SUR LA COHOMOLOGIE NON ABELIENNE I (dimension deux)

PAUL DEDECKER

1. Introduction. On sait que la définition de la cohomologie d'un espace X à coefficients dans un faisceau $\mathfrak{G}$ de groupes non abéliens est liée à la classification de certains types d'espaces fibrés principaux de base X **(1**; **8**; **10)**. Cette cohomologie se définit assez facilement en dimensions zéro et un, mais pour certains problèmes, il serait utile de pouvoir la définir en dimension deux également.

J'ai abordé la question dans **(3**; **6)** mais un certain nombre de difficultés subsistaient qu'il semble utile de chercher à éliminer, ce qui est l'objet de la présente note.

Remarquons d'abord que la définition de $H^0(X, \mathfrak{G})$, groupe des sections de $\mathfrak{G}$, est triviale, aucune difficulté ne résultant du caractère non abélien de $\mathfrak{G}$. En ce qui concerne $H^1(X, \mathfrak{G})$ une difficulté naît du fait que cet ensemble n'est plus un groupe, même non abélien; il possède toutefois un élément neutre privilégié. Par contre on ne voit pas du tout comment définir un $H^2(X, \mathfrak{G})$; plus précisément on ne sait pas comment caractériser un 2-cocycle parmi les 2-cochaînes, ni *a fortiori* les classes de 2-cocycles qui constitueraient des classes de 2-cohomologie. Une solution avait été proposée dans **(3)** en appelant 2-cocycle une 2-cochaîne qui devenait un cobord par un plongement convenable du faisceau $\mathfrak{G}$ dans un plus grand faisceau $\mathfrak{H}$ et par une définition des classes destinées à prolonger jusqu'en dimension deux la suite exacte de cohomologie associée à une suite exacte de coefficients. Cette solution n'était qu'imparfaite pour deux raisons: 1. la cohomologie H^2 obtenue était tronquée, c'est-à-dire ne redonnait qu'une partie de la cohomologie usuelle dans le cas abélien; 2. les classes de 2-cohomologie n'étaient plus des classes d'équivalence. (La version proposés dans **(6)** éliminait cette dernière difficulté mais pas la première.)

Par après, j'ai remarqué que l'on pouvait récupérer une structure algébrique en dimension un à condition de plonger l'ensemble $H^1(X, \mathfrak{G})$ dans un *groupoïde* $\mathfrak{H}^1(X, \mathfrak{G})$ se réduisant au groupe de cohomologie usuel dans le cas où $\mathfrak{G}$ est abélien et possédant par ailleurs une signification géométrique intéressante. Toutefois afin de conserver la technique des suites exactes il devenait nécessaire de plonger les $H^0(X, \mathfrak{G})$ dans de nouveaux ensembles $\mathfrak{H}^0(X, \mathfrak{G})$ munis également d'une structure de groupoïde adéquate (et non nécessairement unique).

Il est assez remarquable qu l'utilisation de groupoïdes en dimension un permet de donner une solution aux difficultés rencontrées pour définir un

Reçu le 21 Novembre, 1958.

$H^2(X, \mathfrak{G})$. C'est cette solution que nous exposons ici sans nous occuper de récupérer une structure algébrique. Celle-ci demanderait qu'il soit fait appel à ce que nous avons appelé des "espaces fibrés non holonomes" **(6)** et impliquerait en outre un nouvel élargissement des groupoïdes $\mathfrak{H}^1$ et $\mathfrak{H}^0$.

2. Système Φ de coefficients non abéliens. Rappelons qu'un *faisceau de groupes* sur un espace topologique X est un nouvel espace $\mathfrak{G}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(1) il existe une application continue p de $\mathfrak{G}$ sur X appelée *projection*;

(2) tout point $g \in \mathfrak{G}$ possède un voisinage ouvert U tel que la restriction $p|U$ soit un homéomorphisme de U sur un ouvert de X;

(3) chaque $\mathfrak{G}_x = p^{-1}(x)$, $x \in X$, est muni d'une structure de groupe d'unité e_x telle que les applications $x \to e_x$, $g \to g^{-1}$, $(g, h) \to g.h$ (respectivement de X dans $\mathfrak{G}$, de $\mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{G}$, de $\mathfrak{G} \times_X \mathfrak{G}$ dans $\mathfrak{G}$) soient continues. (On note $\mathfrak{G} \times_X \mathfrak{G}$ l'ensemble des couples $(g, h) \in \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ tels que $p(g) = p(h)$.)

Les ensembles $\mathfrak{G}_x$, $x \in X$ sont appelés les *tiges* du faisceau $\mathfrak{G}$.

Pour tout groupe G, notons $I(G)$ le groupe de ses automorphismes intérieurs, quotient de G par son centre $Z(G)$. Si $\mathfrak{G}$ est un faisceau de groupes, soit $\mathfrak{Y}$ l'intérieur de la réunion des $Z(\mathfrak{G}_X)$. Le quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{Y}$ est un nouveau faisceau noté $\mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ et appelé faisceau des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{G}$. On a pour tout x une surjection canonique i_x et une surjection globale i:

$$i_x\colon \mathfrak{G}_x \to \mathfrak{J}_x, \qquad i\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{J}.$$

La topologie de $\mathfrak{J}$ est définie de telle sorte qu'une section locale $s\colon U \to \mathfrak{J}$ (U ouvert de X) soit, dans un voisinage V de tout point $x \in U$ de la forme $s = it$ où $t\colon V \to \mathfrak{G}$ est une section locale de $\mathfrak{G}$ (topologie telle que i soit un homomorphisme de faisceaux).

N.B. Par "section" on entend "section continue." Par "application locale" définie sur un espace X, on entend une application définie sur un ouvert de X.

Soit maintenant $\mathfrak{A}$ un nouveau faisceau de groupes sur X qui soit un faisceau de groupes d'opérateurs sur $\mathfrak{G}$ et supposons donné un homomorphisme

$$\rho\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{A}$$

tel que

(2.1) pour tout $g \in \mathfrak{G}_x$, $\rho(g)$ opère comme l'automorphisme intérieur défini par g: $\rho(g)\gamma = g\gamma g^{-1}$, $\gamma \in \mathfrak{G}_x$;

(2.2) si $\alpha \in \mathfrak{A}_x$ et $g \in \mathfrak{G}_x$, on a (dans $\mathfrak{A}_x$ la multiplication y étant notée $\circ$)

$$\rho[\alpha(g)] \circ \alpha = \alpha \circ \rho(g) \qquad \text{ou} \qquad \rho[\alpha(g)] = \alpha \circ \rho(g) \circ \alpha^{-1}.$$

Exemple. Les conditions précédentes sont par exemple vérifiées si $\mathfrak{G}$ est un sous faisceau normal d'un faisceau $\mathfrak{H}$ de groupes sur X et si $\mathfrak{A} = \mathfrak{J}(\mathfrak{G})$, ρ étant induit par l'inclusion $\mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$. Ou encore si $\mathfrak{A}$ est un faisceau de groupes d'automorphismes de $\mathfrak{G}$ contenant $\mathfrak{J}(\mathfrak{G})$ et $\mathfrak{G} \to \mathfrak{A}$ l'application canonique.

Définition 2.1. Un triple $\Phi = (\mathfrak{G}, \rho, \mathfrak{A})$ satisfaisant à ces conditions sera appelé un *système de coefficients pour la cohomologie* (non abélienne).

Remarque 2.1. Un simple faisceau $\mathfrak{G}$ contient suffisamment d'informations pour construire un *groupe* de cohomologie de dimension zéro et un *ensemble* ou un *groupoïde* de cohomologie de dimension un. Toutefois dans ce groupoïde un faisceau d'automorphismes intervient de façon cachée et il doit être explicité si l'on veut pouvoir écrire des suites exactes de groupoïdes.

Remarque 2.2. Le cas usuel en cohomologie—que nous appelerons dans la suite le *cas des coefficients abéliens*—est celui où $\mathfrak{G}$ est un faisceau de groupes abéliens et où $\mathfrak{A}$ est le faisceau trivial tel que le groupe $\mathfrak{A}_x$ pour tout $x \in X$ soit réduit au seul élément unité et où ρ est l'homomorphisme trivial. Bien entendu si $\mathfrak{A}$ est différent de ce faisceau trivial, $\mathfrak{G}$ étant cependant abélien, on ne se trouve déjà plus dans le "cas abélien."

Afin d'être complets, rappelons encore la définition d'un groupoïde, cas particulier des systèmes multiplicatifs.

Definition 2.2. On appelle *système multiplicatif* un ensemble muni d'une loi de composition non partout définie appelée multiplication. Dans un tel système on appelle *unité* tout élément e tel que si un composé ex ou xe est défini, ce composé est toujours égal à x. Deux unités composables sont donc égales.

Definition 2.3. On appelle *groupoïde* un système multiplicatif satisfaisant aux propriétés suivantes:

$G1$. Si l'un des éléments $x(yz)$ ou $(xy)z$ est défini, l'autre l'est et ils sont égaux;

$G2$. à tout x correspondent des unités e_x et ${}_xe$ telles que les composés $x\ e_x$ et ${}_xe\ x$ soient définis;

$G3$. à tout x correspond un x' tel que $x'x$ soit défini et égal à e_x.

Propriétés des groupoïdes:

1. Les unités e_x et ${}_xe$ sont uniquement définies par x.
2. Un composé xy est défini si et seulement si $e_x = {}_ye$.
3. Une unité est toujours composable avec elle-même.
4. Le composé xx' est toujours défini et vaut ${}_xe$.
5. Une égalité $yx = zx$ (resp. $xy = xz$) entraîne $y = z$; donc x' est uniquement défini par x; ou le note x^{-1}.

3. Cochaînes à valeurs dans Φ. Le systéme Φ étant choisi une fois pour toutes, considérons un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ de X. Pour une suite $i_1, \ldots, i_k$ d'indices, on posera comme d'habitude

$$U_{i_1\ldots,i_k} = U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_k}.$$

Considérons les couples (g_{ij}, α_{ij}) de sections locales

$$g_{ij}\colon U_{ij} \to \mathfrak{G}, \qquad \alpha_{ij}\colon U_{ij} \to \mathfrak{A}.$$

Définition 3.1. Ces couples sont appelés 1-*cochaînes* (de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans Φ); on vérifie qu'ils forment un groupoïde $\mathfrak{C}^1(\mathfrak{U}, \Phi)$ si l'on adopte une loi de composition pour laquelle un produit

$$(g'_{ij}, \alpha'_{ij}) \cdot (g_{ij}, \alpha_{ij}) \tag{3.2}$$

est défini si $\alpha'_{ij} = \rho(g_{ij})\alpha_{ij}$ et est alors égal à

$$(g'_{ij}g_{ij}, \alpha_{ij}). \tag{3.3}$$

Définition 3.4. La cochaîne (g_{ij}, α_{ij}) est dite *alternée* si

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}^{-1}, \quad \alpha_{ii} = 1, \tag{3.5}$$

$$g_{ij} = \alpha_{ij}\,(g_{ji}^{-1}), \quad g_{ii} = 1. \tag{3.6}$$

PROPOSITION 3.7. *Les cochaînes alternées forment une sous-groupoïde* $\mathfrak{C}_a{}^1(\mathfrak{U}, \Phi)$ *de* $\mathfrak{C}^1(\mathfrak{U}, \Phi)$.

