait les fonctions sous forme de tableaux; les valeurs dans les cases d'un tableau servaient à calculer des valeurs qu'on entrait dans les cases d'un tableau ultérieur. Ainsi s'explique le nom de Tables qu'on donna à ce procédé. C'était, au fond, de l'EXCEL ou du LOTUS avant le temps. Une théorie dépourvue de tables n'avait pas d'intérêt. Mais qu'on ne se leurre pas, la confection des tables était une besogne aussi considérable que l'édification d'une théorie. Brown consacra dix années à démonter sa théorie de la lune pour la mettre à portée des petites mains dans les bureaux nationaux d'éphémérides. Avant lui, Radau à l'Observatoire de Paris en avait fait de même pour la théorie de Delaunay.

Eckert s'était assigné de mettre à jour les valeurs que Brown avait attribuées aux constantes à la base de ses tables. A cette fin, il mit les tables elles-mêmes sur cartes perforées, ce qui lui permit de les manipuler par machine comme des séries de Fourier multiples à coefficients réels. Il obtenait par exemple les corrections en dérivant formellement les coefficients donnés dans la théorie sous formes de séries potentielles tronquées. De fil en aiguille, à retracer le chemin qu'avait descendu Brown de la théorie aux tables, Eckert réalisa qu'on pouvait se passer des tables. Les machines étaient devenues puissantes assez pour évaluer d'emblée les formules d'une théorie. De cette phase de ses recherches, Eckert avec son équipe publia les conclusions dans l'*Improved Lunar Ephemeris*.

Atlas allait-il déposer son fardeau? Il en était libre. Il ne le fit pas. Car les nouvelles éphémérides présentaient des écarts systématiques avec les observations. Manifestement la théorie elle-même était en erreur.

LES SÉRIES DITES DE POISSON

Le travail d'Eckert allait donc se compliquer. Mais les fabricants sortaient de nouveaux modèles de calculateurs électroniques; ils suffiraient à la besogne; on pouvait maintenant compter sur eux pour travailler des heures durant sans craindre une panne de machine. COBOL et FORTRAN ouvraient, en logiciel, l'âge des compilateurs. Grâce à eux, on en vint, en algèbre symbolique, à manier des structures plus riches que les algèbres de polynomes ou les algèbres de séries de Fourier à coefficients réels. On passa aux séries de Poisson.

Ce sont des séries de puissances positives ou négatives à plusieurs variables avec coefficients dans l'algèbre des séries réelles de Fourier. Poisson n'eut jamais rien à faire avec elles; je leur avais donné ce nom pour taquiner Danby qui s'était offert de m'aider à les programmer.

Je proposais de coder en assembleur les opérations algébriques de base comme l'addition et la multiplication des séries ou leurs dérivations partielles. Par ailleurs, je m'en remettais à FORTRAN pour combiner ces opérations à un niveau supérieur. Cette répartition des tâches tenait à deux raisons. La première était qu'un assembleur vous laisse libre d'optimiser un code, ce à quoi un compilateur ne saurait prétendre; par ailleurs, je ne pouvais pas m'astreindre à ne coder qu'en assembleur alors que j'entendais explorer les possibilités de l'algèbre symbolique en dynamique plutôt que de m'appliquer à un problème de type fixe. La seconde raison, d'ordre pratique celle-là, était que je ne pouvais pas prévoir la longueur des séries qui surgiraient dans un problème.

Arnold Rom qui était mon assistant trouva une solution: au coup d'envoi, nos programmes couraient s'emparer de toute la mémoire que leur concédait le système opérationnel. Après quoi, notre système—MAO pour l'appeler par son nom— gérait le territoire annexé. Il le divisait en deux zones à chaque bout du terrain, la "pile" et le "tas". Pour exécuter une opération sur des séries de Poisson, on tirait les opérands du disque pour les entasser sur la pile, après quoi on faisait pousser le résultat sur le tas. Dès qu'il se rendait compte que le résultat en croissance allait empiéter sur la pile, MAO sifflait la fin de la partie, ce qui arrivait très souvent. Les grandes mémoires, celles qui coûtaient les yeux de la tête, ne dépassaient pas 256 K.

On ne pouvait donc pas se permettre, comme on le fait aujourd'hui, d'enrôler les termes au fur et à mesure qu'ils arrivaient. Quand on créait un vecteur partiel, on cherchait tout de suite à le combiner avec son semblable, s'il en avait, dans le résultat en formation. Au niveau du Fortran, on veillait à effacer les résultats intermédiaires aussitôt qu'inutiles. Toujours à l'affût d'économies de mémoire, MAO réduisait les trous dans la pile entre deux séries encore vives. De nos jours, on attend d'un interprétateur qu'il vous rende ces services sans qu'il faille les demander.

