make N^2+aN a square integer, where a is a given constant. For putting the expression equal to y^2

$$N=\{-a+\sqrt{(a^2+4y^2)}\}/2,$$

and the problem is reduced to that of finding the least square of an even number which added to a^2 will make it an integral square.

If a is an even number, N is obviously an integer. If a is odd, $\sqrt{(a^2+4y^2)}$ is also an odd number, and therefore N is again an integer.

Sur un Lieu Géométrique.

Par M. Paul Aubert.

Par un point fixe A *d'une circonférence donnée on mène deux cordes* AB *et* AC *dont le produit a une valeur constante* m², *puis on joint* BC. *Trouver* 1° *le lieu du pied* D *de la bissectrice de l'angle* A *du triangle* ABC ; 2° *le lieu des centres des cercles inscrits et ex-inscrits à ce triangle.*

Figure 14.

1°. Soit H le point où la bissectrice AD rencontre la circonférence circonscrite au triangle ABC.

On sait que $$AD\times AH=AB\times AC\,;$$
donc on a $$AD=m^2/AH.$$

Le lieu du point D est la figure inverse de la circonférence lieu de H, le pôle d'inversion étant en A, la puissance d'inversion m^2. C'est donc la perpendiculaire XY au diamètre AO ; elle coupe la circonférence aux points F et G tels que

$$AF=AG=m.$$

2°. Si on mène BK parallèle à XY, les arcs AFB et ACK sont égaux, d'où $\angle ACB=\angle AB'C'$.
Les droites BC et B'C' sont alors anti-parallèles, et AD est bissectrice de l'angle B'DC. Par suite le cercle inscrit au triangle ABC est aussi inscrit au triangle AB'C', et il en est de même du cercle ex-inscrit dans l'angle A. D'ailleurs on a manifestement

$$AB'=AC,\ AC'=AB,$$
d'où $$AB'\times AC'=m^2.$$

Le problème revient donc à considérer les triangles tels que

AB′C′, dont la base glisse sur XY de manière que l'on ait toujours la relation $$AB' \times AC' = m^2.$$

Soient I et I′ les centres du cercle inscrit et du cercle ex-inscrit dans l'angle A à ce triangle.

Le quadrilatère B′IC′I′ est inscrit dans le cercle de diamètre II′, et l'on a

$$AI \times AI' = AB' \times AC' = m^2,$$

car les points B et C sont aussi sur cette circonférence. Si maintenant E, E′ sont les positions de I et I′ qui correspondent au triangle isocèle FAG, on a de même

$$AE \times AE' = m^2$$

d'où $$AI \times AI' = AE \times AE'.$$

Ainsi les points E, E′, I, I′ sont sur une même circonférence; je dis que cette circonférence est invariable et a pour diamètre EE′. En effet, la polaire du point A par rapport à cette circonférence passe par le point P de XY puisque les points E, E′ sont conjugués harmoniques des points A et P. De même, le faisceau B′(ADII′) étant harmonique, B′D est la polaire de A par rapport à l'angle IB′I′, et D appartient à la polaire de A par rapport à la circonférence EII′E′. Cette polaire est donc la droite XY, et par suite le centre de la circonférence considérée est sur la perpendiculaire AP à cette droite. Son diamètre est donc EE′ et les points I, I′ se déplacent sur cette circonférence invariable qui est le lieu demandé. On voit en passant que AF et AG sont tangentes à cette circonférence aux points F et G, ce qui confirme que le centre est à l'extrémité V du diamètre AO.

3°. Remarquons maintenant, à l'égard des cercles ex-inscrits dans les angles B et C, que si l'on fait tourner le triangle ABC autour de AH de 180°, il viendra s'appliquer sur le triangle AB′C′. Dans ce mouvement la bissectrice extérieure de l'angle A se recouvre elle même, en sorte que si I_2 et I_3 sont les centres des cercles ex-inscrits situés sur cette bissectrice, leurs positions I″ et I‴ après la rotation seront précisément les centres des cercles ex-inscrits au triangle AB′C′.

Or $$AI_2 = AI'' \text{ et } AI_3 = AI''';$$

donc le lieu des points I_2 et I_3 est homothétique inverse du lieu des points I″ et I‴ par rapport au centre d'homothétie A, le rapport

https://doi.org/10.1017/S0013091500030753 Published online by Cambridge University Press

d'homothétie étant l'unité. Nous sommes donc encore ramenés à considérer les triangles tels que $AB'C'$.

Cela posé, prolongeons $C'A$ d'une longueur $AB_1' = AB'$, et joignons $I'''B_1'$. On a

$$\angle B_1'I'''I'' = \angle AI'''B' = 180° - \left[\frac{180° - A}{2} + \frac{180° - B'}{2}\right] = \frac{A + B'}{2}.$$

Or $\qquad \angle B_1'C'I'' = (A + B')/2$; donc $\angle B_1'I'''I'' = \angle B_1'C'I''$.

On en déduit $\qquad AI'' \times AI''' = AC' \times AB_1' = m^2.$

Si donc M et M' sont les positions de I'' et I''' qui correspondent au triangle isocèle FAG, on a

$$\overline{AM}^2 = m^2, \text{ ou } AM = AG.$$

Donc I'' et I''' se trouvent sur une circonférence dont le diamètre est la perpendiculaire sur le milieu A de MM'. Je dis que cette circonférence est invariable.

En effet, si L désigne le point d'intersection de I''I''' avec XY, le faisceau $B'(LAI''I''')$ est harmonique. Donc le point L est sur la polaire du point A par rapport à la circonférence en question. Cette polaire devant être perpendiculaire au diamètre qui passe en A est donc XY, et inversement AM est la polaire du point P.

Donc PM est tangente en M à la circonférence considérée, dont le centre est par suite en un point fixe V' défini par la relation

$$\overline{MA}^2 = AP \times AV'.$$

Mais on a déjà $\qquad \overline{MA}^2 = AP \times AV$;

donc $\qquad AV' = AV.$

Ainsi les points I'' et I''' se meuvent sur la circonférence de cercle V' ainsi déterminée.

On voit en passant que A et P sont les points limites de Poncelet relatifs aux cercles qui ont avec V et V' le même axe radical MM'. On déduit de la remarque faite précédemment, que les points I_2 et I_3 se déplacent sur la circonférence VMM' concentrique à la première circonférence lieu des points I et I'. Il y a lieu d'observer que tous les points de ces circonférences ne font pas partie du lieu géométrique, mais seulement certaines portions qu'un examen un peu attentif de la figure permettra de séparer facilement.