Démonstration. Supposons le produit (3.2) défini, ses facteurs étant des cochaînes alternées; il suffit de montrer que sa valeur (3.3) vérifie

$$g'_{ij} \cdot g_{ij} = \alpha_{ij}\,(g_{ji}^{-1} \cdot g'^{-1}_{ji}).$$

Or on a

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \alpha_{ij}(g_{ji}^{-1}), \\ g'_{ij} &= \alpha'_{ij}(g'^{-1}_{ji}) = g_{ij} \cdot \alpha_{ij}(g'^{-1}_{ji}) | g_{ij}^{-1}, \\ g'_{ij} \cdot g_{ij} &= g_{ij} \cdot \alpha_{ij}(g'^{-1}_{ji}) \cdot g_{ij}^{-1} \cdot g_{ij} = \alpha_{ij}(g_{ji}^{-1} g'^{-1}_{ji}). \end{aligned}$$

C.q.f.d.

4. Cochaînes de dimension deux.

Définition 4.1. Une 2-*cochaîne* de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans Φ est un triple $(\alpha_{ij}', \gamma_{ijk}, \alpha_{ij})$ de sections locales

$$\alpha_{ij}, \alpha'_{ij} \colon U_{ij} \to \mathfrak{A}, \qquad \gamma_{ijk} \colon U_{ijk} \to \mathfrak{G}$$

tel que dans U_{ijh} on ait

$$\alpha'_{ij}\alpha'_{jk}\alpha'_{ki} = \rho(\gamma_{ijk})\alpha_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{ki}. \tag{4.2}$$

Ces cochaînes forment un groupoïde $\mathfrak{C}^2(\mathfrak{U}, \Phi)$ si l'on convient qu'un produit

$$(\beta'_{ij}, \theta_{ijk}, \beta_{ij})(\alpha'_{ij}, \gamma_{ijk}, \alpha_{ij})$$

est défini si et seulement si $\beta_{ij} = \alpha'_{ij}$ et est alors égal à

$$(\beta'_{ij}, \theta_{ijk} \cdot \gamma_{ijk}, \alpha_{ij}).$$

Cette définition est légitime car si les deux facteurs sont des cochaînes il en est de même du produit.

Pour toute 1-cochaîne $(g, \alpha) = (g_{ij}, \alpha_{ij})$ on posera

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-019-7 Published online by Cambridge University Press

$$(g\alpha)_{ij} = \rho(g_{ij}) \circ \alpha_{ij},$$

$$g^i_{ij} = g_{ij} \text{ défini dans } U_{ij},\ g^{ij}_{jk} = \alpha_{ij}(g_{jk}) \qquad \text{défini dans } U_{ijk},$$

$$g^{ijk}_{kl} = \alpha_{ij} \circ \alpha_{jk}(g_{kl}), \qquad \text{défini dans } U_{ijkl}, \text{ etc.} \ldots$$

$$(\delta_\alpha g)_{ijk} = g^i_{ij} \cdot g^{ij}_{jk} \cdot g^{ijk}_{ki}. \tag{4.3}$$

On remarquera que la première des conditions (3.6) de l'alternation d'une 1-cochaîne (g, α) s'écrit

$$g^{-1}_{ij} = (g^{ij}_{ji}).$$

Définition 4.2. On appelle 1-*cobord* l'opérateur

$$\delta^1 \colon \mathfrak{C}^1(\mathfrak{U}, \Phi) \to \mathfrak{C}^2(\mathfrak{U}, \Phi)$$

défini par

$$\begin{aligned} \delta^1(g, \alpha) &= (g\alpha, \delta_\alpha g, \alpha) \quad \text{ou explicitement} \\ \delta^1(g_{ij}, \alpha_{ij}) &= ((g\alpha)_{ij}, (\delta_\alpha g)_{ijk}, \alpha_{ij}). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Il faut évidemment vérifier que la condition (4.2) est bien remplie par (4.4), ce qui résulte de

$$\begin{aligned} (g\alpha)_{ij}(g\alpha)_{jk}(g\alpha)_{ki} &= \rho(g_{ij}) \circ \alpha_{ij} \circ \rho(g_{jk}) \circ \alpha_{jk} \circ \rho(g_{ki}) \circ \alpha_{ki} \\ &= \rho(g_{ij}) \circ [\alpha_{ij}\rho(g_{jk})\alpha^{-1}_{ij}] \circ [\alpha_{ij}\alpha_{jk}\rho(g_{ki})\alpha^{-1}_{jk}\alpha^{-1}_{ij}] \circ (\alpha_{ij} \circ \alpha_{jk} \circ \alpha_{ki}) \\ &= \rho(g_{ij}) \circ \rho(g^{ij}_{jk}) \circ \rho(g^{ijk}_{ki}) \circ (\alpha_{ij} \circ \alpha_{jk} \circ \alpha_{ki}) \\ &= \rho(g_{ij}g^{ij}_{jk}g^{ijk}_{ki}) \circ (\alpha_{ij} \circ \alpha_{jk} \circ \alpha_{ki}). \end{aligned}$$

Le passage de la deuxième à la troisième ligne résulte de la condition (2.2). C.q.f.d.

Définition 4.3. On appelle *fondamentale* une 1-cochaîne (g, α) ou une 2-cochaîne $(\alpha', \gamma, \alpha)$ telle que les sections α_{ij} coïncident avec les sections unitaires ϵ_{ij} qui associent à tout $x \in U_{ij}$ l'unité de $\mathfrak{A}_x$. Ces cochaînes seront souvent notées $g = (g_{ij})$, $(\alpha', \gamma) = (\alpha_{ij}, \gamma_{ijk})$; elles forment des ensembles que l'on notera $C^1(\mathfrak{U}, \Phi) = C^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ et $C^1(\mathfrak{U}, \Phi)$ (avec l'indice a en cas d'alternation).

Remarque. Le cobord d'une 1-cochaîne fondamentale $g = (g_{ij})$ est donné par

$$\delta g = (\rho(g_{ij}), g_{ij}g_{jk}g_{ki}). \tag{4.5}$$

On posera

$$(\delta g)_{ijk} = g_{ij}g_{jk}g_{ki}. \tag{4.6}$$

En multipliant une cochaîne fondamentale à gauche par une cochaîne quelconque telle que le produit soit défini, on obtient toujours une cochaîne fondamentale. Il est clair que le cobord d'une 1-cochaîne fondamentale est une 2-cochaîne fondamentale.

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-019-7 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 4.4. *Le cobord δ^1 est un homomorphisme de groupoïdes.*

Démonstration. Si le produit $(g', \alpha')\cdot(g, \alpha)$ est défini, on a $\alpha' = g\alpha$ et le produit $\delta(g', \alpha')$. $\delta(g, \alpha)$ est donc lui-même défini. Il reste à vérifier que

$$\delta(g'g, \alpha) = \delta(g', \alpha')\cdot\delta(g', \alpha).$$

Le second membre vaut

$$((g'\alpha')_{ij}, (\delta_{\alpha'}g')_{ijk}, \alpha'_{ij})(\alpha'_{ij}, (\delta_\alpha g)_{ijk}, \alpha_{ij}) = ((g'\alpha')_{ij}, (\delta_{\alpha'}g')_{ijk}(\delta_\alpha g)_{ijk}, \alpha_{ij})$$

où $\alpha'_{ij} = (gd)_{ij}$. On a $g'\alpha' = g'(g\alpha) = (g'g)\alpha$ et la propriété résulte de

$$\begin{aligned}
&(\delta_{\alpha'}g')_{ijk}\cdot(\delta_\alpha g)_{ijk}\\
&\quad = g'_{ij}\cdot\alpha'_{ij}(g'_{jk})\cdot\alpha'_{ij}\alpha'_{jk}(g'_{ki})\cdot[g_{ij}\cdot\alpha_{ij}(g_{jk})\cdot\alpha_{ij}\alpha_{jk}(g_{ki})]\\
&\quad = g'_{ij}\cdot g_{ij}\cdot\alpha_{ij}(g'_{jk})\cdot g_{ij}^{-1}\cdot g_{ij}\cdot\alpha_{ij}[g_{jk}\cdot\alpha_{jk}(g'_{ki})\cdot g_{jk}^{-1}]\cdot g_{ij}^{-1}\cdot[\,.\,.\,.\,]\\
&\quad = (g'_{ij}\cdot g_{ij})\cdot\alpha_{ij}(g'_{jk}\cdot g_{jk})\cdot\alpha_{ij}\alpha_{jk}(g'_{ki})[\alpha_{ij}(g_{jk}^{-1})\cdot\alpha_{ij}(g_{jk})]\alpha_{ij}\alpha_{jk}(g_{ki})\\
&\quad = (g'g)_{ij}\cdot\alpha_{ij}[(g'g)_{jk}]\cdot\alpha_{ij}\alpha_{jk}[(g'g)_{ki}]\\
&\quad = (\delta_\alpha g'g)_{ijk}.
\end{aligned}$$

C.q.f.d.