Tout malingre qu'il était, MAO fit des imitateurs: au Jet Propulsion Laboratory avec Broucke, au Naval Research Laboratory avec Dasenbroeck. Henrard l'emporta aux Facultés universitaires de Namur. J'en fis part à l'ITA, l'Institut d'astronomie théorique à Saint Pétersbourg. William Jefferys perfectionna le système en donnant aux séries de Poisson la forme de listes à pointeurs, et je m'empressai d'en faire autant.

UNE RÉVISION QUI FINIT BIEN

Encore qu'il n'ait rien dit à ce sujet, on peut croire qu'Eckert appliquait des techniques analogues à refaire les développements de Brown dans la théorie de la lune.

Pour ce qu'il appelait le problème principal, Brown avait mis en place un dispositif récursif de systèmes d'équations différentielles linéaires qui généralisaient l'équation linéaire à coefficients périodiques dite de Hill, et qu'on devait intégrer en forme litérale par approximations successives. Eckert suivit la méthode pas à pas. Il découvrit des petits malheurs, comme

https://doi.org/10.1017/S0074180900127512 Published online by Cambridge University Press

des itérations prématurément arrêtées ou des valeurs légèrement différentes attribuées aux constantes, rien là pensait-il qu'il ne fût à même de corriger sans altérer le Grand Dessin de Brown. Il reviendrait à d'autres, comme Jean Chapront, Michele Chapront-Touzé et Thomas Van Flandern, de découvrir insuffisances et omissions beaucoup plus graves, celles qui entâchaient les perturbations planétaires, les effets dûs à l'aplatissement de la terre et ceux dûs à la relativité.

Vous connaissez l'adage: *A tant mettre la main au bénitier le diable finit par se mouiller*. Ainsi s'explique que Wallace Eckert abandonna les fonctions de réviseur algébriste pour créer sa propre théorie de la lune. Il en finit le second ordre; il en prépara la publication. Il mourut. Il laissait au Naval Observatory un manuscrit dont on ne savait que faire.

Las d'attendre une décision qu'on semblait à jamais retarder, Martin Gutzwiller, un physicien de renom, ami personnel d'Eckert et chargé par IBM de liquider son héritage scientifique, me téléphona au National Bureau of Standards. Je mis Gutwiller en rapport avec Dieter Schmidt à l'université de Cincinnati. Ce dernier travaillait, en effet, depuis quelques années à moderniser la solution semi-analytique de Hill et Brown.

Dieter Schmidt et moi, nous avions repris les idées de MAO, mais en PL/1 cette fois. Je me réservais les séries de Poisson, Dieter Schmidt me suivait dans les séries de puissances positives et négatives de plusieurs variables à coefficients complexes.

LE DÉFI DE DELAUNAY

Pourquoi changer de langage? Après tout, MAO avait passé en FORTRAN l'examen le plus difficile que la mécanique céleste offrait en ce temps: la théorie de Delaunay. Jacques Henrard et moi l'avions rhabillée de pied en cap. Barton avant nous s'était perdu à reproduire litéralement les fameuses opérations de Delaunay; il jouait les réviseurs. Pour notre part, nous entendions faire du neuf: nous avancions par transformations de Lie. Comme Delaunay, nous voulions une théorie complètement analytique; en outre, bien au-delà de la précision atteinte par Delaunay, nous cherchions la distance moyenne de la terre à la lune au décamètre près, ce qui nous conduisit par endroits au vingt et unième ordre. L'élimination des termes de courte période dura vingt-huit heures sans interruption sur une IBM 360-44, l'equivalent de nos jours d'une petite station de travail. C'était une gageure.

Une vérification s'imposait. Nous pensions la trouver dans une correspondance terme pour terme dans les parties communes aux deux théories, l'ancienne et la nouvelle. Nous nous trompions. Nous avions perdu de vue que les variables moyennisées de Delaunay étaient différentes des nôtres puisqu'elles ne résultaient pas des mêmes transformations canoniques. En fait, il fallait établir les équations qui liaient implicitement les éléments de Delaunay et les nôtres, les résoudre par rapport à nos éléments sous forme de séries dans les éléments de Delaunay, enfin substituer celles-ci à nos éléments dans nos formules fondamentales. Procéder en sens inverse, des formules de Delaunay vers les nôtres, était exclu puisque nous ne possédions les premières que sous forme imprimée.