5. Alternation en dimension deux.

PROPOSITION 5.1. *Soit $(\alpha_{ij}, \gamma_{ijk}, \epsilon_{ij})$ le cobord d'une 1-cochaîne alternée fondamentale (g_{ij}, ϵ_{ij}). Dans ces conditions α_{ij} est alternée et on a les identités*

$$\begin{aligned}
&\gamma_{jki} = \alpha_{jk}\alpha_{ki}(\gamma_{ijk}) &&\text{ou}\quad \gamma_{ijk} = \alpha_{ik}\alpha_{kj}(\gamma_{jki})\\
&\gamma_{kij} = \alpha_{ki}(\gamma_{ijk}) &&\text{ou}\quad \gamma_{ijk} = \alpha_{ik}(\gamma_{kij})\\
&\gamma_{ikj} = \gamma_{ijk}^{-1} &&\\
&\gamma_{kji} = \alpha_{kj}\alpha_{ji}(\gamma_{ijk}^{-1}) &&\text{ou}\quad \gamma_{ijk}^{-1} = \alpha_{ij}\alpha_{jk}(\gamma_{kji})\\
&\gamma_{jik} = \alpha_{ji}(\gamma_{ijk}^{-1}) &&\text{ou}\quad \gamma_{ijk}^{-1} = \alpha_{ij}(\gamma_{jik}).
\end{aligned}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des relations

$$\alpha_{ij} = \rho(g_{ij}), \quad \gamma_{ijk} = g_{ij}g_{jk}g_{ki}, \quad g_{ij} = g_{ji}^{-1}.$$

Par exemple la première relation découle de

$$\gamma_{jki} = g_{jk}g_{ki}g_{ij} = g_{jk}g_{ki}(g_{ij}g_{jk}g_{ki})g_{ik}g_{kj} = \alpha_{jk}\alpha_{ki}(\gamma_{ijk}).$$

De même $\gamma_{ijk} = \gamma_{ikj}{}^{-1}$ résulte de

$$\gamma_{ijk} = g_{ij}g_{jk}g_{ki} = (g_{ik}g_{kj}g_{ji})^{-1} = \gamma_{ikj}^{-1}.$$

Définition 5.2. Une 2-cochaîne fondamentale $(\alpha_{ij}, \gamma_{ijk}, \epsilon_{ij})$ est dite *alternée* si α_{ij} est alternée (c'est-à-dire vérifie la condition (3.5) de la définition 3.4) et si elle satisfait aux identités précédentes.

PROPOSITION 5.3. *Pour qu'une 2-cochaîne fondamentale* $(\alpha_{ij}, \gamma_{ijk}, \epsilon_{ij})$ *soit alternée, il faut et il suffit que* α_{ij} *le soit et que l'on ait pour tout triple* (i, j, k) *d'indices:*

$$\gamma_{kij} = \alpha_{ki}(\gamma_{ijk}) \quad \text{et} \quad \gamma_{ikj} = \gamma_{ijk}^{-1}. \tag{5.1}$$

En effet de ces identités résultent

$$\gamma_{jki} = \alpha_{jk}(\gamma_{kij}) = \alpha_{jk}(\alpha_{ki}(\gamma_{ijk})) = \alpha_{jk}\alpha_{ki}(\gamma_{ijk}),$$

$$\gamma_{jik} = \alpha_{ji}(\gamma_{ikj}) = \alpha_{ji}(\gamma_{ijk}^{-1}),$$

$$\gamma_{kji} = \alpha_{kj}\alpha_{ji}(\gamma_{ikj}) = \alpha_{kj}\alpha_{ji}(\gamma_{ijk}^{-1}).$$

C.q.f.d.

6. 2-cocycles.

PROPOSITION 6.1. *Si la 2-cochaîne alternée fondamentale* $(\alpha_{ij}, \gamma_{ijk}, \epsilon_{ij})$ *est le cobord de la* 1*-cochaîne alternée fondamentale* (g_{ij}, ϵ_{ij}), *elle vérifie pour tout quadruple ordonné* (i, j, k, l) *la condition*

$$\gamma_{ijk} = \gamma_{ijl}\cdot\alpha_{il}(\gamma_{ljk})\cdot\gamma_{ilk} \qquad (\text{dans } U_{ijkl}). \tag{6.2}$$

Démonstration. En effet le second membre vaut

$$(g_{ij}g_{jl}g_{li})\cdot g_{il}\cdot(g_{lj}g_{jk}g_{kl})\cdot g_{li}\cdot(g_{il}g_{lk}g_{ki}) = g_{ij}g_{jk}g_{ki}.$$

C.q.f.d.

Définition 6.2. Une 2-cochaîne fondamentale alternée est appelée *cocycle* si elle vérifie la condition (6.2) dans U_{ijkl} pour tout quadruple ordonné d'indices (i, j, k, l).

La proposition 6.1 signifie que tout cobord d'une 1-cochaîne fondamentale alternée est un 2-cocycle.

Rappelons que l'on dit qu'*un groupoïde* Γ *opère à gauche* sur un ensemble E si l'on s'est donné une loi de composition (non partout définie) que l'on notera multiplicativement à gauche $\Gamma \times E \to E$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1. si l'un des éléments

$$(g\cdot g')\cdot x, \qquad g\cdot(g'x), \qquad g, g' \in \Gamma, \qquad x \in E$$

est défini l'autre l'est aussi et ces éléments sont égaux;

2. si e est une unité de Γ, chaque fois que $e\cdot x$ est défini cet élément de E est égal à x;

3. pour tout $x \in E$, il existe un $g \in \Gamma$ tel que $g\cdot x$ soit defini.

Par exemple si $h\colon \Gamma \to \Gamma'$ est un homomorphisme de groupoïdes qui envoie bijectivement les unités de Γ sur celles de Γ', on définit une telle loi de composition en posant

$$g\cdot x = h(g)\cdot x, \qquad g \in \Gamma, \qquad x \in \Gamma' = E$$

si le second membre est défini. On obtient une loi analogue en se limitant au sous ensemble $E \subset \Gamma'$ des éléments x qui ont une unité à droite donnée. Par ce procédé et en faisant $h = \delta$, on définit une opération partiellement définie de $\mathfrak{C}_a^1(\mathfrak{U}, \Phi)$ sur l'ensemble $C_a^2(\mathfrak{U}, \Phi)$ des 2-cochaînes fondamentales alternées.

PROPOSITION 6.3. *La loi de composition ainsi définie fait de* $\mathfrak{C}_a^1(\mathfrak{U}, \Phi)$ *un groupoïde d'opérateurs* (a) *sur l'ensemble* $C_a^2(\mathfrak{U}, \Phi)$ *des* 2-*cochaînes alternées fondamentales*; (b) *sur l'ensemble* $Z_a^2(\mathfrak{U}, \Phi)$ *des* 2-*cocycles alternés fondamentaux.*

Démonstration (a). [On fait, sans référence, un usage constant des relations (4.2), (4.3), (4.4), (5.1), (6.2).] Il faut montrer que si $(g_{ij}, \alpha_{ij}) \in \mathfrak{C}_a^1(\mathfrak{U}, \Phi)$ et $(\alpha_{ij}, \gamma_{ijk}, \epsilon_{ij}) \in C_a^2(\mathfrak{U}, \Phi)$ on a encore

$$\delta(g, \alpha)\cdot(\alpha, \gamma, \epsilon) \in C_a^2(\mathfrak{U}, \Phi).$$

D'après la proposition 5.3, deux relations seulement sont à vérifier:

$$(\delta_\alpha g)_{kij}\cdot\gamma_{kij} = (g\alpha)_{ki}[(\delta_\alpha g)_{ijk}\cdot\gamma_{ijk}],$$

$$(\delta_\alpha g)_{ikj}\cdot\gamma_{ikj} = \gamma_{ijk}^{-1}\cdot(\delta_\alpha g)_{ijk}^{-1}.$$

Pour les établir on doit faire usage de la condition (4.2) qui, pour une 2-cochaîne fondamentale $(\alpha_{ij}, \gamma_{ijk}, \epsilon_{ij})$, se réduit à

$$\alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ki} = \rho(\gamma_{ijk}), \quad \text{d'où} \quad \alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ki}(x) = \gamma_{ijk}\, x\, \gamma_{ijk}^{-1}.$$

En ce qui concerne la première, on a

$$\begin{aligned}(\delta_\alpha g)_{kij}\cdot\gamma_{kij} &= g_{ki}\cdot\alpha_{ki}(g_{ij})\cdot\alpha_{ki}\alpha_{ij}(g_{jk})\cdot(\gamma_{kij}\cdot g_{ki}\cdot\gamma_{kji})\cdot\gamma_{kij}g_{ki}^{-1}\\ &= g_{ki}\cdot\{\alpha_{ki}[g_{ij}\cdot\alpha_{ij}(g_{jk})\cdot\alpha_{ij}\alpha_{jk}(g_{ki})\cdot\gamma_{ijk}]\}\cdot g_{ki}^{-1}\\ &= (g\alpha)_{ki}[(\delta_\alpha g)_{ijk}\cdot\gamma_{ijk}].\end{aligned}$$

En ce qui concerne la seconde, on va montrer que

$$[(\delta_\alpha g)_{ikj}\cdot\gamma_{ikj}]^{-1} = (\delta_\alpha g)_{ijk}\cdot\gamma_{ijk}.$$

Cela résulte de

$$\begin{aligned}[(\delta_\alpha g)_{ikj}\cdot\gamma_{ikj}]^{-1} &= \gamma_{ijk}\cdot[g_{ik}\cdot\alpha_{ik}(g_{kj})\cdot\alpha_{ik}\alpha_{kj}(g_{ji})]^{-1}\\ &= \gamma_{ijk}\cdot\alpha_{ik}\alpha_{kj}\alpha_{ji}(g_{ij})\cdot\alpha_{ik}\alpha_{kj}(g_{jk})\cdot\alpha_{ik}(g_{ki})\\ &= \gamma_{ijk}\cdot\alpha_{ik}\alpha_{kj}\alpha_{ji}[g_{ij}\cdot\alpha_{ij}(g_{jk})\cdot\alpha_{ij}\alpha_{jk}(g_{ki})]\\ &= \gamma_{ijk}\cdot\gamma_{ikj}\cdot(\delta_\alpha g)_{ijk}\cdot\gamma_{ijk} = (\delta_\alpha g)_{ijk}\cdot\gamma_{ijk}.\end{aligned}$$

Démonstration (b). Il s'agit de montrer que si $(g_{ij}, \alpha_{ij}) \in \mathfrak{C}_a^1(\mathfrak{U}, \Phi)$ et $(\alpha_{ij}, \gamma_{ijk}, \epsilon_{ij}) \in Z_a{}^2(\mathfrak{U}, \Phi)$—c'est-à-dire si (6.2) est vérifié—on a encore

$$(\bar\alpha_{ij}, \bar\gamma_{ijk}, \epsilon_{ij}) = \delta(g, \alpha)\cdot(\alpha, \gamma, \epsilon) \in Z_a^2(\mathfrak{U}, \Phi),$$

$$\bar\alpha_{ij} = (g\alpha)_{ij}, \quad \bar\gamma_{ijk} = (\delta_\alpha g)_{ijk}\cdot\gamma_{ijk}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-019-7 Published online by Cambridge University Press

On doit vérifier que l'on a dans U_{ijkl}

$$\bar{\gamma}_{ijk} = \bar{\gamma}_{ijl} \cdot \bar{\alpha}_{il}(\bar{\gamma}_{ljk}) \cdot \bar{\gamma}_{ilk}.$$

Le second membre vaut successivement

$$(\delta_\alpha g)_{ijl} \cdot \gamma_{ijl} \cdot [\bar{\alpha}_{il}((\delta_\alpha g)_{ljk}) \cdot \bar{\alpha}_{il}(\gamma_{ljk})] \cdot (\delta_\alpha g)_{ilk} \cdot \gamma_{ilk}$$

$$= \{(\delta_\alpha g)_{ijl} \cdot [\gamma_{ijl} \cdot \bar{\alpha}_{il}((\delta_\alpha g)_{ljk}) \gamma_{ijl}^{-1}][\gamma_{ijl} \cdot \bar{\alpha}_{il}(\gamma_{ljk}) \cdot (\delta_\alpha g)_{ilk} \cdot \alpha_{il}(\gamma_{ljk}^{-1}) \cdot \gamma_{ijl}^{-1}]\}$$

$$\{\gamma_{ijl} \cdot \alpha_{il}(\gamma_{ljk}) \cdot \gamma_{ilk}\}.$$

La seconde accollade n'est autre que γ_{ijk} et on va vérifier que la première vaut $(\delta_\alpha g)_{ijk}$. En effet elle est égale successivement à

$$\begin{aligned}
&(\delta_\alpha g)_{ijl} \cdot \{\alpha_{ij}\alpha_{jl}\alpha_{li}[g_{il} \cdot \alpha_{il}((\delta_\alpha g)_{ljk}) g_{li}^{il}]\} \cdot [\ldots] \\
&\qquad = g_{ij}^{i} \cdot g_{jl}^{ij} \cdot g_{li}^{ijl} \cdot g_{il}^{ijli} \cdot g_{lj}^{ijl} \cdot g_{jk}^{ij} \cdot g_{kl}^{ijk} \cdot g_{li}^{ijl} \cdot [\ldots] \\
&\qquad = [g_{ij}^{i} \cdot g_{jk}^{ij} \cdot g_{kl}^{ijk} \cdot g_{li}^{ijl}] \cdot [\ldots] \\
&\qquad = [\ldots] \cdot \alpha_{ij}\alpha_{jl}\alpha_{li}[g_{il} \cdot \alpha_{il}(\gamma_{ljk}) \cdot g_{li}^{il} \cdot g_{il}^{i} \cdot g_{lk}^{il} \cdot g_{ki}^{ilk} \cdot \alpha_{il}(\gamma_{ljk}^{-1})] \\
&\qquad = [\ldots] \cdot g_{il}^{ijli} \cdot \alpha_{ij}\alpha_{jl}(\gamma_{ljk} \cdot g_{lk}^{l} \cdot g_{ki}^{lk} \cdot \gamma_{ljk}^{-1}) \\
&\qquad = [\ldots] \cdot g_{il}^{ijli} \cdot \alpha_{ij}\alpha_{jl}\alpha_{lj}\alpha_{jk}\alpha_{kl}(g_{lk}^{l} \cdot g_{ki}^{lk}) \\
&\qquad = g_{ij}^{i} \cdot g_{ik}^{ij} \cdot (g_{kl}^{ijk} \cdot g_{li}^{ijl} \cdot g_{il}^{ijli} \cdot g_{lk}^{ijkl}) \cdot g_{ki}^{ijk} \\
&\qquad = g_{ij}^{i} \cdot g_{jk}^{ij} \cdot g_{ki}^{ijk}.
\end{aligned}$$

C.q.f.d.

7. Classes de 2-cohomologie. En coefficients abéliens, les classes de 2-cohomologie s'obtiennent en ajoutant à un 2-cocycle z le cobord des 1-cochaînes y. Cette opération correspond ici à la multiplication à gauche de $z \in Z_a^2$ par les δy, $y \in \mathfrak{C}_a^1$:

$$z \longrightarrow \delta y \cdot z.$$

Parmi les 2-cocycles alternés fondamentaux figurent les cobords des éléments y de C_a^1(cochaînes alternés fondamentales) et, en coefficients abéliens, un cobord δy n'est pas altéré en ajoutant à y le cobord d'une 0-cochaîne $x \in C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$. Il n'en va plus de même dans l'analogue non abélien. En effet si $y = (g_{ij}, \epsilon_{ij})$, $x = (h_i)$, "ajouter à y le cobord de x"* se traduit par le passage de

$$(7.1) \qquad y = (g_{ij}, \epsilon_{ij}) \quad \text{à} \quad \bar{y} = x \square y = (h_i g_{ij} h_j^{-1}, \epsilon_{ij}).$$

L'opération $\square$ ainsi définie équivaut à faire opérer le groupe $C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ à gauche sur $C^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$. Simultanément les cobords passent de

$$\delta y = (\alpha_{ij}, \gamma_{ijk}, \epsilon_{ij}) \quad \text{à} \quad \delta \bar{y} = (\eta_i \alpha_{ij} \eta_j^{-1}, \eta_i(\gamma_{ijk}), \epsilon_{ij}),$$

$$\alpha_{ij} = \rho(g_{ij}), \qquad \gamma_{ijk} = g_{ij} g_{jk} g_{ki}, \qquad \eta_i = \rho(h_i).$$

*Voir à ce sujet (**1**; **2**; **8**; **10**; **11**).

Ceci conduit à faire opérer le groupe $C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ (et donc $C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$) sur $C_a^2(\mathfrak{U}, \Phi)$ au moyen de

$$(7.2) \quad z = (\alpha_{ij}, \gamma_{ijk}, \epsilon_{ij}) \to \xi * z = (\eta_i \alpha_{ij} \eta_j^{-1}, \eta_i(\gamma_{ijk}), \epsilon_{ij}), \epsilon = (\eta_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}).$$

On doit évidemment vérifier que si z est alternée il en est de même de $\xi * z$ et que $C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ opère donc bien sur $C_a^2(\mathfrak{U}, \Phi)$. De même $C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ opère aussi sur $C_a^2(\mathfrak{U}, \Phi)$ et on posera

$$x * z = \rho x * z, \qquad x \in C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}).$$

Ce qui précède démontre la propriété suivante:

Proposition 7.1. *Si* $x \in C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ *et* $y \in C^1(\mathfrak{U}, \Phi)$, *on a*

$$\delta(x \,\square\, y) = x * \delta y.$$

On établit encore:

Proposition 7.2. *Si* ξ *appartient à* $C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ *et* z *à* $Z_a^2(\mathfrak{U}, \Phi)$ *il en est de même de* $\xi * z$.

Autrement dit: $C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ *opère sur les 2-cocycles.*

Démonstration. Soient $z = (\alpha_{ij}, \gamma_{ijk}) \in Z_a^2$ et $\xi = (\eta_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$. D'où $\xi * z = (\alpha_{ij}', \gamma_{ijk}')$, $\alpha_{ij}' = \eta_i \alpha_{ij} \eta_j^{-1}$, $\gamma_{ijk}' = \eta_i(\gamma_{ijk})$. On doit vérifier que (6.2) entraîne

$$\gamma'_{ijk} = \gamma'_{ijl} \cdot \alpha'_{il}(\gamma'_{ljk}) \cdot \gamma'_{ilk}.$$

Cela résulte de ce que le second membre vaut

$$\eta_i(\gamma_{ijl}) \cdot \eta_i \alpha_{il} \eta_l^{-1}(\eta_l(\gamma_{ljk})) \cdot \eta_i(\gamma_{ilk}) = \eta_i(\gamma_{ijl} \cdot \alpha_{il}(\gamma_{ljk}) \cdot \gamma_{ilk}) = \eta_i(\gamma_{ijk}) = \gamma'_{ijk}.$$

C.q.f.d.

L'opération $\square$ de $C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ sur $C_a^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$[1] s'étend à $\mathfrak{C}_a^1(\mathfrak{U}, \Phi)$ en posant pour $x = (h_i)$, $y = (g_{ij}, \alpha_{ij})$:

$$x \,\square\, y = (g'_{ij}, \alpha_{ij}) = (h_i g_{ij} \alpha_{ij}(h_j^{-1}), \alpha_{ij}),$$

ce qui est encore alterné vu que

$$[h_i g_{ij} \alpha_{ij}(h_j^{-1})]^{-1} = \alpha_{ij}(h_j) \cdot g_{ij}^{-1} \cdot h_i^{-1} = \alpha_{ij}[h_j \cdot g_{ji} \cdot \alpha_{ji}(h_i^{-1})].$$

Il existe une autre manière de faire opérer $C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ et plus généralement $C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ sur $\mathfrak{C}_a^1(\mathfrak{U}, \Phi)$, à savoir

$$(7.3) \qquad (x, y) \to x * y = (\eta_i(g_{ij}), \eta_i \alpha_{ij} \eta_j^{-1}) = (\bar{g}_{ij}, \bar{\alpha}_{ij})$$

ce qui est encore alterné en vertu de

$$\bar{g}_{ij}^{-1} = \eta_i(g_{ij}^{-1}) = \eta_i \alpha_{ij}(g_{ji}) = \eta_i \alpha_{ij} \eta_j^{-1}[\eta_j(g_{ji})] = \bar{\alpha}_{ij}(\bar{g}_{ji}).$$

[1] Cfr. la définition 4.3.

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-019-7 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 7.3. *Si ξ, y, z sont des éléments respectivement de* $C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$, $\mathfrak{C}_a^1(\mathfrak{U}, \Phi)$, $C_a^2(\mathfrak{U}, \Phi)$ *et si l'un des deux termes* $\xi*(\delta y\cdot z)$, $\delta(\xi*y)\cdot(\xi*z)$ *est défini, l'autre l'est et ils sont égaux*:

$$\xi*(\delta y\cdot z) = \delta(\xi*y)\cdot(\xi*z).$$

Démonstration. Soient $\xi = (\eta_i)$, $y = (g_{ij}, \alpha_{ij})$, $z = (\alpha_{ij}, \gamma_{ijk})$. On a (cfr. (2.2), (4.4), (7.2), (7.3))

$$\begin{aligned}
\xi*(\delta y\cdot z) &= (\eta_i\alpha'_{ij}\eta_j^{-1}, \eta_i[(\delta_\alpha g)_{ijk}\cdot\gamma_{ijk}]), \quad \alpha'_{ij} = \rho(g_{ij})\circ\alpha_{ij};\\
\delta(\xi*y) &= \delta(\eta_i(g_{ij}), \eta_i\alpha_{ij}\eta_j^{-1})\\
&= (\beta_{ij}, \eta_i(g_{ij})\cdot\eta_i\alpha_{ij}\eta_j^{-1}\eta_j(g_{jk})\cdot\eta_i\alpha_{ij}\alpha_{jk}\eta_k^{-1}\eta_k(g_{ki}), \eta_i\alpha_{ij}\eta_j^{-1})\\
&= (\beta_{ij}, \eta_i[(\delta_\alpha g)_{ijk}], \eta_i\alpha_{ij}\eta_j^{-1}) \qquad (\beta_{ij} = \rho[\eta_i(g_{ij})]\circ\eta_i\alpha_{ij}\eta_j^{-1})\\
&= (\eta_i\alpha'_{ij}\eta_j^{-1}, \eta_i[(\delta_\alpha g)_{ikj}], \eta_i\alpha_{ij}\eta_j^{-1});\\
\xi*z &= (\eta_i\alpha_{ij}\eta_j^{-1}, \eta_i(\gamma_{ijk}))
\end{aligned}$$

La proposition s'en déduit immédiatement. C.q.f.d.