De telles péripéties en dernière minute nous firent passer des moments désagréables. En dépit de quoi, l'aventure se termina comme Henrard et moi l'avions souhaité. Delaunay en tirait un regain de prestige; on ne trouvait rien à lui reprocher si ce n'est de petites erreurs d'arithmétique commises à la sauvette. De son côté, l'algèbre symbolique avait prouvé qu'elle était capable de beaucoup de choses en mécanique céleste. La théorie de la lune, elle, y gagnait peu. On tenta d'ajouter à la nouvelle solution les perturbations causéés par l'aplatissement du champ gravifique de la terre. On finit par reculer devant le nombre extraordinairement élevé de termes qu'il fallait inclure dans les transformations canoniques afin de compenser la convergence extraordirairement lente des séries. En serait-il de même des perturbations planétaires? Rien ne permettait de penser le contraire.

Devrait-on écarter une approche complètement analytique? Je ne m'y résous pas. La théorie de Delaunay reste un défi. A ne cesser de le relever, on ne peut se défendre d'un certain fanatisme.

DES PROCESSEURS SUR MESURE

Au Bureau des Longitudes, par contre, on faisait preuve de réalisme. On ne s'attardait pas à des développements intégralement analytiques. On ne s'embarrassait pas de pousser les intérêts de l'algèbre symbolique proprement dite. Dans la Querelle de la Simplification, pour le dire dans les mots de Joel Moses, il est clair que le Bureau avait pris le parti des Conservateurs. Je ne m'étendrai donc pas sur les triomphes que Pierre Bretagnon, Jean Chapront et Michèle Chapront-Touzé remportaient dans les champs de la mécanique céleste du côté des éphémérides. Je m'en tiens à l'algèbre symbolique. Laquelle montait en popularité mais ne poussait plus de racines. On en restait aux séries de Poisson, on créait des processeurs de séries de Poisson. Or la mécanique céleste est faite de bien d'autres choses que les séries de Poisson, à commencer par les métaprocesseurs, c'est-à-dire des programmes capables de couper sur mesure des processeurs de séries de Poisson.

On ne saurait commencer d'écrire un processeur sans fixer des nombres et faire des choix. On fixe le nombre des variables dont les séries dépendront, on impose un maximum en valeur absolue pour les exposants des variables polynomiales ainsi que les multiplicateurs dans les lignes trigonométriques, on stipule la longueur des pages de mémoire dans laquelle on inscrira les séries. Ces nombres, et d'autres encore, constituent ce qu'il convient d'appeler les "paramètres" du processeur. Par ailleurs, on fait des choix irrévocables. On fixe le type des coefficients (rationnels, réels, complexes) comme aussi leur format (simple ou double précision), on adopte une façon de représenter des objets singuliers comme le vecteur nul, la série nulle et la série unité.

Si le processeur est bien écrit, les valeurs accordées aux paramètres devraient y figurer non comme des nombres mais comme des variables nanties d'une valeur invariable. Quant aux parties du code qui découlent de conventions préalables, on devrait les encadrer de commentaires qui en expliquent la raison d'être. Dès lors qu'on s'en tiendrait à ces règles de bonne programmation, on ne tarderait pas à souhaiter que la machine elle-même se charge de les imposer. Autant lui demander d'écrire le processeur quitte à lui remettre un cahier de charges écrit dans une langue qu'elle puisse interpréter. Faisons plus encore. Divisons le cahier de charges en deux parties. La première, abstraite donc valable pour tous les processeurs, parle des paramètres comme de métavariables sans valeur et traite au conditionnel de tous les choix possibles; c'est le "métaprogramme". La seconde supplée les valeurs des métavariables et stipule les caractéristiques du processeur de séries de Poisson; c'est la "fiche signalétique". Un éditeur—la troisième composante d'un métaprocesseur—intervient pour tirer du métaprogramme le texte complet du processeur correspondant à la fiche signalétique.

L'idée est simple. Après tout, un programme de calcul est un texte, et les machines conviennent à manipuler des caractères d'imprimerie aussi bien que des nombres. Il est normal qu'un compilateur se double d'un éditeur spécialisé dans les textes écrits dans la langue du compilateur avec des commandes qui, pour la facilité du programmateur, sont écrites elles aussi dans la langue du compilateur. Le RATFOR de Ritchie en est l'exemple le mieux connu. Terry Alfriend et Shannon Coffey l'ont employé pour produire en FORTRAN une kyrielle de processeurs de séries de Poisson. Ensemble, nous faisions de l'exploration analytique en vue de trouver une solution exacte jusqu'au quatrième ordre pour le problème principal dans la théorie des satellites artificiels. On rencontrait ici et là des fonctions irrationelles dans les variables de Delaunay; pour les intégrer dans le formalisme rationnel des séries de Poisson, on en faisait des variables formelles. On ne pouvait pas prévoir le nombre de ces variables additionnelles, on se résolut à faire des processeurs sur mesure. J'en faisais de même à Cincinnati, en PL/1 toutefois. Quand on s'était mis d'accord sur un point à explorer, chacun partait de son côté le programmer dans sa langue; on se retrouvait pour comparer les résultats.