D'après les propositions 6.3 et 7.2, pour tout 2-cocycle $z \in Z_a^2(\mathfrak{U}, \Phi)$, l'élément $\xi*(\delta y\cdot z)$ (supposé défini) est encore un cocycle. Deux cocycles z et z' sont dits *équivalents* si z' est de la forme

$$z' = \xi*(\delta y\cdot z).$$

Cette relation est manifestement réflexive, et on vérifie sans peine qu'elle est transitive et symétrique grace au diagramme et à l'égalité suivants

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \delta y\cdot z & \longleftarrow & z\\
 & & \downarrow & & \downarrow\\
\delta y'\cdot z' & \leftarrow & z' = \xi*(\delta y\cdot z) & \longleftarrow & \xi * z\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
z'' = \xi'*(\delta y'\cdot z') & \longleftarrow & \xi'*z' & \leftarrow & (\xi'\cdot\xi)*z
\end{array}$$

$$z' = \xi*(\delta y\cdot z) = \delta(\xi*y)\cdot(\xi*z) \leftrightarrows z = \xi^{-1}*[\delta(\xi*y)^{-1}\cdot z'].$$

N.B. Dans le diagramme les flèches horizontales (resp. verticales) indiquent une multiplication par un 2-cobord (resp. le résultat d'un opérateur $z \to \xi*z$).

Définition 7.4. On appelle *classe de cohomologie de dimension deux de* $\mathfrak{U}$ *à coefficients dans* Φ toute classe de cocycles équivalents au sens précédent. La classe *nulle* est celle des éléments $z = \xi*\delta y$, $\xi \in C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$, $y \in C_a^1(\mathfrak{U}, \Phi)$. En outre on distinguera encore les classes qui contiennent un élément de la forme $(\alpha_{ij}, \epsilon_{ijk}, \epsilon_{ij})$ où ϵ représente une section unité (dans ce cas α_{ij} est automatiquement un cocycle de dimension 1 à coefficients dans $\mathfrak{A}$); ces classes seront appelées *neutres*.

*Cfr. la définition 4.3.

Il est clair que ces classes coïncident avec les classes usuelles dans le cas abélien. Cette définition se justifiera encore par la suite, voir notamment la proposition 8.1 et la définition de l'opérateur cobord (9.4) de la suite exacte. L'ensemble des classes sera noté $H^2(\mathfrak{U}, \Phi)$.

8. Passage à la limite inductive. Soient $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$, $\mathfrak{V} = (V)_{r \in R}$ deux recouvrements couverts de X. Si $\mathfrak{V}$ est plus fin que $\mathfrak{U}$, il existe une appilcation, dite admissible, ϕ: $R \to I$ telle que $V_r \subset U_{\phi r}$ ce qui induit des applications que nous noterons encore ϕ:

$$\phi\colon C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}) \to C^0(\mathfrak{V}, \mathfrak{G}),\ C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}) \to C^0(\mathfrak{V}, \mathfrak{A}),$$

$$\phi\colon \mathfrak{C}_a^1(\mathfrak{U}, \Phi) \to \mathfrak{C}_a^1(\mathfrak{V}, \Phi),$$

$$\phi\colon \mathfrak{C}_a^2(\mathfrak{U}, \Phi) \to \mathfrak{C}_a^2(\mathfrak{V}, \Phi), \text{ etc.} \ldots$$

qui sont compatibles avec les opérations considérées plus haut et qui transforment un cocycle en un cocycle:

$$\begin{aligned} \phi(x \square y) &= \phi(x) \square \phi(y), \\ \phi(x * y) &= \phi(x) * \phi(y), \\ \phi(\delta y) &= \delta\phi(y), \\ \phi(x * z) &= \phi(x) * \phi(z). \end{aligned}$$

Dès lors ϕ induit une application

$$i(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})\colon H^2(\mathfrak{U}, \Phi) \to H^2(\mathfrak{V}, \Phi).$$

PROPOSITION 8.1. *Cette application est indépendante de l'application admissible ϕ: $R \to I$ choisie. De façon précise si $\phi' = R \to I$ en est une autre et si $z \in Z_a{}^2(\mathfrak{U}, \Phi)$ les cocycles $\phi(z)$ et $\phi'(z)$ relatifs au recouvrement plus fin $\mathfrak{V}$ sont équivalents.*

Démonstration. Soit $z = (\alpha_{ij}, \gamma_{ijk}, \epsilon_{ij}) \in Z_a{}^2\ (\mathfrak{U}, \Phi)$ et pour trois indices r, s, t du recouvrement $\mathfrak{V}$, posons

$$\phi(r) = i, \qquad \phi(s) = j, \qquad \phi(t) = k,$$
$$\phi'(r) = i', \qquad \phi'(s) = j', \qquad \phi'(t) = k'.$$

Les cocycles images de z par ϕ et ϕ' s'obtiennent par des restrictions appropriées que nous écrivons brièvement

$$\phi(z) = (\alpha_{rs}, \gamma_{rst}, \epsilon_{rs}) = (\alpha_{ij}, \gamma_{ijk}, \epsilon_{ij})$$
$$\phi'(z) = (\alpha'_{rs}, \gamma'_{rst}, \epsilon'_{rs}) = (\alpha_{i'j'}, \gamma_{i'j'k'}, \epsilon_{i'j'}).$$

La proposition sera établie si nous exhibons $\xi = (\eta_r) \in C^0(\mathfrak{V}, \mathfrak{A})$, $y = (y_{rs}, \alpha_{rs}) \in \mathfrak{C}_a{}^1(\mathfrak{V}, \Phi)$ tels que

$$\xi * \phi'(z) = \delta y \cdot \phi(z). \tag{8.1}$$

La solution est, nous allons le voir, fournie par

$$\eta_r = \alpha_{ii'}|V_r$$
$$y_{rs} = \gamma_{ii'j'}\gamma_{ij'j}|V_{rs}.$$

La première chose à vérifier est l'alternation de (y_{rs}, α_{rs}), ce qui résulte de

$$\gamma_{ii'j'} = \gamma_{ii'j}\cdot\alpha_{ij}(\gamma_{ji'j'})\cdot\gamma_{ijj'},$$
$$y_{rs} = \gamma_{ii'j'}\gamma_{ij'j} = \gamma_{ii'j}\cdot\alpha_{ij}(\gamma_{ji'j'}) = \alpha_{ij}(\gamma_{jii'}\cdot\gamma_{ji'j'}),$$
$$y_{rs}^{-1} = \alpha_{ij}(\gamma_{jj'i'}\cdot\gamma_{ji'i}) = \alpha_{rs}(y_{sr}).$$

Le premier membre de (8.1) est

$$(8.2)\qquad (\alpha_{ii'}\alpha_{i'j'}\alpha_{j'j}, \alpha_{ii'}(\gamma_{i'j'k'}), \epsilon_{i'j'}) = (\eta_r\alpha'_{rs}\eta_s^{-1}, \eta_r(\gamma'_{rst}), \epsilon_{rs})$$

et on a, par des applications répétées des relations (4.2), (4.4), (6.2):

$$\begin{aligned}
\eta_r(\gamma'_{rst}) &= \alpha_{ii'}(\gamma_{i'j'k'}) = \alpha_{ii'}(\gamma_{i'j'i}\cdot\alpha_{i'i}(\gamma_{ij'k'})\cdot\gamma_{i'ik'})\\
&= \gamma_{ii'j'}\cdot\gamma_{ij'k'}\cdot\gamma_{ik'i'} = (\gamma_{ii'j'}\cdot\gamma_{ij'j})\cdot\alpha_{ij}(\gamma_{jj'k'})\cdot\gamma_{ijk'}\cdot\gamma_{ik'i'}\\
&= y_{rs}\cdot\alpha_{ij}(\gamma_{jj'k'}\cdot\gamma_{jk'i})\cdot\gamma_{ik'i'}\\
&= y_{rs}\cdot\alpha_{ij}[\gamma_{jj'k'}\cdot\gamma_{jk'k}\cdot\alpha_{jk}(\gamma_{kk'i})\cdot\gamma_{jki}]\cdot\gamma_{ik'i'}\\
&= y_{rs}\cdot\alpha_{rs}(y_{st})\cdot\alpha_{ij}\alpha_{jk}(\gamma_{kk'i}\cdot\gamma_{kij})\cdot\gamma_{ik'i'}\\
&= y_{rs}\cdot\alpha_{rs}(y_{st})\cdot\alpha_{ij}\alpha_{jk}[\gamma_{kk'i'}\cdot\alpha_{ki'}(\gamma_{i'k'i})\cdot\gamma_{ki'i}]\cdot\gamma_{ijk}\cdot\gamma_{ik'i'}\\
&= y_{rs}\cdot\alpha_{rs}(y_{st})\cdot\alpha_{ij}\alpha_{jk}[(\gamma_{kk'i'}\gamma_{ki'i})\cdot\gamma_{kii'}\cdot\alpha_{ki'}(\gamma_{i'k'i})\gamma_{ki'i}]\cdot\gamma_{ijk}\cdot\gamma_{ik'i'}\\
&= y_{rs}\cdot\alpha_{rs}(y_{st})\cdot\alpha_{rs}\alpha_{st}(y_{tr})\cdot\alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ki}\alpha_{ii'}\alpha_{i'k}\alpha_{ki'}(\gamma_{i'k'i})\cdot\gamma_{ijk}\cdot\gamma_{ik'i'}\\
&= (\delta_\alpha y)_{rst}\cdot\gamma_{ijk}\cdot\gamma_{ii'k'}\cdot\gamma_{ijk}^{-1}\cdot\gamma_{ijk}\cdot\gamma_{ik'i'}\\
&= (\delta_\alpha y)_{rst}\cdot\gamma_{ijk} = (\delta_\alpha y)_{rst}\cdot\gamma_{rst}.
\end{aligned}$$

Ceci montre que les termes centraux à trois indices des deux membres de (8.1) sont égaux. Il reste à prouver que

$$\eta_r\alpha'_{rs}\eta_s^{-1} = \rho(y_{rs})\circ\alpha_{rs}$$

ce qui résulte de

$$\begin{aligned}
\eta_r\alpha'_{rs}\eta_s^{-1} &= \alpha_{ii'}\alpha_{i'j'}\alpha_{j'j},\\
\rho(y_{rs})\circ\alpha_{rs} &= \rho(\gamma_{ii'j'}\cdot\gamma_{ij'j})\circ\alpha_{ij}\\
&= \alpha_{ii'}\alpha_{i'j'}\alpha_{j'i}\alpha_{ij'}\alpha_{j'j}\alpha_{ji}\alpha_{ij} = \alpha_{ii'}\alpha_{i'j'}\alpha_{j'j}.
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration de la proposition.