Incidemment, le problème principal est l'un de ces cas en mécanique céleste où le fanatisme a fini par payer. Dans la construction de la théorie au troisième et quatrième ordre—un exercice de virtuose comme bien vous pensez—, les règles de simplification concernant l'équation du centre demandaient de combiner des termes pour faire que leur groupe s'intégre d'un coup en fonctions élémentaires. En fait, comme l'ont montré Carlos Osácar et Jesús Palacián, chaque terme, s'il avait été intégré individuellement, aurait introduit la fonction dilogarithmique. C'était bien la première fois qu'on parlait de cette fonction dans le problème des deux corps. On le doit à l'algèbre symbolique.

MONTÉES EN ABSTRACTION

En mécanique céleste, les métaprocesseurs amorcent une nouvelle phase dans l'évolution de l'algèbre symbolique. Ils ont amené à prendre conscience du fait qu'une formule mathématique n'est rien moins qu'un texte, qu'un calcul est une suite de transformations textuelles et que le résultat d'un calcul est un texte. De quoi il résulte qu'un processeur de textes est un outil indispensable au mathématicien qui fait de l'algèbre à la machine. A la rigueur, on pourrait se contenter d'un enchaîneur de caractères le plus général qui soit. Je connais des étudiants en doctorat d'informatique qui se sont amusés à programmer une imprimante "postscript" pour en faire une calculette. Choisir un processeur mathématique, c'est, plus que de raison, une affaire de goûts, d'habitudes et d'éducation. J'ai choisi MATHEMATICA parce qu'il correspond à l'idée que je me suis faite du calcul algébrique comme d'une suite d'opérations typographiques dictées par des lois mathématiques; je n'ai pas d'autres raisons.

On reconnaît un texte mathématique à des phrases comme celles-ci: "Soit E un espace vectoriel sur un corps K; soient x un élément de E et α un élément de K.". Un tel préambule avertit le lecteur que les caractères d'imprimerie "E", "K", "x" et "α" sont désormais doublés d'un certain sens mathématique. Un processeur de textes mathématiques simule cette démarche en conférant des attributs à des symboles. Dans la liste des attributs appartenant au symbole x, on place le symbole "vecteur". Ceci laisse supposer qu'au symbole "vecteur" lui-même on a attaché une liste d'attributs, lesquels sont des instructions que le processeur suivra quand il rencontrera des bouts de phrase comme "$\alpha\, x$" et "$\alpha + x$". Programmer une formule revient à établir un échange de messages entre les symboles d'une formule par l'intermédiaire d'un interprète, en l'occurrence le processeur de textes. Du temps qu'on le faisait à la main, le calcul litéral apparaissait comme un "jeu d'écritures". Rien n'a changé si ce n'est qu'on joue maintenant le jeu à l'écran d'une station de travail sous le contrôle d'un éditeur spécialisé.

Les mouvements de mode en informatique ont ceci de permanent qu'ils remettent en question les rapports de la mathématique et du calculateur.

Avant la révolution LISP, on s'en tenait à la conception de von Neumann selon laquelle un calcul, par le truchement d'un programme, a pour but de modifier l'état d'une machine. Depuis lors, les logiciels ont avancé en abstraction; ils nous ont ouvert de nouvelles perspectives. Ils nous ont, entre autres, donné la capacité d'exécuter un calcul littéral comme une façon de transformer l'état d'une formule et non pas d'une machine.

Pour achever d'intégrer l'algèbre symbolique au logiciel, il reste à simuler l'ordre hiérarchique qui lient les structures mathématiques. L'algébriste regarde un corps de scalaires comme un anneau de type particulier. Comment transférer au symbole "corps" les attributs accordés au symbole "anneau" sans les recopier mais en leur ajoutant la régle que tout élément non nul d'un corps est inversible? On a apporté diverses solutions à ce problème. C'est affaire d'emboîter des contextes. La qualité d'un système de calcul symbolique tient d'une part à l'esprit de généralisation dans lequel le programmateur développe contextes et enchaînements de contextes et, d'autre part, à l'élégance avec laquelle il tire parti des ressources qu'il a créées.