Définition 8.1. La limite inductive des ensembles $H^2(\mathfrak{U}, \Phi)$ par rapport aux $i(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$ est appelée *ensemble de cohomologie de dimension deux de l'espace* X à *coefficients dans* Φ. Cet ensemble est noté

$$H^2(X, \Phi) = \varinjlim H^2(\mathfrak{U}, \Phi);$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-019-7 Published online by Cambridge University Press

il possède: (a) un élément *nul* $\mathfrak{e}_2$ image des classes nulles des termes de la limite; (b) un sous ensemble E^2 d'éléments *neutres* obtenu de façon analogue (*partie neutre*).

9. Suite exacte. Soit une suite exacte

$$e \to \mathfrak{N} \xrightarrow{i} \mathfrak{G} \xrightarrow{j} \mathfrak{H} \to e \tag{9.1}$$

de faisceaux de groupes (non abéliens) sur l'espace X. Il est bien connu qu'elle engendre la suite exacte de cohomologie (voir **(2**; **9**; **11)**)

$$e \to H^0(X, \mathfrak{N}) \xrightarrow{i^0} H^0(X, \mathfrak{G}) \xrightarrow{j^0} H^0(X, \mathfrak{H}) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X, \mathfrak{N}) \xrightarrow{i^1} H^1(X, \mathfrak{G}) \xrightarrow{j^1} H^1(X, \mathfrak{H}) \tag{9.2}$$

et que celle-ci peut d'ailleurs s'immerger dans une suite, plus précise, de groupoïdes à condition de remplacer le foncteur H par $\mathfrak{H}$ ou $\mathfrak{H}_\Sigma$ (voir **(4**; **5**; **6)**).

[Rappelons que pour tout faisceau de groupes $\mathfrak{G}$ sur l'espace X, on designe par $H^0(X, \mathfrak{G})$ le groupe des sections globales s: $X \to \mathfrak{G}$. Pour un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ de X, une 1-cochaîne fondamentale g_{ij} est appelée 1-cocycle si $g_{ij} = g_{ik}g_{ki}$. Deux 1-cocycles g_{ij}, g_{ij}' sont dits cohomologues s'il existe une 0-cochaîne h_i: $U_i \to \mathfrak{G}$ telle que $g_{ij}' = h_i g_{ij} h_j^{-1}$. Les classes de cocycles cohomologues forment un ensemble $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ de limite inductive $H^1(X, \mathfrak{G})$. La classe des 1-cobords, c'est-à-dire des 1-cocycles $g_{ij} = h_i h_j^{-1}$ est dite neutre et induit un élément neutre $\mathfrak{e}^1 \in H^1(X, \mathfrak{G})$.

L'exactitude de (9.2) est l'exactitude usuelle pour les groupes jusqu'au terme $H^0(X, \mathfrak{H})$; ensuite elle signifie que l'image d'une application coïncide avec l'image inverse de l'élément neutre par la suivante.

On notera que le foncteur H utilise en dimensions 0 et 1 une notion moins précise de "système de coefficients," c'est-à-dire seul le faisceau $\mathfrak{G}$ intervient, le faisceau d'automorphismes $\mathfrak{A}$ et l'homomorphisme p ne jouant aucun rôle. Voir la remarque 2.1.]

Nous allons considérer un système $\Phi = (\mathfrak{G}, \rho, \mathfrak{A})$ tel que les éléments de $\mathfrak{A}$ laissent invariant le sous-faisceau $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{G}$. Il en résulte alors un système $\Phi' = (\mathfrak{N}, \rho', \mathfrak{A})$ où $\rho' = \rho\circ i$: $\mathfrak{N} \to \mathfrak{A}$. Ces systèmes permettent de définir $H^2(X, \Phi')$ et $H^2(X, \Phi)$, ainsi qu'une application

$$i^2\colon H^2(X, \Phi') \to X^2(X, \Phi) \tag{9.3}$$

qui transforme une classe neutre (resp. nulle) en classe neutre (resp. nulle). On définit ensuite une opération

$$\delta^1\colon H^1(X, \mathfrak{H}) \to H^2(X, \Phi') \tag{9.4}$$

à condition que X soit paracompact. A cet effet on représente un élément de $H^1(X, \mathfrak{H})$ par un cocycle $h_{ij} \in Z_a{}^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{H})$ pour un recouvrement $\mathfrak{U}$ suffisam-

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-019-7 Published online by Cambridge University Press

ment fin pour que h_{ij} soit l'image d'un $g_{ij} \in C_a^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$(1). Soient alors $\alpha_{ij} = \rho(g_{ij})$ et $\nu_{ijk} = (\delta g)_{ijk}$ le couple (α_{ij}, ν_{ijk}) est un élément de $Z_a^2(\mathfrak{U}, \Phi')$; en remplaçant g_{ij} par un autre élément g_{ij}' se projetant sur h_{ij} et de même en faisant varier h_{ij} dans sa classe de cohomologie le couple (α_{ij}, ν_{ijk}) ne sort pas d'une classe de cohomologie de $H^2(\mathfrak{U}, \Phi')$ dont l'image dans $H^2(X, \Phi')$ est elle-même indépendante de $\mathfrak{U}$. D'où l'application (9.4). Ces affirmations se démontrent aisément en considérant la diagramme (9.5) ci-dessous et en examinant ce qui se passe en *remplaçant* modifiant g_{ij} dans l'image inverse de h_{ij}, puis h_{ij} dans sa classe de cohomologie. Ce mécanisme est l'une des justifications de la definition 7.4 de classe de 2-cohomologie.

Proposition 9.1. L'espace x étant paracompact, *pour qu'un élément de $H^1(X, \mathfrak{H})$ soit dans l'image de j^1, il faut et il suffit que son image par δ^1 soit une classe neutre de $H^2(X, \Phi')$.*

Démonstration. Au niveau d'un recouvrement $\mathfrak{U}$ convenable la définition de l'opérateur δ^1 correspond au diagramme suivant (voir (4.5), (4.6))

(9.5)
$$\begin{array}{ccc} & g_{ij} \xrightarrow{\quad j \quad} & h_{ij} \\ & \downarrow\delta & \downarrow\delta \\ [\alpha_{ij}, \nu_{ijk} = (\delta g)_{ijk}] \xrightarrow{i} & [\alpha_{ij} = \rho(g_{ij}), (\delta g)_{ijk}] \xrightarrow{j} & [\alpha_{ij}, \epsilon_{ijk}] \end{array}$$

dans le quel i et j representent les applications induites par les homomorphismes de même nom dans (9.1). Il indique comment on passe du 1-cocycle h_{ij} au 2-cocycle $z = (\alpha_{ij}, \nu_{ijk})$. Il est facile de voir que la condition nécessaire et suffisante pour que la classe de z soit neutre et qu'il existe $y \in \mathfrak{C}_a^1(\mathfrak{U}, \Phi')$ de la forme $y = (\eta_{ij}, \alpha_{ij})$ tel que $\delta y \cdot z$ soit de la forme $(\alpha_{ij}', \epsilon_{ijk})$. Or $\delta y \cdot z = \delta(g_{ij}')$ avec $g_{ij}' = \eta_{ij} g_{ij}$; la condition est donc équivalente à l'existence de $(g_{ij}') \in \mathfrak{C}_a^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ tel que

$$j(g_{ij}') = j(g_{ij}), \qquad (\delta g')_{ijk} = \epsilon_{ijk}. \qquad \text{C.q.f.d.}$$

Proposition 9.2. *Pour qu'un élément de $H^2(X, \Phi')$ soit dans l'image de l'application δ^1, il faut et il suffit que son image par i^2 soit la classe nulle de $H^2(X, \Phi)$.*

Démonstration. La condition est évidemment necessaire en vertu de la définition de δ^1 (cf. le diagramme (9.5)). Soit $z = (\alpha_{ij}, \nu_{ijk})$ un élément de $Z_a^2(\mathfrak{U}, \Phi')$; sa classe est envoyée sur zéro par i^2 s'il existe $\xi = (\xi_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$, $y = (g_{ij}) \in C_a^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ tel que $z = \xi * \delta y$ c'est-à-dire

$$\alpha_{ij} = \xi_i \rho(g_{ij}) \xi_j^{-1}, \quad \nu_{ijk} = \xi_i(g_{ij} g_{jk} g_{ki}).$$

(1)Un recouvrement suffisamment fin existe parcequ'on suppose X paracompact. La démonstration est la même que dans le cas abélien. Voir par example [1, b] où le problème est examiné dans l'hypothèse où le faisceau $\mathfrak{N}$ est dans le centre de $\mathfrak{G}$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-019-7 Published online by Cambridge University Press

Mais alors $z' = \xi^{-1} * z = \delta y$ est dans la classe $[z]$ de z et $h_{ij} = j(g_{ij})$ est un cocycle de $Z_a{}^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{H})$ dont la classe $[h]$ est envoyée sur $[z]$ par δ^1. C.q.f.d.

Suite exacte croisée. Supposons qu'il existe associé à la suite exacte (9.1) un homomorphisme $k: \mathfrak{H} \to \mathfrak{G}$ tel que $j \circ k$ soit l'identité de $\mathfrak{H}$. Alors $\mathfrak{G}$ s'identifie à un produit direct croisé de $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{H}$ et nous dirons que la suite exacte (9.1) est *croisée.* En vertu de (2.2), $\rho(\mathfrak{N})$ est nécessairement distingué dans $\mathfrak{N}$ et nous pouvons former le quotient $\mathfrak{A}''$ et l'homomorphisme canonique:

$$\pi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}/\rho(\mathfrak{N}).$$

Comme $\mathfrak{N}$ est invariant par $\mathfrak{A}$, on fait opérer $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{H}$ en posant

$$\alpha(jg) = j(\alpha g), \qquad \alpha \in \mathfrak{A}, \qquad g \in \mathfrak{G}$$

et les éléments $\alpha = \rho(n)$, $n \in \mathfrak{N}$ opèrent trivialement vu que

$$\rho(n)(jg) = j[\rho(n)\cdot g] = j(ngn^{-1}) = jg.$$

Il s'ensuit que $\mathfrak{A}''$ opère sur $\mathfrak{H}$ de telle sorte que

$$(\pi\alpha)(jg) = j(\alpha g).$$

On va voir que si $\rho'' = \pi\rho k: \mathfrak{H} \to \mathfrak{A}''$,

$$\rho''(jg) = \pi(\rho(g)].$$

En effet $\rho''(jg) = \pi\rho kjg$ et, comme kjg et g ont même image $jg = h$ dans $\mathfrak{H}$, on a $kjg = g\cdot n$, $n \in \mathfrak{N}$. Dès lors

$$\rho''(jg) = \pi\rho(g\cdot h) = \pi[\rho(g)\cdot\rho(n)] = \pi[\rho(g)].$$

Il suit de là que

$$\rho''(h)(jg') = \pi\rho(g)\cdot(jg') = j[\rho(g)(g')] = j(gg'g^{-1}) = h\cdot jg'\cdot h^{-1},$$
$$\rho''[\pi\alpha(jg)] = \rho''[j\alpha(g)] = \pi\rho kj\alpha(g) = \pi\rho\alpha(g) = \pi[\alpha \circ \rho(g) \circ \alpha^{-1}]$$
$$= (\pi\alpha) \circ \pi\rho(g) \circ (\pi\alpha)^{-1} = (\pi\alpha) \circ \rho''(jg) \circ (\pi\alpha)^{-1}.$$

Ceci montre que l'homomorphisme $\rho'': \mathfrak{H} \to \mathfrak{A}''$ vérifie (2.1) et (2.2) et que $\Phi'' = (\mathfrak{H}, \rho'', \mathfrak{A}'')$ est un nouveau système de coefficients. Si $z = (\alpha_{ij}, \gamma_{ijk}) \in C_a{}^2(\mathfrak{U}, \Phi)$, on forme $z'' = j_* z = (\pi\alpha_{ij}, j\,\gamma_{ijk})$ et on a

$$\rho''(j\gamma_{ijk}) = \pi\rho(\gamma_{ijk}) = \pi(\alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ki}) = \pi\alpha_{ij} \circ \pi\alpha_{jk} \circ \pi\alpha_{ki},$$

c'est-à-dire $z'' \in C_a{}^2(\mathfrak{U}, \Phi'')$. Ceci donne lieu à une application (compatible avec les parties neutres et les éléments nuls):

$$j^2: H^2(X, \Phi) \to H^2(X, \Phi'').$$

Proposition 9.3. *Si la suite* (9.1) *est croisée, pour qu'un élément de* $H^2(X, \Phi)$ *soit dans l'image de* i^2, *il faut et il suffit que son image par* j^2 *soit neutre.*

Démonstration. Conservons les notations précédentes et supposons que $z \in Z_a{}^2(\mathfrak{U}, \Phi)$. Si z provient de $Z_a{}^2(\mathfrak{U}, \Phi')$, on a $\gamma_{ijk} \in \mathfrak{N}$ et la partie "il faut" est

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-019-7 Published online by Cambridge University Press

immédiate. Réciproquement, supposons que la classe de z'' soit neutre: il existe donc $\zeta'' = (\beta_{ij}'', \epsilon_{ijk}) \in Z_a^2(\mathfrak{U}, \Phi'')$, $y'' = (h_{ij}, \pi\alpha_{ij}) \in \mathfrak{C}_a^1(\mathfrak{U}, \Phi'')$ tel que $\zeta'' = \delta y'' \cdot z''$:

$$\beta_{ij}'' = \rho''(h_{ij}) \circ \pi\alpha_{ij}, \qquad 1_{ijk} = (\delta_{\pi\alpha} h)_{ijk} \cdot j\gamma_{ijk}.$$

Soit $y = (g_{ij}, \alpha_{ij}) \in \mathfrak{C}_a^1(\mathfrak{U}, \Phi)$ tel que $jg_{ij} = h_{ij}$ et soit $\zeta = \delta y \cdot z$:

$$\zeta = (\beta_{ij}, (\delta_\alpha g)_{ijk} \cdot \gamma_{ijk}), \qquad \beta_{ij} = \rho(g_{ij}) \circ \alpha_{ij}.$$

On a $j^*\zeta = \zeta''$ et $j[(\delta_\alpha g)_{ijk} \cdot \gamma_{ijk}] = \epsilon_{ijk}$, ce qui montre que ζ provient d'un élément de $Z_a^1(\mathfrak{U}, \Phi')$. C.q.f.d.

Les résultats classiques en dimension zéro et un augmentés de ceux de ce paragraphe donnent lieu au

THÉORÈME 9.4. *Si l'espace X est paracompact, à la suite exacte* (resp. exacte croisée) (9.1) *est associée la suite exacte de cohomologie*

$$\begin{aligned} e \to H^0(X, \mathfrak{N}) &\to H^0(X, \mathfrak{G}) \to H^0(X, \mathfrak{H}) \\ \to H^1(X, \mathfrak{N}) &\to H^1(X, \mathfrak{G}) \to H^1(X, \mathfrak{H}) \\ \to H^2(X, \Phi') &\to H^2(X, \Phi)[\to H^2(X, \Phi'')]. \end{aligned}$$

Pour comprendre le sense de l'*exactitude*, les termes de dimension deux doivent être munis d'un *sous-ensemble privilégié* qui est celui des classes neutres pour $H^2(X, \Phi')$ [et $H^2(X, \Phi'')$] et celui réduit à la classe nulle pour $H^2(X, \Phi)$. L'exactitude signifie que l'image d'une application coïncide avec l'image inverse du sous-ensemble privilégié par l'application suivante.

Note ajoutée à la correction des épreuves. Dans le cas où $\mathfrak{A} = \mathfrak{J}(\mathfrak{G})$, M. D. Puppe me fait remarquer que l'hypothèse d'une suite exacte croisée est superflue pour définir le dernier terme de la suite exacte du théorème (9.4). Cette hypothèse est même superflue dans tous les cas. En effet de la condition (2.2) et de l'invariance de $\mathfrak{N}$ par $\mathfrak{A}$ il résulte que $\rho(\mathfrak{N})$ est un sous-groupe invariant dans $\mathfrak{B}$ et que $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}/\rho(\mathfrak{N})$ est donc un groupe. Or tout élément de $\rho(\mathfrak{N})$ opérant sur un élément $g \in \mathfrak{G}$ le transforme en un g' congru à g modulo $\mathfrak{N}$. Il suit de là que $\mathfrak{A}''$ opère sur $\mathfrak{H}$ par $\phi'': \mathfrak{A}'' \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ de telle sorte que l'on ait le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A} \times \mathfrak{G} & \xrightarrow{\pi \times j} & \mathfrak{A}'' \times \mathfrak{H} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi'' \\ \mathfrak{G} & \xrightarrow{j} & \mathfrak{H} \end{array}$$

Ensuite on définit ρ'' de manière à avoir le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc} e & \longrightarrow & \mathfrak{N} & \longrightarrow & \mathfrak{G} & \xrightarrow{j} & \mathfrak{H} & \longrightarrow & e \\ & & \downarrow \rho & & \downarrow \rho & & \downarrow \rho'' & & \\ e & \longrightarrow & \rho(\mathfrak{N}) & \longrightarrow & \mathfrak{A} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{A}'' & \longrightarrow & e \end{array}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-019-7 Published online by Cambridge University Press

Comme dans le texte on vérifie alors que $(\mathfrak{H}, \rho'', \mathfrak{A}'')$ est un système de coefficients (en observant par exemple qu'on n'utilise plus le fait que k est un homomorphisme).

10. Application aux espaces fibrés. Soit

$$e \to N \to G \to H \to e$$

une suite exacte de groupes topologiques où N, fermé dans G possède une section locale. Alors les jets locaux des applications continues d'un espace X dans N, G et H définissent des faisceaux $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ sur X donnant lieu à une suite exacte (9.1). On sait que les éléments de $H^1(X, \mathfrak{H})$ par exemple s'identifient aux classes d'espaces fibrés principaux localement triviaux de base X et de groupe structural H. Le problème se pose de déterminer si un espace fibré $E_H \in H^1(X, \mathfrak{H})$ est l'image canonique d'un espace fibré $E_G \in H^1(X, \mathfrak{G})$. Le théorème 9.4 (ou la proposition (9.1)) a pour corollaire immédiat.

THÉORÈME 10.1. *L'espace fibré principal E_H dont la base X est supposée paracompacte est l'image d'un E_G si et seulement si $\delta^1 E_H$ est une classe neutre de $H^2(X, \Phi')$.*

Des applications concrètes de ce résultat demanderaient que l'on puisse calculer effectivement $H^2(X, \Phi')$ au moins dans certains cas ou seulement que l'on ait des résultats donnant des conditions pour que $H^2(X, \Phi')$ se réduise à l'ensemble neutre $E^2(X, \Phi')$. Une étude de la thèse de J. Frenkel [2, c] et de celle de H. Grauert. (à paraître aux Math. Annal.) conduirait vraisemblablement à des résultats de ce genre (voir aussi la communication de H. Cartan au symposium de Mexico, août 1956).

Remarque. Il y aurait lieu de compléter le théorème 9.4 de manière à pouvoir déterminer quand deux éléments distincts d'un H^2 ont la même image dans le H^2 suivant. Ceci pourrait se faire en remplaçant le foncteur-ensemble H^2 par un foncteur-groupoïde $\mathfrak{H}^2$ mais il faudrait alors remplacer les foncteurs $\mathfrak{H}^1$ que j'ai introduits précédemment par des foncteurs encore plus compliqués. La question se pose de savoir si l'on peut définir des foncteurs H^n et $\mathfrak{H}^n$ pour n quelconque se réduisant aux foncteurs habituels dans le cas des coefficients abéliens et donnant lieu à des suites exactes. Des résultats fragmentaires semblent indiquer que la chose est possible mais, en l'absence d'applications, il convient de ne généraliser qu'avec quelque prudence. La chose pourrait être possible par une modification de la technique des résolutions d'un faisceau par des daisceaux fins mais les "théorèmes d'unicité" présentent des difficultés.

COMPLÉMENTS

11. Acyclicité du tétraèdre. Les idées qui précèdent peuvent s'appliquer également à la cohomologie d'un complexe simplicial abstrait K à coefficients dans un groupe G muni d'un homomorphisme ρ dans un groupe A d'automorphisme et satisfaisant à des conditions analogues à (2.1) et (2.2).