RETOUR AU JARDIN DES PLANTES

On ne peut pas décider de l'avenir du calcul symbolique. Le travail des programmateurs n'est pas une suite de commandes sur contrat; il s'inscrit dans une continuité d'exécution à travers les occasions.

Il y a les petites affaires de weekend. On rencontre sur le réseau Internet un voyageur inconnu en quête d'une façon de mettre un déterminant sous la forme d'un produit scalaire. La nuit avance, on s'endort avec le rébus. Ne voilà-t-il qu'au matin, quand on s'éveille, il vous vient à l'esprit la manière la plus simple qui soit de construire l'algèbre extérieure émanant d'un espace vectoriel à dimension finie. De tels exercices, on en trouve partout et à tout propos, comme celui à ne pas manquer des transformations de Lissajous ni celui de prouver que, sur les variétés d'énergie positive dans un système képlérien, les composantes du moment angulaire et celles du vecteur de Laplace sont les générateurs de l'algèbre de Lie associée au groupe de Lorentz. A cet état d'esprit qui vous contraint d'aller au fond mathématique des choses le plus simplement possible mais en toute rigueur, on gagne un goût si vif qu'on s'en fait un pli—vérifier les calculs d'un auteur auquel on se réfère, traverser les tourbières d'un manuscrit mal écrit soumis pour publication, dégager les fondements d'un algorithme. Quand bien même on en a le talent, et cette condition est à coup sûr indispensable, il faut du temps, un long aprentissage et beaucoup d'exercices avant de prétendre à un certain degré de virtuosité dans l'art de jouer de l'algèbre à la machine.

Il y a les grandes affaires comme d'aménager un traitement des quaternions pour ouvrir la transformation de Kustaanheimo et Stiefel à des extensions nouvelles ou de déchiffrer la *Fundamental Theory* d'Eddington.

L'instrument, s'il est souple, invite à prendre des risques. On peut donc se permettre une fois encore de relever le défi de Delaunay. J'ai toujours eu dans l'idée que des opérations préparatoires comme ce que j'ai appelé l'"élimination de la parallaxe" suffiraient à évacuer les anomalies moyennes du soleil et de la lune, et cela sans passer par des développements selon les puissances des excentricités. A Zaragossa, Carlos Osácar et Jesús Palacián sont en train d'en faire la preuve.

Faut-il mentionner les opérations qui sont devenues routines d'exploitation? On n'hésite plus à normaliser des combinaisons d'oscillateurs harmoniques avec couplages dépendant de plusieurs paramètres. Teodoro López vient d'automatiser les calculs que requiert le théorème d'Arnold à propos des perturbations sur des formes quadratiques qui ne sont pas définies positives. Il applique son outil aux satellites stationnaires dans le voisinage d'une planète dont le champ de gravité n'est pas sphérique. Mais son outil est conçu dans un tel esprit d'abstraction et de généralisation qu'il s'applique également à des situations qui ne relèvent pas de l'astronomie. Dans ce sens, on voudra bien admettre que la mécanique céleste sert de prétexte pour développer de l'algèbre symbolique à la machine.

Sous prétexte encore de faire de la mécanique céleste, Alberto Abad et moi avons entrepris de mettre sur machine les *Tables of Elliptic Integrals* de Byrd et Friedman. Loin de nous l'idée de passer cette compilation au scanner pour en faire une base de données à graver sur un disque compact comme on fait couramment aujourd'hui d'un dictionnaire ou d'une encyclopédie. Nous voulons mettre dans les mains d'un ingénieur ou d'un physicien les algorithmes dont Byrd et Friedman se sont servis pour dresser leurs Tables, ce qui permettrait à l'usager non seulement de reconstruire à volonté les formules mentionnées dans les Tables mais encore d'en ajouter selon ses besoins. C'est une œuvre de longue haleine. Dans une phase préliminaire, Abad s'est occupé d'intégrer dans le mode symbolique les produits

$$\mathrm{sn}^{\alpha}(\mathrm{u},\mathrm{k})\,\mathrm{cn}^{\beta}(\mathrm{u},\mathrm{k})\,\mathrm{dn}^{\gamma}(\mathrm{u},\mathrm{k})$$

dont les exposants sont des entiers positifs ou négatifs. Il n'en fallait pas moins pour aborder dans une seconde phase les intégrales de type général

$$\int^{x} R\left(\overline{x}, \sqrt{y(\overline{x})}\right)\, d\overline{x},$$

R étant une fonction rationelle de ses arguments tandis que $y(x)$ est un polynome

$$a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4$$

à coefficients numériques, voire même littéraux. Dans la phase présente, Miquel Vallejo s'est empressé d'ajouter aux *Fundamenta Nova Theoriæ*

Functionum Ellipticarum de Jacobi une technique pour développer des intégrales elliptiques comme des séries de Fourier dont les coefficients seraient des fonctions rationelles de la nome plutôt que des séries dans les puissances du module.