Supposons K constitué par un tétraèdre de sommets $1, 2, 3, 4$ et $A = I(G)$, ρ étant l'homomorphisme canonique.

PROPOSITION 11.1. *Sous les hypothèses précédentes, tout 2-cocycle alterné fondamental z de K est un cobord.*

Le cocycle z est un système alterné $(\alpha_{ij}, \gamma_{ijk})$, tel que pour $i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$ on ait

(11.1) $\alpha_{ij} \in I(G)$.

(11.2) $\alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ki}$ opère comme γ_{ijk} par automorphismes intérieurs.

(11.3) $\gamma_{ijk} = \gamma_{ijl}\cdot\alpha_{il}(\gamma_{ljk})\cdot\gamma_{ilk}$.

On doit trouver des g_{ij} alternés tels que

$$\rho(g_{ij}) = \alpha_{ij}$$
$$\gamma_{ijk} = g_{ij}g_{jk}g_{ki}$$

Choisissons arbitrairement g_{14}, g_{24} et g_{34} opèrant comme α_{14}, α_{24} et α_{34}. Désignons par g_{41}, g_{42}, g_{43} leurs inverses (opérant comme α_{41}, α_{42}, α_{43}). Les relations

$$\gamma_{124} = g_{12}g_{24}g_{41}$$
$$\gamma_{234} = g_{23}g_{34}g_{42}$$
$$\gamma_{314} = g_{31}g_{14}g_{43}$$

permettent de calculer g_{12}, g_{23}, g_{31} et leurs inverses g_{21}, g_{32}, g_{13} qui opèrent nécessairement comme α_{12}, α_{23}, α_{31} et leurs inverses α_{21}, α_{32}, α_{13} en vertu de (10.2). On va montrer que

$$\gamma_{123} = g_{12}g_{23}g_{31};$$

cela résulte de

$$\begin{aligned}\gamma_{123} &= \gamma_{124}\cdot\alpha_{14}(\gamma_{423})\cdot\gamma_{143} = \gamma_{124}\cdot\alpha_{14}\alpha_{42}(\gamma_{234})\cdot\gamma_{143}\\ &= g_{12}g_{24}g_{41}\cdot g_{14}\cdot g_{42}\cdot g_{23}\cdot g_{34}\cdot g_{42}: g_{24}\cdot g_{41}\cdot g_{14}\cdot g_{43}\cdot g_{31}\\ &= g_{12}\cdot g_{23}\cdot g_{31}.\end{aligned}$$

La suite de la démonstration est une conséquence facile de l'alternation. Par exemple

$$\gamma_{412} = \alpha_{41}(\gamma_{124}) = g_{41}\cdot g_{12}g_{24}g_{41}\cdot g_{14} = g_{41}\times g_{12}\times g_{24}, \text{ etc.} \ldots.$$

C.q.f.d.

12. Remarque sur la classe nulle. Par définition la classe nulle de $H^2(\mathfrak{U}, \Phi)$ est formée des 2-cocycles réduits alternés $z = (\alpha_{ij}, \gamma_{ijk})$ tels qu'il existe $\xi = (\xi_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ et $y = (g_{ij}) \in C_a^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ tels que

(12.1) $$\xi * z = \delta y \qquad \text{ou} \qquad z = \xi^{-1} * \delta y.$$

Le 2-cocycle z n'est donc pas nécessairement un cobord. Toutefois la propriété suivante, à mettre en rapport avec la proposition 8.1, montre qu'un 2-cocycle vérifiant (12.1) et un 2-cobord sont "pratiquement" la même chose.

PROPOSITION 12.1. *Si le* 2-*cocycle* z *appartient à la classe nulle il existe* (*a*) *un recouvrement* $\mathfrak{W} = (W_r)_{r\in R}$ *tel que* $\mathfrak{U}$ *soit plus fin que* $\mathfrak{W}$; (*b*) *un* 2-*cocycle* $\bar{z} \in Z_a^2(\mathfrak{W}, \Phi)$ *et une* 1-*cochaîne* $y \in C_a^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$; (*c*) *des applications admissibles* $\phi: R \to I$, $\phi': R \to I$ *telles que*

$$\phi(\bar{z}) = z, \tag{1}$$

$$\phi'(\bar{z}) = \delta y. \tag{2}$$

Démonstration. Définissons R comme la réunion de I et d'une copie disjointe I' dont les éléments seront notés i', j', k' . . . . Ensuite on pose $W_i = W_{i'} = U_i$. Pour définir $\bar{z} = (\bar{\alpha}_{rs}, \bar{\gamma}_{rst})$ on utilise les cochaînes ξ et y intervenant dans (12.1) et on pose

$$\begin{aligned}
&y = (g_{ij}),\ \rho_{ij} = \rho(g_{ij})\\
&\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij}, \quad \bar{\alpha}_{i'j'} = \rho_{ij}, \quad \bar{\alpha}_{i'i} = \xi_i, \quad \bar{\alpha}_{i'j} = \alpha_{i'i}\alpha_{ij} = \xi_i\alpha_{ij},\\
&\alpha_{ii'} = \xi_i^{-1}, \quad \bar{\alpha}_{ij'} = \alpha_{ij}\alpha_{jj'} = \alpha_{ij}\xi_j^{-1},\\
&\bar{\gamma}_{ijk} = \gamma_{ijk}, \quad \bar{\gamma}_{i'j'k'} = (\delta g)_{ijk},\\
&\bar{\gamma}_{i'jk} = \bar{\gamma}_{i'j'k} = \bar{\gamma}_{i'jk'} = \xi_i(\gamma_{ijk}),\\
&\bar{\gamma}_{ij'k} = \bar{\gamma}_{ijk'} = \bar{\gamma}_{ij'k'} = \gamma_{ijk}.
\end{aligned}$$

Il faut d'abord vérifier que $\bar{z}$ est une 2-cochaîne (condition (4.2)), ce qui résulte du fait que z et δy en sont et des égalités (cfr. condition (2.2))

$$\begin{aligned}
\rho(\bar{\gamma}_{i'jk}) &= \rho[\xi_i(\gamma_{ijk})] = \xi_i \quad \rho(\gamma_{ijk})\xi_i^{-1} = \xi_i \quad \alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ki} \quad \xi_i^{-1}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \bar{\alpha}_{i'j}\bar{\alpha}_{jk}\bar{\alpha}_{ki'},\\
\rho(\bar{\gamma}_{i'j'k}) &= \ldots = \bar{\alpha}_{i'j'}\bar{\alpha}_{j'k}\bar{\alpha}_{ki'},\\
\rho(\bar{\gamma}_{ijk'}) &= \ldots = \bar{\alpha}_{ij}\bar{\alpha}_{jk'}\bar{\alpha}_{k'i},\\
\rho(\bar{\gamma}_{ij'k}) &= \alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ki} = \bar{\alpha}_{ij'}\bar{\alpha}_{j'k}\bar{\alpha}_{ki}\\
\rho(\bar{\gamma}_{ijk'}) &= \ldots \qquad\qquad = \bar{\alpha}_{ij}\bar{\alpha}_{jk'}\bar{\alpha}_{k'i}\\
\rho(\bar{\gamma}_{ij'k'}) &= \ldots \qquad\qquad = \bar{\alpha}_{ij'}\bar{\alpha}_{j'k'}\bar{\alpha}_{k'i}.
\end{aligned}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $\bar{z}$ est alternée (définition (5.2). Il faut ensuite vérifier que $\bar{z}$ est un cocycle (condition (6.2)), ce qui résulte de vérifications faciles; par exemple:

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_{i'jk} &= \xi_i(\gamma_{ijk});\\
\bar{\gamma}_{i'jl}\cdot\bar{\alpha}_{i'l}(\bar{\gamma}_{ljk})\cdot\bar{\gamma}_{i'lk} &= \xi_i(\gamma_{ijl})\cdot\xi_i\alpha_{il}(\gamma_{ljk})\cdot\xi_i(\gamma_{ilk})\\
&= \xi_i(\gamma_{ijl}\cdot\alpha_{il}(\gamma_{ljk})\cdot\gamma_{ilk}) = \xi_i(\gamma_{ijk});\\
\bar{\gamma}_{i'jl'}\cdot\bar{\alpha}_{i'l'}(\gamma_{l'jk})\cdot\gamma_{i'l'k} &= \xi_i(\gamma_{ijl})\cdot\xi_i\alpha_{il}\xi_j^{-1}\xi_j(\gamma_{ljk})\cdot\xi_i(\gamma_{ilk})\\
&= \xi_i(\gamma_{ijl}\cdot\alpha_{il}(\gamma_{ljk})\cdot\gamma_{ilk}) = \xi_i(\gamma_{ijk}).
\end{aligned}$$

Les propriétés (1) et (2) sont alors immédiates si l'on définit ϕ et ϕ' au moyen de

$$\phi(i) = i \qquad \phi'(i) = i'. \qquad\qquad \text{C.q.f.d.}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. P. Dedecker, *Jets locaux, faisceaux, germes de sous-espaces*, Bull. Soc. Math. Belg., *6* (1953-4), 119.

2. ——— *Extension du groupe structural d'un espace fibré*, Colloque de topologie de Strasbourg (mai 1955).

3. ——— *Cohomologie à coefficients non abéliens et espaces fibrés*, Bull. Acad. Roy. Belg., *41* (1955), 1132–1146.

4. ——— *La structure algébrique de l'ensemble des classes fibrés*, Bull Acad. Roy. Belg., *42* (1956) 270–290.

5. ——— *Groupoïdes de cohomologie à coefficients non abéliens et espaces fibrés*, Colloque de topologie algébrique, Louvain, C.B.R.M. (1956).

6. ——— *On the exact cohomology sequence of a space with coefficients in a non abelien sheaf.* International Symposium on Algebraic Topology, Mexico (1956), à paraître.

7. ——— *Cohomologie de dimension* 2 *à coefficients non abéliens*, Comptes rendus, Paris, *247* (1958).

8. J. Frenkel, *Sur une classe d'espaces fibrés analytiques*, Comptes rendus, Paris, *236* (1953), 40-41.

9. ——— *Cohomologie à coefficients dans un faisceau non abélien*, Comptes rendus, Paris, *240* (1957), 2368-2370.

10. ——— *Cohomologie non abélienne et espaces fibrés*, Bull. Soc. Math. France, *85* (1957), 135-220.

11. A. Grothendieck, *A general theory of fibre spaces with structure sheaf*, University of Kansas, N.S.F. Report No. 4 (August, 1955).

Université de Liège
Istituto Matematico Dell' Università di Roma