Je pourrrais continuer la liste des services que l'algèbre symbolique par machine rend à la mécanique céleste. Mais je l'arrête ici pour conclure ma leçon.

L'algèbre symbolique tient aujourd'hui la mécanique céleste pour un Jardin des Plantes. On est loin du temps où les plus grands esprits scientifiques se rencontraient en ce jardin. Il convient cependant de rappeler que c'est là que Newton et Leibniz créèrent le calcul différentiel; c'est là encore il n'y a guère que Poincaré sema ses pressentiments en dynamique non linéaire. Il se trouve encore aujourd'hui des astronomes et des mathématiciens qui poussent les grilles du parc et, cheminant par les sentiers usés, trouvent un coin où planter des espèces nouvelles. L'algèbre symbolique aime de faire métier de jardinière dans cet enclos.

Appendix

BIBLIOGRAPHICAL NOTES

The text above is a response to an invitation to deliver an address on the relations between symbolic algebra and celestial mechanics. The author felt bound to honor the page limitation set by the editors of the Proceedings. Within that constraint, he felt he could not report on progress made at the interface between automated algebra and modern mechanics. He opted therefore for a lecture—based on his personal experience—on the evolution of the main ideas that have driven research on this topic within the horizons of celestial mechanics. A lecture of the sort is usually meant to elicit the interest of readers beyond the pale of specialists. General lectures do not include a bibliography because general readers have no use for it. In this case, however, the author underestimated the curiosity of his public, and the editors have asked him to annotate his text, yet without disfiguring it.

For historical references in Section 1 ("The Great Period"), Deprit advises the readers to consult Poggendorff (1863).

The works of Sir George Darwin and Elie Strømgren mentioned in Section 2 ("The era of the cranking machines") are listed in the later editions of the Poggendorff. The contributions of Lemaître and his colleagues, although more significant and far-sighted, are less known; they were published in French before WWII in obscure Belgian journals. The main items are posted in de Vogelaere (1958). A first hand account on the use of punched cards for astronomical calculations by W. Eckert (1957), an eye witness narrative by Duncombe (1988), a detailed and affectionate biography of Leslie Comrie by W. M. H. Graves (1953), these are but a few items picked in a rich documentation covering the first half of this century.

In Section 3 ("Awakening"), Deprit analyzes the proceedings of the Conference on Celestial Mechanics (Brouwer, 1958) held at Columbia University (17–21 March 1958). The problem of the "critical inclination" was raised in 1953 by Orlov; elucidation of it came some thirty years later. The conclusive paper (Coffey *et al*, 1986) covers just about all contributions to the subject.

About the problem of Jupiter VIII mentioned in Section 4 ("The first step"), there is no better survey than the one given by the person who solved it (Kovalevsky, 1958). The thesis (Kovalevsky, 1959) defended at the Faculty of Sciences of the University of Paris has been reprinted in the *Bulletin astronomique*.

Concerning the research prior to 1972 which is the background of Sections 6 ("The so-called Poisson series") and 8 ("Delaunay's challenge"), Deprit wants to quote only one piece, but it is in his opinion a masterpiece in the survey genre, namely the progress report commissioned by the Institute of Physics to Barton and his colleague Fitch at the Computer Laboratory of the University of Cambridge (Barton and Fitch, 1972). Their analysis is thorough—about 350 items in their list— yet discriminating, critical yet even-handed. Their compilation, however, still views symbolic algebra by machine in the perspective of von Neumann. The update by Henrard (1988) covers the period 1972–1987, but without the breath and depth of the Barton-Fitch report. Its author should not be blamed for that. Proceedings are meant to reflect what happened at a conference, not what happened in the fifteen years preceding the conference. The book by Brumberg (1995) is a better witness of that period. But, as a critical summary, let it be said that it is biased. Brumberg advertises his preferences for iterative over inductive schemes, for sequential over parallel processing. He is a FORTRAN *aficionado* and, as such, has fallen well behind the times in regard to both Symbolic Algebra and Celestial Mechanics. Graduate students fishing in Brumberg's monograph for a research topic in Celestial Mechanics *cum* Symbolic Algebra should know that.

Eckert's theory of the Moon—the subject of Section 7—combined with the revision and extension of Brown-Hill's solution by Schmidt appeared in (Gutzwiller and Schmidt, 1986).

The Quarrel of the Simplification evoked in Section 9 ("Tailor made processors") is re-enacted in vivid terms in a famous paper by Joel Moses (1971). The subtitle is an irreverent invitation to take with respect to algebraic simplification the attitude that, in his celebrated "Guide of the Perplexed". the great Moses ben Maimon adopted in ontology with respect to the concept of divinity. For the outstanding contributions made by the Bureau des Longitudes, Deprit sends readers to the well-penned reports by the late Bruno Morando in this volume; they will find there directions to the relevant literature, e.g. (Bretagnon and Francou, 1988) and (Chapront-Touzé and Chapront, 1988); there is so much of it!

About Section 10 ("Ascensions in abstraction"), Deprit assumes that on a shelf under their workstation readers have stacked the major manuals: Steele (1984) for LISP, MACSYMA (1995), Char *et al*(1991, 1991a, 1992) for MAPLE, Wolfram (1991) for MATHEMATICA, Jenks and Sutor (1992) for AXIOM. All these systems have raised *pro* and *contra* arguments. Those who have not yet chosen a processor of mathematical texts will find a reliable *consumer guide* in Chapter I of Geddes *et al*(1992). Around MATHEMATICA, the controversies have been somewhat acrimonious, and Deprit hopes readers will balance the hostile analysis by a MACSYMA partisan (Fateman, 1991) with the discerning diagnostics of applied mathematicians—see, e.g., Foster and Bau (1989) or Simon (1990). The ideas exposed in Section 10 took their time to emerge; the tumult finally organized itself into a programming methodology most felicitously articulated in Abelson and Sussman (1986). Symbolic Algebra has definitely broken away from its roots in arithmetic as represented by a most consulted encyclopedia (Knuth, 1969). A word of caution to the apprentice in Symbolic Algebra: do not take a seat to watch the debate about parallel processing until you have read the first chapters of the book of Hillis (1985), the creator of the Connection Machine.

Finally, a few quick notes about Section 11 ("Return to the flower garden"). The Lissajous transformations are defined, refined, exercised and exorcized in a quartet of articles published in *Celestial Mechanics* **51** (1991), pp. 201–302; *ditto* for the KS transformation and its avatars [**58** (1994), pp. 151–201]. The "elimination of the parallax" is explained in *Celestial Mechanics* **24** (1981), pp. 111–153, and generalized into a simplification technique by Lie transformations in the *Journal of Astronautical Sciences*, **37** (1989), pp. 451–463; *ditto* for computer implementations of Arnold's theorem (Deprit and López Moratalla, 1996). Rudiments of a processor for elliptic functions and integrals are outlined by Brumberg (*op. cit.*, pp. 52–60); much more is coming (Abad, 1995). Instead of transcribing the well known Fourier series obtained by Jacobi in the *Nova Fundamenta Theoriae Functionum Ellipticarum* or copying manuals like Byrd and Friedman (1954), Gradshteyn and Ryzhik (1980), Aba, Elipe and Vallejo (1994; also Vallejo, 1995) devised a technique for expanding series of that sort for a large class of elliptic functions and integrals. On the project of scanning optically a handbook of mathematical functions and tables for the purpose of converting it into a data base of mathematical objects to be queried and processed by Symbolic Algebra, re ad the work proposal presented at the latest International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (Fateman and Berman, 1994).

References

Abad Medina, A., Elipe Sánchez, A. and Vallejo Carrión, M.: 1994, "Automated Fourier series expansions for elliptic functions", *Mechanics Research Communic.* **21**, 361–366.

Abad Medina, A.:1995, "Integrales y funciones elípticas", *Grupo de Mecánica espacial*, Universidad de Zaragoza (Spain), in preparation.

Abelson, H. and Sussman, G. J.:1986, *Structure and interpretation of computer programs*, The MIT Press, Boston, MA.

Barton, D. and Fitch, J. P.:1972, "Applications of algebraic manipulative programs in physics", *Reports on Progress in Physics*, **35**, 235–314.

Bretagnon, P. and Francou, G.: 1988, "Planetary Theories in rectangular and spherical variables. VSOP87 solutions", *Astronomy and Astrophysics* **202**, 309–315.

Brouwer, D.:1958, "Celestial mechanics conference", *Astronomical Journal*, **63**, 401–463.

Brumberg, V.:1995, *Analytical Techniques of Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin.

Byrd, P. F. and Friedman, M. D.:1954, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg.

Chapront-Touzé, M. and Chapront, J.: 1988, "ELP 2000-85: a semi-analytical lunar ephemeris adequate for historical times", *Astronomy and Astrophysics* **190**, 342–352.

Char, B. W., Geddes, K. O., Gonnet, G. H., Leong, B. L., Monagan, M. B. and Watt, S. M.: 1991, *Maple V Language Reference Manual*, Springer-Verlag, Berlin.

Char, B. W., Geddes, K. O., Gonnet, G. H., Leong, B. L., Monagan, M. B. and Watt, S. M.: 1991, *Maple V Library Reference Manual*, Springer-Verlag, Berlin.

Char, B. W., Geddes, K. O., Gonnet, G. H., Leong, B. L., Monagan, M. B. and Watt, S. M.: 1992, *First Leaves: A Tutorial Introduction to Maple V*, Springer-Verlag.

Coffey, S. L., Deprit, A. and Miller, B.: 1986, "The critical inclination in artificial satellite theory", *Celestial Mechanics* **39**, pp. 365–406.

Deprit, A. and López Moratalla, T., "Estabilidad de satélites geoestacionarios", *Revista matemática de la Universidad Complutense de Madrid*, accepted for publication.

de Vogelaere, R.: 1958, "On the structure of symmetric periodic solutions of conservative systems, with applications ", in *Contributions to the theory of nonlinear oscillations* vol. IV, ed. S. Lefschetz, *Annals of Mathematical Studies* **41**, 53–84.

Duncombe, R. L.: 1988, "Early applications of computer technology to dynamical astronomy", *Celestial Mechanics* **45**, pp. 1–10.

Eckert, W.: 1957, "Computing in Astronomy", in *The Computing Laboratory*, ed. P.R. Hammer, pp.43–50, The University of Wisconsin Press, Madison, WI.

Fateman, R. H.: 1991, "A review of Mathematica", *J. of Symbolic Comput.* **13**. 353–394.

Fateman, R. H. and Berman, B.: 1994, "Optical character recognition for typeset mathematics", in *Proceedings, ISSAC*, Oxford, UK, July 1994, pp. 348–353.

Foster, K. R. and Bau, H. H.: 1989, "Symbolic Manipulation programs for Personal Computers", *Science* **243**, 679–684.

Geddes, K. O., Czapor, S. R. and Labahn, G.: 1992, *Algorithms for Computer Algebra*, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London.

Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M.: 1980, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York/London/Toronto/Sydney/San Francisco.

Graves, W. M. H.: 1953, "Leslie John Comrie", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **113**, 294–304.

Gutzwiller, M. and Schmidt, D.: 1986, "The Motion of the Moon as computed by the Method of Hill, Brown, and Eckert", *Astronomical Papers* **23**, Part I.

Henrard, J.: 1988, "A survey of Poisson series", *Celestial Mechanics* **45**, 245–254.

Hillis, W. D.:1985, *The Connection Machine*, MIT Press, Cambridge MA.

Jenks, R. D. and Sutor, R. S.: 1992, *AXIOM: the scientific computation system*, Springer-Verlag, Berlin.

Knuth, D.: 1969, *The Art of Computer Programming*, chapter **4**, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA.

Kovalevsky, J.: 1958, "The problems of the eight satellite of Jupiter", *Astronomical Journal* **63**, 452–456.

Kovalevsky, J.: 1959, "Méthode numérique de calcul des perturbations générales. Application au VIII^e satellite de Jupiter", *Thèses présentées à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris* Série A n° 3369, Gauthier-Villars, Paris.

Macsyma: 1995, *Mathematics and system reference manual. Version 15*, Macsyma Inc., Arlington, MA.

Moses, J.: 1971, "Algebraic Simplifications: A Guide to the Perplexed", *Communications of the ACM* **14**, 527–537.

Poggendorff, J. C.:1863, *Biographisch-Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften*, Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig.

Simon, B.: 1990, "Four computer mathematical environments", *Notices of the American Mathematical Society* **37**, 861–868.

Steele, G. L. Jr., Fahlman, S. E., Gabriel, R. P., Moon, D. A. and Weinreb, D. L.: 1992, *Common Lisp: the language*, Digital Press, Burlington, MA.

Vallejo Carrión, M.: 1995, "Series de Fourier de funciones elípticas. Aplicación a la precesión terrestre", Doctoral dissertation, Universidad de Zaragoza, reprinted in *Boletín* **2/95**, Real Instituto y Observatorio de la Armada, San Fernando (Cádiz).

Wolfram, S.: 1991, *Mathematica. A system for doing mathematics by computer*, Addison-Wesley Publishing Co., Redwood City, CA.